Géométrie de Kähler

Irene Pasquinelli

Table des matières

1	Formes hermitiennes et définition	1
1.1	Un peu d'algèbre linéaire	1
1.2	Métriques hermitiennes et 2-formes	2
1.3	Variété de Kähler	3
2	Le volume des variété Kählerienne	4
2.1	Forme volume	4
2.2	Inégalités de Wirtinger pour sous variétés	5
3	Caractérisation par la connexion de Levi Civita	6
4	Groupes d'holonomie	8
4.1	Bref rappel	8
4.2	Holonomie des variété Kähleriennes	9
4.3	Cas particulier : $\dim_{\mathbb{C}} = 1$	9
4.4	Cas particulier : $\dim_{\mathbb{C}} = 2$	11

Résumé

Dans ce document, on introduit les variétés de Kähler : on définit une telle variété et on en donne des propriétés importantes.

Dans la première section, on commence avec de l'algèbre linéaire sur les espaces vectoriels, dans le but de définir les formes hermitiennes sur une variété X . Une telle métrique sera en effet une partie de la définition de variété de Kähler. On montre aussi que si on considère une métrique Kählerienne : $h(u, v) = g(u, v) - i\omega(u, v)$, la partie symétrique est automatiquement déterminée par la donnée de la 2-forme ω et viceversa, par une bijection entre les deux constructions.

On continue avec une première propriété d'une variété Kählerienne X : on calcule sa forme volume et on caractérise ses sous variétés complexes comme les sous-variétés minimisant une certaine inégalité. C'est l'inégalité de Wirtinger, qui nous donne une borne inférieure sur le volume d'une sous-variété et qu'on montre dans le cas de sous-variétés de dimension complexe 2. C'est une propriété très importante, parce qu'il s'agit d'une relation entre une

propriété riemannienne d'une sous-variété comme le volume et un invariant intégrale qui ne dépend que de sa classe de cohomologie et donc des propriétés topologiques de la sous-variété. De plus, elle a des applications importantes dans les théorèmes de compacité des ensembles analytiques à volume borné dans une classe de cohomologie fixée.

La troisième section approfondit la structure riemannienne qu'on a sur les variétés kähleriennes. On considère la connexion de Levi Civita ∇ sur X et cela fournit une caractérisation pour les variétés Kähler comme celles dont la structure complexe sur le fibré tangent (i.e. l'action de l'automorphisme I) est parallèle pour ∇ .

Au début de la dernière section, on rappelle brièvement la définition du groupe d'holonomie de X et on montre une application importante de la caractérisation par la connexion de Levi Civita de la section précédente. En effet, le groupe d'holonomie nous fournira une autre caractérisation des variétés Kähleriennes, par le théorème qui nous garantit qu'une variété complexe avec sa forme hermitienne est Kählerienne si et seulement si son groupe d'holonomie est contenu dans $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(T_{X,x})$.

1 Formes hermitiennes et définition

1.1 Un peu d'algèbre linéaire

On considère une forme $\mathbb{R}$ -bilinéaire sur un espace vectoriel réel : $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ et on l'étend par bilinéarité sur le complexifié

$$h_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$$

où $V_{\mathbb{C}} = \{\sum \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{C}, v_i \in V\}$.

Or, on suppose d'avoir une structure complexe I qui agit sur l'espace vectoriel réel V , qui est un automorphisme qui au carré est l'identité. Il nous permet de voir V aussi comme espace vectoriel complexe. Ça nous donne donc une décomposition en espaces propres

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

où la première composante est l'espace propre de I associé à la valeur propre i et la deuxième est l'espace propre de I associé à la valeur propre $-i$.

Une telle décomposition induit automatiquement une décomposition de l'espace des homomorphismes $\mathbb{R}$ -linéaires de V dans $\mathbb{C}$,

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = W_{\mathbb{C}} = W^{1,0} \oplus W^{0,1}$$

en formes $\mathbb{C}$ -linéaires et formes $\mathbb{C}$ -antilineaires.

En effet, on a le lemme qui nous dit qu'une application de $V \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ -linéaire, elle est aussi $\mathbb{C}$ -antilineaire si et seulement si son extension au complexifié s'annule sur le premier espace de la décomposition :

Lemme 1.1. *Soit $\alpha: V \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -linéaire et l'extension $\alpha_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. On a que α est antilineaire si et seulement si $\alpha_{\mathbb{C}}|_{V^{1,0}} = 0$.*

Démonstration. En effet, on a que $V^{1,0}$ est engendré par les $\{v - iIv\}$, avec $v \in V$, parce que $I(v - iIv) = Iv - iI^2v = Iv + iv = i(v - iIv)$ et on a

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbb{C}}(v - iIv) &= \alpha(v) - i\alpha(Iv) = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(v) &= i\alpha(Iv) \\ \Leftrightarrow \alpha(Iv) &= -i\alpha(v) \end{aligned}$$

■

On pose

$$W^{1,1} = W^{1,0} \otimes W^{0,1} \subset \Lambda^2 W_{\mathbb{C}}$$

l'ensemble des formes linéaires à droite et antilineaires à gauche, qui s'appellent les formes sesquilineaires et

$$W_{\mathbb{R}}^{1,1} = W^{1,1} \cap \Lambda^2 W_{\mathbb{R}}$$

où $W_{\mathbb{R}} = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$.

Or, quand on passe à une forme bilinéaire, la condition peut être généralisée de la façon suivante, mais elle dévient un peu différente : en effet on a la décomposition

$$\Lambda^2 W_{\mathbb{C}} = \Lambda^2 W^{1,0} \oplus (W^{1,0} \otimes W^{0,1}) \oplus \Lambda^2 W^{0,1}$$

où la première composante sont les 2-formes bilinéaires sur $W^{1,0}$, qui sont les 2-formes $\mathbb{C}$ -bilinéaires sur V avec sa structure complexe I ; la troisième sont les 2-formes bilinéaires sur $W^{0,1}$, qui sont les 2-formes $\overline{\mathbb{C}}$ -bilinéaires sur V avec la structure complexe I et la troisième sont les formes du type $\alpha \wedge \overline{\beta}$, avec $\alpha \in W^{1,0}$ et $\beta \in W^{1,0}$, i.e. $W^{1,1}$.

Ceci est la décomposition duale de

$$\Lambda^2 V_{\mathbb{C}} = \Lambda^2 V^{1,0} \oplus (V^{1,0} \otimes V^{0,1}) \oplus \Lambda^2 V^{0,1}$$

Donc, pour avoir qu'une forme soit dans $W^{1,1}$ on doit avoir que l'extension complexe s'annule sur les vecteurs de la forme $(u, v) \in V^{1,0}$ et ceux de la forme $(u, v) \in V^{0,1}$, ce qu'on utilisera dans la preuve de la proposition suivante.

1.2 Métriques hermitiennes et 2-formes

Juste avant de définir les variétés des Kähler, ce qui est le but de cette première section, on applique ce qu'on a vu pour montrer une proposition qui nous sera utile après :

Proposition 1.2. *On a une bijection entre*

$$\begin{aligned} \{\text{formes hermitiennes sur } V\} = \{ & h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \text{ } \mathbb{C}\text{-linéaires à gauche} \\ & \mathbb{C}\text{-antilinéaires à droite} \\ & h(u, v) = \overline{h(v, u)}\} \end{aligned}$$

et

$$\{\text{formes réelles alternée } \cap \text{ formes sesquilinéaires}\} = W_{\mathbb{R}}^{1,1}$$

Démonstration. On affirme que la bijection est donnée par

$$h(u, v) \longmapsto -\text{Im } h(u, v)$$

et son inverse

$$\omega(u, v) \longmapsto h(u, v) = g(u, v) - i\omega(u, v) \text{ où } g(u, v) = \omega(u, Iv).$$

La première chose à montrer est que la forme définie comme l'opposé de la partie imaginaire de h est vraiment en $W_{\mathbb{R}}^{1,1} = \Lambda^2 W_{\mathbb{R}} \cap W^{1,1}$. Elle est dans le premier espace parce qu'elle est alternée, car $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$ par définition de forme hermitienne. Pour montrer qu'elle est un élément du deuxième espace, comme on

a dit dans la dernière section, il faut montrer qu'elle s'annule sur les vecteurs de la forme $(u, v) \in V^{1,0} \times V^{1,0}$ et sur les vecteurs de la forme $(u, v) \in V^{0,1} \times V^{0,1}$. Il suffit en effet de montrer la première propriété, parce que la deuxième suit si on conjugue la première condition.

Or, on a vu que $V^{1,0}$ est engendré par les $\tilde{v} = v - iIv$, avec $v \in V$. Alors pour calculer ω en $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u - iIu, v - iIv)$ on utilise la bilinéarité de ω et on obtient :

$$\omega(\tilde{u}, \tilde{v}) = \omega(u, v) - \omega(Iu, Iv) - i[\omega(u, Iv) + \omega(Iu, v)].$$

Mais par définition de forme hermitienne, on a aussi $h(Iu, Iv) = ih(u, Iv) = i(-i)h(u, v) = h(u, v)$ et donc $\omega(Iu, Iv) = \omega(u, v)$. Au même temps $h(u, Iv) = -ih(u, v) = -h(Iu, v)$ et donc aussi $\omega(u, Iv) = -\omega(Iu, v)$. Alors d'après l'expression précédente on obtient $\omega(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$.

Il faut maintenant montrer que la $h(u, v) = g(u, v) - i\omega(u, v)$ avec $g(u, v) = \omega(u, Iv)$ définie par l'application inverse est vraiment une forme hermitienne. En effet, on a

$$h(u, Iv) = g(u, Iv) - i\omega(u, Iv) = -\omega(u, v) - ig(u, v) = -ih(u, v)$$

et

$$h(Iu, v) = g(Iu, v) - i\omega(Iu, v) = \omega(u, v) + ig(u, v) = ih(u, v).$$

De plus, comme ω est alternée, on a $\text{Im } h(u, v) = -\text{Im } h(v, u)$ et au même temps, comme $\omega(u, Iv) = -\omega(Iu, v)$, on a $g(u, v) = g(v, u)$ et alors $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$. Il est immédiat de montrer que les deux constructions sont l'une l'inverse de l'autre.

■

Remarque 1.3. On souligne que comme h est hermitienne, on a que $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$ et donc ω est antisymétrique et au contraire g est symétrique.

On a donc que g induit sur X une structure de variété riemannienne avec toutes les propriétés et les instruments que cette métrique nous donne, comme on verra dans la suite.

1.3 Variété de Kähler

On peut enfin définir le principal objet dont on parle : les variétés Kähleriennes.

Soit X une variété complexe. Sa structure complexe nous induit une structure presque complexe sur chaque espace tangent $T_{X,x}$, donné par l'action de $I(x)$. Ça nous permet d'appliquer tout la machinerie qu'on a vu dans la première section et donner les définitions suivantes.

Une *métrique hermitienne* h sur X est la donnée d'une famille de métriques hermitiennes h_x sur les espaces tangents $T_{X,x}$ qui varient difféomorphiquement avec x . Cette métrique est donnée comme dans la bijection précédente par

$$h(u, v) = g(u, v) - i\omega(u, v)$$

Définition 1.4. X est donc une *variété de Kähler* si elle possède une telle métrique h , dite métrique de Kähler, telle que la forme ω est fermée.

Remarque 1.5. La condition algébrique $d\omega = 0$ semble une condition algébrique qui vient de n'importe où. En fait, on verra qu'elle a une signification très précise en terme de la géométrie de la variété.

De plus, la proposition 1.2 nous dit que si on fixe une des deux composantes de la métrique, la forme hermitienne entière et donc l'autre partie est automatiquement déterminée par la bijection qu'on a donné. Pour ça, on peut se référer à la métrique sur une telle variété simplement en considérant sa 2-forme et de façon équivalente on peut donner une structure Kählerienne sur une variété complexe simplement en donnant une 2-forme fermée.

2 Le volume des variété Kählerienne

2.1 Forme volume

Une première propriété importante des variétés Kähleriennes est donnée par sa structure riemannienne. En effet, tout variété complexe de dimension $2n$ avec une forme hermitienne au dessus est, comme on a dit, aussi une variété riemannienne et elle est aussi canoniquement orientée : si $e_1, \dots, e_n$ est une base de $T_{X,x}$ sur $\mathbb{C}$, on pose que l'orientation positive est donné par la base de $T_{X,x}$ sur $\mathbb{R}$ des vecteurs $e_1, Ie_1, \dots, e_n, Ie_n$. On peut donc associer à la métrique riemannienne g sur X une forme volume canonique.

Proposition 2.1. *Sur une telle variété X la forme volume associée à la métrique est $\frac{\omega^n}{n!}$.*

Démonstration. La forme volume canonique est une section non nulle en tout point de la $2n$ -ième puissance extérieure du fibré cotangent réel. Or, en général pour une forme sur un espace vectoriel complexe V , en coordonnées locales, on prend $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $z' = (z'_1, \dots, z'_n)$ et on a $h(z, z') = \sum_{i,j} \alpha_{ij} z_i \bar{z}'_j$, où $e_1, \dots, e_n$ est une base sur $\mathbb{C}$ de V , de duale $dz_1, \dots, dz_n$, base de $\Omega_{X,x}$ sur $\mathbb{C}$. $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji} = h(e_i, e_j)$. Comme ω est moins la partie imaginaire de h et $2i \operatorname{Im} h = h - \bar{h}$, alors

$$\omega(z, z') = \frac{i}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} (z_i \bar{z}'_j - z'_i \bar{z}_j)$$

et donc au niveau des formes de $W^{1,1}$, on a

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j \quad (1)$$

On suppose maintenant que la base $e_1, \dots, e_n$ soit orthonormale pour la métrique h , d'où $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ et ses coordonnées $z_1, \dots, z_n$. On pose $z_j = x_j + iy_j$. On a

alors que $e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, Ie_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x_n}, Ie_n = \frac{\partial}{\partial y_n}$ est une base du fibré tangent sur $\mathbb{R}$ avec sa base duale $dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n$, où $dz_i = dx_i + idy_i$. On a donc que la forme volume est l'unique forme qui vaut 1 sur $e_1 \wedge Ie_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge Ie_n$. On a par contre par la formule précédente (1)

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

et donc $\frac{\omega^n}{n!} = \left(\frac{i}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$ et $\frac{i}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_i = dx_i \wedge dy_i$. Mais alors

$$\frac{\omega^n}{n!} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

qui, évalué en $e_1 \wedge Ie_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge Ie_n$ est exactement trivialement 1. ■

On a donc pour toute variété Kählerienne que

$$\text{Vol } X = \int_X \frac{\omega^n}{n!}.$$

Remarque 2.2. Cette relation est très importante parce qu'elle nous donne une relation entre la forme Kählerienne et le volume. En effet, on voit qu'une caractéristique qui a priori ne dépend que de la structure riemannienne et de la géométrie de la variété comme est le volume, devient une caractéristique qui, par la formule de Stokes, ne dépend que de la classe de cohomologie de la forme de Kähler et donc des propriétés topologiques de la variété.

2.2 Inégalités de Wirtinger pour sous variétés

On étudie maintenant ce qu'il se passe si on considère les sous-variétés d'une variété X de forme de Kähler ω_X . On a alors $N \subset X$ sous-variété complexe compacte de $\dim_{\mathbb{C}} N = k$. Soit $j: N \hookrightarrow X$ l'immersion. Comme $\omega_N = j^*(\omega_X)$ est encore une 2-forme fermée, sur N on a une structure induite de variété Kählerienne elle-même. Donc on aura $k! \text{Vol } N = \int_N j^*(\omega_X^k) = \int_N \omega_N^k$.

En fait, pour une sous-variété compacte quelconque, on a un résultat plus général :

Proposition 2.3 (Inégalité de Wirtinger). *Soit $N \subset X$ une sous-variété compacte de dimension réelle $2k$. On a alors*

$$\text{Vol } N \geq \int_N \frac{\omega^k}{k!}$$

et on a l'égalité si et seulement si N est une variété complexe.

Par simplicité, on prouve seulement le cas où $k = 1$. Pour le montrer, on utilisera un petit lemme qui est vrai en tout point.

Lemme 2.4. Soit $E \subset \mathbb{C}^m$ un sous espace vectoriel réel de dimension 2 orienté. Soit $h = g - i\omega$ la métrique hermitienne sur $\mathbb{C}^m$. Pour $z_i = x_i + iy_i$ on a trivialement $h(z, z') = \sum_i z_i \bar{z}'_i$, $g(z) = \sum_i x_i^2 + y_i^2$ et $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$.

Or, si μ_E est l'élément de volume sur E associé à la métrique g , on a $\omega|_E \leq \mu_E$ et on a égalité si et seulement si E est une droite complexe avec l'orientation naturelle.

Démonstration du lemme. Prenons e_1, e_2 une base orthonormée pour g , orientée.

On a $\omega|_E = \omega(e_1, e_2)\mu_E$, parce qu'étant ω un multiple de la forme volume, disons $\omega(e_1, e_2) = \lambda \text{Vol}(e_1, e_2) = \lambda$, car par définition la forme volume fait 1 sur la base. Mais par définition de la métrique on a aussi $\omega(e_1, e_2) = g(Ie_1, e_2)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la métrique g et on obtient

$$\omega(e_1, e_2) \leq \|Ie_1\|_g \|e_2\|_g = 1$$

et d'où le résultat.

Pour le cas d'égalité il suffit de dire que dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a l'égalité si et seulement si Ie_1 et e_2 sont proportionnels et donc e_1, Ie_1 est une base orientée de la droite complexe E . ■

On peut donc maintenant démontrer l'inégalité de Wirtinger dans le cas $k = 1$.

Démonstration de l'inégalité de Wirtinger. En tout point on considère le sous-espace vectoriel de dimension réel

$$T_{N,x} = E \subset \mathbb{C}^n \simeq T_{X,x}$$

et on applique le lemme. Donc, en tout point,

$$\omega|_N \leq \text{forme volume de } N.$$

Par intégration des deux côtés de l'inégalité on obtient le résultat. ■

L'importance de cette inégalité va bien au delà de ce dont on parle ici, parce qu'elle a des applications importantes, par exemple pour le théorème énonçant que les ensembles analytiques compacts à volume borné dans une variété kählerienne compacte forment un ensemble compact.

3 Caractérisation par la connexion de Levi Civita

Comme on a dit, la partie symétrique de la métrique Kählerienne donne à X une structure riemannienne. Ça nous donne aussi la connexion de Levi-Civita sur X , qui est l'unique connexion ∇ qui satisfait :

1. ∇ préserve la métrique :

$$dg(\sigma, \sigma') = g(\nabla\sigma, \sigma') + g(\sigma, \nabla\sigma')$$

(i.e. le terme de dérivation de la métrique s'annule)

2. ∇ est sans torsion :

$$[\chi, \chi'] = \nabla_{\chi}\chi' - \nabla_{\chi'}\chi, \text{ pour tous } \chi, \chi' \text{ champs de vecteurs sur } X.$$

La connexion de Levi-Civita peut nous donner une caractérisation pour les variétés de Kähler, en terme de platitude de la structure complexe sur le fibré tangent.

Théorème 3.1. *Soit h une métrique hermitienne sur X , variété complexe de structure complexe I sur le fibré tangent.*

La métrique h est Kählerienne si et seulement si I est parallèle pour ∇ , condition qui se formule de la façon suivante : pour tout χ champ de vecteurs, $I\chi$ est encore un champ de vecteurs et la condition de parallélisme est $\nabla_{\chi'}(I\chi) = I\nabla_{\chi'}(\chi)$, $\forall \chi' \in \Gamma(X, T_X)$ ensemble des sections du fibré tangent.

Remarque 3.2. La condition de parallélisme en effet signifie que la structure complexe est plate pour la connexion de Levi-Civita. Comme $\nabla_{\chi'}(I\chi) = \nabla(I)\chi + I\nabla\chi$ par la règle de Leibniz, la condition qu'on a donné dans le théorème signifie exactement que le terme ∇I doit s'annuler.

Démonstration. Pour le sens direct, on utilise un lemme technique qui nous dit qu'on peut toujours trouver des coordonnées pour lesquelles la forme hermitienne au premier ordre est égale à la métrique hermitienne standard :

Lemme 3.3. *En tout point x d'une variété kählerienne X de dimension n , il existe des coordonnées $z_1, \dots, z_n$ centrées en x telles que la matrice de la forme hermitienne est*

$$I_n + o\left(\sum_i |z_i|^2\right).$$

C'est équivalent à dire que les $h_{ij} = h(e_i, e_j) = \delta_{ij} + o(\sum_i |z_i|^2)$.

Or, dans le calcul de l'existence de la connexion de Levi-Civita, on impose les conditions de la définition et on obtient des équations dépendantes de g_{ij} et $\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}$. Donc la matrice de la connexion ne dépend que des dérivées au premier ordre de la métrique.

Donc en chaque point, on a des coordonnées données par le lemme précédent pour lesquelles on peut ignorer les termes du type $o(\sum_i |z_i|^2)$ et on obtient qu'on peut considérer la métrique comme la métrique constante. Dans ce cas, on a bien que I , étant la multiplication classique par i sur $\mathbb{C}$, est à coefficients constants et donc est parallèle pour la connexion ∇ et donc il est vrai aussi pour notre variété.

Pour le sens inverse, comme on a

$$\omega(u, v) = -g(u, Iv)$$

et on sait que $\nabla g = 0$ et $\nabla I = 0$, alors on a aussi $\nabla \omega = 0$ qui implique que $d\omega$ est nul et donc la métrique est kählerienne. ■

4 Groupes d'holonomie

4.1 Bref rappel

On fait maintenant un bref rappel de ce qu'est le groupe d'holonomie d'une variété. On utilisera tout cela dans le cas d'une variété Kählerienne, obtenant une caractérisation pour ces variétés en termes du groupe d'holonomie.

On prend un fibré sur une variété $E \rightarrow X$ et une courbe $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ entre $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On peut considérer le tiré en arrière du fibré, qui sera un fibré $E_\gamma = \gamma^*E$ sur $[0, 1]$ sur lequel on peut transporter toutes les notions qu'on a sur E , dont la connexion de Levi-Civita. On a donc un théorème important qui nous fournit un isomorphisme entre les fibres, dit isomorphisme de transport parallèle.

Théorème 4.1. *Pour tout $e \in E_x = E_{\gamma(0)}$, il existe une unique section du tiré en arrière E_γ , disons $\tilde{e}: [0, 1] \rightarrow E_\gamma$ telle que*

1. $\tilde{e}(0) = e$,
2. $\nabla \tilde{e} = 0$ sur $[0, 1]$ pour la connexion induite sur E_γ par celle de Levi-Civita.

Remarque 4.2. En effet, ces conditions signifient que si on a une section sur le fibré, passant par le fibré sur $[0, 1]$ on peut trouver une nouvelle section qui est la section d'origine dans le point 0 et le transporte parallèlement par rapport à la connexion de Levi-Civita.

On sait donc que ∇ nous donne un scindage du fibré en partie verticale et partie horizontale et le théorème nous donne un isomorphisme de transport parallèle le long d'une courbe.

Dans ce document, on parle toujours par simplicité d'holonomie restreinte, pour éviter des cas où il y a de l'holonomie de caractère globale qui vient par exemple du groupe fondamental. Dans ce cas, on considère les lacets sur X qui sont contractiles.

Donc on a le lacet $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Pour $e \in E_x$, on a $\tilde{e}$ donnée par le théorème 4.1. On pose alors $H_\gamma(e) = \tilde{e}(1) \in E_{\gamma(1)} \simeq E_x$.

Or, on peut trouver $H_\gamma(e)$ pour tout $e \in E_x$ et donc on obtient un automorphisme de la fibre $H_\gamma \in \text{Aut}(E_x)$.

Définition 4.3. Le *groupe d'holonomie restreint* Hol_x d'une variété X en x est le sous groupe de $\text{Aut}(E_x)$ engendré par les H_γ , faisant varier γ sur tout les lacets contractiles sur x .

On rappelle qu'on a les propriétés suivantes pour le groupe d'holonomie :

1. $H_{\gamma \circ \gamma'} = H_\gamma \circ H_{\gamma'}$,
2. l'automorphisme H_γ ne dépend pas de la vitesse de paramétrisation du lacet,
3. les groupes d'holonomie en deux points différents liés par une courbe γ' sont conjugués, dans le sens que pour un lacet γ sur x , on a que $\gamma' \circ \gamma \circ \gamma'^{-1}$ est un lacet sur y .

4.2 Holonomie des variété Kähleriennes

Dans le cas Kählerien, on a une propriété très particulière qui caractérise exactement les variétés de Kähler utilisant le groupe d'holonomie. La caractérisation est donnée par la théorème suivant :

Théorème 4.4. *La métrique h sur X est Kählerienne si et seulement si les H_γ sont $\mathbb{C}$ -linéaires, i.e. si le groupe d'holonomie Hol_x est contenu dans $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(T_{X,x}) \subset \text{Aut}(T_{X,x})$.*

Démonstration. Le sens direct se base sur une observation qu'on peut faire sur les sections : si on a que ∇ preserve I (condition caractéristique des variétés Kählerienne, comme on a vu dans la section 3), alors on a que pour tout section σ elle est parallèle pour ∇ si et seulement si la section $I\sigma$ est parallèle elle même pour ∇ . En effet est très simple de le voir, parce que

$$\nabla(I\sigma) = I\nabla(\sigma) \text{ et donc } \nabla(\sigma) = 0 \iff \nabla(I\sigma) = 0.$$

Or, comme $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(T_{X,x}) = \{\phi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(T_{X,x}) \mid \phi \circ I = I \circ \phi\}$, il faut montrer que H_γ commute avec la structure complexe. On cherche donc la valeur de l'automorphisme en Ie , qui se réduit à chercher la section correspondante ($\tilde{I}e$) donnée par le theoreme 4.1. Or, on affirme que telle section est ($\tilde{I}e$) = $I\tilde{e}$. Par unicité, il faut seulement montrer qu'elle verifie les deux conditions. Mais

1. $(\tilde{I}e)(0) = I\tilde{e}(0) = Ie$,
2. par l'observation, si $\tilde{e}$ est parallèle par ∇ , alors $I\tilde{e}$ est parallèle aussi.

Donc $H_\gamma(Ie) = I\tilde{e}(1) = IH_\gamma(e)$, i.e. H_γ commute avec I .

■

4.3 Cas particulier : $\dim_{\mathbb{C}} = 1$

On veut maintenant comprendre ce qu'il nous dit concrètement la caractérisation des variétés Kähleriennes par le groupe d'holonomie. On prend donc une surface de Riemann, variété complexe de dimension complexe 1. dans ce cas, toute métrique hermitienne est kählerienne, parce si on écrit $h = g - i\omega$, on a que comme ω est une 2-forme, $d\omega$ sera une 3-forme sur une variété de dimension réelle 2 et donc elle est nécessairement nulle.

On a donc que le groupe d'holonomie sur $T_{X,x}$ et il doit être $\mathbb{C}$ -linéaire, mais on veut aussi qu'il préserve la métrique h et donc

$$\text{Hol}_x(X) \subset \mathbb{C}^* \cap \text{Aut}_h(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^1.$$

On veut donc calculer ce que il peut être le groupe d'holonomie dans ce cas. Comme il doit forcément être une partie continue et ouverte en $\mathbb{S}^1$ et une telle partie engendre tout le group, on a forcément que le groupe d'holonomie peut être seulement

1. le group trivial
2. le group $\mathbb{S}^1$ tout entier.

On veut maintenant examiner le cas où la variété est compacte et le group d'holonomie n'est pas $\mathbb{S}^1$ mais est le group trivial. On a la suivante

Proposition 4.5. *Si X est une surface de Riemann de dimension complexe 1, compacte et de groupe d'holonomie trivial, on a nécessairement que $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ tore complexe muni de la métrique plate.*

La preuve est basé sur un lemme qui est vrai en général en dimension n :

Lemme 4.6. *Si X est comme dans l'hypothèse de la proposition précédente mais de dimension réelle n , munie de la métrique g , on a que pour tout $x \in X$, si on considère un voisinage $U \ni x$ simplement connexe de x dans X , il existe des formes différentielle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui forment une base de $\Omega_{X,x}$ en tout points et qui satisfont :*

1. $d\alpha_i = 0$
2. la métrique g s'écrit comme $\sum g_{ij}\alpha_i \otimes \alpha_j$, avec les g_{ij} constants.

Démonstration du lemme. L'idée est de prendre des formes qui engendrent $\Omega_{X,x}$ dans un point et de les étendre en tout point par le transport parallèle, qui nous donne immédiatement la platitude.

Dans le point x on prend alors une telle base $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ et pour tout $y \in U$ on considère un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On pose alors

$$\alpha_i(y) = \alpha_{i,\gamma}(1) = T_\gamma(\alpha_i).$$

Il faut avant tout montrer qu'il ne dépend pas de la choix du chemin γ . Si alors on a un chemin $\gamma': [0, 1] \rightarrow U$ tel que $\gamma'(0) = x$ et $\gamma'(1) = y$, on peut considérer le lacet $\gamma \circ \gamma'^{-1}$ sur x . Ce qu'il nous faut montrer est que

$$T_\gamma(\alpha_i) = T_{\gamma'}(\alpha_i)$$

qui équivaut à montrer que

$$\alpha_i = T_\gamma \circ T_{\gamma'}(\alpha_i) = T_{\gamma \circ \gamma'}(\alpha_i)$$

mais $T_{\gamma \circ \gamma'}$ est un élément du groupe d'holonomie qui est trivial et donc il est l'identité et la formule est vrai.

Par définition de transport parallèle, on a la platitude $\nabla \alpha_i = 0$, ce qui implique que les formes α_i sont fermées, qui montre la deuxième condition du lemme.

Pour la première, on considère la base de $T_{X,x}$ duale de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, disons $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$. Elle est plate pour la connexion ∇ qui induisait la même connexion sur Ω_X parce que duale d'une base plate et les $g_{ij} = g(\alpha_i^*, \alpha_j^*)$.

Or, si on calcule

$$d(g(\alpha_i^*, \alpha_j^*)) = g(\alpha_i^*, \nabla \alpha_j^*) + g(\nabla \alpha_i^*, \alpha_j^*)$$

il est nul parce que $\nabla \alpha_i^*$ l'est et alors les g_{ij} sont constants.

Or, comme les α_i sont formes fermées sur U qui est simplement connexe, elles sont exactes $\alpha_i = dx_i$. Alors $x_1, \dots, x_n$ donnent des coordonnées locales sur lesquelles $g = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$, avec g_{ij} constants, donc g est la métrique constante. ■

Démonstration de la proposition. On se met dans les coordonnées données par le lemme. Or, dans ce cas, comme la métrique est à coefficients constants, localement on a $X \simeq (\mathbb{C}, h)$, où h est la métrique constante. Mais la métrique standard est sans courbure, parce que $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = 0$.

Donc $R_\nabla = 0$. Or, comme la classe de Chern $c_1(T_X) = [Tr(R_\nabla)] = 0$ et on a la formule $\int_X c_1(T_X) = -2g + 2$ pour variétés compactes et où g est le genre de la variété, dans notre cas on a nécessairement que X est de genre 1.

Mais alors on n'a pas beaucoup de choix et X doit forcément être un tore complexe et on a déjà vu que sa métrique est plate. ■

4.4 Cas particulier : $\dim_{\mathbb{C}} = 2$

On considère maintenant un autre cas intéressant. Soit donc X une variété kählerienne de dimension complexe 2. Son groupe d'holonomie doit être contenu dans $\text{Aut}_{\mathbb{C},h}(\mathbb{C}^2) = U(2)$, parce que il préserve la métrique et est $\mathbb{C}$ -linéaire parce que la métrique est kählerienne.

Le cas passionnant de ces variétés est le cas où l'holonomie est $SU(2) \subset U(2)$. En fait, dans ce cas, il existe une 2-forme différentielle de type $(2,0)$, qu'on va appeler α , qui est parallèle et donc elle est aussi fermée. Mais ça nous entraîne qu'elle est aussi holomorphe, parce que pour une forme générique $0 = d\alpha^{(p,q)} = \partial\alpha^{(p,q)} + \bar{\partial}\alpha^{(p,q)}$ alors aussi $\partial\alpha^{(p,q)} = 0$ et $\bar{\partial}\alpha^{(p,q)} = 0$ et comme le $\bar{\partial}$ s'annule, α est holomorphe. Mais alors on peut écrire

$$\alpha = f dz_1 \wedge dz_2$$

parce qu'on est en dimension 2. De plus, on a que la 2-forme holomorphe α parallèle est partout non nulle, parce que le parallélisme préserve la norme et que f est une fonction holomorphe parce que $\bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}f \wedge dz_1 \wedge dz_2$ et donc $\bar{\partial}f = 0$.

La particularité de ce cas est donnée précisément par l'existence de cette forme, parce que dans le cas kählerienne ça nous permet de définir une autre forme parallèle qui varie avec un paramètre t qui appartient à une conique. Elle détermine une déformation de la forme et donc une déformation de la structure complexe I_t qui varie avec le paramètre, qu'on appellera "*Twistor family*".

On considère donc la forme constituée de la combinaison linéaire

$$\eta_t = \eta_{a,b,b'} = a\omega + b\alpha + b'\bar{\alpha},$$

pour des coefficients $a, b, b' \in \mathbb{C}$ qui est encore une 2-forme parallèle à coefficients complexes.

Si maintenant on prend η_t^2 , par linéarité elle est encore parallèle. Or, elle s'annule si et seulement si elle s'annule en tout point. Mais alors par parallélisme la norme est préservée et il est équivalent à dire que son intégrale aussi s'annule :

$$\eta_t^2 = 0 \iff \int_X \eta_t^2 = 0.$$

Or, on n'a qu'une seule forme parallèle à coefficient multiplicatif près et elle est la forme volume qu'on appelle μ . Le coefficient on le note $Q(a, b, b')$ et alors

$$\int_X \eta_t^2 = Q(a, b, b') \text{Vol } X.$$

Mais alors pour avoir que la forme soit nulle, il faut que le paramètre $t = (a, b, b')$ varie dans les point de la conique projective $Q(a, b, b') = 0$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

En effet, ce qu'on est en train de faire est de considérer la forme holomorphe qu'on a trouvé dans ce cas particulier comme $\eta_0 = \alpha$ où $t = 0$ équivaut à dire $(a, b, b') = (0, 1, 0)$. En faisant varier le paramètre t sur la conique projective $\mathcal{C}: Q(a, b, b') = 0$ on obtient une distribution à coefficients complexes et donc une déformation de la structure complexe.

Dans ce cas là, en fait, en tout point $x \in X$, si la forme $\eta_{t,x}^2 \in \Lambda^4(\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$ définie sur $T_{X,x} \otimes \mathbb{C}$ s'annule, on affirme que η est décomposable.

En fait, il y a trois possibilités : soit η a rang 4, mais alors elle n'aurait pas carré nul ; soit η a rang 0, mais alors elle est la forme nulle. Comme ce deux cas ne sont pas possibles par notre hypothèses, elle doit avoir nécessairement rang 2 en tout point et alors elle détermine un sous espace V_x de rang 2, qui est tel que $V_x \oplus \bar{V}_x = T_{X,x} \otimes \mathbb{C}$. Une base duale de cet espace nous donne donc la décomposition en

$$\eta_{t,x} = \sigma_x \wedge \tau_x, \text{ pour } \sigma_x, \tau_x \in \Omega_X \otimes \mathbb{C}.$$

Donc $\eta_{t,x}$ nous donne la distribution à coefficients complexes $V_x \subset T_X \otimes \mathbb{C}$, définie par $V_x = \ker \eta_{t,x} = \langle \sigma_x, \tau_x \rangle$, qui nous induit une structure presque complexe I_t sur X : en effet, donner une automorphisme I_t tel que $I^2 = -Id$ équivaut à donner une décomposition de $T_{X,x} \otimes \mathbb{C}$ en deux sous-espace, en posant $T_{X,t}^{1,0} = V_x$.

On veut maintenant appliquer le critère de Newlander-Nirenberg et dire que la structure presque complexe est intégrable. On prend donc deux champs $\chi, \chi' \in T_{X,x}^{1,0} = V_x$ et comme η_t est fermée, on a

$$0 = d\eta_t(\chi, \chi') = \chi(\eta_t(\chi')) - \chi'(\eta_t(\chi)) + \eta([\chi, \chi']) = \eta([\chi, \chi'])$$

et donc le crochet est dans le $\ker \eta_t$ qui par définition est $V_x = T_{X,x}^{1,0}$ et alors I_t est intégrable.

Remarque 4.7. On peut montrer que en déformant la structure complexe, la structure riemannienne de la variété ne change pas : g est I_t -invariante, i.e.

$$\forall t, g(I_t u, I_t v) = g(u, v)$$

et la variété reste kählerienne même si $\omega_t(u, v) = -g(u, I_t v)$ change.