Dual unitaire sphérique des groupes réductifs réels

D'après D. Barbasch

Mars 2006

David Renard, Centre de mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique

http://www.math.polytechnique.fr/~renard/

Introduction.

$\mathbb{G}$: groupe algébrique réductif défini sur $\mathbb{R}$.

G: points réels de $\mathbb{G}$.

Exemples : $G = GL(n, \mathbb{R}), Sp(2n, \mathbb{R}), SO(p, q)$

$\mathfrak{g} = Lie(G)$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

θ: involution de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $G = K \exp \mathfrak{p}$.

PROBLEME U :

- Classification du dual unitaire de G.

Grâce aux résultats de Harish-Chandra, on peut travailler dans la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules.

Réponse au PROBLEME U : $SL(2, \mathbb{R})$: Gelfand-Naimark, $GL(n, \mathbb{R})$: Vogan, Tadic.

2 approches: Tadic "external approach" ou Vogan:

-1: Classification des modules de Harish-Chandra irréductibles

-2: Caractérisation des modules hermitiens dans la classification

-3: Quels modules hermitiens sont unitaires ? (ie. quand la forme hermitienne est-elle définie positive ?)

Classification de Langlands.

$P = LN = MAN$ parabolique de G, L θ-stable.

$\mathfrak{a} = Lie(A)$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$: système de racines

$\Sigma^+ = \Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{n})$: système de racines positives

$W(A) = N_K(A)/Z_K(A)$: Groupe de Weyl Σ.

(δ, V_δ): représentation irréductible tempérée de M,
$\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

$X_P(\delta \otimes \nu)$: représentation induite de P à G.

Thm: • Pour $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, tel que $\langle Re(\nu), \check{\alpha} \rangle > 0$, $\forall \alpha \in \Sigma^+$, $X_P(\delta, \nu)$ admet un unique quotient irréductible $\bar{X}_P(\delta, \nu)$.

• Tout module de Harish-Chandra irréductible est équivalent à l'un des $\bar{X}_P(\delta, \nu)$.

• $\bar{X}_P(\delta, \nu) \simeq \bar{X}_{P'}(\delta', \nu')$ ssi $\exists w \in K$ t.q. $kPk^{-1} = P'$, $k \cdot \delta \simeq \delta'$, $k \cdot \nu = \nu'$.

Les représentations (irréductibles) tempérées sont les facteurs irréductibles de $X_P(\delta,\nu)$, où

(δ, V_δ): série discrète de M, $\nu \in i\mathfrak{a}^*$.

$X_P(\delta,\nu)$ est alors unitaire, de longueur finie, et les facteurs de composition sont décrits par la théorie du R-groupe de Knapp-Zuckerman.

Les séries discrètes sont connues (Harish-Chandra, Schmid).

Si $P = MAN$; $P_1 = MAN_1 = wPw^{-1}$, $w \in N_K(A)$, il existe un opérateur d'entrelacement

$$A(P, P_1, \delta, \nu) : X_P(\delta,\nu) \to X_{P_1}(\delta,\nu)$$

défini pour presque tout ν et méromorphe en ν.

Si $Re(\nu)$ est dominant pour P and $P_1 = \bar{P}$ alors

$$A(P, \bar{P}, \delta, \nu) : X_P(\delta,\nu) \to X_{\bar{P}}(\delta,\nu)$$

et $\bar{X}_P(\delta,\nu) = X_P(\delta,\nu)/\ker A(P,\bar{P},\delta,\nu)$.

Représentations hermitiennes.

V : module de Harish-Chandra, V^h: dual hermitien

Induction parabolique normalisée:
$I_P^G(V^h) = I_P^G(V)^h$ donc

$$X_P(\delta, \nu)^h = X_P(\delta^h, \nu^h) = X_P(\delta, -\bar{\nu})$$

Thm: (Knapp-Zuckerman) $\bar{X}_P(\delta, \nu)$ est hermitienne ssi il existe $w \in K$ tel que $wPw^{-1} = \bar{P}$, $w \cdot \delta \simeq \delta$, $w \cdot \nu = -\bar{\nu}$. En général, on a

$$\bar{X}_P(\delta, \nu)^h \simeq \bar{X}_{\bar{P}}(\delta, -\bar{\nu})$$

Avec les hypothèses du thm :

$$X_P(\delta, \nu) \xrightarrow{A(P, \bar{P}, \delta, \nu)} X_{\bar{P}}(\delta, \nu) \xrightarrow{R(w)} X_P(\delta, -\bar{\nu})$$

Posons
$B(P, \bar{P}, \delta, \nu) = r(w)R(w) \circ A(P, \bar{P}, \delta, \nu)$

$r(w)$: facteur de normalisation .

Rmq: Les espaces vectoriels $X_P(\delta, \nu)$, $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ peuvent tous être identifiés avec le même espace des sections d'un fibré vectoriel sur $G/P \simeq K/K \cap M$. Ils sont tous isomorphes en tant que représentation de K.

La forme hermitienne sur $\bar{X}_P(\delta, \nu)$ est induite par la forme

$$\langle v, w \rangle = \langle v, B(P, \bar{P}, \delta, \nu) \cdot w \rangle$$

sur $X_P(\delta, \nu)$

KZ montrent que le radical est exactement $\ker B(P, \bar{P}, \delta, \nu)$.

Cor: $\bar{X}_P(\delta, \nu)$ est unitaire ssi il existe $w \in K$ tq $wPw^{-1} = \bar{P}$, $w \cdot \delta \simeq \delta$, $w \cdot \nu = -\bar{\nu}$ et si l'opérateur hermitien $B = B(P, \bar{P}, \delta, \nu)$ est positif.

Supposons $\bar{X}_P(\delta,\nu)$ hermitien, $w \in N_K(A)$ tq $wPw^{-1} = \bar{P}$, $w \cdot \delta \simeq \delta$, $w \cdot \nu = -\bar{\nu}$.

Fixons $(\mu, E_\mu) \in \hat{K}$. Definissons $R_\mu(w,\nu)$:

$$\mathbf{Hom}_K(E_\mu, X_P(\delta,\nu)) \longrightarrow \mathbf{Hom}_K(E_\mu, X_P(\delta,-\bar{\nu}))$$

par action de $B(P,\bar{P},\delta,\nu)$ sur l'image. Par la réciprocité de Frobenius $R_\mu(w,\nu)$:

$$\mathbf{Hom}_{M\cap K}(E_\mu, V_\delta) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{M\cap K}(E_\mu, V_\delta))$$

Cor: $\bar{X}_P(\delta,\nu)$ est unitaire ssi il existe $w \in K$ tel que $wPw^{-1} = \bar{P}$, $w \cdot \delta \simeq \delta$, $w \cdot \nu = -\bar{\nu}$ et les opérateurs hermitiens $R_\mu(w,\nu)$ sont positifs pour tout $\mu \in \hat{K}$.

On a maintenant une infinité d'opérateurs en dimension finie plutôt qu'un seul en dimension infinie...

PROBLEME 1 : Réduction à un nombre fini de $\mu \in \hat{K}$.

PROBLEME 2 : Calcul de la signature des $R_\mu(w,\nu)$.

Factorisation de $R_\mu(w,\nu)$.

On essaie d'avancer vers une solution du Problème 2. On suppose G déployé, $P = MAN$ minimal.

w: élément le plus long de $W(A) = N_K(A)/Z_K(A)$, $w \cdot P = \bar{P}$

$w = s_{\alpha_r} \dots s_{\alpha_1}$ décomposition réduite dans $W(A)$

Alors $A(P, \bar{P}, \delta, \nu) = A(s_{\alpha_r}) \dots A(s_{\alpha_1})$,

$$A(s_{\alpha_i}) = A(P_{i-1}, P_i, \delta^i, \nu^i) :$$

$$X_{P_{i-1}}(\delta^{i-1}, \nu^{i-1}) \to X_{P_i}(\delta^i, \nu^i)$$

$P_i = s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} \cdot P$, $P_0 = P$,

$\delta^i = s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} \cdot \delta$, $\nu^i = s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} \cdot \nu$

Pour tout $\alpha \in \Sigma$, choisissons $\psi_\alpha : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$,

$$\psi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_\alpha, \ \psi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{-\alpha},$$

E_α, $E_{-\alpha}$ vecteurs radiciels
$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha = \check{\alpha}$

$\theta(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$

$Z_\alpha = E_\alpha - E_{-\alpha} \in \mathfrak{k}, \ K^\alpha = \exp tZ_\alpha \simeq SO(2)$

se relève en $\Psi_\alpha : SL(2, \mathbb{R}) \to G$, d'image G^α.

α simple, interprétons $A(s_\alpha)$ comme un opérateur d'entrelacement pour le sous-groupe de rang 1 MG^α et introduisons l'opérateur $R_\mu(s_\alpha)$ correspondant .

Alors $R_\mu(w, \nu) = R_\mu(s_{\alpha_r}) \ldots R_\mu(s_{\alpha_1})$. Des formules explicites pour $R_\mu(s_\alpha)$ existent, mais elle dépendent de la décomposition de E_μ en K^α-types.

K-caractère et K-signature.

V: module de HC de longueur finie

$(\mu, E_\mu) \in \hat{K}$

$V^\mu := \mathbf{Hom}_K(E_\mu, V)$, $m_\mu = \dim V^\mu$

Posons $\Theta_K(V) = \sum_{\mu \in \hat{K}} m_\mu \, \mu$ (somme formelle)

Si V est hermitien, $\langle ., . \rangle$, V^μ hérite alors d'une forme hermitienne de signature (p_μ, q_μ).

Posons $Sgn_K(V) = \sum_{\mu \in \hat{K}} (p_\mu \, \mu, q_\mu \, \mu)$

V est unitaire ssi $q_\mu = 0$ pour tout $\mu \in \hat{K}$.

Caractère infinitésimal réel.

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: centre de l'algèbre enveloppante.

agit par des scalaires sur les modules irréductibles.

$\zeta : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$

Isomorphisme d'Harish-Chandra, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$: sous-algèbre de Cartan, W: groupe de Weyl

Caractères de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \leftrightarrow W$-orbites dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$

$$\chi_\lambda \leftrightarrow W \cdot \lambda, \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$$

Supposons que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est la complexification d'une sous-algèbre de Cartan θ-stable réelle $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$.

Décomposons $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$, $\lambda = \lambda_R + \lambda_I$, avec

$$\lambda_R \in i\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*, \quad \lambda_I \in \mathfrak{t}^* \oplus i\mathfrak{a}^*$$

Def: Car. Inf. χ_λ is réel si $\lambda = \lambda_R$ (ne dépend pas des choix).

Prop: Reps irréductibles tempérées de car. inf réel $= $ facteurs de composition des $X_P(\delta, 0)$, $P = MAN$, (δ, V_δ): serie discrète de M

Thm: (Vogan) Il existe une bijection entre les reps irréductibles tempérées de car. inf réel et $\hat{K}$:

$X \mapsto LKT(X)$.

Cor: $\Theta_K(X)$, X rep. irréductible tempérée de car. inf. réel, sont linéairement indépendants.

Thm: (Vogan) X module de HC irréd. hermitien. Alors il existe un nombre fini de reps irréductibles tempérées de car. inf réel $Z_1, \ldots Z_p$ et des entiers $r_1^+, \ldots r_p^+$, $r_1^-, \ldots r_p^-$, tels que

$$Sgn_K(X) = \sum_{i=1}^{p} (r_i^+ \Theta_K(Z_i), r_i^- \Theta_K(Z_i))$$

A permutation près, les Z_i's, $r_i^\pm$ sont uniques.

Cor (des deux thms précédents): Pour vérifier l'unitarisabilité de $X = \bar{X}_P(\delta, \nu)$, il suffit de calculer la signature de $R_\mu(w, \nu)$ pour les K-types minimaux des Z_i.

Ceci apporte une réponse au PROBLEME 1, mais la preuve de l'existence des Z_i n'est pas constructive...

Thm: Soit un X module de HC irréd. hermitien. Alors il existe un sous-groupe parabolique $P = MAN$ de G, un module de HC irred. hermitien de car. inf. réel Y de M et $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ tel que

$$X = X_P(Y, \nu).$$

De plus X est unitaire ssi Y l'est.

Ceci réduit le problème de la classification du dual unitaire au cas où le caractère infinitésimal est réel.

Représentations unitaires sphériques.

$G = G(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$: corps p-adique ou $\mathbb{R}$

$\mathbb{F}$ p-adique, $\mathfrak{P}_{\mathbb{F}} \subset \mathfrak{O}_{\mathbb{F}} \subset \mathbb{F}$, $q = |\mathfrak{O}_{\mathbb{F}}/\mathfrak{P}_{\mathbb{F}}|$

$K = \mathbb{G}(\mathfrak{O}_{\mathbb{F}})$ sous-groupe compact maximal

Catégorie de représentations : $\mathcal{M}(G)$: reps lisses dans le cas p-adique. Dans le cas réel, modules de HC.

Def: $V \in \mathcal{M}(G)$ est sphérique si $V^K \neq 0$.

On suppose G déployé $B = AN$ sous-groupe de Borel, A tore maximal déployé, $A \simeq (\mathbb{F}^\times)^n$.

Classification.

χ: caractères non ramifiés de A, ie. trivial sur $M := A \cap K$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$, χ est donné par $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$.

$\mathbb{F}$ p-adique, $\chi(a_1, \dots, a_n) = |a_1|^{\nu_1} \dots |a_n|^{\nu_n}$,

$\nu_i \in \mathbb{C}/(2i\pi/\log q)\mathbb{Z}$, $|.|$: valeur absolue normalisée de $\mathbb{F}$

Dans tous les cas χ est donné par
$\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \simeq X^*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$,

Classification de Langlands : $X_B(\chi)$, $\bar{X}_B(\chi)$ ou $X_B(\nu)$, $\bar{X}_B(\nu)$

Thm Reps. irreductibles sphériques sont de la forme $\bar{X}_B(\chi)$, χ caractère non ramifié de A.

$\bar{X}_B(\chi) \simeq \bar{X}_B(\chi')$ ssi $\exists w \in N_K(A)$ tel que $w\chi = \chi'$.

$\bar{X}_B(\chi)$ est hermitien ssi $\exists w \in N_K(A)$ tel que $w \cdot \chi = \bar{\chi}^{-1}$.

Def $\bar{X}_B(\nu)$ a un car. inf. réel
$\nu \in \mathfrak{a}^* = X^*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (coincide avec la définition précédente)

L'espace des paramètres est le même pour les groupes réels et p-adiques :

$\nu \in \mathfrak{a}^*$ strictement dominant tel que $w \cdot \nu = -\nu$ où w plus grand élément de W.

Thm (Barbasch-Moy) ($\mathbb{F}$ p-adique)

Supposons que $Im(\nu) \neq 0$. Alors $Im(\nu)$ définit un sous-groupe parabolique $P = LN$ de G,

$$\Sigma(A, L) = \{\alpha \in \Sigma(\alpha, Im(\nu)) = 0\}$$

$$\Sigma(A, N) = \{\alpha \in \Sigma(\alpha, Im(\nu)) > 0\}$$

Alors $\bar{X}^L_{B_L}(\nu) = \bar{X}^L_{B_L}(\nu_R) \otimes Im(\nu)$ et

$$\bar{X}_B(\nu) = X_P(\bar{X}^L_{B_L}(\nu_R) \otimes Im(\nu))$$

est unitaire ssi $\bar{X}^L_{B_L}(\nu_R)$ est unitaire.

Cor Classification du dual unitaire sphérique se réduit au cas où le caractère inf. est réel, comme dans le cas $F = \mathbb{R}$

Stratégie pour la classification :

1- Exhiber des unitaires parmi les $\bar{X}_B(\nu)$ (le plus possible)

2- Montrer que les autres ne le sont pas.

On revient au cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. L'étape 2 ci-dessus demande des conditions nécessaires d'unitarisabilité suffisamment puissantes. Considérons les opérateurs $R_\mu(w, \nu)$. Pour certains μ, nous allons pouvoir dire quelque chose à propos de leur signature.

$R_\mu(w, \nu)$ endomorphisme de $\mathbf{Hom}_{M\cap K}(E_\mu, V_\delta)$, mais ici

$P = B = AN$ donc $M \cap K = M = A \cap K$ et $\delta =$ rep. triviale de M donc $R_\mu(w, \nu)$ est un endomorphisme de $(E_\mu^*)^M$

Normalisation : $r(w)$ tel que $R_\mu(w, \nu) = 1$ lorsque μ est trivial.

Factorisation $R_\mu(w,\nu) = R_\mu(s_{\alpha_r})\dots R_\mu(s_{\alpha_1})$

Chaque $R_\mu(s_\alpha) : (E_\mu^*)^M \to (E_\mu^*)^M$

$W(A) = N_K(A)/Z_K(A) = N_K(A)/M$ agit sur $(E_\mu^*)^M$.

Décomposons $E_\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}} E_j$ selon l'action de $K^\alpha \simeq SO(2)$.

Ceci induit

$$(E_\mu^*)^M = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathbf{Hom}_M(E_{2j} + E_{-2j}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} F_j$$

$R_\mu(s_\alpha)$ préserve cette décomposition, et agit sur F_0, F_1, F_2, ... par des scalaires, d_0,d_1, d_2, ...

Normalisation est $d_0 = 1$, et des calculs dans $SL(2)$ montrent que

$$d_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{(2j-1) - \langle \nu, \check{\alpha} \rangle}{(2j-1) + \langle \nu, \check{\alpha} \rangle}$$

Def Un K-type est dit petit si $\mu(iZ_\alpha) = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Lorsque μ est petit, $(E_\mu^*)^M = F_0 \oplus F_1$ et

F_0 : $+1$ -espace propre de s_α

F_1 : -1 -espace propre de s_α

Donc

$$R_\mu(s_\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ sur } F_0 \\ \frac{1-\langle \nu, \check{\alpha} \rangle}{1+\langle \nu, \check{\alpha} \rangle} \text{ sur } F_1 \end{cases}$$

Rmk Lorsque μ est petit, $R_\mu(w, \nu)$ dépend seulement de la représentation de $W(A)$ sur $(E_\mu^*)^M$. C'est une simplification importante, parce que l'on a pas besoin de connaitre la décomposition de E_μ en K^α-types pour tout α.

Lorsque μ est petit, la formule pour $R_\mu(s_\alpha)$ coincide avec les formules apparaissant dans le contexte des groupes p-adiques. Grâce aux travaux de Barbasch-Moy sur le dual unitaire sphérique dans le cas p-adique, on va pouvoir dire quelque chose sur la signature des $R_\mu(w, \nu)$, pour un sous-ensemble des K-types petits, appellés pertinents.

Dual unitaire sphérique pour les groupes p-adiques.

$G = \mathbb{G}(\mathbb{F})$ groupe réductif p-adique déployé,

$B = AN$: sous-groupe de Borel $K = \mathbb{G}(\mathfrak{O}_{\mathbb{F}})$ sous-groupe compact maximal

Reps. irred. spheriques $\bar{X}_P(\chi)$, χ caractère non ramifié de A.

Car. inf. réel si $\chi \leftrightarrow \nu \in \mathfrak{a}^*$, dominant.

Hermitien si $w \cdot \nu = -\nu$, w plus grand élément de W.

Soit $I \subset K$ sous-groupe d'Iwahori de G.

$\mathcal{M}(G)_I$: souscatégorie $\mathcal{M}(G)$ des représentations engendrées par leur vecteurs fixés par I. Elle est stable par sous-quotients. Les objets irréducibles sont les facteurs de composition des $X_B(\chi)$. Donc les $\bar{X}_B(\chi)$ en font partie.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, I)$: Algèbre de convolution des distributions I-bi-invariantes à support compact sur G.

$\mathcal{M}(\mathcal{H})$: catégorie des $\mathcal{H}$-modules unitaux.

Thm On a une équivalence de catégories

$$\mathcal{M}(G)_I \to \mathcal{M}(\mathcal{H}), \quad V \mapsto V^I$$

d'inverse $W \mapsto \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}} W$.

Thm (Barbasch-Moy) $V \in \mathcal{M}(G)_I$ est unitaire ssi $V^I \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ est unitaire.

$\mathcal{H}$ est une algèbre munie d'une antiinvolution $T \mapsto \check{T}$, induite par $g \mapsto g^{-1}$, grâce à laquelle on définit les notions de modules hermitiens et unitaires.

2 étapes dans la démonstration :

1- réduction au caractère inf. réel

2- le cas où le car. inf est réel. Ceci utilise les idées du cas réel.

Algèbre de Hecke générique .

$\boldsymbol{H}$: algèbre sur $\mathbb{C}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^{-1}]$ engendrée par $\boldsymbol{T_w}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X_*(A)}$ (Bernstein).

Specialisation $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}$: $\boldsymbol{H(q)} \simeq \boldsymbol{\mathcal{H}}$.

Sous-algèbre $\boldsymbol{H_W}$ engendrée par les $\boldsymbol{T_w}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. $\boldsymbol{H_W(q)} \simeq \boldsymbol{\mathcal{H}(K, I)}$.

Restriction à $\boldsymbol{H_W}$ pour les $\boldsymbol{H}$-modules va jouer le rôle de la restriction à $\boldsymbol{K}$ pour les reps. de $\boldsymbol{G}$.

Classification $\boldsymbol{H}$-modules irréductibles par Kazhdan-Lusztig :

$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\rho})$: "Paramètres de Langlands"

$\boldsymbol{\mathcal{M}_{\phi,\rho}}$: module standard, avec unique quotient irréd. $\boldsymbol{\mathcal{L}_{\phi,\rho}}$

On peut définir pour les $\boldsymbol{H}$-modules, les notions de :

modules tempérés

modules de car. inf réel

Coincidant avec les définitions ci-dessus par l'équivalence de catégories.

Prop: $V \in \mathcal{M}(G)_I$ est sphérique ssi V^I contient la rep. triviale de $\mathcal{H}(K, I) \simeq H_W(q)$.

l'involution d'Iwahori-Matsumoto sur $\mathcal{H}$ induit une involution sur $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, and et sur $\mathcal{M}(G)_I$. Elle préserve les unitaires.

Si V est une rep. irred. tempérée de car. inf. réel de $\mathcal{M}(G)_I$, alors V^I contient la rep. signe de $H_W(q)$.

Son image par IM contient la rep. triviale de $H_W(q)$: c'est une rep. irréd. sphérique unitaire.

Rappelons la stratégie de la classification du dual unitaire sphérique :

1- Exhiber autant que possible des reps. unitaires parmi les $\bar{X}_B(\nu)$

2- Montrer que les autres ne le sont pas

Nous avons :

Cas p-adique, étape 1 : IM(tempéré de car.inf réel) est unitaire sphérique + séries complémentaires.

Cas réel, étape 2 : conditions nécessaires : $R_\mu(w, \nu)$ positif, pour tout $\mu \in \hat{K}$, mais nous ne controlons que les μ petits. On doit encore expliquer comment ceci donne des conditions effectives pour μ petit.

Cas réel , étape 1 : C'est difficile . Des candidats à l'unitarité sont les reps spéciales unipotentes d'Arthur (sphériques). Ce sont les analogues de IM(tempéré de car.inf réel).

Barbasch arrive à caractériser ces reps par leur invariants (front d'onde, car. inf.) et à les réaliser par induction cohomologique, et d'autres constructions préservant l'unitarité.

A propos de l'étape 2 :

Dans le cas p-adique, on doit trouver le dual unitaire pour les $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, I)$-modules.

Lusztig a introduit une version graduée $\mathbb{H}$ de $\mathcal{H}$, et la théorie des représentations de $\mathcal{H}$ se réduit à celle de $\mathbb{H}$.

On définit des notions de modules hermitien et unitaires pour $\mathbb{H}$, qui coincide avec les précédentes.

Analogue des K-types : on peut restreindre les modules à $\mathbb{C}[W] \subset \mathbb{H}$. Appelons ceci encore des K-types.

Dans $\mathcal{M}(\mathbb{H})$, on a aussi une classification de Langlands formellement similaire : modules standards $X(\nu)$, leur unique quotient irréd. $\bar{X}(\nu)$, opérateurs d'entrelacement...

Comme dans le cas réel, à partir des $A(w, \nu)$ avec $X(\nu)$ hermitien, on obtient des opérateurs hermitiens $R_\sigma(\nu)$, mais ici $\sigma \in \hat{W}$ plutôt que dans $\mu \in \hat{K}$. Unitarité est équivalente au fait que les $R_\sigma(\mu)$ sont tous positifs.

Barbasch introduit un sous-ensemble de $\hat{W}$ de représentations appelées pertinentes. Il montre que $\bar{X}(\nu)$ est unitaire ssi les $R_\sigma(\nu)$, σ pertinente, est positif.

Dans le cas réel : si μ est petit, les opérateurs $R_\mu(\nu)$ dépendent seulement de la structure de W-module sur $(E_\mu^*)^M$. On devrait donc les noter $R_\sigma(\nu)$, où σ est une rep. de W sur $(E_\mu^*)^M$.

thm(Barbasch) Pour toute $\sigma \in \hat{W}$ pertinente, il existe (explicitement donnée cas par cas) un petit K-type μ tel que W agit sur $(E_\mu^*)^M$ comme σ. De plus les opérateurs $R_\sigma(\nu)$ dans le cas réel sont donnés par les mêmes formules que leur analogues p-adiques.

Cor/Conjecture $\bar{X}_B(\nu)$ sont unitaires dans le cas réel ssi ils sont unitaires dans le cas p-adique.

La condition nécessaire est établie, et la condition suffisante l'est pour les groupes classiques.