PROBLÈMES DE FONCTORIALITÉ POUR L'ENDOSCOPIE TORDUE ET LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE

DAVID RENARD
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE POITIERS
TÉLÉPORT 2, BOULEVARD MARIE ET PIERRE CURIE
BP 30179
86962 FUTUROSCOPE CEDEX
FRANCE

e-mail : renard@mathlabo.univ-poitiers.fr

Ce mémoire a été rédigé en vue de l'obtention d'une Habilitation à Diriger les Recherches. Il comporte deux parties correspondant aux deux directions principales de nos travaux : les intégrales orbitales tordues sur les groupes de Lie réductifs réels et l'endoscopie tordue d'une part, les représentations spécifiques du groupe métaplectique d'autre part.

Table des matières

Date: Septembre 2000.

I. Analyse harmonique invariante et endoscopie (pour la conjugaison tordue)

Soit X une variété, et G un groupe agissant sur X. De nombreux domaines des mathématiques peuvent se voir comme l'étude des invariants dans les espaces fonctionnels ou cohomologiques attachés à X. Par exemple, si X est une variété réelle $\mathcal{C}^\infty$ et que G est un groupe de Lie dont l'action sur X est $\mathcal{C}^\infty$, on s'intéresse à l'espace $\mathrm{Distr}(X)^G$ des distributions invariantes sous l'action de G. Plus précisement, comme $\mathrm{Distr}(X)^G$ est un sous-espace topologique de $\mathrm{Distr}(X)$ et que $\mathrm{Distr}(X)$ est le dual de $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ on cherche un espace fonctionnel $\mathcal{I}(X)$ sur X et une application linéaire continue surjective $\phi : \mathcal{C}_c^\infty(X) \to \mathcal{I}(X)$ de telle sorte que la transposée de ϕ réalise un isomorphisme topologique entre le dual de $\mathcal{I}(X)$ et $\mathrm{Distr}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c^\infty(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{I}(X) \\ \updownarrow \scriptstyle{\text{dual}} & & \updownarrow \scriptstyle{\text{dual}} \\ \mathrm{Distr}(X) & \hookleftarrow & \mathrm{Distr}(X)^G \end{array}$$

Heuristiquement, l'espace $\mathcal{I}(X)$ joue le rôle de l'espace des fonctions lisses à support compact sur l'ensemble des orbites de G dans X. Le problème est que cet ensemble est rarement une variété.

Le cas $X = G$, G réductif a été particulièrement étudié, notament par Harish-Chandra. L'aboutissement de ces travaux dans ce domaine est l'obtention de la formule de Plancherel, qui décompose la distribution de Dirac en l'élément neutre en caractères de représentations tempérées de G ([HC]). Nous nous plaçons ici dans le cadre suivant. Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra (par exemple semi-simple connexe à centre fini) et θ un automorphisme de G d'ordre fini. Au lieu de considérer l'action usuelle de G sur lui-même par conjugaison, nous considérons la conjugaison tordue :

$$(x, g) \in G \times G \mapsto gx\theta(g)^{-1}$$

La difficulté vient de ce que l'automorphisme θ n'est généralement pas un automorphisme intérieur. Les propriétés les plus simples de l'action adjointe Ad sont alors perdues lorsqu'on la remplace par $\mathrm{Ad} \circ \theta$.

L'exemple fondamental ici est celui du changement de base : soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique connexe réductif défini sur $\mathbb{R}$ et notons σ l'action de l'élément non-trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $\mathbb{G}(\mathbb{C})$. Le principe de fonctorialité de Langlands prévoit des identités de caractères entre caractères de $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ (ou plus généralement de groupes endoscopiques pour $(\mathbb{G}(\mathbb{C}), \sigma)$ et caractères tordus des repréentations σ-stables de $\mathbb{G}(\mathbb{C})$. On est donc amené à étudier la conjugaison σ-tordue sur $\mathbb{G}(\mathbb{C})$. Dans ce cadre, les résultats ont été obtenus par Shelstad [Sh5] et Bouaziz [B4].

Revenons au cas général. Dans [R1] et [R2], nous obtenons de nombreux résultats d'analyse harmonique invariante étendant ceux de Harish-Chandra et A. Bouaziz pour le cas usuel. Ceux-ci sont décrits dans la première partie. La motivation principale de ce travail est l'application à la théorie des formes automorphes, plus particulièrement à l'endoscopie tordue. Ceci est entrepris dans [RS] et fait l'objet de la seconde partie.

1. Intégrales orbitales tordues

1.1. **Géométrie de l'action tordue.** Soient G et θ comme ci-dessus. Posons $G_\theta = \langle\theta\rangle \ltimes G$, où $\langle\theta\rangle$ est le sous-groupe des automorphismes de G engendré par θ. On a :

$$(1,g)(\theta,x)(1,g^{-1}) = (\theta, gx\theta(g)^{-1}).$$

L'étude de la conjugaison tordue sur G est donc équivalente à celle de l'action par conjugaison du sous-groupe $(1,G) \simeq G$ de G_θ sur la composante (θ, G). La difficulté ici est que le groupe G_θ n'est pas dans la classe de Harish-Chandra en général, l'action adjointe de la composante (θ, G) sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ ne se factorisant pas par le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. La démarche adoptée dans [R1] et [R2] est d'introduire une classe de groupes $\mathcal{G}$ plus grande que celle de Harish-Chandra, contenant les groupes G_θ construits comme ci-dessus et d'étudier l'action d'un sous groupe ouvert $\mathcal{G}^\sharp$ de $\mathcal{G}$ dans la classe de Harish-Chandra (par exemple $\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{G}_0$, la composante neutre de $\mathcal{G}$) sur le saturé d'une composante connexe quelconque $\mathcal{G}_*$ de $\mathcal{G}$. Nous nous contenterons ici d'énoncer ces résultats dans le cadre de la conjugaison tordue. Nous commençons par introduire les notions d'éléments θ-semi-simples et θ-réguliers.

Définition 1. - Un élément x de G est θ-semi-simple si $\mathrm{Ad}\, x \circ \theta$ est un automorphisme semi-simple de G.

- Un élément x de G est θ-régulier si la multiplicité de la valeur propre 1 de $\mathrm{Ad}\, x \circ \theta$ est minimale.

On notera $G_{\theta-reg}$ l'ensemble des éléments θ-réguliers de G. La proposition suivante à pour but de mettre en évidence les différences cruciales avec situation usuelle, tout en montrant que la théorie peut néanmoins se developper de manière analogue, en faisant les adaptations nécessaires.

Proposition 2. *(i) Tout élément $g \in G$ admet une décomposition de Jordan, c'est à dire qu'il peut s'écrire $g = su$, où s est θ-semi-simple, u est de la forme $u = \exp N$, avec $N \in \mathfrak{g}$ nilpotent, et s et u commutent.*

(ii) Si $g \in G$ est θ-régulier , alors il est θ-semi-simple. Notons $\mathfrak{g}^{g\theta}$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $Ad\, g \circ \theta$. Alors $\mathfrak{g}^{g\theta}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ composée d'éléments semi-simples. De plus $\mathfrak{g}^{g\theta}$ contient des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$, en particulier $\mathfrak{h} := \mathrm{Cent}(\mathfrak{g}^{g\theta}, \mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

(iii) Soit $x \in G$ un élément θ-semi-simple. Posons $\mathfrak{z} := \mathfrak{g}^{x\theta}$ et $Z := (G^{x\theta})_0$. Alors il existe un élément θ-régulier $y \in (\exp \mathfrak{z})\, x$ tel que $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^{y\theta}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{z}$ et $\exp \mathfrak{a}$ est un tore de dimension maximale dans Z.

(iv) Un élément x de G est θ-semi-simple si et seulement si son orbite tordue $\mathcal{O}^\theta(x) := \{gx\theta(g)^{-1} \mid g \in G\}$ est fermée.

Soient $x \in G$ un élément θ-régulier, $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^{x\theta}$ et $\mathfrak{h} := \mathrm{Cent}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$. On a alors une décomposition :

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \sum_{\beta \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})} \mathfrak{g}_\mathbb{C}^\beta$$

où $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$ est le système de racines (non forcément réduit) de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, et $\mathfrak{g}_\mathbb{C}^\beta$ le sous-espace radiciel correspondant à la racine β. Le système de racines $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$ est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}$ des racines de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Le rôle prépondérant joué par les sous-groupes de Cartan dans l'analyse harmonique invariante (non-tordue) sur un groupe de la classe de Harish-Chandra est dû à l'utilisation de la méthode de descente, et au fait que les sous-groupes de Cartan sont transverses aux orbites régulières. Il n'en est pas de même ici, ne serait-ce que pour une question de dimension. Nous introduisons donc des parties de G qui vont jouer ce rôle, et nous les appelons faute de mieux sous-espaces de Cartan.

Définition 3. Un sous-espace de Cartan de G est une partie A de la forme $A = (\exp \mathfrak{a})\, x$, où x est un élément θ-régulier de G, et $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^{x\theta}$.

Comme pour les sous-groupes de Cartan, on dispose du résultat de finitude suivant.

Proposition 4. *Le nombre de classes de conjugaison tordue de sous-espaces de Cartan de G est fini. Un élément θ-régulier est contenu dans un seul sous-espace de Cartan.*

1.2. **Caractérisation.** Soit f une fonction sur dans $G_{\theta-reg}$ invariante par conjugaison tordue. Alors f est déterminée par ses restrictions à un ensemble de représentants des classes de conjugaison tordue de sous-espaces de Cartan de G. Un cas particulier de telles fonctions est celui des intégrales orbitales tordues, que nous pouvons maintenant définir.

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Son intégrale orbitale tordue est la fonction définie sur $G_{\theta-reg}$ par

$$J^\theta(f)(x) = |\det(\mathrm{Id} - (\mathrm{Ad}\, x \circ \theta)^{-1})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}|^{\frac{1}{2}} \int_{G/\mathrm{Cent}_\theta(G,A)} f(gx\theta(g)^{-1}) \ d\dot{g}$$

où $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^{x\theta}$, $A = (\exp \mathfrak{a})\, x$ est le sous-espace de Cartan contenant x, $\mathrm{Cent}_\theta(G, A)$ est le centralisateur de A dans G pour la conjugaison tordue et $d\dot{g}$ est la mesure invariante sur le quotient, normalisée selon les conventions de Duflo-Vergne.

Il est facile de voir que $J^\theta(f)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^\infty(G_{reg})^\theta$ des fonctions sur l'ouvert dense $G_{\theta-reg}$, lisses et invariantes par conjugaison tordues. Un de nos principaux résultats est la caractérisation des intégrales orbitales par un ensemble de quatre propriétés, notées I_1, I_2, I_3 et I_4. Nous ne les rappelerons pas ici et renvoyons plutôt à [R1], Section 9. Nous notons $\mathcal{I}^\theta(G)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(G_{reg})^\theta$ des fonctions vérifiant I_1, I_2, I_3 et I_4. L'espace $\mathcal{I}^\theta(G)$ est muni d'une topologie de limite inductive d'espaces de Fréchet, et nous noterons $\mathcal{I}^\theta(G)'$ son dual. Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat :

Théorème 6. *(*[R1]*, théorème 9.4.) L'application J^θ est linéaire, continue et surjective de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ sur $\mathcal{I}^\theta(G)$, et sa transposée ${}^tJ^\theta$ realise un isomorphisme de $\mathcal{I}^\theta(G)'$ sur l'espace* $\mathrm{Distr}(G)^\theta$ *des distributions invariantes par conjugaison tordue sur G.*

Corollaire 7. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(G)^\theta$ est dense dans* $\mathrm{Distr}(G)^\theta$ *(pour la topologie faible) ainsi que l'espace engendré par les distributions de la forme $f \mapsto J^\theta(f)(x)$, $x \in G_{\theta-reg}$*

1.3. **Filtration de $\mathcal{I}^\theta(G)$.** Nous allons maintenant décrire une filtration de $\mathcal{I}^\theta(G)$. Tout sous-espace de Cartan A de G admet une décomposition

$$A = (\exp \mathfrak{a}_R)\, A_I \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{a}_R$$

où A_I (resp. $\mathfrak{a}_I$) est l'ensemble de éléments elliptiques de A (resp. de $\mathfrak{a}$) et $\mathfrak{a}_R$ est l'ensemble des éléments hyperboliques de $\mathfrak{a}$. On filtre l'espace $\mathcal{I}^\theta(G)$ par la suite de sous-espace $\mathcal{I}^\theta_j(G)$, où $\mathcal{I}^\theta_j(G)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{I}^\theta(G)$ des fonctions dont la restriction à tout sous-espace de Cartan de G dont la dimension de la partie hyperbolique est strictement plus grande que j est nulle. Les propriétés I_2 et I_3 entrainent que pour tout fonction ψ dans $\mathcal{I}^\theta_j(G)$, pour tout sous-espace de Cartan A de G dont la dimension de la partie hyperbolique est égale à j, pour tout système de racines imaginaires positives de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, la fonction $b_P\psi$ se prolonge par continuité une fonction lisse sur A tout entier, où b_P est le facteur de normalisation de harish-Chandra.

Soient $\mathrm{Cent}_\theta(G,A)$ (resp. $\mathrm{Norm}_\theta(G,A)$) le centralisateur (resp. le normalisateur) pour la conjugaison tordue de A dans G. On notera $W_\theta(G,A)$ le quotient du second de ces groupes par le premier.

Notons $\mathcal{C}^\infty_c(A)^P$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty_c(A)$ des fonctions ϕ se transformant sous l'action du groupe $W_\theta(G,A)$ comme la fonction b_P. On peut définir un projecteur continu de $\mathcal{C}^\infty_c(A)$ sur $\mathcal{C}^\infty_c(A)^P$ par le procédé de moyenne habituel, de sorte que $\mathcal{C}^\infty_c(A)^P$ est un facteur topologique direct de $\mathcal{C}^\infty_c(A)$.

Soit $j\in\mathbb{N}$. On choisit un système de représentants $A_1^j,\ldots,A_{k_j}^j$ des classes de conjugaison tordues de sous-espaces de Cartan de G dont la partie hyperbolique est de dimension j. On choisit pour chacun deux un système de racines imaginaires positives P_i dans $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{a}^j_{i,\mathbb{C}})$. On pose

$$\begin{aligned}\Pi_j\,:\,\mathcal{I}^\theta_j(G)&\to\bigoplus_{1\leq i\leq k_j}\mathcal{C}^\infty_c(A_i^j)^{P_i}\\ \psi&\mapsto\sum_{1\leq i\leq k_j}b_{P_i}\psi_{A_i^j}\end{aligned}$$

Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 8. *L'application Π_j est linéaire, continue et surjective, et sa transposée réalise un isomorphisme de $\oplus_{1\leq i\leq k_j}(\mathcal{C}^\infty_c(A_i^j)^{P_i})'$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}^\theta_{j-1}(G)$ dans $(\mathcal{I}^\theta_j(G))'$.*

1.4. **Théorème de Paley-Wiener et formule d'inversion.** En nous inspirant des travaux de A.Bouaziz ([B1] et [B2]) obtenons une formule d'inversion des intégrales orbitales qui prend la forme suivante :

$$J^\theta(f)(x)=\sum_{[A]}\frac{1}{|W_\theta(G,A)|}\int_{\widehat{A}_u}\Theta_{h^*,P}(f)\Psi_{h^*,P}(x)\,dh^*. \tag{1}$$

Explicitons les objets apparaissant dans cette formule :

- la notation $\sum_{[A]}$ exprime le fait que la somme est prise sur un système de représentants des classes de conjugaison tordues de sous-espaces de Cartan de G.

- soit A un sous-espace de Cartan de G et soit P un système de racines imaginaires positives de $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{a}_\mathbb{C})$. Soit $\widehat{A}$ l'ensemble des fonctions h^* de A dans $\mathbb{C}^*$ telles qu'il existe $\nu\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ de sorte que pour tout $a\in A$, pour tout $X\in\mathfrak{a}$ on ait $h^*((\exp X)\,a)=h^*(a)e^{\nu(X)}$. Le paramètre h^* est un élément de $\widehat{A}$. L'espace $\hat{A}_u$ est le sous-ensemble de $\widehat{A}$, dépendant du choix d'un élément a_0 de A, des fonctions h^* telles que $h^*(a_0)=1$

et telles que la translation par a_0 définisse un caractère unitaire du groupe abélien $\exp \mathfrak{a}$.

- les $\Theta_{h^*,P}$ sont des distributions invariantes par conjugaison tordue sur G, propres pour l'action de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ (le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) considéré comme une algèbre d'opérateurs différentiels sur G. Ce sont en gros des caractères tordus de représentations standards de G. Elles sont construites dans les sections 15 et 16 de [R1].

- les $\Psi_{h^*,P}$ sont des fonctions orbitales propres pour l'action naturelle de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Elles sont construites dans les section 7 et 8 de [R2]

- deux sous-espaces de Cartan conjugués par conjugaison tordue paramètrent les mêmes ensembles de distributions et de fonctions orbitales.

La formule (1) peut s'interpréter comme la décomposition de la fonction orbitale $J^\theta(f)$ en somme de fonctions orbitales propres sous l'action de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Ces fonctions $\Psi_{h^*,P}$ ne sont toutefois pas dans $\mathcal{I}^\theta(G)$, car les équations différentielles qu'elles satisfont empêchent que la condition de compacité de leur support I_4 puisse être vérifiée. Nous introduisons donc un autre espace $\mathcal{I}^{\theta,\infty}(G)$ muni d'une topologie d'espace de Fréchet et contenant $\mathcal{I}^\theta(G)$ comme sous-espace dense en relaxant la condition I_4. L'action de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur $\mathcal{I}^\theta(G)$ se prolonge de façon naturelle à $\mathcal{I}^{\theta,\infty}(G)$.

Nous obtenons alors un théorème du type Paley-Wiener invariant. Pour A et P comme ci-dessus, on définit la transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ en un élément h^* de $\widehat{A}$ par

$$\hat{\varphi}(h^*) = \int_A \varphi(h)h^*(h)\,dh$$

On note $\mathcal{PW}(A)^P$ l'espace des fonctions F sur $\widehat{A}$ transformées de Fourier de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ et vérifiant

$$F(w[h^*]) = \epsilon_1(w)F(h^*) \qquad w \in W_\theta(G,A),\ h^* \in \widehat{A}.$$

que l'on munit d'une topologie d'espace LF de sorte que la transformée de Fourier soit un isomorphisme d'espaces topologiques. Alors, si $f \in \mathcal{I}^{\theta,\infty}(G)$, la fonction

$$\mathcal{F}(f)_{|A} : \quad h^* \mapsto \Theta_{h^*,P}(f)$$

est dans $\mathcal{PW}(A)^P$. Choisissons des représentants $A_1, \dots, A_s$ des classes de conjugaison tordues de sous-espaces de Cartan de G, et pour chacun d'entre eux, un système de racines positives imaginaires pures P_i, $1 \leq i \leq s$. Nous montrons que la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \quad \mathcal{C}_c^\infty(G) \to \bigoplus_{1\leq i\leq s} \mathcal{PW}(A_i)^{P_i}$$

définie par $\mathcal{F}(f) = \sum_{1\leq i\leq s} \mathcal{F}(f)_{|A_i}$ est continue et surjective. L'application $\mathcal{F}$ induit une application continue surjective

$$\overline{\mathcal{F}} : \quad \mathcal{I}^\theta(G) \to \bigoplus_{1\leq i\leq s} \mathcal{PW}(A_i)^{P_i}$$

qui est en fait un isomorphisme topologique. Nous en déduisons un isomorphisme topologique

$$\mathcal{I}^\theta(G) \simeq \bigoplus_{1\leq i\leq s} \mathcal{C}_c^\infty(A_i)^{P_i}.$$

L'isomorphisme entre $\mathcal{C}_c^\infty(A_i)^{P_i}$ et $\mathcal{PW}(A_i)^{P_i}$ étant essentiellement le théorème de Paley-Wiener classique pour le groupe abélien $\exp \mathfrak{a}$. La formule (1) explicite l'isomorphisme réciproque. En effet soit A un sous-espace de Cartan de G. On fixe une "norme" $||.||$ sur $\widehat{A}$ et l'on montre que pour toute semi-norme continue p sur $\mathcal{I}^{\theta,\infty}(G)$, la fonction $h^* \mapsto p(\Psi_{h^*,P})$ est à croissance polynomiale sur $\widehat{A}_u$. Donc pour tout élément F de $\mathcal{PW}(A)$ l'intégrale

$$\frac{1}{|W_\theta(G,A)|}\int_{\widehat{A}_u} F(h^*)\Psi_{h^*,P}\, dh^*$$

est scalairement intégrable. Elle définit alors un élément $\Psi_{F,P}$ de $\mathcal{I}^{\theta,\infty}(G)$ car cet espace est réflexif. On peut montrer en utilisant le théorème de Paley-Wiener classique qu'elle est en fait dans $\mathcal{I}^\theta(G)$.

On peut donc former, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, la fonction

$$\Psi = \sum_{[A]} \Psi_{\mathcal{F}(f)_{|A},P}.$$

On montre d'abord que cette fonction orbitale est dans $\mathcal{I}^\theta(G)$. Afin d'établir la formule d'inversion, il ne reste plus à montrer que $\Psi = J^\theta(f)$, et pour cela, il suffit de montrer que la différence est annulée par une partie dense du dual topologique $\mathcal{I}^\theta(G)'$ de $\mathcal{I}^\theta(G)$. Cette partie dense est le sous-espace engendré par les éléments $\theta_{h^*,P}$ tels que ${}^tJ^\theta(\theta_{h^*,P}) = \Theta_{h^*,P}$. On vérifie que pour tout sous-espace de Cartan A de G et tout $h^* \in \widehat{A}$ on a

$$\theta_{h^*,P}(\Psi - J^\theta(f)) = 0.$$

Ceci montre que $\Psi = J^\theta(f)$ et on obtient la formule d'inversion.

2. Endoscopie tordue

Les facteurs de transfert pour l'endoscopie tordue ont été définis par Kottwitz et Shelstad dans [KS]. Nous démontrons que ces facteurs définissent un transfert d'intégrales orbitales (tordues) entre un groupe algébrique réductif G défini sur $\mathbb{R}$ et un groupe algébrique réductif quasi-déployé H_1 associé à des données endoscopiques. Notons que pour les groupes p-adiques, le transfert endoscopique d'intégrales orbitales est toujours conjectural, même dans le cas non tordu. Dans cette section, nous traitons exclusivement de groupes algébriques, et les conventions de notation sont différentes de la première partie. Si G est un groupe comme ci-dessus, on l'identifie au groupe de ses points complexes $G(\mathbb{C})$, et on note $G(\mathbb{R})$ le groupe de ses points réels.

Commençons par expliquer brièvement la philosophie de Langlands du transfert endoscopique. Nous nous limiterons ici au point de vue local, sur le corps $\mathbb{R}$. Soient G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $\hat{G}$ son dual complexe, et ${}^LG = \hat{G} \rtimes_{\rho_G} W_\mathbb{R}$ une réalisation de son L-groupe ($W_\mathbb{R}$ est le groupe de Weil de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ et ρ_G désigne la L-action de $W_\mathbb{R}$ sur $\hat{G}$). Un paramètre de Langlands est un L-homomorphisme :

$$\phi : W_\mathbb{R} \to {}^LG.$$

Deux paramètres de Langlands sont équivalents s'ils sont conjugués par un automorphisme intérieur $\mathrm{Int} g$, $g \in \hat{G}$. A une classe d'équivalence de paramètres de Langlands est associée un paquet (dit "L-paquet") de représentations irréductibles admissibles de $G(\mathbb{R})$ (voir [L1]). Si ϕ est un paramètre de Langlands, on notera Π_ϕ le L-paquet qu'il définit.

Ces L-paquets sont finis, et toute les représentations dans un même paquet ont même caractère central et même caractère infinitésimal. Les paramètres de Langlands ayant une image bornée correspondent aux L-paquets tempérés. Si le caractère tempéré des représentations est respecté par les paquets de Langlands, il n'en est pas de même de l'unitarisabilité : un même paquet peut contenir une représentation unitaire et une ne l'étant pas. Cette complication mène à de très intéressants développements de la théorie des représentations unitaires (voir [Art] et [ABV]).

Supposons que nous nous donnions deux groupes H et G (algébriques, connexes, reductifs, definis sur $\mathbb{R}$), et un L-homomorphisme :

$$\epsilon : {}^L H \to {}^L G.$$

Ceci donne une applicacation entre l'ensemble des classes d'équivalence de paramètres de Langlands pour H vers l'ensemble des classes d'équivalence de paramètres de Langlands pour G. Le principe de fonctorialité de Langlands affirme qu'il devrait exister une application :

$$\epsilon_* : K\Pi(H(\mathbb{R})) \to K\Pi(G(\mathbb{R})).$$

du groupe de Grothendieck des représentations de $H(\mathbb{R})$ vers le groupe de Grothendieck représentations de $G(\mathbb{R})$, compatible avec les L-paquets (dans le sens que l'image d'un L-packet de $H(\mathbb{R})$ doit être contenu dans le sous-groupe de $K\Pi(G(\mathbb{R}))$ engendré par les représentations du L-paquet correspondant de $G(\mathbb{R})$).

Cette formulation est très approximative, et doit être raffinée lorsque nous considérons des L-paquets non tempérés. Ceci est l'un des objets de [ABV], résolvant par là-même des conjectures de J. Arthur ([Art]). L'application ϵ_* y est définie et l'on y montre quelle est compatible avec L-paquets tempérés. Lorsque H est un groupe endoscopique de G, ce résultat est généralisé à certaines représentations non-temperées (mais conjecturalement unitaires) en introduisant les paramètres d'Arthur et les paquets d'Arthur à la place de ceux de Langlands. Pour les représentations tempérées, les paquets d'Arthur sont exactement les L-paquets tempérés, et nous nous restreindrons à celles-ci dorénavant.

Les motivations pour étudier la fonctorialité de Langlands proviennent de la théorie des formes automorphes, d'un point de vue global, et sont reliées en particulier à des problème de comparaison de formules des traces pour deux groupes différents (voir[L2]). D'un point de vue local (ici, sur $\mathbb{R}$), le problème peut s'exprimer comme suit. Il est connu ([Sh1]) que la somme des caractères d'un L-paquet tempéré est une distribution stable (pour une discussion de la notion de conjugaison stable, voir [L2]). Soit Θ_ϕ la distribution stable associée à un paramètre ϕ tempéré. Maintenant, étant donné une représentation π de Π_ϕ, on a pour but d'écrire une identité de caractères reliant son caractère Θ_π et certaines distributions Θ_{ϕ_H} sur des groupes H quasi-déployés de dimension plus petite que celle de G (les groupes "endoscopiques"). Ces groupes sont tels qu'il existe un L-homomorphisme $\epsilon : {}^L H \to {}^L G$, tels que ϕ et ϕ_H sont reliés par l'égalité $\phi = \epsilon \circ \phi_H$.

Ce programme a été mené à bien dans une série d'articles de D. Shelstad (voir [Sh1], [Sh2], [Sh3], [Sh4]). Seuls un nombre fini de groupes endoscopiques H est nécessaire pour décomposer tous les caractères irréductibles tempérés de $G(\mathbb{R})$. Ce que l'on entend par "identité de caractères" inclut un moyen de comparer les classes de conjugaison de $G(\mathbb{R})$ et des groupes endoscopiques $H(\mathbb{R})$. Les "données endoscopiques" dont le groupe H fait partie pourvoie la structure nécessaire à la définition d'une correspondance géométrique entre classes de conjugaison (stables) de $G(\mathbb{R})$ et $H(\mathbb{R})$ permettant de calculer effectivement le caractère de π. Notons que ceci n'apparait pas dans notre formulation abstraite du principe de fonctorialité énoncée ci-dessus. Nous serons plus précis à ce propos une fois introduit notre contexte plus général de l'endoscopie tordue.

Soit G comme ci-dessus et soit θ un automorphisme d'ordre fini de G. Un exemple simple est donné lorsque θ est l'automorphisme associé à un changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Dans ce cas, le transfert d'intégrales orbitales et le principe de fontorialité ont été établis respectivement par Shelstad ([Sh5]) et Bouaziz ([B4])

L'endoscopie pour (G, θ) concerne les représentations tempérées π de $G(\mathbb{R})$ telles que $\pi \circ \theta$ est équivalente à π, où plus généralement les L-paquets tempérés Π tels que $\Pi \circ \theta = \{\pi \circ \theta \,|\, \pi \in \Pi\} = \Pi$.

L'automorphisme θ préserve les L-paquets. Partant de θ, on construit un automorphisme $\hat{\theta}$ de $\hat{G}$ et un automorphisme ${}^L\theta$ de ${}^LG$. Les notions usuelles d'analyse harmonique invariante (par conjugaison) sur G, $G(\mathbb{R})$ se généralisent convenablement à l'analyse harmonique invariante par conjugaison tordue (par θ), comme nous l'avons vu dans la première partie.

Si Π à pour paramètre $\phi : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$, alors $\Pi \circ \theta$ a pour paramètre ${}^L\theta \circ \phi$, et donc $\Pi \circ \theta = \Pi$ si et seulement si

$$S_\phi = \{s \in \hat{G} \,|\, \mathrm{Int} s \circ {}^L\theta \circ \phi = \phi\}$$

est non-vide. Si tel est le cas, alors S_ϕ contient des éléments $\hat{\theta}$-semi-simples. Supposons que s soit l'un d'entre eux, et soit $\hat{H}$ la composante neutre de $\mathrm{Cent}_{\hat{\theta}}(s, \hat{G}) := \{g \in \hat{G} \,|\, gs\hat{\theta}(g)^{-1} = s\}$. Ceci est un sous-groupe réductif de $\hat{G}$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe de ${}^LG$ engendré par l'image de ϕ et $\hat{H}$. On a alors une suite exacte scindée

$$1 \to \hat{H} \to \mathcal{H} \to W_{\mathbb{R}} \to 1$$

de laquelle on obtient une L-action $\rho_{\mathcal{H}}$ de $W_{\mathbb{R}}$ sur $\hat{H}$. Soit H un groupe algébrique réductif quasi-déployé défini sur $\mathbb{R}$ tel que ${}^LH = \hat{H} \rtimes_{\rho_{\mathcal{H}}} W_{\mathbb{R}}$ soit une réalisation de son L-groupe.

Le quadruplet $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$, où ξ est l'inclusion de $\mathcal{H}$ dans ${}^LG$ constitue ce que l'on appelle un ensemble de données endoscopique pour (G, θ). Il s'avère que $\mathcal{H}$ n'est pas nécessairement isomorphe à ${}^LH$, ce qui cause certaines complications et introduit de nouveaux aspects dans le théorie. On rappelle (cf.[KS]) la définition d'une z-paire (H_1, ξ_{H_1}) pour $\mathcal{H}$, où H_1 est une extension centrale

$$1 \to Z_1 \to H_1 \to H \to 1$$

de H et ξ_{H_1} un plongement de $\mathcal{H}$ dans ${}^LH_1$. Par définition, le paramètre ϕ à son image dans $\mathcal{H}$, de sorte que $\xi_{H_1} \circ \phi$ définit un paramètre pour H_1. En accord avec le principe de fonctorialité, on s'attend à ce qu'il existe une identité de caractères reliant les caractères θ-tordus des représentations dans Π, et des caractères stables de $H_1(\mathbb{R})$ associés au paramètre $\xi_{H_1} \circ \phi$. Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, cette identité de caractères est fondée sur une correspondance géométrique entre G

et H_1. Remarquons que cette correspondance n'est définie que par l'intermédiaire des groupes duaux, en particulier H n'est pas un sous-groupe de G. Néanmoins il y a une application (définie dans [KS]) :

$$\mathcal{A}_{H/G} : \mathrm{Cl}_{ss}(H) \to \mathrm{Cl}(\theta, G)$$

entre les classes de conjugaisons semi-simples dans H et les classes de conjugaisons θ-tordues dans G. Cette application est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $\gamma \in H(\mathbb{R})$ un élément suffisamment régulier et $\mathcal{O}_\gamma$ sa classe de conjugaison dans H. Alors $\mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_\gamma) \cap G(\mathbb{R})$ est soit vide, soit c'est une classe de conjugaison θ-tordue stable dans $G(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on dit que γ est une norme de tout élément $\delta \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_\gamma) \cap G(\mathbb{R})$. Nous abordons maintenant le transfert d'intégrales orbitales. Soit J_G^θ l'application qui envoie une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ vers son intégrale orbitale tordue. L'étude des intégrales orbitales tordues sur $G(\mathbb{R})$ est l'objet des articles [R1] et [R2], résumés dans la première partie ci-dessus.

Les résultats similaires pour les intégrales orbitales ordinaires (non tordues) et leur analogue stable ont été établi par Bouaziz ([B1]). Dans le cas qui nous occupe cependant, nous n'avons pas affaire à des intégrales orbitales de fonctions lisses à supports compacts, mais plutot à des fonctions lisses sur $H_1(\mathbb{R})$, à support compact modulo $Z_1(\mathbb{R})$ et vérifiant

$$f(zh) = \lambda_{H_1}(z)^{-1} f(h)$$

pour tout $z \in Z_1(\mathbb{R})$ et tout $h \in H_1(\mathbb{R})$. Ici, λ_{H_1} est un quasi-caractère sur $Z_1(\mathbb{R})$ obtenu à partir des données endoscopiques $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ et de la z-paire (H_1, ξ_{H_1}). Les résultats de ([B1]) s'étendent sans difficulté à ce contexte. On notera $\mathcal{I}^{st}(H_1(\mathbb{R}), \lambda_{H_1})$ l'espace des intégrales orbitales stables des fonctions décrites ci-dessus.

Le résultat principal de [RS] le suivant.

Théorème 9. *Il existe une application linéaire continue :*

$$\begin{aligned} \mathit{Trans} : \mathcal{I}^\theta(G(\mathbb{R})) &\to \mathcal{I}^{st}(H_1(\mathbb{R}), \lambda_{H_1}) \\ \psi &\mapsto \mathit{Trans}(\psi) \end{aligned}$$

La fonction orbitale Trans(ψ) étant donnée, pour $\gamma_1 \in H_1(\mathbb{R})$ suffisamment régulier par la formule :

$$\mathit{Trans}(\psi)(\gamma_1) = \sum_{\delta \in \Sigma_\gamma} \Delta(\gamma_1, \delta)\psi(\delta),$$

où γ est la projection de γ_1 sur $H(\mathbb{R})$ et la somme (qui peut être vide, auquel cas le membre de droite est nul) est prise sur un système de représentants des classes de conjugaisons θ-tordues des éléments $\delta \in G(\mathbb{R})$ pour lesquels γ est une norme. Les facteurs $\Delta(\gamma_1, \delta)$ sont les facteurs de transfert définis dans [KS].

Pour établir ce résultat, nous avons besoin de deux types d'ingrédients. Premièrement nous utilisons les résultats de [R1] sur les intégrales orbitales tordues. Deuxièmement, nous avons besoin des propriétés très fines des facteurs de transfert. Certaines de ces propriétés se trouvent dans [KS], et servent principalement à démontrer que Trans(ψ) est bien défini. D'autres sont établies dans [RS], en particulier l'étude asymptotique des facteurs de transfert lorsqu'on se déplace transversalement aux classes de conjugaison θ-tordues (le long des “sous-espaces de Cartan”), en s'approchant d'un élément singulier. Ceci nous permet de montrer que les propriétés de ψ se transfèrent aux propriétés correspondantes de $\mathrm{Trans}(\psi)$, et donc que $\mathrm{Trans}(\psi)$ est bien dans $\mathcal{I}^{st}(H_1(\mathbb{R}), \lambda_{H_1})$.

Ce qu'il reste à établir, ce sont les identités de caractères décrites précédemment en utilisant la transposée ${}^t\mathrm{Trans}$ de l'espace des distributions stables sur $H_1(\mathbb{R})$ vers l'espace des distributions invariantes par conjugaison tordue sur $G(\mathbb{R})$.

II. Caractères spécifiques irréductibles du groupe métaplectique : algorithme de Kazdhan-Lusztig, dualité de Vogan, stabilité, L-paquets, et endoscopie

1. Motivations

Après une période fondatrice correspondant essentiellement aux travaux de Harish-Chandra, la théorie des représentations des groupes réductifs réels s'est developpée dans de nouvelles directions grâce à de fructueuses intéractions avec d'autres branches des mathématiques. Nous pensons ici essentiellement à la géométrie (en particulier la géométrie algébrique et la théorie des $\mathcal{D}$-modules), et la théorie des formes automorphes via le programme de Langlands. Ces deux directions se sont rejointes de manière spectaculaire dans [ABV], où grâce à la théorie de la dualité des caractères de Vogan, les auteurs reformulent de manière géométrique les résultats sur la fonctorialité de Langlands et le transfert endoscopique obtenus par Shelstad dans les années 80. Une restriction importante de certains resultats des théories ci-dessus mentionnées est qu'ils ne s'appliquent qu'à des groupes linéaires. Concernant le programme de Langlands, vu la formulation même des conjectures (la construction du L-groupe par exemple), cette limitation semble être naturelle. Mais les groupes réductifs non linéaires apparaissent dans la théorie des formes automorphes par le biais des séries theta et du groupe métaplectique, la formulation la plus générale étant celle utilisant les correspondances entre membres d'une paire duale (au sens de Howe, [Ho]). L'étude de l'aspect fonctoriel (au sens de Langlands) des correspondances de Howe est une question ayant intéressé de nombreux auteurs([Ad1],[Moe]), mais qui, lorsqu'un des deux groupes impliqués est un groupe métaplectique, butte sur l'écueil indiqué précédemment, à savoir que l'on ne voit pas très bien ce qui joue le rôle du L-groupe pour le groupe métaplectique. L'angle d'attaque que nous proposons est d'utiliser la reformulation géométrique de la fonctorialité de Langlands developpée dans [ABV] pour définir de manière intrinsèque (c'est-à-dire sans se ramener à des groupes linéaires via les correspondances de Howe) les L-paquets et le transfert endoscopique pour le groupe métaplectique. De ce travail, on peut retirer le principe heuristique selon lequel "le L-groupe du groupe métaplectique est le groupe métaplectique". Les guillemets sont là pour indiquer qu'il est difficile de donner un sens précis a cette affirmation. Ceci est l'objet des articles [RT1] et [RT2]. L'endoscopie pour le groupe métaplectique avait été étudiée précédemment dans [R4] par des moyens purement d'analyse harmonique (transfert des intégrales orbitales), la définition des L-paquets étant donnée par les résultats de [AB] sur la correspondance de Howe avec certains groupes spéciaux orthogonaux de même rang et les propriétes de cette correspondance vis-à-vis de la conjugaison stable établis dans [Ad2]. Signalons que les résultats de [Ad2] ont été redémontrés dans [R3] par une méthode plus habituelle lorsqu'il s'agit de problèmes de transfert endoscopique, à savoir le transfert d'intégrales orbitales. Nous passerons en revue dans les sections suivantes tous ces thèmes abordés dans nos travaux sur le groupe métaplectique.

2. Représentations spécifiques

Rappelons que $Mp(2n,\mathbb{R})$ est une extension centrale d'ordre 2 de $Sp(2n,\mathbb{R})$, et notons $\mathbf{pr}$ la projection canonique de $Mp(2n,\mathbb{R})$ sur $Sp(2n,\mathbb{R})$. Le noyau de cette projection est $\mathbf{e}$, $\mathbf{z}$, où $\mathbf{e}$ est l'élément neutre de $Mp(2n,\mathbb{R})$ et $\mathbf{z}$ un élément d'ordre 2. On notera aussi $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ les deux éléments se projetant sur $-\,\mathrm{Id}$. Le centre du groupe $Mp(2n,\mathbb{R})$ est alors le groupe à quatre éléments $\{\mathbf{e},\mathbf{z},\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ lorsque n est pair et à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lorsque n est impair. Soit π une représentation irréductible admissible de $Mp(2n,\mathbb{R})$. Elle admet un caractère central χ_π. Si $\chi_\pi(\mathbf{z})=1$, π se factorise en une représentation du groupe $Sp(2n,\mathbb{R})$. Dans le cas contraire, on a $\chi_\pi(\mathbf{z})=-1$, et on dira que π est une représentation spécifique de $Mp(2n,\mathbb{R})$. Une représentation admissible de $Mp(2n,\mathbb{R})$ sera dite spécifique si tous ces facteurs de composition le sont.

Faisons aussi quelques remarques concernant la structure du groupe $Mp(2n,\mathbb{R})$. Si L est un sous-groupe de $Sp(2n,\mathbb{R})$, nous noterons $\tilde{L}$ son image inverse dans $Mp(2n,\mathbb{R})$. Si $H(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Cartan de $Sp(2n,\mathbb{R})$, alors $\tilde{H}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Cartan de $Mp(2n,\mathbb{R})$. De plus, il est abélien et les sous-groupes de Cartan de $Mp(2n,\mathbb{R})$ sont tous obtenus ainsi. Si $K(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $Sp(2n,\mathbb{R})$, $\tilde{K}(\mathbb{R})$ est alors un sous-groupe compact maximal de $Mp(2n,\mathbb{R})$.

3. Stabilité

Le fait que les représentations irréductibles d'un groupe algébrique réductif réel $G(\mathbb{R})$ soient groupées en L-paquets, doit être vu de manière heuristique, par la dualité entre classes de conjugaisons et réprésentations, comme le reflet de l'existence dans $G(\mathbb{R})$ d'une autre relation d'équivalence, moins forte que la conjugaison, la conjugaison stable. Pour éviter des détails techniques superflus ici, nous dirons simplement que deux éléments x et y de $G(\mathbb{R})$, lorsqu'ils sont suffisamment réguliers, sont stablement conjugués s'il existe g dans le groupe des points complexes de G tel que $y=gxg^{-1}$. Il est bien connu que pour le groupe $G=GL(n)$, la conjugaison stable et la conjugaison ordinaire coincident, et en conséquence, les L-paquets de $GL(n,\mathbb{R})$ sont des singletons. En revanche, pour le groupe $G=SL(2,\mathbb{R})$, la classe de conjugaison stable d'un élément régulier elliptique est l'union de deux classes de conjugaison ordinaires. Dualement, les L-paquets de séries discrètes contiennent les deux représentations ayant même caractère infinitésimal. L'idée de définir une conjugaison stable pour le groupe métaplectique est due à J. Adams. Il utilise la caractérisation suivante de la conjugaison stable dans un groupe réductif linéaire G. Soit H un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$, et soit $W_{st}(G(\mathbb{R}),H(\mathbb{R}))$ le sous-groupe du groupe de Weyl $W(G,H)$ des élément stabilisant $H(\mathbb{R})$. La conjugaison stable est alors la relation d'équivalence sur les éléments réguliers engendrée par la conjugaison usuelle et l'action des $W_{st}(G(\mathbb{R}),H(\mathbb{R}))$ lorsque H parcourt l'ensemble des tores maximaux de G définis sur $\mathbb{R}$. Il reste à remarquer que si $H(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Cartan de $Sp(2n,\mathbb{R})$, alors l'action de $W_{st}(Sp(2n,\mathbb{R}),H(\mathbb{R}))$ dans $H(\mathbb{R})$ se remonte en une action sur $\tilde{H}(\mathbb{R})$. Ceci nous permet de poser :

Définition 10. La conjugaison stable dans le groupe $Mp(2n,\mathbb{R})$ est la la relation d'équivalence engendrée (sur les éléments réguliers) par la conjugaison usuelle et l'action des $W_{st}(Sp(2n,\mathbb{R}),H(\mathbb{R}))$ sur $\tilde{H}(\mathbb{R})$ lorsque $H(\mathbb{R})$ parcourt l'ensemble des sous-groupes de Cartan du groupe $Sp(2n,\mathbb{R})$. Si $\mathcal{O}$ est une classe de conjugaison stable d'éléments réguliers dans $Sp(2n,\mathbb{R})$, alors $\mathbf{pr}^{-1}\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}_1\cup\tilde{\mathcal{O}}_2$, où $\tilde{\mathcal{O}}_1$ et $\tilde{\mathcal{O}}_2$, sont deux classes de conjugaison stable dans $Mp(2n,\mathbb{R})$, avec $\tilde{\mathcal{O}}_1=\mathbf{z}\cdot\tilde{\mathcal{O}}_2$.

Ceci nous permet d'introduire sur le groupe métaplectique l'espace des distributions stablement invariantes $\mathrm{Distr}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{st,-}$ spécifiques et l'espace des intégrales orbitales stables spécifiques $\mathcal{I}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{st,-}$ (une fonction où une distribution sur $Mp(2n,\mathbb{R})$ sera dite spécifique si elle est vecteur propre pour la valeur propre -1 de l'opérateur de translation par $\mathbf{z}$, voir [R4] pour plus de détails). Rappelons dans ce contexte le résultat suivant ([R4], Théorème 3.3), qui découle s'adapte sans difficultés de celui de Bouaziz ([B1], Théorème 6.2.1)

Théorème 11. *L'application*

$$J_{Mp}^{st,-}\,:\,\mathcal{C}_c^\infty(Mp(2n,\mathbb{R}))^-\to\mathcal{I}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{st,-}$$

qui à une fonction spécifique f associe son intégrale orbitale stable est linéaire, continue et surjective. Sa transposée réalise un isomorphisme entre le dual topologique de $\mathcal{I}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{st,-}$ et $\mathrm{Distr}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{st,-}$.

4. Correspondance de Adams-Barbasch

Nous rappelons dans ce paragraphe les résultats obtenus dans [AB].

Considérons la paire duale

$$(O(p,q),Sp(2n,\mathbb{R})),\qquad p+q=2n+1,$$

dans $Sp(2n(2n+1),\mathbb{R})$, et notons leur préimages dans $Mp(2n(2n+1),\mathbb{R})$ par $(\widetilde{O}(p,q),Mp(2n,\mathbb{R}))$. Choisissons une représentation métaplectique de $Mp(2n(2n+1),\mathbb{R})$ (il y a deux choix non-équivalents). La correspondance de Howe ([Ho]) donne alors une bijection entre une partie des représentations irréductibles admissibles de $\widetilde{O}(p,q)$ et $Mp(2n,\mathbb{R})$. Adams et Barbasch ont calculé explicitement cette correspondance. Il s'avère que les représentations du groupe métaplectique qui apparaissent sont exactement les représentations spécifiques. Soit $\mathbf{sgn}$ l'unique caractère de $O(p,q)$ trivial sur la composante neutre de ce groupe et soit $\widetilde{\mathbf{sgn}}$ son relèvement à $\widetilde{O}(p,q)$. Alors, pour chaque représentation irréductible admissible π de $\widetilde{O}(p,q)$, soit π, soit $\pi\otimes\widetilde{\mathbf{sgn}}$ apparait dans la correspondance (mais pas les deux). Comme le revêtement $\widetilde{O}(p,q)$ est scindé, on peut identifier la représentation qui apparait avec une représentation de $SO(p,q)$. Finalement on obtient une bijection :

$$\theta\,:\,\mathrm{Irr}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{gen}\xrightarrow{\sim}\coprod{}'\mathrm{Irr}(SO(p,q)),\tag{2}$$

où le prime dans l'union disjointe signifie que nous considérons seulement les paires d'entiers positifs (p,q) telles que $p+q=2n+1$, $(-1)^q=(-1)^n$. Remarquons que ceci dépend du choix de signe dans la définition de la représentation métaplectique.

D'autre part, cette correspondance préserve le caractère infinitésimal des représentations. Une autre propriété importante de cette correspondance est sa simplicité en termes de paramètres de Langlands. Sans expliciter cette assertion de manière trop technique, rappelons simplement que la classification de Langlands du dual admissible d'un groupe réductif réel $G_{\mathbb{R}}$ attache à toute représentation irréductible admissible π de $G_{\mathbb{R}}$ une classe de conjugaison de sous-groupes de Cartant, de sorte que si $H_{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe dans cette classe, la représentation π s'obtient comme quotient irréductible d'une induite parabolique de limite de séries discrètes, le facteur de Levi du parabolique étant le centralisateur de la partie déployée de $H_{\mathbb{R}}$. Les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan dans $SO(p,q)$ et $Mp(2n,\mathbb{R})$ sont paramètrées par des triplets d'entiers (m,r,s) tels que $2m+r+s=n$ et un sous-groupe de Cartan dans la classe (m,r,s) est isomorphe à

$$(\mathbb{C}^*)^m \times (S^1)^r \times (\mathbb{R}^*)^s.$$

En particulier, les classes de conjugaison de sous-groupe de Cartan de $SO(n+1,n)$ et $Mp(2n,\mathbb{R})$ sont en bijection naturelle. Si une représentation irréductible admissible spécifique π de $Mp(2n,\mathbb{R})$ est attaché à la classe de conjugaison (m,r,s), il en est alors de même de $\theta(\pi)$. Ainsi, par exemple, les séries discrètes correspondent aux séries discrètes.

5. Transfert entre $Mp(2n,\mathbb{R})$ et $SO(n+1,n)$

Dans [Ad2], J. Adams définit une application :

$$\Gamma : \ \mathrm{Distr}(SO(n+1,n))^{st} \to \mathrm{Distr}(Mp(2n,\mathbb{R}))^{st,-}$$

ayant les propriétés suivantes.

- si $\Theta \in \mathrm{Distr}(SO(n+1,n))^{st}$ est tempérée, alors $\Gamma(\Theta)$ aussi.
- Si $\Theta \in \mathrm{Distr}(SO(n+1,n))^{st}$ est un caractère virtuel, alors $\Gamma(\Theta)$ aussi.
- Γ coïncide avec θ sur les paquets tempérés. Plus précisement, si Π_{SO} est un superpaquet pour $\coprod' SO(p,q)$, (rappelons que toutes ces formes réelles du groupe $SO(2n+1,\mathbb{C})$ ont même L-groupe, donc même ensemble de paramètres pour leurs L-paquets. Un super L-paquets est l'union des L-paquets des $SO(p,q)$ ayant le même paramètre), et si $\Theta_{\Pi_{SO}}$ est la distribution stablement invariante sur $SO(n+1,n)$ donnée par la somme des caractères des représentations dans Π_{SO}, alors $\Gamma(\Theta_{\Pi_{SO}}))$ est la distribution donnée par la somme des caractères des représentations de $\theta^{-1}(\Pi_{SO})$.

L'application Γ est définie de manière directe, en comparant les formules des caractères sur les deux groupes, en commençant par les séries discrètes et en procédant par induction parabolique.

Ce résultat suggérait fortement l'existence d'un transfert d'intégrales orbitales entre $Mp(2n,\mathbb{R})$ et $SO(n+1,n)$, dont Γ serait la transposée. Ceci constitue le résultat principal de [R3] (Théorème 6.7 et Proposition 6.3).

Théorème 12. *Il existe une application linéaire continue bijective*

$$\mathrm{Trans} : \ \mathcal{I}(Mp(2n,\mathbb{R})^{st,-} \to \mathcal{I}(SO(n+1,n)^{st,-}$$

dont la transposée est Γ.

L'intéret est de pouvoir comparer ce formalisme et celui de l'endoscopie pour les groupes réel ([Sh4]). On constate que les facteurs de transfert intervenant dans la définition de Trans sont formellement similaires à ceux de l'endoscopie.

6. Endoscopie pour $Mp(2n,\mathbb{R})$

Les résultats de la section précédente permettent de donner une définition ad hoc d'un L-paquet pour le groupe métaplectique : on définit ceux-ci comme image inverse par la correspondance θ des super-L-paquets de $\coprod' SO(p,q)$. Les L-paquets tempérés ont ainsi la propriété attendue, à savoir qu'il définissent des distribution spécifique stable sur $Mp(2n,\mathbb{R})$, donnée par la somme des caractères des représentations dans un L-paquet. Le problème de l'endoscopie et des identités de caractères abordé dans la section 2 de la première partie devient alors tout à fait naturel dans le contexte du groupe métaplectique. Celui-ci est résolu dans [R4] dans l'esprit de [Sh4], c'est-à-dire en établissant des transfert d'intégrales orbitales vers des groupes endoscopiques. Ceux-ci sont de la forme suivante. Fixons un élément $s=\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n,a_1,\dots,a_n)$ avec $a_i=\pm 1$ dans le groupe symplectique $Sp(2n,\mathbb{R})$, et soit $G(\mathbb{R})$ le centralisateur de s dans $Sp(2n,\mathbb{R})$. Le groupe $G(\mathbb{R})$ est alors isomorphe à $Sp(2n_1,\mathbb{R})\times Sp(2n_2,\mathbb{R})$, où n_1 (resp. n_2) est le nombre de 1 (resp. de -1 dans $\{a_1,\dots,a_n\}$. Soit $\widetilde{G}(\mathbb{R})$ l'image réciproque de $G(\mathbb{R})$ dans $Mp(2n,\mathbb{R})$. On peut définir facilement pour le groupe $\widetilde{G}(\mathbb{R})$ les notions de conjugaison stable et de L-paquets, à partir de celles pour $Mp(2n_1,\mathbb{R})$ et $Mp(2n_2,\mathbb{R})$ en contatant que $\widetilde{G}(\mathbb{R})$ est isomorphe au quotient de $Mp(2n_1,\mathbb{R})\times Mp(2n_2,\mathbb{R})$ par un sous-groupe à deux éléments. Nous obtenons dans [R4] le résultat suivant :

Théorème 13. *Il existe une application linéaire continue*

$$\mathrm{Trans}:\mathcal{I}(Mp(2n,\mathbb{R})^- \to \mathcal{I}(\widetilde{G}(\mathbb{R}))^{st,-}$$

dont la transposée possède les propriétés de fonctorialité attendues pour les L-paquets tempérés, à savoir que si Π_G est un L-paquet tempéré pour $\widetilde{G}(\mathbb{R})$ et Θ_{Π_G} est la distribution stable associée à ce paquet, alors ${}^t\mathrm{Trans}(\Theta_{\Pi_G})$ est une distribution sur $Mp(2n,\mathbb{R})$ obtenue comme combinaison linéaire de caractères de représentations d'un L-paquets tempéré de $Mp(2n,\mathbb{R})$.

Les coefficients intervenant dans cette combinaison linéaire sont explicitement donnés par un "pairing" entre l'élément s et les paramètres décrivant les représentations à l'intérieur du paquet. De plus, les facteurs de transfert ressemblent formellement à ceux de Shelstad ([Sh4]).

7. Algorithme de Kazdhan-Lusztig

Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe de Lie réductif réel. Un problème fondamental de la théorie des représentations est de donner une description explicite des caractères irréductibles de $G_{\mathbb{R}}$. Lorsqu'on fixe un caractère infinitésimal, le problème devient fini, dans le sens où l'espace vectoriel engendré par les caractères irréductibles est de dimension finie. Un aspect important des théorèmes de classification du dual admissible de $G_{\mathbb{R}}$ (Langlands, Beilinson-Bernstein, Vogan-Zuckerman) est que si $\mathcal{P}_\chi$ désigne l'ensemble paramètrant les représentations irréductibles admissibles de caractère infinitésimal χ (pour la classification choisie), on commence par construire, pour tout $\gamma\in\mathcal{P}_\chi$, une représentation standard $\mathrm{std}(\gamma)$, admettant un unique quotient irréductible $\mathrm{irr}(\gamma)$. De plus, les ensembles

$$\{\mathrm{std}(\gamma)\}_{\gamma\in\mathcal{P}_\chi} \qquad \{\mathrm{irr}(\gamma)\}_{\gamma\in\mathcal{P}_\chi}$$

forment deux bases du groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations de caractère infinitésimal χ. Ce groupe est identifié au groupe des caractères virtuels de caractère infinitésimal. Si π est une représentation, on notera $[\pi]$ son caractère, c'est-à-dire son image dans le groupe de Grothendieck. On peut alors écrire :

$$(3) \qquad [\mathrm{irr}(\delta)] = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_\chi} M(\gamma,\delta)[\mathrm{std}(\gamma)], \qquad [\mathrm{std}(\delta)] = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_\chi} m(\gamma,\delta)[\mathrm{irr}(\gamma)].$$

La seconde de ces équations donne les multiplicités des facteurs de composition des représentations standards $\mathrm{std}(\delta)$ tandis que la première résoud notre problème, puisque les caractères des représentations standards, dans la classification de Langlands par exemple, sont des induites paraboliques de limites de séries discrètes, et donc en principe calculables. Indiquons maintenant comment on calcule les entiers $m(\gamma,\delta)$ et $M(\gamma,\delta)$. Pour cela, revenons un instant aux théories géométriques utilisées dans [ABV], en particulier la théorie de Beilinson-Bernstein ([BB]) établissant une équivalence de catégorie entre modules de Harish-Chandra d'un groupe réductif $G_\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}$-modules (tordus) sur la variété des drapeaux. Jusqu'ici nulle hypothèse de linéarité du groupe n'est requise. Supposons que nous nous intéressions aux modules de Harish-Chandra ayant un caractère infinitésimal entier et, pour simplifier, régulier. Alors l'équivalence de catégorie de Beilinson-Bernstein se compose avec la correspondance de Riemann-Hilbert pour nous amener à une catégorie de faisceaux pervers K-équivariants sur la variété des drapeaux (K est la complexification d'un sous-groupe compact maximal de $G_\mathbb{R}$). De cette manière sont reliés deux problèmes apparemment distincts : le calcul des caractères des modules de Harish-Chandra irréductibles d'une part et l'étude des singularités des K-orbites sur la variété des drapeaux, via le calcul de leur cohomologie d'intersection, d'autre part. L'article [LV] résout ces deux problèmes, mais deux remarques s'imposent. La première est que l'hypothèse de linéarité est devenue nécéssaire. La seconde est que la structure de la preuve est compliquée, empruntant à la fois à la géométrie (cohomologie d'intersection), mais aussi de manière essentielle à la théorie des représentations, pour l'obtention de certains résultats d'annulation en cohomologie (cf [VoIC1],[VoIC2], [VoIC3]). C'est d'ailleurs à ce niveau que l'on a besoin de supposer la linéarité du groupe $G_\mathbb{R}$.

Rappelons que les résultats dont nous parlons ici sont formellement similaires à ceux concernant la catégorie des modules de plus haut poids sur un groupe réductif algébrique complexe G, résultats conjecturés par Kazdhan et Lusztig ([KL]) et démontré par Brylinsky et Kashiwara. Dans les deux cas, il s'agir d'écrire des matrices de passages entre deux bases différentes de groupes de Grothendieck de catégories de faisceaux pervers, et les coefficients de ces matrices sont calculés par un algoritme, dit algorithme de Kazdhan-Lusztig.

Notre résultat important est l'obtention d'un algorithme de Kazdhan-Lusztig calculant la matrice $(M(\gamma,\delta))_{\gamma,\delta}$ et donc les caractères irréductibles spécifiques du groupe métaplectique ([RT1] , Théorème 7.13 et [RT2]). Dans le cas d'un groupe linéaire, le caractère infinitésimal d'une série discrète est toujours entier, et c'est dans ce cas que l'algorithme de Kazdhan-Lusztig est d'abord établi (la réduction du cas général à celui-ci n'est pas immédiate, mais bien connue des spécialistes, voir [ABV], Chapitre 17). Pour le groupe métaplectique, les séries discrète spécifiques ont un caractère infinitésimal demi-entier. C'est ce cas qui est crucial et que nous traitons dans [RT1], l'argument pour le cas général étant donné dans [RT2]. Nous donnons un algorithme permettant de calculer certains polynômes, dont la valeur en 1 donne les multiplicités voulues. Notre travail suit de très près le cas linéaire, exepté une différence cruciale. Il s'avère que le rôle joué par l'algèbre de Hecke (du groupe de Weyl entier) sur le groupe de Grothendieck des caractères spécifiques formels ne suffit pas. Par exemple, dans le cas $n = 1$, pour le caractère infinitésimal $\frac{1}{2}\rho$, le groupe de Weyl entier est vide, et pourtant les formules des caractères ne sont pas triviales. Il faut donc prendre en compte un nouvel opérateur, qui ressemble formellement à un foncteur de translation au travers d'un mur non entier. L'algèbre qui en résulte n'est pas une algèbre de Hecke, bien qu'elle contienne l'algèbre de Hecke du groupe de Weyl entier comme sous-algèbre. Quoiqu'il en soit, nous somme capable d'utiliser cette algèbre de Hecke généralisée, en la munissant d'une dualité de Verdier, pour caractériser la base des caractères irréductibles du groupe de Grothendieck. C'est cette caractérisation qui sert dans la démonstration du théorème 7.13 de ([RT1].

8. Dualité

Il s'agit ensuite de developper une théorie de la dualité des caractères à la Vogan ([VoIC4]) pour le groupe métaplectique. Dans le cas d'un groupe linéaire $G_{\mathbb{R}}$, il existe une dualité entre la catégorie des modules de Harish-Chandra ayant un caractère infinitésimal entier fixé, et une catégorie similaire pour une forme réelle du dual de Langlands $\hat{G}$ de G, les algorithmes de Kazdhan-Lusztig dans ces deux catégories ayant la propriété d'être symétriques. Pour le groupe métaplectique, en fixant un caractère infinitésimal demi-entier, la catégorie des modules de Harish-Chandra spécifiques est autoduale ([RT1], Théorème 8.3), résultat ayant été conjecturé par Adams et Vogan dans les années 80. Donnons un énoncé plus précis.

Théorème 14. *Fixons un caractère infinitésimal χ demi-entier, de sorte que $Mp(2n,\mathbb{R})$ possède des séries discrètes spécifiques de caractère infinitésimal χ. Alors il existe une involution sur l'ensemble des paramètres de Langlands $\mathcal{P}_\chi$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\chi &\longrightarrow \mathcal{P}_\chi \\ \gamma &\longrightarrow \check{\gamma} \end{aligned}$$

telle que si, pour tout $\delta \in \mathcal{P}_\chi$

$$[\mathrm{irr}(\delta)] = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_\chi} M(\gamma,\delta)[\mathrm{std}(\gamma)]$$

alors,

$$[\mathrm{std}(\check{\gamma})] = \sum_{\check{\delta}\in\mathcal{P}_\chi} \epsilon_{\gamma\delta} M(\gamma,\delta)[\mathrm{irr}(\check{\delta})];$$

où $\epsilon_{\gamma\delta} = (-1)^{\dim\mathrm{supp}(\delta)-\dim\mathrm{supp}(\gamma)}$, le support d'une représentation π étant celui du $\mathcal{D}$-module correspondant. C'est donc une orbite du complexifié d'un compact maximal de $Mp(2n,\mathbb{R})$ dans la variété des drapeaux.

Remarquons que les représentations irréductibles spécifiques de $Mp(2n,\mathbb{R})$ de caractère infinitésimal χ admettent deux caractères centraux possibles. Les caractères centraux sont échangés par $\gamma \mapsto \check{\gamma}$.

9. Application à la fonctorialité

Nous souhaitons maintenant expliquer comment la dualité définie dans la section précédente peut, en suivant les idées de [ABV], permettre de définir intrinsèquement les L-paquets et l'endoscopie pour le groupe métaplectique. C'est l'objet de [RT2] Fixons un caractère infinitésimal demi-entier χ comme dans la section précédente. Deux représentations irréductibles spécifiques $\mathrm{irr}(\gamma)$ et $\mathrm{irr}(\delta)$, $\gamma, \delta \in \mathcal{P}_\chi$ sont dans le même L-paquets si les localisations de leur duaux $\mathrm{irr}(\check{\gamma})$ et $\mathrm{irr}(\check{\delta})$ ont même support. Bien sûr, il est souhaitable de donner une définition des L-paquets sans condition sur le caractère infinitésimal, mais il s'avère que le cas "demi-entier" est le plus difficile. En effet, d'une part l'algorithme de Kazdhan-Lusztig se généralise aisément à tous les caractères infinitésimaux par des arguments connus ([ABV], Chapter 17), et d'autre part, lorsque aucune coordonnée du caractère infinitésimal n'est demi-entière, la correspondance θ préserve les multiplicités (l'algorithme de Kazdhan-Lusztig est le même dans $Mp(2n,\mathbb{R})$ et $\coprod' SO(p,q)$), l'énoncé d'un résultat de dualité pour $Mp(2n,\mathbb{R})$ découle donc de la dualité de Vogan pour $\coprod' SO(p,q)$. Pour un caractère infinitésimal le plus général, on procède par "recollage" de ces deux cas extrêmes. Nous disposons donc d'une définition des L-paquets du groupe métaplectique. Il se trouve, et c'est heureux qu'elle coïncide avec la précédente utilisant la correspondance θ. Ce résultat peut maintenant être vu comme une propriété de fonctorialité de la correspondance θ. Suivant le formalisme de[ABV], nous définissons aussi des "paquets géométriques", qui sont l'analogue microlocal des L-paquets, en utilisant les supports singuliers des localisations des représentations de $Mp(2n,\mathbb{R})$ en lieu et place de leur support. Ces paquets géométriques sont aussi le support d'une distribution stable du groupe métaplectique. Comme dans le cas linéaire, les paquets de Arthur pour le groupe métaplectique devraient constituer un sous-ensemble des paquets géométriques, mais nous ne savons pas comment les caractériser en l'absence du L-groupe.

Références

[Ad1] Adams, J., *L-functoriality for dual pairs*, Astérisque, 171-172 (1989), p. 85-129.

[Ad2] Adams, J., *Lifting of Characters on Orthogonal and Metaplectic Groups*, Duke Math.J., 92 (1998), no.1, p. 129-178.

[AB] Adams, J. and Barbasch, D., *Genuine Representations of the Metaplectic Group*, Compositio Math., 113 (1998), no. 1, p. 23-60.

[ABV] J. Adams, D. Barbasch, D.Vogan, *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Math. 104, Birkhauser, (1992).

[Art] Arthur, J., *Unipotent automorphic representations : conjectures*, p. 13-71 in *Orbites unipotentes et représentations II. Groupes p-adique et réels*, Asterisque p. 171-172 (1989).

[B1] Bouaziz, A., *Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 27 (1994), p. 573-609.

[B2] Bouaziz, A., *Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie rééductifs*, J. of Funct. Analysis.

[B3] Bouaziz, A., *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J.Funct.Anal. vol. 70 (1987), p. 1-79.

[B4] Bouaziz, A. *Sur le relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base* $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, in "Orbites Unipotentes et Représentations", Astérisque 171-172 (1989) p.163-174.

[BB] Beilinson, A., J. Bernstein *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C.R.A.S série I. Math. 292 (1981), p. 15-18.

[HC] Harish-Chandra, *Collected Papers, Vol III an IV*, Springer-Verlag.

[Ho] Howe, R., *Transcending classical invariant theory*, J.A.M.S. 2, No 3 (1989), p. 535-552.

[KL] Kazhdan, D. and Lusztig, G., *Representations of Coxeter groups and Hacke algebras*, Inv. Math. 53, No 2 (1979), p. 165-184.

[KS] Kottwitz, R., and Shelstad, D., *Foundations of Twisted Endoscopy*, Astérisque 255 (1999).

[L1] Langlands, R.P., *On the classification of representations of real algebraic groups*, in *Representation theory and Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, Math. Surveys and Monographs 31, p. 101-170. A.M.S, Providence, Rhode-Island (1989).

[L2] Langlands, R.P. *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Can. Jour. of Math 31 (1979), p. 219-271.

[LV] Lusztig, G. and Vogan, D.,*Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds*, Invent. Math. 71 (1983), p. 365-379.

[Moe] Moeglin, C., *Correspondances de Howe pour les paires réductives duales : quelques calculs dans le cas archimédien*, J. Of Functional Analysis 85, No 1 (1989), p. 1-85.

[R1] Renard, D., *Intégrales orbitales tordues sur les groupes de Lie réductifs réels*, Journal of Functional Analysis 145, vol. 2 (1997), p. 374-454.

[R2] Renard, D., *Formule d'inversions des intégrales orbitales tordues sur les groupes de Lie réductifs réels*, Journal of Functional Analysis

[R3] Renard, D.,*Transfert d'Intégrales Orbitales entre $Mp(2n,\mathbb{R})$ et $SO(n+1,n)$*, Duke Math. Journal, vol 95 (1998), Vol 2, 425-450.

[R4] Renard, D., *Endoscopy for $Mp(2n,\mathbb{R})$*, Amer. J. Math., vol 121 (1999) 1215-1243.

[RS] Renard, D., etShelstad, D., *Twisted endoscopy for real groups.* Preprint

[RT1] Renard, D., Trapa, P. *Irreducible Genuine Characters of the Metaplectic Group : Kazhdan-Lusztig Algorithm and Vogan's Duality*, Representation Theory, vol 4 (2000).

[RT2] Renard, D., Trapa, P. *Irreducible Genuine Characters of the Metaplectic Group : functoriality*, Preprint.

[Sh1] D. Shelstad, *Characters and inner forms of a quasi-split group over* $\mathbb{R}$, Comp. Math, vol 39, fasc 1 (1979), p. 11-45.

[Sh2] D. Shelstad, *Orbitals integrals and a familly of groups attached to a real reductive group*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t 12 (1994),p. 1-31.

[Sh3] D. Shelstad, *Embeddings of L-groups*, Canadian J. of Math. vol 33. (1981), p. 513-558.

[Sh4] D. Shelstad, *L-indistinguisability for real groups*, Math. Ann. 259 (1982), p.385-430.

[Sh5] D. Shelstad, *Endoscopy and base change* $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, Pacific J. of Math. vol 110, no 2, (1984).

[VoIC1] Vogan, D. A., Jr., *Irreducible characters of semisimple Lie groups I*, Duke Math. J., 46 (1979), no.1, p. 61-108.

[VoIC2] Vogan, D. A., Jr., *Irreducible characters of semisimple Lie groups II : the Kazhdan-Lusztig conjectures*, Duke Math. J., 46 (1979), no.4, p. 805-859.

[VoIC3] Vogan, D. A., Jr., *Irreducible characters of semisimple Lie groups III : Proof of Kazhdan-Lusztig conjecture in the integral case]*, Invent. Math., 71 (1983), no. 2, p. 381-417.

[VoIC4] Vogan, D. A., Jr., *Irreducible characters of semisimple Lie groups IV : character multiplicity duality*, Duke Math. J., 49 (1982), no. 4, p. 943-1073.