

DYNAMIQUE DES POINTS VORTEX DANS UNE ÉQUATION DE GINZBURG-LANDAU COMPLEXE

EVELYNE MIOT

RÉSUMÉ. On considère une équation de Ginzburg-Landau complexe dans le plan. On étudie une asymptotique à petit paramètre où les solutions comportent des singularités ponctuelles, appelées points vortex, et on détermine un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre décrivant la dynamique de ces points jusqu'au premier temps de collision.

1. INTRODUCTION

Le but de ce texte est de présenter les résultats de [14] à propos d'une équation de Ginzburg-Landau complexe posée dans le plan

$$(\kappa + i)\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2), \quad (C)$$

où la solution $u_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, et où $0 < \kappa \leq 1$, $0 < \varepsilon < 1$ sont des paramètres.

L'équation (C) a une forme bien spécifique, elle se présente comme un cas intermédiaire entre l'équation de Ginzburg-Landau parabolique

$$\kappa \partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) \quad (P)$$

pour les supraconducteurs, et son homologue hamiltonien, l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2), \quad (GP)$$

utilisée quant à elle en théorie de la superfluidité. Dans ces contextes, u représente une fonction d'onde et $|u|^2$ est interprété comme une densité d'électrons supraconducteurs ou de superfluide selon le cas.

Notre objectif est d'étudier un régime particulier pour (C) dans l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans ce régime, on aura $|u_\varepsilon| \rightarrow 1$ presque partout à cause du facteur de pénalisation ε^{-2} dans le potentiel; mais les solutions peuvent aussi comporter des défauts topologiques, c'est-à-dire des zéros correspondant à des singularités du gradient de la phase. Ces singularités portent le nom de *points vortex* (ou tourbillons).

De manière plus précise, les vortex peuvent se définir comme des solutions particulières stationnaires de (C). Ces solutions s'écrivent, pour tout $d \in \mathbb{Z}$, sous la forme

$$u_\varepsilon^*(z) = f_d \left(\frac{|z|}{\varepsilon} \right) \left(\frac{z}{|z|} \right)^d, \quad z \in \mathbb{C},$$

où le profil croissant $f_d : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ satisfait à une certaine équation différentielle munie des conditions aux limites $f_d(0) = 0$ et $f_d(+\infty) = 1$. Le champ u_ε^* possède donc exactement un zéro (placé à l'origine), et $|u_\varepsilon^*| \simeq 1$ en dehors d'un voisinage de taille ε de l'origine dans lequel $0 \leq |u_\varepsilon| < 1$. Le paramètre ε a la dimension d'une

longueur, qui correspond à la taille caractéristique des vortex. L'entier d , appelé degré du vortex, est proportionnel à la circulation du gradient de la phase le long de tout cercle entourant l'origine.

Avec cette idée plus précise de la notion de vortex, intéressons-nous aux superpositions d'un nombre fini de vortex

$$u_\varepsilon^*(z_i, d_i)(z) = \prod_{i=1}^{\ell} f_{d_i} \left(\frac{|z - z_i|}{\varepsilon} \right) \left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|} \right)^{d_i}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad d_i \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Alors qu'elles sont continues à $\varepsilon > 0$, elles convergent (localement uniformément en dehors des z_i) vers

$$u^*(z_i, d_i)(z) = \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|} \right)^{d_i}.$$

Dans l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$, la description des vortex peut donc entièrement se réduire à celle de points.

Les superpositions (1), ou de petites perturbations de celles-ci, constituent l'exemple standard des données initiales que nous souhaitons considérer, et nous voudrions déterminer dans quelle mesure des points vortex $z_i(t)$ subsistent dans la solution de (C) à $t > 0$, ainsi qu'établir leur position. Cependant, le flot de (C) ne laissant pas invariante la classe des superpositions de vortex, il faudra trouver une notion appropriée pour décrire, au moins de manière asymptotique, la présence de points vortex dans la solution $u_\varepsilon(t)$. Il s'agit de la notion de *très bonne préparation*, définie ci-après, qui caractérise, de manière assez faible, la proximité de $u_\varepsilon(t)$ à $u_\varepsilon^*(z_i(t), d_i)$ lorsque ε est petit.

Tant pour l'équation hamiltonienne (GP) que pour l'équation parabolique (P), l'étude de la dynamique des points vortex a donné lieu à une vaste littérature. Pour ce qui concerne le flot hamiltonien, les premiers résultats rigoureux remontent à Colliander & Jerrard [6] et Lin & Xin [12] pour le cas des domaines périodiques ou bornés. Le cas du plan \mathbb{R}^2 en entier a été traité par Béthuel, Jerrard & Smets [3]. Dans ces articles les vortex sont supposés unitaires, i.e. $d_i = \pm 1$. L'équation de Ginzburg-Landau parabolique a été étudiée notamment par Serfaty [16] et par Béthuel, Orlandi & Smets [4, 5]; dans ce dernier cas les degrés d_i peuvent être entiers quelconques, et l'analyse permet de prendre en compte d'éventuels éclatements ou collisions de points. Plus récemment, l'équation de Ginzburg-Landau complexe a été examinée indépendamment par Kurzke, Melcher, Moser & Spirn [10] pour les domaines bornés et par [14] pour le plan. Notre étude dans [14] se place dans le même cadre que celle de [3]. Enfin, un travail récent de Serfaty & Tice [17] traite du régime des points vortex pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe dans un contexte plus général (avec, en particulier, courant électrique et champ magnétique appliqués).

2. QUELQUES PRÉLIMINAIRES

Avant d'énoncer de façon précise le résultat de convergence de [14], commençons par définir deux notions essentielles dans notre contexte : celles de vorticité et d'énergie de Ginzburg-Landau.

Notations. Dans la suite, on identifiera systématiquement \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} , de sorte que $u^\perp = iu$. Par ailleurs, $u \cdot v$ désignera le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 , $(v, \nabla u) = (v \cdot \partial_1 u, v \cdot \partial_2 u)$, $\nabla u \otimes \nabla u = (\partial_j u \cdot \partial_k u)_{1 \leq j, k \leq 2}$, et finalement $DX = (\partial_j X_k)_{1 \leq j, k \leq 2}$ pour

$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pour $R > 0$, $W_0^{1,\infty}(B(R))$ sera l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $B(R)$ s'annulant sur $\partial B(R)$. Enfin, on notera parfois u_ε^* ou $u_\varepsilon^*(z_i)$ au lieu de $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

2.1. La vorticité. Pour un champ $u \in W_{\text{loc}}^{1,1} \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, nous pouvons définir la notion de supercourant

$$j(u) = (iu, \nabla u),$$

et celle de vorticité

$$J(u) = \frac{1}{2} \text{rot} (j(u)).$$

Le terme de vorticité s'explique par une analogie bien connue entre les superfluides et les fluides classiques, dans laquelle le supercourant $j(u)$ joue le rôle de la vitesse du fluide. Nous y reviendrons.

Pourvu que l'on puisse écrire $u = \rho \exp(i\varphi)$, on a $j(u) = \rho^2 \nabla \varphi$. Par conséquent, lorsque $|u| \simeq 1$, $j(u)$ se comporte presque comme un gradient et la vorticité est presque nulle. Pour les exemples fondamentaux de superpositions de vortex centrées en des z_i , la vorticité se concentre en ces points :

$$J(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) \rightarrow \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \delta_{z_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \quad (2)$$

Il s'agit donc d'une quantité bien apte à déceler la présence des vortex.

2.2. L'énergie de Ginzburg-Landau. L'énergie de Ginzburg-Landau est définie par

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1 - |u|^2)^2}{4\varepsilon^2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(u) dx.$$

Elle est intrinsèquement liée aux équations (C), (P) et (GP), puisque l'équation (P) en est le flot gradient, et l'équation (GP) le flot hamiltonien. Pour les deux équations dissipatives (P) et (C), la solution vérifie

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) = -\kappa \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u_\varepsilon|^2 \leq 0. \quad (3)$$

L'énergie des superpositions $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ est finie dès que leur degré total est nul¹, et on a [1, 3]

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) = \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i^2 |\ln \varepsilon| + W(z_i, d_i) + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma(|d_i|) + o_\varepsilon(1), \quad (4)$$

où $\gamma(|d_i|)$ est une constante, et où $W(z_i, d_i)$ est l'énergie d'interaction entre les points vortex

$$W(z_i, d_i) = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \ln |z_i - z_j|.$$

Dans l'expansion (4), la partie divergente lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ correspond à la contribution de chacune des énergies propres des vortex. En fait, $\pi |d_i| |\ln \varepsilon|$ représente, au premier ordre en ε , le c ut minimal en énergie d'une singularité de degré d_i . De plus, lorsque

¹Voir ci-après pour le cas $\sum d_i \neq 0$.

$|d_i| = 1$ pour tout i , l'énergie (4) des superpositions $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ est asymptotiquement minimale pour la configuration (z_i, d_i) , en ce sens que si

$$J(u_\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \delta_{z_i} \quad \text{dans} \quad W_0^{1,\infty}(B(R_a))', \quad R_a \equiv \max |z_i|,$$

et si $E_\varepsilon(u_\varepsilon, B(R_a)^c) \leq C$ (par exemple) alors

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(u_\varepsilon) - E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i))) \geq 0.$$

Nous venons ainsi de voir qu'une borne naturelle pour l'énergie de champs u_ε proches des superpositions u_ε^* est

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C |\ln \varepsilon|. \quad (5)$$

Il est donc légitime de se demander dans quelle mesure une contrainte de type (5) sur l'énergie renseigne sur la présence de vortex. À cause de la pénalisation dans le potentiel de l'énergie, (5) impose que $|u_\varepsilon| \rightarrow 1$ presque partout, ce qui indique que l'ensemble de concentration possible de la vorticité doit être petit. En fait, un résultat de Jerrard & Sonner [7] affirme que, le long d'une sous-suite, la vorticité de u_ε doit vérifier la convergence (2) pour des points vortex z_i affectés de degrés d_i entiers.

Revenons à présent à l'équation d'évolution (C). Du fait de la corrélation entre le comportement de l'énergie de Ginzburg-Landau et le régime des points vortex, il est naturel de se focaliser sur des solutions d'énergie finie, ce qui nous mène à la brève digression qui suit.

2.3.    propos du problème de Cauchy dans un espace d'énergie.    $\varepsilon > 0$ fixé, l'espace \mathcal{E} des fonctions d'énergie finie est constitué de champs ayant un module proche de un à l'infini, ce n'est donc pas un espace vectoriel. En munissant \mathcal{E} d'une structure d'espace métrique complet, Gérard [11] a établi le caractère globalement bien posé du problème de Cauchy pour l'équation de Gross-Pitaevskii dans \mathcal{E} . Ce résultat se transpose sans difficulté à l'équation complexe (C); en outre, les solutions sont régulières à $t > 0$.

Considérons maintenant nos données idéales $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$. Comme on l'a déjà mentionné, leur énergie est infinie lorsque le degré total $d = \sum d_i \neq 0$. La divergence est due au comportement du gradient de la phase à l'infini. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla |u_\varepsilon^*(z_i, d_i)||^2 + \frac{(1 - |u_\varepsilon^*(z_i, d_i)|^2)^2}{2\varepsilon^2} < +\infty,$$

alors que

$$|\nabla u_\varepsilon^*(z_i, d_i)|^2(z) \sim_{z \rightarrow \infty} \frac{d^2}{|z|^2}.$$

Afin de pouvoir considérer des configurations de degré total arbitraire, nous envisagerons une notion apparent  e d'énergie, appelée énergie renormalisée, qui a été introduite par Béthuel & Smets [2] pour l'équation de Gross-Pitaevskii. L'énergie renormalisée est obtenue en étant la partie divergente du gradient de la phase à l'infini de la façon suivante. Soit une fonction régulière U_d telle que

$$U_d(z) = \left(\frac{z}{|z|} \right)^d \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1).$$

On vérifie alors que, pour toute $u = u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$, la quantité

$$\tilde{E}_\varepsilon(u) \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(R)} \left(e_\varepsilon(u) - \frac{|\nabla U_d|^2}{2} \right)$$

est finie. On peut en fait étendre la définition de \tilde{E}_ε à une classe plus vaste de fonctions, telle que, par exemple, $\{U_d\} + H^1(\mathbb{R}^2)$. Pourtant, une telle classe n'est pas parfaitement appropriée, dans la mesure où elle ne contient les superpositions $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ de degré total d qu'à moins que $\sum d_i z_i = 0$ [3]. Afin de considérer une classe de fonctions les contenant toutes, il est utile d'introduire l'ensemble

$$\mathcal{V} = \left\{ U \in L^\infty, \nabla^k U \in L^2, \forall k \geq 2, 1 - |U|^2 \in L^2, \nabla|U| \in L^2, |\nabla U(z)| \leq \frac{C}{1+|z|} \right\},$$

qui contient U_d ainsi que toutes les superpositions $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$. On considère ensuite la relation d'équivalence sur \mathcal{V} définie de la façon suivante : $U \sim U'$ si et seulement si U et U' ont même degré à l'infini et

$$|\nabla U|^2 - |\nabla U'|^2 \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

On s'assure alors que $u_\varepsilon^*(z_i, d_i) \in [U_d]$ dès que $\sum d_i = d$. Ceci suggère de résoudre le problème de Cauchy dans l'espace $[U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$ muni de l'énergie \tilde{E}_ε , ce qui fait l'objet de notre premier résultat.

Théorème 1. *Pour tout $U \in [U_d]$, le problème de Cauchy pour (C) est globalement bien posé dans $\{U\} + H^1(\mathbb{R}^2)$. L'énergie renormalisée de la solution $u_\varepsilon \in \{U\} + C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2))$ est finie, et de plus*

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) = -\kappa \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u_\varepsilon|^2.$$

Notons bien que l'on retrouve, pour la solution $u_\varepsilon(t)$ fournie par le théorème précédent, la même dissipation pour l'énergie renormalisée que pour l'énergie usuelle $E_\varepsilon(u_\varepsilon(t))$ dans le cas borné (voir (3)).

3. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Dorénavant, on se focalisera sur des vortex unitaires :

$$d_i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Suivant [3], définissons les données très bien préparées de la façon suivante

Définition 1. *Soient z_1, \dots, z_ℓ des points de degrés $d_i = \pm 1$ pour $i = 1, \dots, \ell$ et $d = \sum d_i$. Soit $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < 1}$ appartenant à $[U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$.*

On dit que $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est très bien préparée par rapport à la configuration (z_i, d_i) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^$, $R = 2^{n_0} > R_a = \max |z_i|$ et une constante $K_0 > 0$ tels que²*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| Ju_\varepsilon - \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \delta_{z_i} \right\| = 0, \quad (P_1)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*] \equiv \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) \right] \leq 0, \quad (P_2)$$

et

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} E_\varepsilon(u_\varepsilon, B(2^{n_0+1}) \setminus B(2^{n_0})) \leq K_0 \quad \forall n \geq n_0. \quad (P_3)$$

²Ici, $E_\varepsilon(u, B) \equiv \int_B e_\varepsilon(u)$ et $\|\cdot\|$ désigne $\|\cdot\|_{W_0^{1,\infty}(B(R))}$.

Commentons un peu cette définition. Les conditions (P_1) et (P_3) signifient que u_ε a des vortex, localisés dans $B(R)$. En particulier, (P_3) entraîne que pour ε assez petit, on a pour tout $R' > R$

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, B(R')) - E_\varepsilon(u_\varepsilon^*, B(R')) \leq \Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*] + \frac{C}{R'} \quad (6)$$

(voir [3]). L'estimation (6), qui renseigne sur le comportement de l'énergie de Ginzburg-Landau de u_ε sur les ensembles $B(R')$, $R' > R$, permettra de se ramener de façon systématique au cas des domaines bornés (notamment en vue d'appliquer les résultats de compacité quantitative et de coercivité de l'énergie rassemblés à la Proposition 2 ci-après). On ne s'étendra pas davantage sur ce point.

Nous avons déjà vu par ailleurs que (P_2) combinée avec (6) implique automatiquement, après passage à une sous-suite, l'existence de points vortex pour u_ε dans $B(R)$; à cet égard, l'hypothèse (P_1) est plus précise puisqu'elle indique que les vortex sont unitaires. De plus, (P_2) signifie que u_ε est asymptotiquement quasi-minimisante : toute l'énergie de u_ε provient de ses vortex, ce qui exclut la possibilité d'une phase importante en excès (voir la Section 5). Enfin, mentionnons dès maintenant que la très bonne préparation implique la convergence des densités d'énergie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} - \pi \sum_{i=1}^{\ell} \delta_{z_i} \right\| = 0. \quad (P_4)$$

La nécessité de diviser la densité d'énergie par $|\ln \varepsilon|$ pour obtenir la convergence est bien en accord avec (4).

On suppose désormais que le coefficient de dissipation dépend de ε de la façon suivante

$$\kappa = \kappa_\varepsilon = \frac{\delta}{|\ln \varepsilon|}, \quad \text{où } \delta > 0.$$

Nous avons alors le

Théorème 2. *Soit $\{u_\varepsilon^0\}_{0 < \varepsilon < 1}$ appartenant à $[U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$ une famille très bien préparée par rapport à (z_i^0, d_i) , et soit $\{u_\varepsilon(t)\}_{0 < \varepsilon < 1}$ la famille de solutions de (C) correspondante.*

Soit $\{z_i(t)\}_{i=1, \dots, \ell}$ la solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \pi(1 + \delta^2)d_i \dot{z}_i(t) = \nabla_{z_i}^\perp W - \delta d_i \nabla_{z_i} W, \\ z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, \dots, \ell, \end{cases} \quad (S)$$

où

$$W(z_i, d_i) = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \ln |z_i - z_j|.$$

Notons $[0, T^)$ son intervalle maximal d'existence. Alors pour tout $t \in [0, T^*)$, la famille $\{u_\varepsilon(t)\}_{0 < \varepsilon < 1}$ est très bien préparée par rapport à $(z_i(t), d_i)$.*

Remarque 1. Le théorème serait encore valable pourvu que $\kappa \sim \delta/|\ln \varepsilon|$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Un tel choix se justifie par le désir de faire apparaître simultanément, dans le système (S) limite, une combinaison des deux systèmes limites obtenus pour les équations purement dissipative et hamiltonienne. Pour (P), il s'agit du flot gradient pour W

$$\pi \dot{z}_i(t) = -\delta^{-1} \nabla_{z_i} W, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (7)$$

et pour (GP) , du flot hamiltonien pour W

$$\pi d_i \dot{z}_i(t) = \nabla_{z_i}^\perp W, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (8)$$

Pour le choix de $\kappa \ll 1/|\ln \varepsilon|$, le système limite obtenu se réduirait à (8). En revanche, pour le choix de $\kappa \gg 1/|\ln \varepsilon|$, le système obtenu (dans une échelle de temps accélérée) serait (7).

Remarque 2. Le système (8) apparaît également, dans le contexte de la dynamique des fluides parfaits incompressibles, comme système limite pour décrire la situation où la vorticité (ou tourbillon) est très fortement concentrée en les points z_i . Cette asymptotique commune résulte du comportement très semblable des deux notions de vorticité dans le régime des points vortex. Ainsi, lorsque u est solution de (GP) , nous avons

$$\partial_t J(u) - \text{rot div}(\nabla u \otimes \nabla u) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2} \text{rot}(j(u)).$$

Or, lorsque u est une configuration de vortex, nous verrons plus loin que $\nabla u \otimes \nabla u$ se comporte comme $j(u) \otimes j(u)$ en dehors des vortex. D'un autre côté, l'équation d'Euler incompressible pour un fluide de vitesse v , de tourbillon ω , s'écrit

$$\partial_t \omega + \text{rot div}(v \otimes v) = 0, \quad \omega = \text{rot}(v).$$

Remarque 3. Il existe, dans chacun des systèmes d'équations différentielles ordinaires précédents, des exemples explicites de collision en temps fini entre les points $z_i(t)$. Pour (7) avec $\ell = 2$, deux points de degrés respectifs $+1$ et -1 se rencontrent automatiquement au bout d'un temps proportionnel à $|z_1(0) - z_2(0)|^2$. Pour (8) avec $\ell = 2$, la distance $|z_1(t) - z_2(t)|$ est constante; en revanche, un exemple de collision en temps fini lorsque $\ell = 3$ est détaillé dans le livre de Marchioro & Pulvirenti [13]. Finalement, pour (S) , (7) et (8), la décroissance (ou conservation) de $W(z_i(t), d_i)$ assure qu'aucune collision ne peut se produire lorsque tous les degrés d_i sont de même signe.

4. QUELQUES DÉTAILS DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Présentons maintenant, en trois temps, une ébauche de la démonstration du Théorème 2. La première étape consiste à établir une formule d'évolution portant sur la vorticité et la densité d'énergie. Cette dernière conduit³, de manière formelle, au système d'équations différentielles (S) . Dans un deuxième temps, on détermine l'existence de trajectoires limites de vortex, lipschitziennes : $\zeta_i(t), i = 1, \dots, \ell$. En dernier lieu, on démontre que $\{\zeta_i(t)\}$ forme effectivement une solution du système (S) .

4.1. Une formule d'évolution pour la vorticité et la densité d'énergie. Consid rions une application régulière $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ quelconque, et posons

$$f_\varepsilon(u) = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2).$$

Par des calculs directs, nous obtenons les deux identités suivantes :

$$\partial_t e_\varepsilon(u) = -\partial_t u \cdot f_\varepsilon(u) + \text{div}(\partial_t u, \nabla u),$$

et

$$\partial_t J(u) = \text{rot}(i\partial_t u, \nabla u).$$

³La méthode utilisée par Serfaty & Tice [17] diffère de celle proposée ici.

D'autre part, nous avons *l'identité de Pohozaev*

$$(f_\varepsilon(u), \nabla u) = \operatorname{div}(\nabla u \otimes \nabla u) - \nabla e_\varepsilon(u).$$

Comme on le verra dans peu de temps, le produit $\operatorname{div}(\nabla u \otimes \nabla u)$ a une limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, en un certain sens, pour les superpositions $u = u_\varepsilon^*$.

Supposons désormais que $u = u_\varepsilon$ soit la solution d'une des équations d'évolution (C), (P) et (GP), de sorte que

$$\partial_t u_\varepsilon = \alpha f_\varepsilon(u_\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Grâce à l'identité de Pohozaev, on peut tirer profit de la formule d'évolution pour l'énergie dans le cas purement parabolique, pour lequel $\alpha = \kappa^{-1}$ est réel, mais elle se prête peu à l'équation de Gross-Pitaevskii. Inversement, la formule d'évolution pour la vorticité est bien adaptée à l'équation de Gross-Pitaevskii (pour laquelle $i\alpha = 1$), mais ne l'est pas à l'équation parabolique. Pour l'équation complexe, tout l'enjeu consiste à éliminer les termes croisés de la forme $(if_\varepsilon(u_\varepsilon), \nabla u_\varepsilon)$; à cette fin, on considère une combinaison adéquate des deux formules d'évolution précédentes, et l'on est conduit à la

Proposition 1. *Soit u_ε la solution de (C). Pour toutes $\varphi, \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (J(u_\varepsilon)\chi + \kappa e_\varepsilon(u_\varepsilon)\varphi) = \mathcal{I}_\varepsilon + \mathcal{D}_\varepsilon + \mathcal{R}_\varepsilon,$$

où

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon : D\nabla^\perp \chi$$

est le terme d'interaction,

$$\mathcal{D}_\varepsilon = -\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u_\varepsilon|^2 \varphi$$

le terme de dissipation, et

$$\mathcal{R}_\varepsilon = -\kappa \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \varphi - \nabla^\perp \chi) \cdot (\partial_t u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$$

le terme de reste.

Voyons à présent comment obtenir *formellement* le système (S)⁴. Supposons que les convergences (P₁) et (P₄) aient effectivement lieu. Puisque $\kappa = \delta/|\ln \varepsilon|$, le terme du membre de gauche de la formule d'évolution devient, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la vitesse des points z_i :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (J(u_\varepsilon)\chi + \kappa e_\varepsilon(u_\varepsilon)\varphi) \rightarrow \frac{d}{dt} \pi \sum_{i=1}^{\ell} (d_i \chi(z_i) + \delta \varphi(z_i)).$$

En utilisant la décroissance de κ , ainsi que l'estimation (3) procurant une estimation sur $\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L_{t,x}^2}$ en fonction de l'accroissement de l'énergie, on peut montrer par ailleurs que

$$|\mathcal{D}_\varepsilon| = o_\varepsilon(1).$$

Choisissons ensuite des paires de fonctions test φ et χ de manière bien particulière en imposant les deux conditions (compatibles!) suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \varphi = \nabla^\perp \chi & \text{au voisinage des } z_i, \\ \chi \text{ affine} & \text{au voisinage des } z_i. \end{cases} \quad (H)$$

⁴Les convergences de ce paragraphe ont lieu après intégration en temps.

La première condition impose que l'intégrande de \mathcal{R}_ε est évaluée en dehors des vortex. Or, on y dispose d'estimations adéquates pour ∇u_ε , ainsi que l'établira la Proposition 2 ci-après. Par conséquent,

$$|\mathcal{R}_\varepsilon| = o_\varepsilon(1).$$

Le calcul de la limite du terme d'interaction est plus délicat : à ce stade formel de la démonstration, supposons pour simplifier que

$$u_\varepsilon \simeq u_\varepsilon^*(z_i),$$

de sorte que

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon : D\nabla^\perp \chi \simeq \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\varepsilon^*(z_i) \otimes \nabla u_\varepsilon^*(z_i) : D^\perp \nabla \chi. \quad (9)$$

Puisque la seconde condition sur les fonctions test impose que $D\nabla^\perp \chi$ s'annule dans un voisinage de chacun des points z_i , on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\varepsilon^*(z_i) \otimes \nabla u_\varepsilon^*(z_i) : D\nabla^\perp \chi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u^*(z_i) \otimes \nabla u^*(z_i) : D\nabla^\perp \chi.$$

Or, par un calcul explicite [3],

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u^*(z_i) \otimes \nabla u^*(z_i) : D\nabla^\perp \chi = 2\pi \sum_{j \neq i} d_i d_j \frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|^2} \cdot \nabla^\perp \chi(z_i).$$

En identifiant les différentes limites et en faisant varier les fonctions φ et χ nous sommes directement menés à (S).

Afin de justifier les considérations précédentes, le point central à établir, outre bien sûr l'existence de trajectoires limites de vortex, est l'approximation (9). Ceci sera l'objectif de la troisième étape.

4.2. Convergence vers des trajectoires lipschitziennes de vortex. Cette étape repose sur des propriétés déjà connues de *coercivité* de l'énergie par rapport aux configurations u_ε^* . En résumé, lorsque u_ε est une famille qui n'est pas trop éloignée, en un sens, de u_ε^* , l'excès d'énergie

$$\Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*] = \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon^*)$$

contrôle l'écart de u_ε à u_ε^* pour certaines normes *en dehors des vortex*. Ces résultats permettent en outre de localiser la vorticité de u_ε en fonction de l'excès d'énergie. On considère ici la configuration de vortex $u_\varepsilon^* = u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)$, et on pose

$$r_a = \frac{1}{8} \min_{i \neq j} \{|z_i^0 - z_j^0|\}, \quad R_a = \max_{i=1, \dots, \ell} \{|z_i^0|\}.$$

Proposition 2 ([6, 8, 9, 3]). *Soient $R = 2^{n_0} > R_a + r_a$. Il existe $\eta_0 > 0$ vérifiant la propriété suivante : soit $\{u_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < 1}$ appartenant à $[U_a] + H^1(\mathbb{R}^2)$ telle que⁵*

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \left\| Ju_\varepsilon - \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \delta_{z_i^0} \right\| \leq \eta_0$$

et

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} E_\varepsilon(u_\varepsilon, B(2^{n+1}) \setminus B(2^n)) \leq K_0, \quad \forall n \geq n_0.$$

⁵Ici à nouveau $\|\cdot\|$ désigne $\|\cdot\|_{W_0^{1,\infty}(B(R))^*}$.

Alors pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ assez petit, il existe des points $\zeta_i^\varepsilon \in B(z_i, r_a/2)$ pour lesquels

$$\eta_\varepsilon \equiv \left\| Ju_\varepsilon - \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \delta_{\zeta_i^\varepsilon} \right\| \leq C_1 (\Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*(z_i^0)]) \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

et

$$\left\| \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} - \pi \sum_{i=1}^{\ell} \delta_{\zeta_i^\varepsilon} \right\| \leq \frac{C_2 (\Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*(z_i^0)])}{|\ln \varepsilon|},$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions continues.

Enfin, on a

$$\int_{B(R) \setminus \cup_i B(z_i^0, r_a)} e_\varepsilon(|u_\varepsilon|) + \left| \frac{j(u_\varepsilon)}{|u_\varepsilon|} - j(u_\varepsilon^*(\zeta_i^\varepsilon)) \right|^2 \leq C \Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*(\zeta_i^\varepsilon)] + C_3(\eta_\varepsilon, \varepsilon, \frac{1}{R}),$$

où C_3 est une fonction continue et nulle à l'origine.

La Proposition 2 s'applique à $u_\varepsilon(t)$, pour $t > 0$ assez petit. Il s'ensuit alors de la Proposition 1 l'existence de $T > 0$, de trajectoires lipschitziennes $\zeta_i(t)$ ainsi qu'une sous-suite, renotée ε par commodité, telle que $J(u_\varepsilon(t)) \rightarrow \pi \sum_i d_i \delta_{\zeta_i(t)}$ uniformément sur $[0, T]$.

4.3. Dynamique pour les points vortex. Pour parvenir à la conclusion du Théorème 2 sur $[0, T]$, nous allons démontrer que s'annule identiquement sur $[0, T]$ une fonction distance entre $\{\zeta_i(t)\}$ et $\{z_i(t)\}$, à savoir

$$\sigma(t) \equiv \sum_{i=1}^{\ell} \int_0^t |\dot{z}_i(s) - \dot{\zeta}_i(s)| ds \geq \sum_{i=1}^{\ell} |z_i(t) - \zeta_i(t)|.$$

Il suffira, ensuite, de répéter le même raisonnement pour étendre ce résultat jusqu'à T^* . Revenons à la Proposition 1, et choisissons à nouveau des paires (φ, χ) satisfaisant aux conditions (H) dans un voisinage $\Omega \equiv \cup_i B(z_i^0, r_a)$ des z_i^0 . En nous souvenant que $u_\varepsilon^*(z_i)$ est aussi une solution asymptotique de la formule d'évolution par choix de (S), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} J(u_\varepsilon) \chi - \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \chi(z_i) \right) + \delta \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} \varphi - \pi \sum_{i=1}^{\ell} \varphi(z_i) \right) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^*(z_i) \otimes \nabla u_\varepsilon^*(z_i) \right) : D \nabla^\perp \chi + o_\varepsilon(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^*(\zeta_i) \otimes \nabla u_\varepsilon^*(\zeta_i) \right) : D^\perp \nabla \chi + O(\sigma) + o_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

En faisant varier (φ, χ) convenablement, on obtiendra donc une inégalité de Gronwall pour $\sigma(t)$ dès que sera acquis le résultat suivant.

Proposition 3. Pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^*(\zeta_i) \otimes \nabla u_\varepsilon^*(\zeta_i) \right) : D \nabla^\perp \chi dt \leq C \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t) dt.$$

Pour établir la Proposition 3, le point de départ consiste à formuler et ordonner les différences de termes quadratiques présents dans le membre de gauche, en remarquant que

$$\partial_k u \cdot \partial_l u = \partial_k |u| \partial_l |u| + \frac{j_k(u) j_l(u)}{|u|^2}, \quad k, l = 1, 2.$$

Puis, on établit un résultat intermédiaire de convergence faible de $j(u_\varepsilon)/|u_\varepsilon| - j(u_\varepsilon^*(\zeta_i))$ vers 0 dans $L^2_{\text{loc}}([0, T] \times \Omega^c)$. Ce faisant, on obtient l'estimation asymptotique

Proposition 4. *Pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$,*

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^*(\zeta_i) \otimes \nabla u_\varepsilon^*(\zeta_i) \right) : D\nabla^\perp \chi \, dt \\ \leq C(\chi) \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega^c} e_\varepsilon(|u_\varepsilon|) + \left| \frac{j(u_\varepsilon)}{|u_\varepsilon|} - j(u_\varepsilon^*(\zeta_i)) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

En vertu de la seconde partie de la Proposition 2, il ne reste finalement plus qu'à obtenir une borne supérieure pour l'excès d'énergie. C'est dans cette dernière étape que l'hypothèse (P_2) joue un rôle crucial.

Proposition 5. *Pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$,*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma_\varepsilon [u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*(\zeta_i)] \, dt \leq C \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t) \, dt.$$

Concluons ce paragraphe par la démonstration de la Proposition 5. Posons $\Sigma_\varepsilon(t) = \Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon(t) \setminus u_\varepsilon^*(\zeta_i(t))]$. Il résulte de (3) et (4) que

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon(t) &= -\delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln \varepsilon|} + \Sigma_\varepsilon(0) + W(z_i^0, d_i) - W(\zeta_i(t), d_i) + o_\varepsilon(1) \\ &= -\delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln \varepsilon|} + \Sigma_\varepsilon(0) - \int_0^t \sum_{i=1}^\ell \dot{z}_i \cdot \nabla_{z_i} W(z_i) \, ds + O(\sigma(t)) + o_\varepsilon(1) \\ &= -\delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln \varepsilon|} + \delta\pi \int_0^t \sum_{i=1}^\ell |\dot{z}_i|^2 + O(\sigma(t)) + o_\varepsilon(1), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (S) et l'hypothèse (P_2) à la dernière ligne.

Finalement, nous pouvons estimer le terme de dissipation grâce à un résultat de Serfaty [15]

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln \varepsilon|} \geq \pi \sum_{i=1}^\ell \int_0^t |\dot{\zeta}_i|^2.$$

La conclusion découle alors du lemme de Fatou.

5. UNE PERSPECTIVE

Dans la continuité de l'étude du régime des points vortex pour (C) , il serait intéressant de considérer des données seulement bien préparées, pour lesquelles l'hypothèse (P_2) est remplacée par

$$\Sigma_\varepsilon[u_\varepsilon \setminus u_\varepsilon^*] = \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \tilde{E}_\varepsilon(u_\varepsilon^*) = \mathcal{O}_\varepsilon(1). \quad (P'_2)$$

Un exemple très simple de telles données est formé par la superposition d'une phase et d'une configuration de vortex

$$u_\varepsilon(z) = u_\varepsilon^*(z_i, d_i) \exp(i\varphi(z)),$$

où φ ne dépend pas de ε : on a alors

$$\Sigma_\varepsilon \lesssim \|\nabla\varphi\|_{L^2}^2,$$

et

$$J(u_\varepsilon) \simeq \pi \sum_{i=1}^{\ell} d_i \delta_{z_i} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} (|u_\varepsilon^*|^2 \nabla \varphi).$$

Le terme supplémentaire causé par l'excès de phase pourrait interagir avec les points vortex, même si on l'imagine évanescer avec ε .

Pour l'équation de Ginzburg-Landau parabolique, les résultats de [16, 4] assurent que l'excès d'énergie s'est totalement dissipé après un temps $T_\varepsilon = o_\varepsilon(1)$, le mouvement des points vortex n'est donc pas affecté⁶. D'un point de vue formel, ceci s'explique par le fait que l'excès de phase φ_ε vérifie, hors des vortex, une équation de type chaleur

$$\kappa \partial_t \varphi_\varepsilon - \Delta \varphi_\varepsilon \simeq 0,$$

ce qui provoque la rapide dissipation de $\nabla \varphi_\varepsilon$.

Pour l'équation de Gross-Pitaevskii et de Ginzburg-Landau complexe, la question demeure ouverte. Pour (GP), Lin & Xin [12] caractérisent l'impact de l'excès d'énergie par une mesure de défaut $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, liée au manque de compacité forte de ∇u_ε dans L^2 en dehors des vortex, pour laquelle

$$\pi d_i \dot{z}_i = \nabla_{z_i}^\perp W + \langle \mu : D \nabla^\perp \chi_i \rangle,$$

où $\chi_i(x) = x$ dans un voisinage de z_i . Cependant, on ne connaît guère le comportement de cette mesure de défaut.

RÉFÉRENCES

- [1] F. Béthuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [2] F. Béthuel et D. Smets, *A remark on the Cauchy Problem for the 2D Gross-Pitaevskii equation with non zero degree at infinity*, Differential Integral Equations **20** (2007), 325-338.
- [3] F. Béthuel, R. L. Jerrard et D. Smets, *On the NLS dynamics for infinite energy vortex configurations on the plane*, Rev. Mat. Iberoamericana **24** (2008), 671-702.
- [4] F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets, *Collisions and phase-vortex interactions in dissipative Ginzburg-Landau dynamics*, Duke Math. J. **130** (2005), 523-614.
- [5] F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets, *Dynamics of multiple degree Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 229-261.
- [6] J. E. Colliander et R. L. Jerrard, *Vortex dynamics for the Ginzburg-Landau-Schrödinger equation*, Internat. Math. Res. Notices **7** (1998), 333-358.
- [7] R. L. Jerrard et H. M. Soner, *The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy*, Calc. Var. PDE **14** (2002), 141-191.
- [8] R. L. Jerrard et D. Spirn, *Refined Jacobian estimates for Ginzburg-Landau functionals*, Indiana Univ. Math. Jour. **56** (2007), 135-186.
- [9] R. L. Jerrard et D. Spirn, *Refined Jacobian estimates and the Gross-Pitaevsky equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **190** (2008), 425-475.
- [10] M. Kurzke, C. Melcher, R. Moser et D. Spirn, *Dynamics of Ginzburg-Landau vortices in a mixed flow*, Indiana Univ. Math. Jour. **58** (2009), 2597-2621.
- [11] P. Gérard, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation*, Annales de l'IHP **23** (2006), no. 5, 765-779.
- [12] F. H. Lin et J. X. Xin, *On the incompressible fluid limit and the vortex motion law of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **200** (1999), 249-274.
- [13] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Springer-Verlag (1991).

⁶Sauf dans le cadre de données plus générales autorisant un excès d'énergie divergent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, voir [4].

- [14] E. Miot, *Dynamics of vortices for the complex Ginzburg-Landau equation*, A&PDE **2** (2009), no. 2, 159-186.
- [15] E. Sandier et S. Serfaty, *A product-estimate for Ginzburg-Landau and corollaries*, J. of Funct. An. **211** (2004), 219-244.
- [16] S. Serfaty, *Vortex collisions and energy-dissipation rates in the Ginzburg-Landau heat flow, part II : The dynamics*, Journal Eur. Math Society **9** (2007), no. 3, 383-426.
- [17] S. Serfaty et I. Tice, *Ginzburg-Landau vortex dynamics with pinning and strong applied currents*, preprint.

(E. Miot) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA G. CASTELNUOVO, UNIVERSITÀ DI ROMA LA SAPIENZA, ITALIE

E-mail address: `miot@mat.uniroma1.it`