C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, p. 735-738, 1991

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Caractérisation des $\mathscr{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore

François LOESER et Claude SABBAH

Résumé – Dans cette Note on démontre une caractérisation des $\mathscr{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore $(\mathbf{G}_m)^p$ due à Katz quand $p=1$.

Characterization of irreducible hypergeometric $\mathscr{D}$-modules on the torus

Abstract – *In this Note we prove a characterization of irreducible hypergeometric $\mathscr{D}$-modules on the torus $(\mathbf{G}_m)^p$ due to Katz when $p=1$.*

Rappelons brièvement la définition de la transformation de Mellin algébrique et certaines de ses propriétés. Nous renvoyons le lecteur à l'article [2] pour plus de détails. On note $(\mathbf{G}_m)^p$ le tore Spec $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ avec $x=(x_1, \ldots, x_p)$ et $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur ce tore : $\mathscr{D}=\mathbf{C}[x, x^{-1}]\langle \mathrm{D}\rangle$ avec $\mathrm{D}=(\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_p)$ et $\mathrm{D}_i=x_i\,\partial_{x_i}$. Posons $s_i=-\mathrm{D}_i$ et $\tau_i=x_i$ de sorte que $\mathbf{C}[x, x^{-1}]\langle \mathrm{D}\rangle=\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1}\rangle$ est l'anneau des opérateurs aux différences finies et τ_i est l'opérateur de translation relatif à la coordonnée s_i (*i. e.* $\tau_i . s_i=(s_i+1) . \tau_i$). Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module (à gauche) holonome. Notons $\mathfrak{M}$ le module $\mathscr{M}$ lorsqu'on adopte ce point de vue (*i. e.* lorsque les variables sont $s_1, \ldots, s_p$). Il résulte du théorème de Bernstein que $\mathbf{C}(s)\otimes_{\mathbf{C}[s]}\mathfrak{M}$ [noté dans la suite $\mathfrak{M}(s)$] est de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$: on vérifie en effet [2], lemme 1.2.2, que

$$\mathfrak{M}(s)=p_+(\mathscr{M}\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{C}(s)\,x^s)$$

où $p:\operatorname{Spec}\mathbf{C}(s)[x, x^{-1}]\to\operatorname{Spec}\mathbf{C}(s)$ est la projection.

Enfin nous notons $\chi((\mathbf{G}_m)^p, \mathscr{M})$ la caractéristique d'Euler du complexe de de Rham algébrique

$$\mathrm{DR}(\mathscr{M})\overset{\text{déf}}{=}\Omega^{\cdot}_{(\mathbf{G}_m)^p}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{M}\,[p]$$

(dans [1], il n'y a pas de décalage).

1. CARACTÉRISATION DES $\mathscr{D}$-MODULES HYPERGÉOMÉTRIQUES IRRÉDUCTIBLES SUR $\mathbf{G}_m$. – Nous supposons ici que $p=1$. Nous allons démontrer l'énoncé suivant, dû à N. Katz [1], th. 3.7.1, quand $\chi(\mathbf{G}_m, \mathscr{M})=1$. La démonstration que nous proposons, contrairement semble-t-il à celle de Katz, se généralise au cas $p\geqslant 2$.

THÉORÈME 1. – *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module holonome sur $\mathbf{G}_m$.*

1. *On a* $\chi(\mathbf{G}_m, \mathscr{M})=\dim_{\mathbf{C}(s)}\mathfrak{M}(s)$.

2. *Supposons que* $\dim_{\mathbf{C}(s)}\mathfrak{M}(s)=1$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$\mathfrak{M}$ est irréductible;*

(*b*) *$\mathfrak{M}$ n'a ni sous-module ni quotient qui soit de $\mathbf{C}[s]$-torsion;*

(*c*) *$\mathfrak{M}$ est isomorphe à un module*

$$\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}=\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1}\rangle/\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1}\rangle . (\mathrm{P}(s)\,\tau+\mathrm{Q}(s))$$

où P *et* Q *n'ont pas de zéro commun* mod $\mathbf{Z}$.

Lorsque $\dim_{\mathbf{C}(s)}\mathfrak{M}(s)=1$, nous dirons, suivant [1], que $\mathscr{M}$ est hypergéométrique.

Note présentée par Bernard MALGRANGE.

0764-4442/91/03120735 $ 2.00

Démonstration. — Montrons d'abord le point 2. Il est clair que $a \Rightarrow b$. De plus, si $\mathfrak{M}$ n'est pas irréductible, soit $\mathfrak{M}'$ un sous-module propre. Alors ou bien $\mathfrak{M}'$ est de $\mathbf{C}[s]$-torsion, ou bien $\dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}'(s) = 1$ et donc $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ est de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Par suite $b \Rightarrow a$.

Montrons que $c \Rightarrow b$. Il résulte de [1], prop. 3.2, que si P et Q sont sans zéro commun $\bmod \mathbf{Z}$, $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$ n'a pas de $\mathbf{C}[s]$-torsion. En considérant le dual de $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$, on voit aussi que sous cette hypothèse $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$ n'a pas de quotient de torsion (car le dual d'un module de torsion est de torsion).

Montrons enfin que $a \Rightarrow c$. Supposons donc $\mathfrak{M}$ irréductible. Soit m un générateur de $\mathfrak{M}$. Alors $\mathfrak{M}$ est contenu dans $\mathfrak{M}(s)$ et m est une base de $\mathfrak{M}(s)$ sur $\mathbf{C}(s)$. On peut écrire $\tau . m = a(s) . m$ avec $a(s) \in \mathbf{C}(s)$. Soit $m' = h(s) . m$ une autre base. La matrice $a'(s)$ de τ dans cette base est égale à $(h(s+1)/h(s)) . a(s)$. On peut donc trouver $h \in \mathbf{C}(s) - \{0\}$ telle que $a'(s) = -\mathrm{Q}(s)/\mathrm{P}(s)$ avec P et Q sans zéro commun $\bmod \mathbf{Z}$. Soit $\mathfrak{M}' = \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle . m' \in \mathfrak{M}(s)$. On dispose d'un morphisme surjectif $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}} \to \mathfrak{M}'$ qui est un isomorphisme puisque $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$ n'a pas de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Puisque $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont irréductibles, si on pose $h(s) = p(s)/q(s)$, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}' &= \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle . m' = \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle . (q(s) . m') = \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle . (p(s) . m) \\ &= \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle . m = \mathfrak{M}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant le point 1. Par définition, $\chi(\mathbf{G}_m, \mathscr{M})$ est la caractéristique du complexe

$$0 \to \mathscr{M} \xrightarrow{x\,\partial_x} \mathscr{M} \to 0$$

où le terme de droite est placé en degré 0. C'est-à-dire aussi celle du complexe $L\,i^* \mathfrak{M} = \{0 \to \mathfrak{M} \xrightarrow{s} \mathfrak{M} \to 0\}$, si $i : \{0\} \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbf{C}[s]$ désigne l'inclusion. Par ailleurs, si $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ est un $\mathbf{C}[s]$-module de type fini tel que $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{N} = \mathfrak{M}(s)$, on a $\chi(L\,i^* \mathfrak{N}) = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$. Il suffit donc de montrer que pour un tel module $\mathfrak{N}$ on a $\chi(L\,i^* \mathfrak{N}) = \chi(L\,i^* \mathfrak{M})$.

Notons $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}$ et pour $k > 0$, $\mathfrak{M}_k = \sum_{|j| \leqq k} \tau^j \mathfrak{N}$. On obtient ainsi une filtration croissante de $\mathfrak{M}$ telle que pour tout $k \geqq 0$, $\mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k$ soit de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Plus précisément, $\mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k = (\tau^{k+1} \mathfrak{N} + \tau^{-(k+1)} \mathfrak{N} + \mathfrak{M}_k)/\mathfrak{M}_k$ et si $b(s) . \mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_0 = \{0\}$, alors

$$b(s+k)\, b(s-k) . \mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k = \{0\}.$$

Si k est assez grand, s est premier à $b(s+k)\, b(s-k)$ et donc

$$s : \quad \mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k \to \mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k$$

est bijective. On en déduit que le complexe $0 \to \mathfrak{M} \xrightarrow{s} \mathfrak{M} \to 0$ est quasi isomorphe au complexe $0 \to \mathfrak{M}_k \xrightarrow{s} \mathfrak{M}_k \to 0$, d'où le résultat. □

Remarques. — 1. Soit $\mathfrak{M}$ holonome et soit $\mathfrak{M}' = \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle/(\mathrm{Q}(s))$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbf{C}[s]$. Une démonstration analogue à celle du premier point montre que

$$-\dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}) + \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{D}}(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}) = \deg \mathrm{Q} . \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$$

et si $\mathfrak{M}$ n'a pas de $\mathbf{C}[s]$-torsion, on a de plus $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}) = \{0\}$.

2. On voit comme dans [1], section 5.3.2.1, que les systèmes holonomes hypergéométriques irréductibles sont exactement les systèmes obtenus par produit tensoriel sur $\mathbf{C}[s]$ à partir des systèmes élémentaires d'équation $(\tau - c)$ ou $\tau \pm (s + \alpha)$, ou $(s + \alpha)\tau \pm 1$, $(\alpha \in \mathbf{C})$.

En particulier, un produit tensoriel sur $\mathbf{C}[s]$ de systèmes holonomes hypergéométriques irréductibles l'est encore.

2. Caractérisation des $\mathscr{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur $(\mathbf{G}_m)^p$. — Nous supposons maintenant $p \geqq 2$. Soit $\mathrm{L}:\mathbf{C}^p \to \mathbf{C}$ une forme linéaire à coefficients $(l_1, \ldots, l_p)$ dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux. Soit $i_\mathrm{L}:\mathbf{G}_m \hookrightarrow (\mathbf{G}_m)^p$ définie par $\tau_i = \theta^{l_i}$ pour $i=1, \ldots, p$. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{\mathbf{G}_m}$-module holonome, $i_{\mathrm{L}+}\mathscr{M}$ est $\mathscr{D}_{(\mathbf{G}_m)^p}$-holonome. Le transformé de Mellin de $i_{\mathrm{L}+}\mathscr{M}$ n'est autre que $\mathrm{L}^*\mathfrak{M} = \mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}[\sigma]} \mathfrak{M}$, si $\sigma = \mathrm{L}(s)$, avec la structure d'équation aux différences donnée par $\tau_i(1 \otimes m) = 1 \otimes \theta^{l_i} m$. En particulier $\mathrm{L}^*\mathfrak{M}$ est holonome.

De manière analogue, soient $\mathbf{C}^p \simeq \mathbf{C}^{p-1} \times \mathbf{C}$ un isomorphisme linéaire rationnel, L la projection sur le facteur $\mathbf{C}$ et $i:\mathbf{C}^{p-1} \times \{0\} \hookrightarrow \mathbf{C}^p$ l'inclusion de l'hyperplan $\mathrm{L}(s)=0$. Alors, si $\mathfrak{M}$ est holonome sur $\mathbf{C}^p$, $\boldsymbol{L} i^*\mathfrak{M}$ est à cohomologie holonome sur $\mathbf{C}^{p-1}$: si on considère la décomposition $(\mathbf{G}_m)^p \simeq (\mathbf{G}_m)^{p-1} \times \mathbf{G}_m$ correspondante, le transformé de Mellin inverse de $\boldsymbol{L} i^*\mathfrak{M}$ n'est autre que l'image directe de $\mathscr{M}$ par la projection $(\mathbf{G}_m)^p \to (\mathbf{G}_m)^{p-1}$.

Enfin, si $\mathrm{T}:\mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p$ est une translation quelconque, et si $\mathfrak{M}$ est holonome, $\mathrm{T}^*\mathfrak{M}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$-module et est holonome.

Soient $\mathrm{L}:\mathbf{C}^p \to \mathbf{C}$ comme ci-dessus et $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}} = \mathrm{L}^*\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$. On déduit des remarques ci-dessus l'énoncé suivant :

Lemme 1. — *Le module* $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$ *est holonome sur* $\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ *et, si* P *et* Q *sont sans zéro commun* $\mathrm{mod}\,\mathbf{Z}$, *il est* $\mathbf{C}[s]$*-plat (en fait limite inductive de* $\mathbf{C}[s]$*-modules libres de rang* 1). *Il en est de même pour tout produit tensoriel fini sur* $\mathbf{C}[s]$ *de tels modules.* □

L'holonomie d'un produit tensoriel s'obtient en l'exprimant comme restriction à la diagonale du produit tensoriel externe. Enfin nous utiliserons aussi :

Lemme 2. — *Soit* $\pi:\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *donnée par* $\pi(s_0) = ns_0 + \beta$, $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ *et* $\beta \in \mathbf{C}$. *Si* $\mathfrak{M}$ *est holonome irréductible,* $\pi^*\mathfrak{M}$ *l'est aussi.*

Démonstration. — La translation ne posant pas de problème on se ramène au cas où $\beta=0$, et par la remarque du paragraphe 1 au cas où $\mathfrak{M}$ est élémentaire. Si m est un générateur de $\mathfrak{M}$ satisfaisant par exemple

$$\theta m = (\sigma + \alpha) m$$

avec $\sigma = s_0$, alors $1 \otimes m$ satisfait

$$\tau(1 \otimes m) = 1 \otimes \theta^n m = \prod_{k=0}^{n-1} (ns_0 + \alpha + k)(1 \otimes m)$$

d'où un morphisme surjectif $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}} \to \pi^*\mathfrak{M}$ avec $\mathrm{P}=1$, $\mathrm{Q} = \prod_{k=0}^{n-1} (ns_0 + \alpha + k)$. Puisque $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$ est sans $\mathbf{C}[s]$-torsion, ce morphisme est un isomorphisme. □

Théorème 2. — *Soit* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{D}$*-module holonome sur* $(\mathbf{G}_m)^p$.

1. *On a* $\chi((\mathbf{G}_m)^p, \mathscr{M}) = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$.

2. *Supposons que* $\dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s) = 1$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\mathfrak{M}$ *est irréductible;*

(*b*) $\mathfrak{M}$ *n'a ni sous-module ni quotient qui soit de* $\mathbf{C}[s]$*-torsion;*

(*c*) $\mathfrak{M}$ *est isomorphe à un produit tensoriel sur* $\mathbf{C}[s]$ *d'un nombre fini de modules* $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$, *où, pour chaque terme,* P *et* Q *sont sans zéro commun* $\mathrm{mod}\,\mathbf{Z}$.

Démonstration. — La démonstration du point 1 est similaire à celle du cas $p=1$. Si $i:\{s_1 = \ldots = s_p = 0\} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[s]$ désigne l'inclusion, on a $\chi((\mathbf{G}_m)^p, \mathscr{M}) = \chi(\boldsymbol{L} i^*\mathfrak{M})$ et on est ramené à montrer que $\chi(\boldsymbol{L}\,i^*\mathfrak{M})=\chi(\boldsymbol{L}\,i^*\mathfrak{N})$ pour un $\mathbf{C}[s]$-module de type fini $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ tel que $\mathbf{C}(s)\otimes_{\mathbf{C}[s]}\mathfrak{N}=\mathfrak{M}(s)$. On pose $\mathfrak{M}_k=\sum_{|\sigma|\leq k}\tau^\sigma.\mathfrak{N}$ et si $b(s).\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_0=\{0\}$, alors $[\sum_{|\sigma|=k} b(s+\sigma)].\mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k=\{0\}$. En particulier, pour tout k assez grand, $\mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k$ est un $\mathbf{C}[s]$-module de type fini dont le support ne contient pas $\{0\}$. La cohomologie de $\boldsymbol{L}\,i^*(\mathfrak{M}_{k+1}/\mathfrak{M}_k)$ est donc nulle, de même que celle de $\boldsymbol{L}\,i^*(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_k)$ (par passage à la limite inductive).

Montrons le point 2. L'équivalence de a et b est identique à celle du cas $p=1$. Montrons que $c\Rightarrow b$. Soit $\mathfrak{M}$ comme dans c. Nous avons vu que $\mathfrak{M}$ est holonome et $\mathbf{C}[s]$-plat, donc sans $\mathbf{C}[s]$-torsion. Montrons que $\mathfrak{M}$ n'a pas de quotient propre qui soit de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Soit $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}''$ un morphisme surjectif avec $\mathfrak{M}''\neq\{0\}$ de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Soit m'' un générateur de $\mathfrak{M}''$ sur $\mathbf{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$ et $b\in\mathbf{C}[s]$ tel que $b(s).m''=0$. Soit D une droite donnée par $s_i=\alpha_i s_0+\beta_i$ $(i=1,\ldots,p)$, avec $\alpha_i\in\mathbf{Z}$ pour tout i. Nous pouvons supposer, si les α_i sont assez généraux, que D n'est contenue dans aucune hypersurface $\{s\,|\,b(s+\sigma)=0,\ \sigma\in\mathbf{Z}^p\}$ et que D rencontre le support de $\mathbf{C}[s].m''$. Soit $i_{\mathrm{D}}:\mathrm{D}\hookrightarrow\operatorname{Spec}\mathbf{C}[s]$ l'inclusion. Le module $i_{\mathrm{D}}^*\mathfrak{M}$ est produit tensoriel sur $\mathbf{C}[s_0]$ des modules $i_{\mathrm{D}}^*\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$. Soit $\pi_{\mathrm{L}}:\mathrm{D}\to\mathbf{C}$ l'application $\mathrm{L}\circ i_{\mathrm{D}}$. Nous pouvons supposer que pour toute L intervenant dans $\mathfrak{M}$, l'application π_{L} n'est pas constante, si les α_i sont assez généraux. Alors $\pi_{\mathrm{L}}^*\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q}}$ est muni d'une structure de $\mathbf{C}[s_0]\langle\tau_0,\tau_0^{-1}\rangle$-module holonome pour laquelle il est irréductible, d'après le lemme 2, et on en déduit que $i_{\mathrm{D}}^*\mathfrak{M}$ n'a pas de quotient propre qui soit de $\mathbf{C}[s_0]$-torsion.

Par ailleurs, notons $\mathfrak{M}_k''$ la filtration de $\mathfrak{M}''$ définie comme au point 1 à partir de $\mathfrak{N}''=\mathbf{C}[s].m''$. Alors pour tout k, $i_{\mathrm{D}}^*\mathfrak{M}_k''$ n'est pas nul et est de $\mathbf{C}[s_0]$-torsion. Comme au point 1 on vérifie que le support de $i_{\mathrm{D}}^*(\mathfrak{M}_{k+1}''/\mathfrak{M}_k'')$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini et on en déduit que $i_{\mathrm{D}}^*\mathfrak{M}''\neq 0$.

Finalement, $i_{\mathrm{D}}^*\mathfrak{M}$ admet un quotient de torsion et non nul, ce qui est en contradiction avec le fait que $i_{\mathrm{D}}^*\mathfrak{M}$ est irréductible.

Montrons enfin que $a\Rightarrow c$.

LEMME 3. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *holonome avec* $\dim_{\mathbf{C}(s)}\mathfrak{M}(s)=1$. *Alors* $\mathfrak{M}(s)$ *est isomorphe à un produit tensoriel sur* $\mathbf{C}(s)$ *de modules isomorphes à* $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}(s)$, *avec* P *et* Q *sans zéro commun* mod $\mathbf{Z}$ *et* L *à coefficients dans* $\mathbf{Z}$ *premiers entre eux.*

Ce lemme est dû à M. Sato (non publié, *voir* [2], prop. 1.1.4). Supposons de plus que $\mathfrak{M}$ est irréductible et soit $\mathfrak{M}'$ le produit tensoriel sur $\mathbf{C}[s]$ des termes $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$ correspondant à la décomposition de $\mathfrak{M}(s)$. Nous avons vu que $\mathfrak{M}'$ est irréductible. La démonstration s'achève alors comme dans le cas où $p=1$. □

Note remise le 11 février 1991, acceptée le 27 février 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N. KATZ, *Exponential sums and differential equations*, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, 1990.

[2] F. LOESER et C. SABBAH, Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, *Commentarii Mathematici Helvetici* (à paraître).

U.R.A. D 0169 *du C.N.R.S.*,
Centre de Mathématiques, École polytechnique 91128 *Palaiseau.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 1263-1264, 1992

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Caractérisation des $\mathscr{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore, II

François LOESER et Claude SABBAH

Résumé – Dans cette Note nous corrigeons la Note antérieure [2].

Characterization of irreducible hypergeometric $\mathscr{D}$-modules on the torus, II

Abstract – *In this Note we correct the previous Note* [2].

O. Gabber nous a signalé un certain nombre d'erreurs dans la Note [2]. Nous les corrigeons ci-dessous. D'autres démonstrations nous ont aussi été données par O. Gabber. Nous l'en remercions.

La phrase I.1 p. 737 est à supprimer. L'énoncé du théorème 2 doit être remplacé par le suivant :

THÉORÈME 2. – *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module holonome sur* $(\mathbf{G}_m)^p$.

1. *On a* $\chi((\mathbf{G}_m)^p, \mathscr{M}) = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$.

2. *Supposons que* $\dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s) = 1$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(*a*) $\mathfrak{M}$ *est irréductible*

(*b*) $\mathfrak{M}$ *n'a ni sous-module ni quotient qui soit de* $\mathbf{C}[s]$*-torsion*

(*c*) $\mathfrak{M}$ *est isomorphe à l'unique sous-*$\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$*-module holonome irréductible d'un produit tensoriel sur* $\mathbf{C}[s]$ *d'un nombre fini de modules* $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$, *où, pour chaque terme*, P *et* Q *sont sans zéro commun* mod $\mathbf{Z}$.

Remarques. – 1. La démonstration prouve aussi que tout $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel de rang 1 muni d'une action inversible de τ contient un et un seul $\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$-module holonome irréductible et que tout tel module de rang générique égal à 1 est obtenu de cette manière. Par suite, il y a correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de modules holonomes irréductibles de rang générique égal à 1 et les éléments du groupe hypergéométrique à p variables (*voir* [1]).

2. O. Gabber nous a donné un critère (corrigeant celui de [2]) permettant de vérifier si un produit tensoriel de modules $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$ est irréductible et a démontré que tout module irréductible comme ci-dessus est engendré par le produit des générateurs canoniques de modules $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$ pour des P, Q, L bien choisis.

Démonstration du théorème 2. – La démonstration du point 1 de [2] est incorrecte, ainsi que celle de $(a) \Leftrightarrow (c)$. Le point 1 se montre par récurrence sur p en utilisant le théorème 1 de [2]. Soit $i : \{ s_1 = \ldots = s_p = 0 \} \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbf{C}[s]$ l'inclusion. Nous devons montrer

$$(*) \qquad \chi(L\, i^* \mathfrak{M}) = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s).$$

Soit $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ un $\mathbf{C}[s]$-module de type fini tel que

$$\mathbf{C}(s) \underset{\mathbf{C}[s]}{\otimes} \mathfrak{N} = \mathbf{C}(s) \underset{\mathbf{C}[s]}{\otimes} \mathfrak{M} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M} = \mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle \cdot \mathfrak{N}.$$

Note présentée par Bernard MALGRANGE.

0764-4442/92/03151263 $ 2.00

Il existe une hypersurface $\{b=0\}$ telle que, après tensorisation par l'anneau $\mathbf{C}[s]_{\mathscr{B}}=\mathbf{C}[s; (b(s+\sigma)^{-1})_{\sigma\in\mathbf{Z}^p}]$, on ait

$$\mathbf{C}[s]_{\mathscr{B}} \underset{\mathbf{C}[s]}{\otimes} \mathfrak{N}=\mathbf{C}[s]_{\mathscr{B}} \underset{\mathbf{C}[s]}{\otimes} \mathfrak{M}.$$

Puisque $\mathfrak{N}$ est de type fini sur $\mathbf{C}[s]$, on peut de plus supposer (quitte à changer b) que ce $\mathbf{C}[s]_{\mathscr{B}}$-module est libre de type fini et, quitte à faire un changement linéaire entier de coordonnées, que, quel que soit $\sigma\in\mathbf{Z}^p$, s_p ne divise pas $b(s+\sigma)$. Soit $i_p:\{s_p=0\}\hookrightarrow \operatorname{Spec}\mathbf{C}[s]$ l'inclusion. Comme cette inclusion est assez générale, on en déduit que

$$\mathbf{C}(s') \underset{\mathbf{C}[s']}{\otimes} i_p^* \mathfrak{N}=\mathbf{C}(s') \underset{\mathbf{C}[s']}{\otimes} i_p^* \mathfrak{M}$$

(on a en fait déjà égalité par platitude en localisant hors de $\mathscr{B}'=i_p^*\mathscr{B}$). Par récurrence on a alors :

$$\chi(L\, i^* \mathfrak{M})=\chi(L\, i'^*\, i_p^* \mathfrak{M})=\dim_{\mathbf{C}(s')} i_p^* \mathfrak{M}(s')=\dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s),$$

la première égalité provenant du fait que, puisque $\mathscr{H}^{-1} L\, i_p^* \mathfrak{M}$ est holonome et de $\mathbf{C}[s']$-torsion, on a par récurrence $\chi(L\, i'^*(\mathscr{H}^{-1} L\, i_p^* \mathfrak{M}))=0$. □

Montrons $(a)\Leftrightarrow(c)$. Soit d'abord $\mathfrak{M}'$ isomorphe à un produit tensoriel sur $\mathbf{C}[s]$ de modules $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$ avec P et Q sans zéro commun mod. $\mathbf{Z}$. Alors $\mathfrak{M}'$ est holonome et $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}'(s)$ ([2], lemme 1). De plus $\mathfrak{M}'$ contient au moins un sous-module irréductible $\mathfrak{M}$ non trivial (les modules holonomes sont de longueur finie) et celui-ci est de rang générique égal à 1 sur $\mathbf{C}[s]$. Un tel sous-module est unique : soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux tels sous-modules distincts; on a alors $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2=\{0\}$ d'où un morphisme injectif $\mathfrak{M}_1\to\mathfrak{M}'/\mathfrak{M}_2$; ce dernier module étant de torsion, la flèche est nulle et par suite $\mathfrak{M}_1=\{0\}$. Maintenant $(c)\Rightarrow(a)$ est clair.

Inversement, si $\mathfrak{M}$ est irréductible de rang générique égal à 1, on a $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}(s)$. Il existe $\mathfrak{M}'$ isomorphe à un produit tensoriel de modules $\mathscr{H}_{\mathrm{P,Q,L}}$ (avec P et Q sans zéro commun mod. $\mathbf{Z}$) tel que $\mathfrak{M}(s)=\mathfrak{M}'(s)$ (*voir* [2], lemme 3). Soit alors $\mathfrak{M}_1'$ l'unique sous-module irréductible de $\mathfrak{M}'$. On voit comme dans la preuve de l'implication $(a)\Rightarrow(c)$ du théorème 1 de [2] que l'on a $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1'$. □

Note remise le 2 mars 1992, acceptée le 12 octobre 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. LOESER et C. SABBAH, Équations aux différences et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, *Comment. Math. Helv.*, 66, 1991, p. 458-503.

[2] F. LOESER et C. SABBAH, Caractérisation des $\mathscr{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, série I, 1991, p. 735-738.

U.R.A. D 0169 *du C.N.R.S.*,
Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 *Palaiseau.*