Analyse harmonique invariante sur les groupes réductifs : théorèmes de densité et de régularité

Luminy, 13-17 septembre 2010,

David Renard, Centre de mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique

http://www.math.polytechnique.fr/~renard/

I. Motivation : les groupes compacts.

G groupe fini.

$\mathcal{F}(G)^G$: espace des fonctions sur G (à valeurs complexes) constantes sur les classes de conjugaison.

$\widehat{G}$: ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G.

Si $\pi \in \widehat{G}$, $\Theta_\pi(g) = \mathbf{Tr}(\pi(g))$: caractère de π.

$\mathcal{F}(G)^G$ admet deux bases naturelles :

— $(\mathbf{1}_C)_{C \in \mathbf{Conj}(G)}$: fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de G

— $(\Theta_\pi)_{\pi \in \widehat{G}}$: base orthonormale pour le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)}\, f_2(g).$$

G groupe compact, muni de μ, mesure de Haar.

- G groupe de Lie compact : $\mathcal{D}(G) = \mathcal{C}^\infty(G)$
- G groupe profini : $\mathcal{D}(G) =$ fonctions localement constantes.

$\mathcal{D}'(G) \supset \mathcal{D}'(G)^G$: distributions sur G et distributions invariantes.

$f \in \mathcal{D}(G)$, (π, V) représentation de dimension finie

$$\pi(f) = \int_G f(g)\, \pi(g)\, d\mu(g).$$

Alors $\pi(f) \in \mathrm{E}nd(V)$ et
$[f \mapsto \Theta_\pi(f) := \mathrm{T}r\pi(f)] \in \mathcal{D}'(G)^G$.

$$\Theta_\pi(f) = \int_G f(g)\, \Theta_\pi(g)\, d\mu(g).$$

Théorème : (Densité spectrale) $(\Theta_\pi)_{\pi\in\widehat{G}}$ est dense dans $\mathcal{D}'(G)^G$.

Rmq : abus de langage : on dira qu'une famille F est dense dans $\mathcal{D}'(G)^G$ si la propriété suivante est vraie pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$:

$$(\forall T \in F,\ T(f) = 0) \Rightarrow (\forall T \in \mathcal{D}'(G)^G,\ T(f) = 0).$$

Intégrales orbitales

$f \in \mathcal{D}(G)$, $x \in G$,

$$\Phi_f(x) = \int_G f(gxg^{-1})\, d\mu(g).$$

$\Phi_f \in \mathcal{D}(G)^G$ et $\forall x \in G$,
$I(x) : f \mapsto \Phi_f(x) \in \mathcal{D}'(G)^G$.

Théorème : (Densité géométrique)

La famille $(I(x))_{x\in G}$ est dense dans $\mathcal{D}'(G)^G$.

Formule d'intégration de Weyl

$$\begin{aligned}\Theta_\delta(f) &= \int_G f(g)\Theta_\delta(g)\,d\mu(g)\\ &= \frac{1}{|W_T|}\int_T |D_G(t)|\Phi_f(t)\Theta_\delta(t)\,dt\end{aligned}$$

formellement :

$$\Theta_\delta = \frac{1}{|W_T|}\int_T |D_G(t)|\Theta_\delta(t)I(t)\,dt. \qquad (1)$$

Formule des traces

$f_1, f_2 \in \mathcal{D}(G)$,

L et R, représentations régulières gauche et droite de G sur $L^2(G,\mu)$.

$$L(f_1)\circ R(f_2) \text{ opérateur sur } L^2(G,\mu).$$

Opérateur intégral de noyau :

$$K(x,y) = \int_G f_1(t)f_2(x^{-1}ty)\,d\mu(t).$$

$L(f_1) \circ R(f_2)$: opérateur à trace et

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Tr}[L(f_1) \circ R(f_2); L^2(G,\mu)] \\
&= \int_G K(x,x)\, d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G f_1(t) f_2(x^{-1}tx)\, d\mu(x) d\mu(t). \\
&= \int_G \int_G \int_G f_1(y^{-1}ty) f_2(x^{-1}tx)\, d\mu(x) d\mu(y) d\mu(t) \\
&= \int_G \Phi_{f_1}(t) \Phi_{f_2}(t)\, d\mu(t).
\end{aligned}$$

Théorème de Peter-Weyl (décomposition de $L^2(G,\mu)$) :

$$L^2(G,\mu) = \widehat{\bigoplus}_{\delta \in \widehat{G}} V_\delta \otimes V_\delta^*$$

donne

$$\mathbf{Tr}[L(f_1) \circ R(f_2); L^2(G,\mu)] = \sum_{\delta \in \widehat{G}} \Theta_\delta(f_1) \Theta_{\delta^*}(f_2).$$

égalité des parties géométrique et spectrale :

$$\sum_{\delta \in \widehat{G}} \Theta_\delta(f_1) \Theta_{\delta^*}(f_2) = \int_G \Phi_{f_1}(g) \Phi_{f_2}(g)\, d\mu(g).$$

On en déduit :

formule d'inversion des intégrales orbitales :

$$\boldsymbol{\Phi_f(x) = \sum_{\delta \in \widehat{G}} \Theta_\delta(x) \Theta_{\delta^*}(f).}$$

Comme identité de distribution, ceci s'écrit :

$$\boldsymbol{I(x) = \sum_{\delta \in \widehat{G}} \Theta_\delta(x) \Theta_{\delta^*}.} \tag{2}$$

En résumé,

— densité des intégrales orbitales dans les distributions invariantes (densité géométrique),

— densité des caractères de réprésentations irréductibles dans les distributions invariantes (densité spectrale),

— formule du caractère d'une réprésentation irréductible,

— formule d'inversion des intégrales orbitales.

formule de Plancherel :

$$\boldsymbol{f(e) = \sum_{\delta \in \widehat{G}} \dim(\delta)\Theta_\delta(f).}$$

Si $\boldsymbol{f}$ est un coefficient matriciel de $\boldsymbol{\delta} \in \widehat{\boldsymbol{G}}$,

$$\boldsymbol{\Theta_\delta(g) = \dim(\delta)\ \Phi_f(g).}$$

II. Enoncé des résultats.

G : groupe des points rationnels d'un groupe algébrique connexe réductif $\mathbb{G}$ défini sur un corps local $\mathbb{F}$ de caractéristique 0.

μ : mesure de Haar sur G

$\mathcal{D}(G)$: espace des fonctions lisses à support compact (à valeurs complexes) sur G.

$\mathbb{F}$ archimédien, lisse $= \mathcal{C}^\infty$, $\mathbb{F}$ non archimédien, lisse $=$ localement constant.

$\mathcal{D}'(G) \supset \mathcal{D}'(G)^G$: distributions sur G et distributions invariantes.

$\mathcal{M}(G)$: catégorie des représentations lisses de G ($\mathbb{F}$ non archimédien) ou catégorie des représentations continues dans des Banachs ($\mathbb{F}$ archimédien).

$\mathbf{Irr}(G)$: ensemble des classes d'isomorphisme d'objets irréductibles dans $\mathcal{M}(G)$.

Caractères

(π, V) représentation "admissible" dans $\mathcal{M}(G)$, $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$$

est un opérateur à trace et

$$f \in \mathcal{D}(G) \mapsto \Theta_\pi(f) = \mathbf{Tr}(\pi(f))$$

définit une distribution invariante sur G.

Les représentations irréductibles de $\mathcal{M}(G)$ sont admissibles.

Théorème (Indépendance linéaire des caractères)

Les distributions Θ_π, $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, sont linéairement indépendantes.

Théorème (Densité des caractères) $(\Theta_\pi)_{\pi \in \mathbf{Irr}(G)}$ est dense dans $\mathcal{D}'(G)^G$

$\mathbf{Irr}(G)_{temp} \subset \mathbf{Irr}(G)_{unit}$ représentations irréductibles tempérées, unitaires de G

(tempérées = intervenant dans la décomposition de la représentation régulière de G dans $L^2(G, \mu)$).

Théorème (Densité des caractères tempérés)

$(\Theta_\pi)_{\pi \in \mathbf{Irr}(G)_{temp}}$ est dense dans $\mathcal{D}'(G)^G$

découle de la classification de Langlands.

G_{reg} : ouvert dense des éléments semisimples réguliers de G.

F : fonction analytique sur G_{reg} ($\mathbb{F}$ non archimédien = localement constante), localement L^1 et invariante par conjugaison.

$$f \in \mathcal{D}(G) \mapsto \int_G F(g) f(g)\, dg.$$

est une distribution invariante sur G.

Terminologie (non standard) : on dit que Θ est "régulière", représentée par F.

Théorème (Régularité des caractères) Les distributions Θ_π, $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, sont régulières.

Notation : F_π représente Θ_π,

$$\Theta_\pi(f) = \int_G F_\pi(g) f(g)\, dg.$$

Intégrales orbitales

$x \in G$, $\mathbb{G}^x$ son centralisateur : groupe algébrique de composante neutre $(\mathbb{G}^x)_0$.

G^x le groupe des points rationnels de $(\mathbb{G}^x)_0$.

Proposition $\forall x \in G$, G^x unimodulaire, et G/G^x est muni d'une mesure G invariante $d\dot{g}$.

$f \in \mathcal{D}(G)$

$$I(x)(f) = \int_{G/G^x} f(gxg^{-1})\, d\dot{g}.$$

(Deligne-Rao) $I(x)$ est une distribution invariante sur G.

Théorème de densité géométrique $(I(x))_{x\in G_{reg}}$ est dense dans $\mathcal{D}'(G)^G$.

x est régulier dans G, $(\mathbb{G}^x)_0$ est un tore maximal (notons-le $\mathbb{T}$).

$$J(f)(x) = |D_G(x)|^{1/2} \int_{G/T} f(gxg^{-1})\, d\dot{g}.$$

Formule d'intégration de Weyl :

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = \sum_{[T]} \frac{1}{|W_T|} \int_T |D_G(t)|^{1/2} J(f)(t)\, dt$$

+ théorème de régularité, donne une décomposition du caractère d'une représentation irréductible π en intégrales orbitales :

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{[T]} \frac{1}{|W_T|} \int_T |D_G(t)|^{1/2} F_\pi(t) J(f)(t)\, dt$$

Réciproquement, une formule décomposant une intégrale orbitale régulière en terme de caractères de distributions tempérées irréductibles s'appelle une "formule d'inversion des intégrales orbitales".

III. Résultats sur l'algèbre de Lie.

$\mathfrak{g} = \mathbf{Lie}(G)$.

$\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}(\mathfrak{g})^G$: notations analogues aux précédentes.

Intégrales orbitales.

$\mathcal{O} = G \cdot X$ orbite adjointe dans $\mathfrak{g}$: variété symplectique, muni d'une forme volume G-invariante (forme de Liouville)

$\mathcal{O} \simeq G/G^X$ muni d'une mesure G-invariante $d\dot{g}$.

$f \in \mathcal{D}(G)$, $\mathcal{O} = G \cdot X$,

$$\mu_{\mathcal{O}}(f) = \int_{G/G^X} f(g \cdot X)\, d\dot{g}.$$

(Deligne-Rao) $\mu_{\mathcal{O}}$ est une distribution invariante sur G.

$\mathfrak{g}_{reg}$: ouvert dense des éléments semisimple réguliers de $\mathfrak{g}$.

<u>Théorème de densité géométrique</u> $(\mu_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_{reg}}$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

Quel est l'analogue sur G des caractères de représentations irréductibles sur G ?

réponse : les tranformées de Fourier d'orbites.

κ : forme bilinéaire symétrique non dégénérée G-invariante sur $\mathfrak{g}$.

χ : caractère additif non trivial sur $\mathbb{F}$.

<u>Transformation de Fourier</u>

$$\hat{f}(Y) := \int_{\mathfrak{g}} f(X)\chi(\kappa(X, Y))\, dX$$

Si $\mathbb{F}$ non archimédien, $f \mapsto \hat{f}$ isomorphisme de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ sur lui-même.

Si $\mathbb{F}$ archimédien, $f \mapsto \hat{f}$ isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ sur lui-même (espace de Schwartz).

$$\widehat{T}(f) := T(\hat{f})$$

si $T \in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})$ ou $T \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ dans le cas archimédien.

Si $X \in \mathfrak{g}_{reg}$, $\mathcal{O} = G \cdot X$ est fermée, et $\mu_{\mathcal{O}}$ est tempérée. Si X est nilpotent, $\mu_{\mathcal{O}}$ est homogène et donc tempérée.

<u>Théorème de régularité</u> $(\widehat{\mu}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_{reg}}$ est une distribution régulière sur $\mathfrak{g}$.

On a même une version plus forte de ce théorème :

<u>Théorème de régularité (version forte)</u>

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$ une distribution à support compact modulo G. Alors $\widehat{T}$ est une distribution régulière.

Pour donner plus de détails et entrer un petit peu dans les démonstrations, il convient de séparer les cas archimédien et non archimédien, car la théorie s'articule différemment et les méthodes utilisées ne sont pas les mêmes.

archimédien : équations différentielles...

non archimédien : “rigidité” des fonctions localement constantes...

IV. $\mathbb{F}$ non-archimédien.

$\mathbb{F}$: extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

G, $\mathfrak{g}$, ... comme précédemment.

Théorème de Howe.

Ω : ouvert de $\mathfrak{g}$, compact modulo G, G-invariant.

$\mathcal{D}'(\mathfrak{g})_\Omega^G$: distributions invariantes à support dans Ω.

L : réseau dans $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{D}(\mathfrak{g}/L)$: fonctions à support compact constantes sur les classes modulo L.

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \varinjlim_{L} \mathcal{D}(\mathfrak{g}/L)$$

$$j_L : \mathcal{D}'(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathfrak{g}/L) : \text{restriction}$$

<u>Théorème de Howe :</u> $\dim(j_L(\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_\Omega)) < +\infty.$

Démonstration difficile. Utilise de manière fine la géométrie des orbites dans $\mathfrak{g}$, le théorème de Jacobson-Morosov sur les éléments nilpotents ...

Autre démonstration : (Barbasch-Moy) : propriétés de l'immeuble de Bruhat-Tits de G.

<u>Théorème de régularité</u> $(\widehat{\mu}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}_{reg}}$ est une distribution régulière sur $\mathfrak{g}$.

Démonstration : utilise le théorème de Howe (et beaucoup d'autres choses...).

Théorème $(\mu_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}}$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

C'est la forme faible du théorème de densité géométrique (forme forte : orbites régulières).

Reformulation : $\mathcal{D}(\mathfrak{g})_0$: sous-espace engendré par les fonctions de la forme $f - f^g$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, $g \in G$.

Il est clair que si $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})_0$ et si $T \in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$, $T(f) = 0$.

le théorème est équivalent à

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g})_0 = \{f \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) | \mu_{\mathcal{O}}(f) = 0, \forall \mathcal{O}\}$$

Dem : Pas trop dur ... Argument topologique basé sur l'idée suivante :

Lemme : X espace toplogique localement compact totalement discontinu, $U \subset X$ ouvert.

$$0 \to \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X \setminus U) \to 0$$

est une suite exacte.

Théorème de densité géométrique $(\mu_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}_{reg}}$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

dem : les méthodes "usuelles" réduisent le problème à :

$\mathcal{O}$: orbite nilpotente. Alors $\mu_{\mathcal{O}}$ est dans l'adhérence des intégrales orbitales régulières.

Lemme : $\mathcal{N}$: cône nilpotent de $\mathfrak{g}$: union finie d'orbites nilpotentes.

$\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_{\mathcal{N}}$: distributions invariantes à support dans $\mathcal{N}$.

Une base de $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_{\mathcal{N}}$ est donnée par les $\mu_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ nilpotente.

Ensuite, on utilise l'homogénéité des distributions $\mu_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ nilpotente.

Corollaire :

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g})_0 = \{f \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) | \mu_{\mathcal{O}}(f) = 0, \forall \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_{reg}\}$$

Germes de Shalika.

$\mathcal{N}$: cône nilpotent de $\mathfrak{g}$: union finie d'orbites nilpotentes $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s$.

Théorème : il existe des fonctions $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ sur $\mathfrak{g}_{reg}$ telles que :

$\forall f \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, $\exists \mathcal{V}_f$ voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que

$$\mu_X(f) = \sum_i \Gamma_i(X)\mu_{\mathcal{O}_i}(f), \quad (X \in \mathcal{V}_{reg}).$$

Les germes des Γ_i en 0 sont uniques.

$\mathcal{O}$: orbite nilpotente. On a vu que $\mu_{\mathcal{O}}$ est dans l'adhérence des intégrales orbitales régulières. Ceci est équivalent à l'indépendance linéaire des germes de Shalika sur tout voisinage de 0.

Théorème : Ω ouvert G-invariant compact modulo G. Si $T \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})^G_\Omega$, alors $\widehat{T}$ est régulière.

De plus, il existe un ouvert G-invariant $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$ contenant 0 tel que

$(\forall T \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})^G_\Omega)$, $\exists c_{\mathcal{O}}(T) \in \mathbb{C}$, tels que

$$\widehat{T} = \sum_{\mathcal{O} \text{ nilpotente}} c_{\mathcal{O}}(T)\widehat{\mu}_{\mathcal{O}}$$

(comme fonction sur $\mathcal{V}_{reg}$).

Dém : L réseau dans $\mathfrak{g}$. La restriction de T à $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/L)$ coïncide avec la restriction d'une combinaison linéaires d'intégrales orbitales régulières (Thm de Howe + thm de densité géométrique). Comme $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est limite inductive des $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/L)$, on conclut.

Sur le groupe :

Les théorèmes de régularité des caratères et de densité géométrique se déduisent de ceux sur l'algèbre de Lie, via $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Théorème : développement local des caractères.

$\pi \in \mathrm{Irr}(G)$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ et des constantes $c_{\mathcal{O}}(\pi)$ telles que $\forall X \in \mathcal{V}_{reg}$:

$$\Theta_\pi(\exp X) = \sum_{\mathcal{O} \text{ nilpotente}} c_{\mathcal{O}}(\pi)\widehat{\mu}_{\mathcal{O}}(X).$$

Les constantes $c_{\mathcal{O}}(\pi)$ sont des invariants très intéressant des représentations. Par exemple :

— Si $\pi \in \mathrm{Irr}(G)_{temp}$, π est une série discrète ssi $c_{\{0\}}(\pi) \neq 0$.

— G déployé, $\mathcal{O}$ orbite nilpotente régulière : $c_{\{0\}}(\pi) \neq 0$ ssi π admet un modèle de Whittaker.

Références : :

Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups,

University Lecture Series, volume 16,

Preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr., American Mathematical Society.

Kottwitz, Robert E., Harmonic analysis on reductive p-adic groups and Lie algebras,

Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., Vol. 4, Amer. Math. Soc.

Isomorphisme de Bernstein :

$\mathcal{R}(G)$: Groupe de Grothendieck des modules de longueur fini de $\mathcal{M}(G)$.

($\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathbf{Irr}(G)$)

$\mathcal{R}(G)_{\mathbb{C}} = \mathcal{R}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On a un accouplement :

$$\mathcal{D}(G) \times \mathcal{R}(G)_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}.$$

$\underline{\mathcal{D}(G)}$: coinvariant $= \mathcal{D}(G)/\mathcal{D}(G)_0$

$\mathcal{D}(G)_0$: espace engendré par les fonctions de la forme $f - f^g$, $f \in \mathcal{D}(G)$, $g \in G$.

On a vu que $\mathcal{D}(G)_0$ est l'espace des fonctions annulant toutes les distributions invariantes et aussi l'espace des fonctions annulant toutes les intégrales orbitales régulières

Le théorème de densité spectrale est équivalent à :
$(*)$: $\mathcal{D}(G)_0$ est l'espace des fonctions annulant tous les caractères de représentations irréductibles.

Comme $\subset$ est trivial, on a un accouplement

$$\underline{\mathcal{D}(G)} \times \mathcal{R}(G)_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}.$$

$$\Phi : \underline{\mathcal{D}(G)} \to \mathcal{R}(G)^*_{\mathbb{C}}$$

Image ? $\mathcal{PW}(G) \subset \mathcal{R}(G)^*_{\mathbb{C}}$: espace des formes F telles que :

(i) $\exists K$ sous-groupe ouvert compact de G, $\forall(\pi, V) \in \mathbf{Irr}(G)$,

$$F(\pi) \neq 0 \Rightarrow V^K \neq 0$$

(ii) $P = MN$ sous-groupe parabolique. Foncteur de $\mathcal{M}(M)$ vers $\mathcal{M}(G)$, induit

$$i_P^G : \mathcal{R}(M)^*_{\mathbb{C}} \to \mathcal{R}(G)^*_{\mathbb{C}}$$

$\mathcal{X}(M)$: groupe des caractères non ramifiés de M, $\tau \in \mathbf{Irr}(M)$,

$$\psi \in \mathcal{X}(M) \mapsto F(i_P^G(\tau \otimes \psi))$$

est une fonction régulière sur la variété algébrique affine $\mathcal{X}(M)$.

Théorème (Isomorphisme de Bernstein) :

L'image de Φ est exactement $\mathcal{PW}(G)$ et de plus Φ est injective.

$$\Phi : \underline{\mathcal{D}(G)} \simeq \mathcal{PW}(G).$$

La surjectivité est le théorème de Paley-Wiener démontré par Bernstein-Deligne et Kazhdan.

L'injectivité montre $(*)$, c'est-à-dire le théorème de densité spectrale.

Références : :

— Bernstein J., Deligne, P et Kazhdan, D., Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups,

Journal d'Analyse Mathématique, VOL. 47, 1986.

— Flicker, Yuval Z., Bernstein's isomorphism and good forms,

K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992, Proc. Sympos. Pure Math., VOL. 58, Amer. Math. Soc.

— Dat, J.-F., On the K_0 of a p-adic group,

Invent. Math., VOL. 140, No 1,(2000).

$\mathbb{F}$ archimédien : :

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{G}$, $\mathfrak{g}$: comme précédemment.

$\boldsymbol{S}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ = algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{g}$.

$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\boldsymbol{G}}$: invariants sous $\boldsymbol{G}$.

Théorème: : Soit $\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathfrak{g})^{\boldsymbol{G}}$ $\boldsymbol{I}$-finie ($\langle \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{I} \rangle$ est de dimension finie, c'est-à-dire que l'annulateur de $\boldsymbol{\Theta}$ dans $\boldsymbol{I}$ est de codimension finie). Alors $\boldsymbol{\Theta}$ est une distribution régulière.

Structure locale de $\mathfrak{g}_{reg}$ —> $\Theta_{\mathfrak{g}_{reg}}$ est régulière, représentée par F.

$\Theta - F$ a son support dans $\mathfrak{g}_{sing}$. Récurrence sur la dimension : on suppose le thérème

vraie sur les sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$ + méthode de descente.

On se ramène au problème suivant :

$\Theta \in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$ à support dans le cône nilpotent $\mathcal{N}$ et I-finie. Alors $\Theta = 0$.

Autre méthode : utilisation des $\mathcal{D}$-modules (Hotta-Kashiwara, Levasseur-Stafford).

Corollaire: : Les transformées de Fourier d'orbites régulières sont denses dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

En effet, le support de $\mu_{\mathcal{O}}$ est $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ régulière donc fermée) et ceci entraîne que I agit sur $\widehat{\mu}_{\mathcal{O}}$ par des scalaires.

X variété, G agit sur X.

$\mathcal{D}'(X)^G \subset \mathcal{D}(X)$. Problème :

Trouver un espace topologique $\mathcal{I}(X)$ (moralement, l'espace des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ sur le quotient $X//G$ si celui-ci était une variété)

et une application linéaire surjective :

$$J_X : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{I}(X)$$

de sorte que

$${}^tJ_X : \mathcal{I}(X)' \to \mathcal{D}'(X)$$

réalise un isomorphisme de $\mathcal{I}(X)'$ sur l'espace des distributions invariantes sur X.

$${}^tJ_X : \mathcal{I}(X)' \simeq \mathcal{D}'(X)^G$$

$X \in \mathfrak{g}_{reg}$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$:

$$J_{\mathfrak{g}}(f)(X) = |D_{\mathfrak{g}}(X)|^{\frac{1}{2}} \int_{G/T} f(g \cdot X)\, d\dot{g}.$$

$J_{\mathfrak{g}}(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_{reg})^G$

Harish-Chandra a donné des propriété des intégrales orbitales :

$\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_{reg})^G$: considérons les propriétés suivantes :

I_1 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: sous-algèbre de Cartan.

$\forall u \in S(\mathfrak{h})$, $\partial(u)\cdot$ est localement bornée sur $\mathfrak{h}$.

$\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{h}_{reg}$: union finie d'hyperplans (noyau des racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$).

I_2 : prolongement par continuité de ψ et ses dérivées à certains de ces hyperplans.

I_3 : (relations de sauts) : description des discontinuité sur les hyperplans restants.

I_4 : propriété du support de $\psi_{|\mathfrak{h}}$: il est compact.

$\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_{reg})^G$: fonctions ψ vérifiants les proprités I_i.

muni d'une topologie de limite inductive de Fréchet.

Proposition : :

$$J_\mathfrak{g} : \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{I}(\mathfrak{g})$$

est linéaire continue.

Théorème : :

$$J_\mathfrak{g} : \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{I}(\mathfrak{g})$$

est linéaire continue surjective et

$${}^tJ_\mathfrak{g} : \mathcal{I}(\mathfrak{g})' \simeq \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G.$$

Corollaire (Théorème de densité géométrique) : :
Les intégrales orbitales régulières sont denses dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

Corollaire : $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

démonstration du théorème : difficile.

Extension du théorème de régularité :

Théorème : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$ à support compact modulo G. Alors $\widehat{T}$ est une distribution régulière.

Grâce à $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, on déduit des résultats sur le groupe.

$x \in G_{reg}$, $x \in T$ tore maximal, $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$J_G(f)(x) = |D_G(x)|^{\frac{1}{2}} \int_{G/T} f(gxg^{-1})\, d\dot{g}$$

On définit comme sur $\mathfrak{g}$ un espace topologique $\mathcal{I}(G) \subset \mathcal{C}^\infty(G)^G$ et

$$J_G : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(G)$$

linéaire continue surjective,

$$^tJ_G : \mathcal{I}(G)' \longrightarrow \mathcal{D}'(G)^G.$$

Corollaire (Théorème de densité géométrique) : :

Les intégrales orbitales régulières sont denses dans $\mathcal{D}'(G)^G$.

Caractères

(π, V) représentation "admissible" dans $\mathcal{M}(G)$, $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$$

est un opérateur à trace et

$$f \in \mathcal{D}(G) \mapsto \Theta_\pi(f) = \mathbf{Tr}(\pi(f))$$

définit une distribution invariante sur G.

Les représentations irréductibles de $\mathcal{M}(G)$ sont admissibles.

Théorème (Indépendance linéaire des caractères)

Les distributions Θ_π, $\pi \in \mathbf{Irr}(G)$, sont linéairement indépendantes.

Problème :

Décrire les fonctions sur $\mathbf{Irr}(G)$ de la forme

$$\pi \in \mathbf{Irr}(G) \mapsto \Theta_\pi(f)$$

où $f \in \mathcal{D}(G)$. (Théorème de type Paley-Wiener).

la classification de $\mathbf{Irr}(G)$ est compliquée (classification de Langlands). ça marche plus où moins comme ça :

— on a des paramètres h^* qui sont en gros des caractères des tores maximaux T de G.

— on contruit à partir de ces paramètres des représentation de longueurs finies π_{h^*}, qui sont des "induites paraboliques de limites de séries discrètes"

— la famille $(\pi_{h^*})_{h^*}$ forme une autre base du groupe de Grothendieck $\mathcal{R}(G)$.

— "la matrice de passage" entre les deux bases $\mathbf{Irr}(G)$ et $(\pi_{h^*})_{h^*}$ du groupe de Grothendieck est théoriquement calculable (polynôme de Kazhdan-Lusztig-Vogan).

Problème équivalent

Décrire les fonctions de la forme

$$[h^* \mapsto \Theta_{h^*}(f)] = \mathcal{F}(f)$$

où $f \in \mathcal{D}(G)$.

Plus précisement, décrire un espace $\mathcal{PW}(G)$ de fonctions sur l'espace des paramètres h^* qui soit l'image de $\mathcal{D}(G)$ par la transformation de Fourier $\mathcal{F}$.

T_i : système de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux dans G.

l'espace des intégrales orbitales $\mathcal{I}(G)$ admet une filtration, dont le gradué vérifie

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{I}(G)) = \oplus_i \mathcal{D}(T_i)^{W_i}$$

$\mathcal{D}(T_i)^{W_i} \subset \mathcal{D}(T_i)$ sous-espace des fonctions se transformant par un certain caractère sous l'action du groupe fini W_i.

$\mathcal{D}(T_i)^{W_i} \simeq \mathcal{PW}(T_i)^{W_i}$: théorème de Paley-Wiener classique sur les tores.

Théorème de Paley-Wiener :

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \oplus_i \mathcal{PW}(T_i)^{W_i}$$

est continue et surjective.

Corollaire (densité spectrale) :

La famille $(\Theta_{h^*})_{h^*}$ sont denses dans $\mathcal{D}'(G)^G$ (donc aussi la famille $(\Theta_\pi)_{\pi \in \mathbf{Irr(G)}}$).

Corollaire : Le noyau de $\mathcal{F}$ est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{D}(G)$ dont toutes les intégrales orbitales sont nulles (et aussi : qui annulent toutes les distributions G-invariantes).

Références : :

Varadarajan, V.S., Harmonic analysis on reductive groups, Lecture Notes in Math. 576 (1977).

— Bouaziz, A., Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives,

Invent. Math. 115 (1994).

— Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs,

Ann. Sc. de l'ENS, t. 27 (1995).

— Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs,

Journal of functional analysis, 134, nř 1 (1995).

— Quelques remarques sur les distributions invariantes dans les algèbres de Lie réductives,

Noncommutative harmonic analysis, Progr. Math. 220.