

MAT431 - Calcul différentiel et analyse complexe

D. RENARD

26 février 2020

Table des matières

I	Calcul différentiel	1
I	Calcul différentiel dans les E.V.N.	7
I.1	Rappels sur les espaces vectoriels normés	7
I.2	Applications différentiables. Différentielle	10
I.3	Théorèmes de la moyenne	15
I.4	Classe \mathcal{C}^k et différentielles d'ordre supérieur	18
I.5	Théorème de point fixe de Banach	25
I.6	Théorème des fonctions implicites	30
I.7	Théorèmes d'inversion locale et globale	31
I.8	Exercices	32
II	Sous-variétés de \mathbb{R}^N	37
II.1	Immersion et submersions	37
II.2	Paramétrage local. Système de coordonnées	39
II.3	Sous-variétés définies par des graphes	41
II.4	Sous-variétés définies par des équations	43
II.5	Autre définition des sous-variétés	47
II.6	Changements de paramétrage	48
II.7	Calcul différentiel sur les sous-variétés	50
II.8	Exercices	64
III	Equations différentielles	67
III.1	Remarques générales	67
III.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	68
III.3	Temps de vie des solutions. Flot global	73
III.4	Equations différentielles sur les sous-variétés	77
III.5	Exercices	81
IV	Calcul des variations	87
II	Analyse complexe	91
V	Fonctions holomorphes	95
V.1	Conditions de Cauchy réelles. \mathbb{C} -dérivabilité	95
V.2	Transformations conformes	102
V.3	Exercices	103

VI	Propriétés des fonctions holomorphes	105
VI.1	Intégration le long d'un chemin	105
VI.2	La formule intégrale de Cauchy	107
VI.3	Fonctions holomorphes vs fonctions analytiques	109
VI.4	Théorèmes de Morera et de Goursat	112
VI.5	Fonctions holomorphes définies par une intégrale	113
VI.6	Les zéros des fonctions holomorphes	115
VI.7	Propriété de la moyenne et principe du maximum.	117
VI.8	Suites et séries de fonctions holomorphes	119
VI.9	Exercices	121
VII	Formule des résidus	125
VII.1	Homotopie - Ouverts simplement connexes	125
VII.2	Invariance par homotopie	127
VII.3	Indice d'un lacet	129
VII.4	Fonctions méromorphes, résidus	131
VII.5	La formule des résidus	134
VII.6	Formule des résidus et le calcul d'intégrales	135
VII.7	Exercices	136
VII.8	Le théorème de Rouché	139
VIII	Existence de primitives - Logarithme Complexe	143
VIII.1	Existence de primitives	143
VIII.2	Logarithme complexe	144
VIII.3	Exercices	148

III Sujets d'examen

149

Première partie
Calcul différentiel

Le calcul différentiel des « fonctions à plusieurs variables », c'est-à-dire des fonctions d'un ouvert de \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R}^q , $p, q \in \mathbb{N}^\times$, se généralise en remplaçant les espaces de dimension finie \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q par des espaces vectoriels réels normés, de dimension pouvant être infinie. Si les résultats en dimension finie ne dépendent pas pour l'essentiel du choix des normes sur \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q , parce que toutes les normes sur un même espace \mathbb{R}^p sont équivalentes, il n'en est pas de même en dimension infinie. En particulier, beaucoup d'énoncés se placent dans le cadre des espaces de Banach, c'est-à-dire des espaces vectoriels normés complets. Ceux-ci ont été étudiés dans le cours de tronc commun de la première année, et nous renvoyons à celui-ci pour que le lecteur se rafraîchisse les idées sur le sujet, si besoin est ([10], chapitre II et IV).

Dans le premier chapitre, après quelques rappels sur les espaces vectoriels normés, en particulier les espaces de Banach, nous introduisons la notion de différentielle en un point d'une application $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Ceci permet d'introduire les notions d'application différentiable, puis de classe \mathcal{C}^1 , puis par la suite, les différentielles d'ordre supérieur et les applications de classe \mathcal{C}^p , $p \geq 1$. On démontre dans ce cadre les principaux résultats du calcul différentiel : propriété de linéarité de la différentielle, formule pour la différentielle d'une application composée, théorème des accroissements finis, théorème fondamental du calcul différentiel, lemme de Schwarz, formule de Taylor, etc. La fin du premier chapitre est consacrée à la démonstration de trois théorèmes fondamentaux : le théorème de point fixe (attribué à S. Banach ou à E. Picard), le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale. Ces deux derniers théorèmes sont essentiellement équivalents, dans le sens où l'on peut facilement démontrer l'un à partir de l'autre, et joueront un rôle crucial dans la théorie des sous-variétés de \mathbb{R}^N que nous développerons au chapitre suivant. Nous déduisons le théorème des fonctions implicites du théorème de point fixe. Une autre application de ce théorème est le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz), qui seront l'objet du chapitre III. A cet effet, en vue des applications aux équations différentielles, nous démontrons une version « à paramètres » du théorème de Picard, où le point fixe dépend de manière différentiable des paramètres.

De nombreux problèmes nécessitent de généraliser le calcul différentiel à des fonctions définies sur des entités géométriques autres que des ouverts d'un espace \mathbb{R}^N . Par exemple, on peut être amené à chercher les extrema d'une fonction dont la variable décrit l'espace des phases d'un système physique, cet espace de phases étant un certain lieu géométrique dans un espace \mathbb{R}^N , mais pas nécessairement un ouvert. De tels problèmes d'optimisation sous contrainte apparaissent naturellement en mécanique, en physique, en économie, etc. Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les sous-variétés, qui apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et surfaces dans l'espace \mathbb{R}^3 . Elles peuvent être considérées selon différents points de vue qui font la richesse et la difficulté de la théorie. Une première étape va donc être de dégager des définitions équivalentes correspondant à ces différents points de vue, pour pouvoir choisir le plus adapté. L'outil fondamental permettant le lien entre ces points de vue est le théorème d'inversion locale. Localement, une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N ressemble à l'inclusion d'un ouvert de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^N . Une fois les sous-variétés introduites, on peut définir les applications différentiables, ou de classe \mathcal{C}^k entre deux sous-variétés, et généraliser les résultats du calcul différentiel. La principale différence est que la différentielle df_p en un point p d'une telle application f entre deux sous-variétés \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 est une application linéaire de l'espace tangent à \mathcal{S}_1 en p vers l'espace tangent

à \mathcal{S}_2 en $f(p)$. Le domaine de définition et l'espace d'arrivée dépendent donc de p . Une fois ces outils mis en place, l'extension des résultats du calcul différentiel est naturelle et guère difficile. Notons que l'une des conséquences du formalisme des sous-variétés est de pouvoir introduire facilement la notion d'espace tangent en un point, qui possède une interprétation géométrique évidente. Dans la théorie des variétés différentiables abstraites, qui constitue la suite naturelle de ce cours, la définition des espaces tangents constitue une difficulté initiale non négligeable. Ces variétés différentiables peuvent être munis de structures supplémentaires (formes différentielles, métriques riemanniennes, connexions, etc). Ceci constitue le domaine de la géométrie différentielle, qui occupe une place centrale en mathématiques et en physique théorique (théories de jauge, etc) et pourra faire l'objet d'un cours plus avancé.

Le troisième chapitre est consacré aux équations différentielles ordinaires. Celle-ci jouent (depuis I. Newton) un rôle essentiel dans la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, économiques, etc, quand on veut décrire l'évolution déterministe d'un tel système ne dépendant que d'une variable (souvent cette variable est le temps, ce qui influe sur la terminologie, même lorsque ce n'est pas le cas). D'autres équations de la physique (équation des ondes, de la chaleur, de Navier-Stokes, de Schrödinger, etc) font intervenir plusieurs variables et l'on parle alors d'équations aux dérivées partielles. Le théorème principal de la théorie des équations différentielles ordinaires est le théorème de Cauchy-Lipschitz (et ses variantes), qui donne l'existence et l'unicité locale d'une solution, les conditions initiales étant fixées. L'idée que l'évolution de l'univers est déterminée par son état à un instant donné et les lois qui le régissent est une idée importante, qui a longtemps dominé la philosophie des sciences (jusqu'à l'avènement de la mécanique quantique). Mais d'autres limitations de ce résultat apparaissent indépendamment de la mécanique quantique. Il faut tout d'abord que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz soient vérifiées, il existe sans cela des contre-exemples à l'existence ou l'unicité de la solution. Et même lorsque le théorème s'applique, les solutions exactes sont souvent impossibles à calculer. Depuis Poincaré, et son étude du problème des trois corps, on sait que les méthodes de résolution explicites ne permettent pas de comprendre les systèmes les plus intéressants, et depuis cette période, l'intérêt des mathématiciens s'est plutôt concentré sur les propriétés qualitatives, géométriques ou probabiliste, de ces équations. Nous ne poursuivons pas plus avant de manière systématique cette théorie des systèmes dynamiques qui pourra faire l'objet d'un cours plus avancé, nous nous bornerons ici à aborder ce vaste domaine par le biais de quelques exercices d'étude qualitative d'équations différentielles ordinaires. Nous adoptons un formalisme et une terminologie provenant d'une vision géométrique de la problématique : l'équation est la donnée d'un champs de vecteurs (sur un ouvert de \mathbb{R}^N , ou plus généralement sur une sous-variété), une solution est une courbe intégrale de ce champ de vecteurs et l'ensemble de ces courbes intégrales forme le flot du champs de vecteurs. Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme sous certaines conditions l'existence d'un flot local, et la version « à paramètres » que nous donnons permet d'établir la régularité du flot (celui-ci est au moins aussi régulier que le champ de vecteurs). Nous abordons ensuite le problème du temps de vie des solutions, c'est-à-dire des courbes intégrales maximales, et nous introduisons le flot global et ses propriétés.

Enfin, dans un court chapitre final, nous abordons sous forme d'exercices le calcul des variations. Le calcul différentiel élémentaire donne une condition nécessaire pour qu'une fonction numérique suffisamment régulière sur un ouvert de \mathbb{R}^N admette un extremum local en un point est l'annulation de la différentielle en ce point. On a vu l'extension de

ce résultat au cadre des espaces de Banach dans le premier chapitre, et on l'applique ici à la recherche d'une fonction dans un espace de Banach réalisant un extrémum local d'une fonctionnelle (une fonction de fonctions) donnée par une intégrale et un Lagrangien. Dans ce cadre, la condition d'annulation de la différentielle conduit à l'équation d'Euler-Lagrange. On établit ensuite la conservation de certaines quantités lorsque le Lagrangien est invariant par un groupe à un paramètre de difféomorphismes (théorème de Noether). Sous une hypothèse de régularité du Lagrangien, on réécrit localement l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme d'une équation différentielle ordinaire satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et l'on en déduit l'existence et l'unicité locale d'une solution.

Chapitre I

Calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés

I.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

I.1.1 Espaces de Banach

Les espaces vectoriels normés dans ce chapitre sont tous définis sur le corps des nombres réels \mathbb{R} .

Un espace de Banach E est un espace vectoriel normé, qui, en tant qu'espace métrique, est **complet**, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans E est convergente. Nous renvoyons le lecteur au cours de première année [10], chapitre II et IV, pour ce qui concerne la théorie de base des espaces métriques complets et des espaces de Banach. Dans la suite, nous utiliserons sans plus de commentaires la caractérisation suivante des espaces de Banach.

Proposition I.1.1.

Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est complet si et seulement si toute série à valeurs dans E normalement convergente est convergente.

I.1.2 Applications linéaires continues

Soient E et F des espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . Rappelons qu'une application linéaire $T : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si elle est continue en 0 et ceci a lieu si et seulement si T est bornée, c'est-à-dire que

$$(I.1.1) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

D'autre part, si F est un espace de Banach, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E; F)$ et $(\mathcal{L}(E; F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;F)})$ est un espace de Banach. (Voir cours de F. Pacard [10]). Pour alléger la rédaction, nous noterons souvent les normes simplement par $\|\cdot\|$ sans mention de l'espace

sous-jacent. Sur $\mathcal{L}(E; F)$, la norme sera sauf mention explicite du contraire la norme d'opérateur (I.1.1).

Remarquons que

$$\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F.$$

Si E est un espace de vectoriel normé, la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ définie ci-dessus sur $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$ est une **norme d'algèbre**, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (A, B \in \mathcal{L}(E)).$$

Plus généralement, si A et B se composent, disons $A \in \mathcal{L}(F; G)$, $B \in \mathcal{L}(E; F)$, alors $AB \in \mathcal{L}(E; G)$ et l'inégalité ci-dessus est valable.

Exercice I.1.2. Soit F un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ s'identifie canoniquement à F par $T \mapsto T(1)$. Qu'en est-il des normes $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};F)}$ et $\|\cdot\|_F$?

I.1.3 Applications multilinéaires continues

Nous avons rappelé qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés est continue si et seulement si elle est continue en 0 et ceci a lieu si et seulement si elle bornée sur la boule unité. Ceci s'étend aux applications multilinéaires comme suit.

Proposition I.1.3.

Soient E_1, E_2, \dots, E_n et F des espaces vectoriels normés et soit

$$f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) f est continue en tout point de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$;
- (b) f est continue en 0;
- (c) f est bornée sur le produit des boules unités $B_{E_1}(0, 1) \times \dots \times B_{E_n}(0, 1)$.

Pour une démonstration, voir thm 1.8.1, [3]. Remarquons qu'il n'y a pas lieu de se demander de quelle norme est munie l'espace produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. La continuité des applications est une propriété topologique, la proposition fait donc sens dès que $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est muni d'une topologie (ici la topologie produit).

On note $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ l'espace des applications multilinéaires continues de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans F . On peut munir $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ de la norme

$$\|f\| = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in B_{E_1}(0,1) \times \dots \times B_{E_n}(0,1)} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F.$$

Comme dans le cas des applications linéaires, si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ muni de cette norme est encore un espace de Banach.

I.1.4 L'isomorphisme canonique $\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$

Intéressons-nous maintenant au cas des applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F , où E_1 , E_2 et F sont des espaces vectoriels normés. Nous allons exhiber une isométrie (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire respectant les normes)

$$\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)).$$

Pour cela, posons pour toute $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$,

$$\Phi(f)(x)(y) = f(x, y), \quad (x \in E_1, y \in E_2)$$

On vérifie immédiatement que pour tout $x \in E_1$, $y \mapsto \Phi(f)(x)(y)$ est une application linéaire de E_2 dans F . Comme par définition

$$\|f(x, y)\|_F \leq \|f\| \times \|x\|_{E_1} \times \|y\|_{E_2}, \quad (x \in E_1, y \in E_2),$$

il est clair que pour tout $x \in E_1$, $\Phi(f)(x)$ est continue, donc $\Phi(f)(x) \in \mathcal{L}(E_2; F)$. De même, on vérifie que $x \mapsto \Phi(f)(x)$ est linéaire de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2; F)$. Comme

$$\|\Phi(f)(x)\| = \sup_{y \in B_{E_2}(0,1)} \|\Phi(f)(x)(y)\|_F = \sup_{y \in B_{E_2}(0,1)} \|f(x, y)\|_F \leq \|f\| \times \|x\|_{E_1},$$

l'application $\Phi(f) : x \mapsto \Phi(f)(x)$ est linéaire continue de E_1 dans $\mathcal{L}(E_2; F)$, de norme au plus $\|f\|$. L'application $f \mapsto \Phi(f)$ est donc bien définie de $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2; F))$. Bien entendu, elle est linéaire, et la majoration

$$\|\Phi(f)(x)\| \leq \|f\| \times \|x\|_{E_1}, \quad (x \in E_1)$$

obtenue ci-dessus implique que $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|$. On en déduit que Φ est continue, de norme au plus 1.

Nous allons maintenant définir une application qui est l'inverse de Φ . Posons, pour tout $g \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$,

$$\Psi(g)(x, y) = g(x)(y), \quad (x \in E_1, y \in E_2).$$

L'application $\Psi(g)$ est évidemment bilinéaire. Comme $\|g(x)\| \leq \|g\| \times \|x\|_{E_1}$, on a

$$\|\Psi(g)(x, y)\|_F = \|g(x)(y)\|_F \leq \|g(x)\| \times \|y\|_{E_2} \leq \|g\| \times \|x\|_{E_1} \times \|y\|_{E_2}, \quad (x \in E_1, y \in E_2).$$

Ceci montre que $\Psi(g)$ est bilinéaire continue, de norme au plus $\|g\|$. Comme $g \mapsto \Psi(g)$ est linéaire, Ψ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$ dans $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$, qui s'avère donc être continue et de norme au plus 1.

Comme par construction, Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre, Φ est un isomorphisme linéaire entre $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ et $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$ d'inverse Ψ , ces deux applications linéaires étant continues de norme au plus 1. Montrons maintenant que ce sont des isométries. On a $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{\mathcal{L}(E_1, E_2; F)}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$,

$$\|f\| = \|\Psi \circ \Phi(f)\| \leq \|\Psi\| \times \|\Phi(f)\| \leq \|\Psi\| \times \|\Phi\| \times \|f\| \leq \|f\|.$$

On en conclut que $\|\Phi(f)\| = \|f\|$, ce qui prouve que Φ (et donc Ψ) est une isométrie.

Exercice I.1.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E^{\otimes m}; F) := \mathcal{L}(E, E, \dots, E; F)$ (m facteurs E) une application m -linéaire symétrique, c'est-à-dire que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, $f(v_1, \dots, v_m) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$. Montrer que f est entièrement déterminée par ses valeurs sur les éléments de (v, v, \dots, v) , $v \in E$.

I.2 Applications différentiables. Différentielle

I.2.1 Définition de la différentielle

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E contenant 0. On écrit $f(x) = o(x)$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_E(0, \delta) \cap \mathcal{U}$, $|f(x)| < \epsilon \|x\|_E$.

Définition I.2.1.

Soient E et F des espaces vectoriels normés et \mathcal{U} un ouvert de E . On dit que l'application $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe une application linéaire continue, $df_a : E \rightarrow F$ telle que

$$(I.2.1) \quad \|f(a+h) - f(a) - df_a(h)\|_F = o(h).$$

Il est facile de voir que cette application linéaire est unique. On appelle df_a la différentielle de f au point a .

On dit que f est différentiable sur \mathcal{U} si elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} . On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} si elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et si l'application

$$df : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad a \mapsto df_a$$

est continue.

Fixons $h \in E$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $a + th \in \mathcal{U}$ pour tout $t \in]-\epsilon; \epsilon[$ car \mathcal{U} est ouvert, et si df_a existe, on a

$$df_a(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t},$$

ce qui montre au passage l'unicité de df_a .

Remarque I.2.2. Dans la définition de la différentielle, il est exigé que $df_a : E \rightarrow F$ soit continue. Ceci entraîne la continuité de f en a . Alternativement, on peut exiger la continuité en a dans la définition de la différentiabilité. Une application linéaire df_a vérifiant (I.2.1) est alors nécessairement continue. Rappelons qu'en dimension finie, une application linéaire est toujours continue.

Remarque I.2.3. La définition de la différentielle dépend des normes choisies sur E et F . Remplaçons $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ par des normes équivalentes. L'ouvert \mathcal{U} reste ouvert pour la nouvelle topologie, et il n'est pas difficile de vérifier que si f est différentiable avec les anciennes normes, elle l'est encore avec la même différentielle df_a pour les nouvelles normes. En particulier, comme en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, la différentiation ne dépend pas des normes.

Exemple I.2.4. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R} dans un espace vectoriel normé F , que l'on suppose différentiable au point $a \in \mathcal{U}$. Alors $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$. Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ est canoniquement isomorphe à F (cf. exercice I.1.2), on peut identifier df_a avec un vecteur de F (le vecteur tangent de f en a , donné par $df_a(1)$). On note couramment $f'(a)$ le réel $df_a(1)$.

Exemple I.2.5. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue entre deux espaces vectoriel normés. Alors f est partout différentiable, et sa différentielle en tout point est f .

En effet, $f(x_0 + h) - f(x) - f(h) = 0$ quels que soient x_0 et h dans E .

Exemple I.2.6. Soient E_1, E_2 et F des espaces de vectoriel normés. On munit l'espace vectoriel $E = E_1 \times E_2$ de la norme $\|(x, y)\|_E = \|x\|_{E_1} + \|y\|_{E_2}$. Soit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire continue. La différentielle de f au point (a, b) est donnée par

$$df_{(a,b)}(h, k) = f(a, k) + f(h, b), \quad (h \in E_1, k \in E_2).$$

En effet, on a alors

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) - df_{(a,b)}(h, k) = f(h, k).$$

Or $\|f(h, k)\|_F \leq \|f\| \times \|h\|_{E_1} \times \|k\|_{E_2} = o(\|(h, k)\|)$.

Exercice I.2.7. Reprendre l'exemple ci-dessus dans le cadre plus général des applications multilinéaires continues de la section 1.1.3.

Exemple I.2.8. On suppose que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ est un espace de Hilbert. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert \mathcal{U} de E . Supposons f différentiable en a , de différentielle $df_a : E \rightarrow \mathbb{R}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ de E tel que pour tout $h \in E$,

$$\langle \nabla f(a), h \rangle_E = df_a(h).$$

On appelle le vecteur $\nabla f(a)$ le gradient de f en a .

Exemple I.2.9. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application différentiable d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F . Soit E' un sous-espace de E , muni de la norme induite. Alors $\mathcal{U}' = E' \cap \mathcal{U}$ est un ouvert de E' , la restriction g de f à \mathcal{U}' est différentiable, et pour tout $a \in \mathcal{U}'$, dg_a est la restriction de df_a à E' .

Exercice I.2.10. On se place dans les hypothèses de l'exemple ci-dessus, avec E un espace de Hilbert, et $F = \mathbb{R}$. Déterminer $\nabla g(a)$ en fonction de $\nabla f(a)$.

I.2.2 Propriétés de la différentielle

On rappelle maintenant les propriétés de linéarité et de composition des différentielles.

Proposition I.2.11 (Linéarité de la différentielle).

Soient E et F des espaces vectoriels normés, \mathcal{U} un ouvert de E et $f, g : \mathcal{U} \rightarrow F$ des applications différentiables en un point a de \mathcal{U} . Alors toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ de f et de g est encore différentiable au point a , et

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a.$$

La démonstration est très facile et donc omise.

Proposition I.2.12 (Composition des différentielles).

Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application différentiable en un point a de \mathcal{U} , \mathcal{V} un ouvert de F contenant $f(a)$ et $g : \mathcal{V} \rightarrow G$ une application différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a , et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Démonstration. Posons $y = f(a + h)$ et $b = f(a)$. On a

$$g(y) = g(b) + dg_b(y - b) + r(y - b)$$

où $\lim_{y \rightarrow b} \frac{\|r(y - b)\|_G}{\|y - b\|_F} = 0$. On a aussi

$$y - b = f(a + h) - f(a) = df_a(h) + s(h)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|s(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$. Par linéarité de dg_b , on obtient

$$g \circ f(a + h) - g \circ f(a) - dg_{f(a)} \circ df_a(h) = dg_b(s(h)) + r(y - b).$$

D'autre part :

$$\|dg_b(s(h))\|_G \leq \|dg_b\| \|s(h)\|_F = o(h),$$

et, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut prendre h assez petit de sorte que

$$\|y - b\|_F = \|df_a(h) + s(h)\|_F \leq (\|df_a\| + \varepsilon) \|h\|_E$$

Comme par continuité de f en a on a $y \rightarrow b$ lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient $r(y - b) = o(h)$. \square

Remarque I.2.13. Grâce à cette règle de composition des différentielles, on obtient une interprétation géométrique de la différentielle. Soient E, F des espaces vectoriels normés, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha :]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow E$ une application de classe \mathcal{C}^1 de l'intervalle $]-\varepsilon; \varepsilon[$ dans E (une courbe paramétrée par $t \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ dans l'espace E). Supposons que $\alpha(0) = a$ et posons $h = \alpha'(0) = d\alpha_0(1)$ (le vecteur tangent à la courbe en $t = 0$). Considérons $\beta = f \circ \alpha :]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow F$. C'est une courbe dans F , différentiable en 0, et

$$\beta'(0) = d\beta_0(1) = df_a(d\alpha_0(1)) = df_a(h).$$

La différentielle df_a envoie donc le vecteur tangent h à la courbe α en $t = 0$ sur le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe image $\beta = f \circ \alpha$.

Remarque I.2.14. Soient E, F des espaces vectoriels normés, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application différentiable sur \mathcal{U} . Posons

$$Tf : \mathcal{U} \times E \longrightarrow F \times F, \quad (x, h) \mapsto (f(x), df_x(h)).$$

Cette application s'appelle l'application tangente. L'avantage de considérer celle-ci est que la règle de composition est plus simple : $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

I.2.3 Fonctions à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Soient E, F_1, \dots, F_n des espaces vectoriels normés. On munit $F = F_1 \times \dots \times F_n$ de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_F = \|x_1\|_{F_1} + \dots + \|x_n\|_{F_n}.$$

On considère pour chaque indice $i = 1, \dots, n$, la projection canonique

$$p_i : F \rightarrow F_i, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

et l'injection canonique

$$\iota_i : F_i \rightarrow F, \quad x_i \mapsto (0, \dots, x_i, \dots, 0)$$

(des 0 partout sauf à la i -ème place).

On a alors

$$(I.2.2) \quad p_i \circ \iota_i = \text{Id}_{F_i}, \quad \sum_{i=1}^n \iota_i \circ p_i = \text{Id}_F.$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition I.2.15.

Soient E, F_1, \dots, F_n des espaces vectoriels normés. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F = F_1 \times \dots \times F_n$ une application continue, où \mathcal{U} est un ouvert de l'espace E . Pour que f soit différentiable au point $a \in \mathcal{U}$, il faut et il suffit que pour tout i , $f_i := p_i \circ f$ soit différentiable au point a , et l'on a alors

$$df_a = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ (df_i)_a.$$

Démonstration. Si f est différentiable en a , les $f_i = p_i \circ f$ le sont aussi d'après le théorème de composition des différentielles et le fait que les p_i sont linéaires. La formule de composition des différentielles donne

$$(df_i)_a = p_i \circ df_a.$$

Réciproquement, si l'on suppose toutes les f_i différentiable en a , on obtient de (I.2.2) que

$$f = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ p_i \circ f = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ f_i.$$

La fonction f est donc différentiable en a , sa différentielle en a étant bien

$$df_a = \sum_{i=1}^n \iota_i \circ (df_i)_a$$

d'après la formule de composition des différentielles. □

Exemple I.2.16 (Formule de Leibniz). Soient E , F_1 , F_2 et G des espaces vectoriels normés, \mathcal{U} un ouvert de E , et

$$f_1 : \mathcal{U} \rightarrow F_1, \quad f_2 : \mathcal{U} \rightarrow F_2, \quad b : F_1 \times F_2 \rightarrow G$$

où b est bilinéaire continue. On définit $g : \mathcal{U} \rightarrow G$ par $g(x) = b(f_1(x), f_2(x))$. Supposons que f_1 et f_2 soient différentiables au point $a \in \mathcal{U}$. Alors il en est de même de g , et

$$dg_a(h) = b((df_1)_a(h), f_2(a)) + b(f_1(a), (df_2)_a(h)).$$

En effet, on écrit g comme composée de b et de $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ de \mathcal{U} dans $F_1 \times F_2$. On utilise alors la proposition qui précède, la formule de composition des différentielles, et la formule de la différentielle d'une application bilinéaire (cf. exemple I.2.6).

I.2.4 Différentielles partielles

On se place maintenant dans le cas où $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ est un produit d'espaces vectoriels normés. Soit \mathcal{U} un ouvert de E et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application de \mathcal{U} à valeurs dans un espace vectoriel normé F .

Fixons un point $a = (a_1, \dots, a_m)$ de \mathcal{U} , et pour tout $i = 1, \dots, m$ et considérons les applications partielles

$$f_{[i]} : x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

définies respectivement sur des voisinages ouverts de a_i dans E_i .

Proposition I.2.17.

Avec les notations ci-dessus, si f est différentiable au point $a \in \mathcal{U}$, pour tout $i = 1, \dots, m$, l'application partielle $f_{[i]}$ est différentiable en a_i . On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la différentielle de $f_{[i]}$ en a_i . C'est un élément de $\mathcal{L}(E_i; F)$ que l'on appelle la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i . En outre, on a

$$(I.2.3) \quad df_a(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i), \quad (h_1 \in E_1, \dots, h_m \in E_m).$$

Démonstration. Comme dans la section précédente, on note ι_i l'injection canonique de E_i dans E et p_i la projection canonique de E sur E_i . On a alors $f_{[i]} = f \circ \lambda_i$, où $\lambda_i(x_i) = a + \iota_i(x_i - a_i)$. Comme ι_i est linéaire, elle est partout différentiable, et si f est différentiable au point $a \in \mathcal{U}$, il en est de même de $f_{[i]}$ au point a_i par le théorème de composition des différentielles. De plus, on a par la formule de composition $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a \circ \iota_i$. Comme

$$\sum_{i=1}^m \iota_i \circ p_i = \text{Id}_E, \text{ on a } \sum_{i=1}^m df_a \circ \iota_i \circ p_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i = df_a, \text{ ce qui donne bien (I.2.3). } \quad \square$$

Remarque I.2.18. Contrairement à la proposition I.2.15, la proposition n'établit qu'une implication et non une équivalence. En effet, il est faux d'affirmer que la différentiabilité des applications partielles implique la différentiabilité de f en un point. Nous reviendrons sur cette question en I.4.

I.2.5 Applications de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n

La combinaison des cas étudiés dans les deux sections précédentes nous permet de retrouver les notions et notations usuelles du calcul différentiel pour les fonctions de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n . Soient $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Fixons un point $a \in \mathbb{R}^m$. Les applications partielles $f_{[i]}$ en a ont été définies dans la section précédente, et les applications f_j dans la section I.2.3. De même, pour tout $i = 1, \dots, m$ et tout $j = 1, \dots, n$, on peut définir $f_{[i]j}$ et $f_{j[i]}$. Il est facile de voir que ces deux fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} coïncident, et nous noterons plus commodément $f_{i,j}$ cette fonction. Si f est différentiable en a , les $f_{i,j}$ sont dérivables en a_i , $f'_{i,j}(a_i) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ (il y a là un léger abus de notations. En effet $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ est définie comme une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On identifie ici naturellement une telle application linéaire et un nombre réel comme dans l'exercice I.1.2) et

$$(I.2.4) \quad df_a = \sum_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1, \dots, n} \iota_i \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_j.$$

Autrement dit, l'application linéaire df_a est représentée dans les bases canoniques de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n par la matrice à n lignes et m colonnes $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a))_{j,i}$. On appelle cette matrice la **matrice jacobienne** de f en a . Son déterminant noté $\text{Jac}(f)(a)$, s'appelle le **déterminant jacobien**, ou simplement **jacobien**, de f en a . L'équation (I.2.4) s'écrit alors

$$df_a(h_1, \dots, h_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

où l'on identifie un élément de \mathbb{R}^n et le « vecteur colonne » (c'est-à-dire une matrice à n lignes et une colonne) qui lui est associé.

I.3 Théorèmes de la moyenne

I.3.1 Théorème des accroissements finis

Le but de cette section est d'énoncer des résultats généralisant le théorème des accroissements finis pour les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles. Commençons par un résultat sur les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé.

Théorème I.3.1.

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et F un espace vectoriel normé. Soient $f : [a; b] \rightarrow F$ et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a; b]$ et différentiables sur $]a; b[$. Supposons que pour tout $t \in]a; b[$, $\|f'(t)\|_F \leq g'(t)$. Alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq g(b) - g(a)$.

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout u, v tels que $a < u < v < b$, $\|f(v) - f(u)\|_F \leq g(v) - g(u)$. Le résultat s'en déduit par continuité en faisant tendre u vers a et v vers b . Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\|f(v) - f(u)\|_F - (g(v) - g(u)) = M > 0.$$

Posons $m = \frac{u+v}{2}$. L'inégalité triangulaire montre que l'on a nécessairement

$$\|f(v) - f(m)\|_F - (g(v) - g(m)) \geq \frac{M}{2} \quad \text{ou} \quad \|f(m) - f(u)\|_F - (g(m) - g(u)) \geq \frac{M}{2}.$$

Notons $[u_1; v_1]$ un intervalle sur lequel cette inégalité est vérifiée, et notons $m_1 = \frac{u_1+v_1}{2}$ et réitérons le procédé. On construit ainsi une suite d'intervalles emboîtés $[u_k; v_k]$ avec

$$\|f(v_k) - f(u_k)\|_F - (g(v_k) - g(u_k)) \geq \frac{M}{2^k} \quad \text{et} \quad v_k - u_k = \frac{v - u}{2^k}.$$

Alors u_k et v_k convergent vers un même point w , et l'on a $u_k \leq w \leq v_k$ et

$$\begin{aligned} \frac{M}{2^k} &\leq \|f(v_k) - f(w)\|_F - (g(v_k) - g(w)) + \|f(w) - f(u_k)\|_F - (g(w) - g(u_k)) \\ &\leq \|df_w(v_k - w)\|_F + o(v_k - w) - g'(w)(v_k - w) + o(v_k - w) \\ &\quad + \|df_w(w - u_k)\|_F + o(w - u_k) - g'(w)(w - u_k) + o(w - u_k) \\ &\leq \|df_w\| (|v_k - w| + |w - u_k|) - g'(w) (|v_k - w| + |w - u_k|) + o(v_k - w) + o(w - u_k) \\ &\leq (\|df_w\| - g'(w)) (v_k - u_k) + o(v_k - u_k) \end{aligned}$$

En divisant par $v_k - u_k = \frac{v-u}{2^k}$, on obtient $\frac{M}{v-u} \leq (\|df_w\| - g'(w)) + o(1)$ et ceci donne une contradiction avec l'hypothèse. \square

Remarque I.3.2. Dans le théorème précédent, on peut affaiblir les hypothèses en supposant seulement que pour tout $t \in]a; b[$, sauf peut-être un nombre dénombrable de points, f et g sont différentiables et $\|f'(t)\|_F \leq g'(t)$ (voir [3]).

Corollaire I.3.3.

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et F un espace vectoriel normé. Soit $f : [a; b] \rightarrow F$ une application continue sur $[a; b]$ et différentiable sur $]a; b[$. Supposons que pour tout $t \in]a; b[$, $\|f'(t)\|_F \leq k$, pour une certaine constante k . Alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq k(b - a)$.

Nous énonçons maintenant une version du théorème des accroissements finis.

Théorème I.3.4 (Théorème des accroissements finis).

Soient E et F des espaces vectoriels normés, \mathcal{U} un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application différentiable sur \mathcal{U} . Soient a et b des points de \mathcal{U} . Si le segment $[a, b] = \{ta + (1-t)b; t \in [0, 1]\}$ est contenu dans \mathcal{U} , alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|df_{ta+(1-t)b}\| \times \|b - a\|_E.$$

En particulier, si \mathcal{U} est convexe, et que $\sup_{x \in \mathcal{U}} \|df_x\| \leq k$ pour une constante k , alors quels que soient a et b dans \mathcal{U} ,

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k \|b - a\|_E.$$

Démonstration. On applique le corollaire ci-dessus à $h(t) = f((1-t)a + b)$, en constatant que

$$h'(t) = df_{ta+(1-t)b}(b - a).$$

□

Corollaire I.3.5.

Si \mathcal{U} est connexe, et que df_x est nulle pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors f est constante sur \mathcal{U} .

Démonstration. Ceci découle directement du théorème si \mathcal{U} est convexe. Le cas d'un ouvert \mathcal{U} connexe s'en déduit en utilisant le fait qu'un espace de Banach est localement convexe (tout point admet un voisinage convexe aussi petit que l'on souhaite). Ainsi, l'hypothèse implique que f est localement constante. Or une fonction localement constante sur un ouvert connexe est constante. Les détails sont laissés au lecteur. □

I.3.2 Théorème fondamental du calcul différentiel

Pour énoncer ce théorème, il faut disposer d'une théorie de l'intégration d'une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} et à valeurs dans un espace de Banach F . Une théorie de l'intégration à la Riemann suffit à nos besoins. Nous n'allons pas développer une telle théorie, mais simplement dire qu'on définit de manière évidente l'intégrale d'une fonction en escalier (par une somme), et par passage à la limite, on définit ensuite l'intégrale des fonctions réglées (limites uniformes de fonction en escalier) et c'est dans cette étape que l'hypothèse de complétude de l'espace F est indispensable. Les propriétés usuelles des intégrales sont évidentes (relations de Chasles, linéarité, etc). Les fonctions continues sont réglées, et on a

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\|_F \leq (b - a) \|f\|_0.$$

où $\|f\|_0 = \sup_{t \in [a; b]} \|f(t)\|_F$.

Théorème I.3.6.

Soit $g : [a; b] \rightarrow F$ une application continue de l'intervalle $[a; b]$ à valeurs dans un espace de Banach F . Soit $t_0 \in [a; b]$. Posons

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(u) du.$$

Alors $G : [a; b] \rightarrow F$ est continue sur $[a; b]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]a; b[$ et pour tout $t \in]a; b[$, $G'(t) = g(t)$.

Démonstration. On a d'après la relation de Chasles, et les propriétés de l'intégrale

$$\|G(t+h) - G(t) - g(t)h\| = \left\| \int_t^{t+h} (g(u) - g(t)) du \right\| \leq \sup_{u \in [t; t+h]} \|g(u) - g(t)\| \times |h|$$

Or, quand h tend vers 0, $\sup_{u \in [t; t+h]} \|g(u) - g(t)\|$ fait de même, et donc le terme de gauche est $o(h)$. \square

Théorème I.3.7.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $g : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application définie sur un ouvert \mathcal{U} de E et de classe \mathcal{C}^1 . Soient $x \in \mathcal{U}$, $y \in E$, et supposons que pour tout $t \in [0; 1]$, $x + ty \in \mathcal{U}$. On a alors

$$f(x+y) = f(x) + \int_0^1 df_{x+ty}(y) dt.$$

Démonstration. On pose $g(t) = f(x + ty)$ pour tout $t \in [0; 1]$. Pour tout $t \in]0; 1[$, on a $g'(t) = df_{x+ty}(y)$. Définissons $h(t) = f(x) + \int_0^t df_{x+sy}(y) ds$. D'après le théorème précédent, pour tout $t \in]0; 1[$, $h'(t) = df_{x+ty}(y)$, et donc $h'(t) - g'(t) = 0$. On en déduit que $g - h$ est constante sur $]0; 1[$, et par continuité, sur $[0; 1]$. Comme $g(0) - h(0) = 0$, on en déduit que $h = g$ sur tout $[0; 1]$. \square

I.4 Classe \mathcal{C}^k et différentielles d'ordre supérieur

I.4.1 Définitions

Soient E et F des espaces vectoriels normés et \mathcal{U} un ouvert de E . On définit, pour une application $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, le fait d'être de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \infty$, par récurrence.

Classe \mathcal{C}^0 : f est continue.

Classe \mathcal{C}^1 : f est différentiable en tout point $x \in \mathcal{U}$ et l'application

$$df : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E, F), \quad x \mapsto df_x$$

est continue.

Classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: f est différentiable en tout point $x \in \mathcal{U}$ et df est de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Classe \mathcal{C}^∞ : f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les espaces $\mathcal{L}(E; F)$, $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$, $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)))$, etc, sont des espaces vectoriels normés. Ainsi les questions de continuité et de différentiabilité successive de f , df , $d(df)$, etc, rentrent-elles bien dans le cadre de notre étude.

I.4.2 Condition suffisante sur les dérivées partielles

Replaçons nous dans le cadre de la section I.2.4 : $E = E_1 \times \dots \times E_m$ est un produit d'espaces vectoriels normés, \mathcal{U} est un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application de \mathcal{U} à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Nous avons défini la notion de dérivée partielles (notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$). Nous avons alors le résultat suivant, qui complète la proposition I.2.17.

Proposition I.4.1.

Avec les notations ci-dessus, pour que f soit de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , il faut et il suffit que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en tout point de \mathcal{U} , et que celles-ci soient continues.

Pour que f soit différentiable au point a , il suffit que les dérivées partielles existent en tout point x dans un voisinage de a et qu'elles soient continues en a .

Démonstration. On a déjà vu que la condition était nécessaire (Proposition I.2.17). D'après la formule (I.2.3), il suffit de montrer la seconde assertion. Soit $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{U}$. Posons

$$g : \mathcal{U} \longrightarrow F, \quad g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k).$$

On a alors pour tout $k = 1, \dots, m$, $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, et puisque les différentielles partielles sont continues en a , pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_E(a, \delta)$, $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \right\| \leq \epsilon$. Il résulte du théorème des accroissements finis que l'on a

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &\leq \sum_{k=1}^m \|g(x_1, \dots, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - g(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, \dots, a_m)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \epsilon \|x_k - a_k\| \leq m\epsilon \|x - a\|. \end{aligned}$$

On obtient donc $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) + o(x - a)$, ce qui montre que f est différentiable en a et pour tout $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathcal{U}$,

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(h_k).$$

□

Exemple I.4.2. Une application linéaire continue est de classe \mathcal{C}^∞ . Elle est égale à sa différentielle en tout point. Ses différentielles d'ordre supérieur sont nulles.

I.4.3 Lemme de Schwarz

Intéressons nous de plus près dans un premier temps à la différentielle seconde. On suppose donc que $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est une application d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F de classe \mathcal{C}^1 . L'application

$$df : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad x \mapsto df_x$$

est partout définie sur \mathcal{U} et continue. Supposons qu'elle soit différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$. Cette différentielle est une application

$$d^2 f_a = d(df)_a : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$$

Or, nous avons vu dans la section I.1.4 que l'on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E, E; F).$$

La différentielle seconde $d^2 f_a = d(df)_a$ en un point a peut donc être vue comme une application bilinéaire de $E \times E \rightarrow F$.

Théorème I.4.3 (Lemme de Schwarz).

Avec les hypothèses ci-dessus, la différentielle seconde $d(df)_a$ est une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans F .

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout $u, v \in E$,

$$\frac{\|f(a+u+v) - f(a+v) - f(a+u) + f(a) - d^2 f_a(u, v)\|_F}{(\|u\|_E + \|v\|_E)^2}$$

tend vers 0 lorsque u et v tendent vers 0. Ceci implique clairement que $d^2 f_a(u, v) = d^2 f_a(v, u)$. Puisque df est différentiable en a , pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in B_E(0, 2\delta)$, alors

$$\|df_{a+x} - df_a - d^2 f_a(x)\| \leq \epsilon \|x\|_E.$$

Choisissons u et v dans E de norme plus petite que δ et posons

$$g_v(u) = f(a+u+v) - f(a+v) - f(a+u) + f(a) - d^2 f_a(u, v).$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(g_v)_u &= df_{a+u+v} - df_{a+u} - d^2 f_a(v) \\ &= (df_{a+u+v} - df_a - d^2 f_a(u+v)) - (df_{a+u} - df_a - d^2 f_a(u)) \end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\|d(g_v)_u\| \leq 2\epsilon(\|u\|_E + \|v\|_E)$$

D'après le théorème des accroissements finis, comme $g_v(0) = 0$, on obtient

$$\|g_v(u)\| = \|g_v(u) - g_v(0)\| \leq 2\epsilon(\|u\|_E + \|v\|_E) \|u\|_E \leq 2\epsilon(\|u\|_E + \|v\|_E)^2.$$

L'assertion en découle. \square

Exercice I.4.4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que le théorème ci-dessus est bien équivalent dans ce cas au fait que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f.$$

Le lemme de Schwarz admet une généralisation aux dérivées d'ordre supérieur, dont nous laissons la démonstration au lecteur.

Théorème I.4.5.

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F de classe \mathcal{C}^{p-1} ($p \geq 2$). Soit $a \in \mathcal{U}$ tel que $d^{p-1}f$ soit différentiable en a . La différentielle $d^p f_a$ est alors une application p -linéaire symétrique de E^p dans F , c'est-à-dire que pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in E^p$, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$d^p f_a(h_1, \dots, h_p) = d^p f_a(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(p)}).$$

I.4.4 Une formule pratique de calcul

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F , de classe \mathcal{C}^p . Soit $a \in \mathcal{U}$. On a alors

$$(I.4.1) \quad d^p f_a(h_1, \dots, h_p) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial}{\partial t_p} \left[(t_1, \dots, t_p) \mapsto f \left(a + \sum_{i=1}^p t_i h_i \right) \right]_{t_1=t_2=\dots=t_p=0}.$$

I.4.5 Un exemple d'application $\mathcal{C}^\infty : f \mapsto f^{-1}$

Soient E et F des espaces de Banach.

Théorème I.4.6.

L'ensemble $\text{Iso}(E; F)$ des isomorphismes linéaires bicontinus de E dans F est un ouvert de $\mathcal{L}(E; F)$ et l'application

$$\Psi : \text{Iso}(E; F) \rightarrow \text{Iso}(F; E), \quad f \mapsto f^{-1}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ , sa différentielle en f étant donnée par

$$d\Psi_f(g) = -f^{-1} \circ g \circ f^{-1}, \quad (g \in \mathcal{L}(E; F)).$$

Remarque I.4.7. Citons le résultat suivant dû à S. Banach. Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme linéaire, continu entre espaces de Banach. Alors son inverse $f^{-1} : F \rightarrow E$ est continu. Dans la définition de $\text{Iso}(E; F)$, il suffit donc d'exiger la continuité et l'inversibilité, la bicontinuité en découle.

Démonstration. Il se peut que $\text{Iso}(E; F)$ soit vide, dans ce cas, le théorème est trivialement vrai. On se place dans le cas où $\text{Iso}(E; F)$ est non vide. Soit $f_0 \in \text{Iso}(E; F)$. Montrons que pour tout $g \in \mathcal{L}(E; F)$ de norme suffisamment petite, $f_0 + g$ est encore inversible. En composant par f_0^{-1} , il s'agit de montrer que $\text{Id}_E + f_0^{-1}g$ est inversible et donc de montrer que si $h \in \mathcal{L}(E)$ est de norme suffisamment petite, alors $\text{Id}_E - h$ est inversible. Or on sait que tel est le cas si $\|h\| < 1$, l'inverse de $\text{Id} - h$ étant donné par la série normalement convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n$. Remarquons que l'on utilise ici l'hypothèse de complétude de l'espace.

Montrons maintenant que $\Psi : \text{Iso}(E; F) \rightarrow \text{Iso}(F; E)$, $f \mapsto f^{-1}$ est continue. Fixons $f_0 \in \text{Iso}(E; F)$ et montrons la continuité en ce point. Posons $f = f_0 + g$, $h = -f_0^{-1}g$, où g est de norme suffisamment petite, de sorte que si $\|h\| < 1$,

$$f = f_0(\text{Id}_E - h), \quad (\text{Id}_E - h)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} h^n \quad \text{et} \quad f^{-1} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} h^n \right) f_0^{-1}.$$

On a alors

$$f^{-1} - f_0^{-1} = \left(\sum_{n \geq 1} h^n \right) f_0^{-1},$$

d'où

$$\|f^{-1} - f_0^{-1}\| \leq \left(\sum_{n \geq 1} \|h\|^n \right) \|f_0^{-1}\| \leq \frac{\|h\|}{1 - \|h\|} \|f_0^{-1}\|.$$

Lorsque f tend vers f_0 , g tend vers 0 donc h aussi, ce qui montre que f^{-1} tend vers f_0^{-1} .

Montrons maintenant que Ψ est différentiable, la différentielle en un point étant donnée par la formule de l'énoncé. On reprend les mêmes notations que ci-dessus. Il s'agit de montrer que pour $f = f_0 + g$ proche de f_0 ,

$$\|f^{-1} - f_0^{-1} - f_0^{-1}g f_0^{-1}\| = o(g).$$

Or, on a vu que

$$f^{-1} - f_0^{-1} = \left(\sum_{n \geq 1} h^n \right) f_0^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} f^{-1} - f_0^{-1} - f_0^{-1}g f_0^{-1} &= \left(\sum_{n \geq 1} h^n \right) f_0^{-1} - f_0^{-1}g f_0^{-1} = \left(\left(\sum_{n \geq 1} h^n \right) - f_0^{-1}g \right) f_0^{-1} \\ &= \left(\sum_{n \geq 2} h^n \right) f_0^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|f^{-1} - f_0^{-1} - f_0^{-1}g f_0^{-1}\| = \left\| \left(\sum_{n \geq 2} h^n \right) f_0^{-1} \right\| \leq \left(\sum_{n \geq 2} \|h\|^n \right) \|f_0^{-1}\| = \frac{\|h^2\|}{1 - \|h\|} \|f_0^{-1}\|.$$

Le terme de droite est bien un $o(h)$, donc un $o(g)$. Ceci montre que Ψ est différentiable en f_0 , de différentielle

$$d\Psi_{f_0}(g) = -f_0^{-1} \circ g \circ f_0^{-1}, \quad (g \in \mathcal{L}(E; F)).$$

L'application $f \mapsto d\Psi_f$ est la composée de $f \mapsto f^{-1}$, dont on a vu qu'elle est continue, de $h \mapsto (-h, h)$ de $\mathcal{L}(F; E)$ dans $\mathcal{L}(F; E) \times \mathcal{L}(F; E)$, qui est linéaire continue, et de

$$L \times R : \mathcal{L}(F; E) \times \mathcal{L}(F; E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; F); \mathcal{L}(F; E)),$$

$$(h_1, h_2) \mapsto L \times R(h_1, h_2) : \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(F; E), \quad g \mapsto h_1 \circ g \circ h_2,$$

qui est aussi linéaire, continue (car de norme plus petite que $\|h_1\| \|h_2\|$).

Elle est donc continue, ce qui montre que Ψ est de classe \mathcal{C}^1 . Par récurrence, on montre que si Ψ est de classe \mathcal{C}^k , elle est de classe \mathcal{C}^{k+1} ; elle est donc de classe \mathcal{C}^∞ . \square

I.4.6 Formule de Taylor

La formule de Taylor généralise le théorème fondamental du calcul infinitésimal I.3.7. Commençons par un lemme dont la démonstration est évidente.

Lemme I.4.8.

Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I contenant 0 et 1, à valeurs dans un espace de Banach F et de classe \mathcal{C}^{p+1} . On a alors

$$f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{f''(0)}{2!} - \dots - \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème fondamental du calcul infinitésimal I.3.7 à la fonction $g(t) = f(t) + (1-t)f'(t) + \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p)}(t)$ qui est de classe \mathcal{C}^1 , en remarquant que $g'(t) = \frac{(1-t)^{p+1}}{p+1!} f^{(p+1)}(t)$. \square

On peut affaiblir les hypothèses de ce lemme et obtenir

Lemme I.4.9.

Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I contenant 0 et 1, à valeurs dans un espace de Banach F et $p+1$ -différentiable. Supposons de plus que pour tout $t \in [0; 1]$, on ait $\|f^{(p+1)}(t)\|_F \leq C$ pour une certaine constante $C > 0$. On a alors

$$\left\| f(1) - f(0) - f'(0) - \frac{f''(0)}{2!} - \dots - \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right\|_F \leq \frac{C}{(p+1)!} dt.$$

Démonstration. On utilise ici le théorème I.3.1 appliqué à la même fonction g que ci-dessus. \square

Théorème I.4.10.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{p+1} d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace de Banach F . Soit $a \in \mathcal{U}$, $h \in E$ et supposons que le segment $\{x + th, t \in [0; 1]\}$ soit contenu dans \mathcal{U} . On a alors

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - df_a(h) - \frac{d^2 f_a(h, h)}{2!} - \dots - \frac{d^p f_a(h, h, \dots, h)}{p!} \\ = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f_{a+th}(h, h, \dots, h) dt. \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise le lemme I.4.8 appliqué à la fonction $g(t) = f(a + th)$, en remarquant que $g^{(k)}(t) = d_{a+th}^k f_a(h, \dots, h)$, $k = 1, \dots, p+1$. \square

En utilisant le lemme I.4.9, on obtient la version suivante :

Théorème I.4.11.

Soit f une fonction $p+1$ -différentiable d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Supposons de plus que pour tout $x \in \mathcal{U}$, on ait $\|d^{(p+1)} f_x\| \leq C$ pour une certaine constante $C > 0$.

Soit $a \in \mathcal{U}$, $h \in E$ et supposons que le segment $\{x + th, t \in [0; 1]\}$ soit contenu dans \mathcal{U} . On a alors

$$\left\| f(a+h) - f(a) - df_a(h) - \frac{d^2 f_a(h, h)}{2!} - \dots - \frac{d^p f_a(h, \dots, h)}{p!} \right\|_F \leq \frac{C \|h\|_E^{p+1}}{(p+1)!}.$$

On peut obtenir aussi, avec des hypothèses légèrement plus faibles.

Théorème I.4.12.

Soit $p \geq 1$. Soit f une fonction $p-1$ -différentiable d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Supposons de plus que f soit p -différentiable en $a \in \mathcal{U}$. On a alors

$$\left\| f(a+h) - f(a) - df_a(h) - \frac{d^2 f_a(h, h)}{2!} - \dots - \frac{d^p f_a(h, h, \dots, h)}{p!} \right\|_F = o(\|h\|_E^p).$$

Démonstration. Pour $p = 1$, c'est la définition de la différentielle en a . On raisonne par récurrence en supposant $p \geq 2$ et le résultat vrai pour $p-1$. Considérons l'application

$$h \mapsto g(h) = f(a+h) - f(a) - df_a(h) - \frac{d^2 f_a(h, h)}{2!} - \dots - \frac{d^p f_a(h, h, \dots, h)}{p!}.$$

Calculons sa différentielle, et pour cela, pour $j = 1, \dots, p$, calculons la différentielle de $h \mapsto \phi(h) = d^j f_a(h, \dots, h)$. Comme $d^j f_a$ est une application j -linéaire symétrique, on

obtient, pour tout $k \in E$,

$$d\phi_{(h,\dots,h)}(k) = d^j f_a(k, h, \dots, h) + d^j f_a(h, k, h, \dots, h) + d^j f_a(h, h, \dots, k) = j d^j f_a(k, h, \dots, h).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} dg_h : k \mapsto & df_{a+h}(k) - df_a(k) - 2 \frac{d^2 f_a(k, h)}{2!} + \dots + p \frac{d^p f_a(k, h, \dots, h)}{p!}, \\ & = df_{a+h}(k) - df_a(k) - d^2 f_a(k, h) + \dots + \frac{d^p f_a(k, h, \dots, h)}{(p-1)!}. \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à df , on obtient $\|dg_h\| = o(\|h\|_E^{p-1})$. C'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|h\|_E \leq \eta$, alors $\|dg_h\| \leq \epsilon \|h\|_E^{p-1}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on en déduit

$$\|g(h)\|_F = \|g(h) - g(0)\|_F \leq \epsilon \|h\|_E^p,$$

c'est-à-dire $g(h) = o(\|h\|_E^p)$. □

I.5 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de S. Banach (également attribué à E. Picard) a de nombreuses applications, en particulier le théorème des fonctions implicites et le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles. Nous donnons ici la démonstration d'une version avec paramètre.

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. Rappelons qu'une application $T : X \rightarrow Y$ est dite *lipschitzienne* s'il existe une constante réelle positive a telle que pour tous $x, y \in X$,

$$d_Y(T(x), T(y)) \leq a d_X(x, y).$$

On dit alors que T est *a-lipschitzienne*. Une application lipschitzienne est en particulier continue. Si $(Y, d_Y) = (X, d_X)$ et que la constante a est strictement plus petite que 1, on dit que $T : X \rightarrow X$ est *contractante*.

Théorème I.5.1 (Point fixe de Banach).

Soient (X, d) un espace métrique complet, $a \in [0; 1[$ et

$$T : X \rightarrow X$$

une application *a-lipschitzienne*. Alors T admet un unique point fixe $x \in X$.

Démonstration. En effet, soit $x_0 \in X$. Montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_{n+1} = T(x_n)$ est de Cauchy. Quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$,

$$d(x_n, x_m) = d(T^m(T^{n-m}(x_0)), T^m(x_0)) \leq a^m d(T^{n-m}(x_0), x_0).$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} d(T^{n-m}(x_0), x_0) &\leq \sum_{j=1}^{n-m} d(T^j(x_0), T^{j-1}(x_0)) \leq \sum_{j=1}^{n-m} a^{j-1} d(T(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{1 - a^{n-m}}{1 - a} d(T(x_0), x_0) \leq \frac{1}{1 - a} d(T(x_0), x_0). \end{aligned}$$

D'où

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{a^m}{1 - a} d(T(x_0), x_0),$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme X est complet, cette suite est convergente. Appelons x sa limite. Par continuité de T , on a

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

ce qui montre que x est un point fixe de T . Ce point fixe est clairement unique, car si $x_1 \neq x$ est un autre point fixe,

$$d(x_1, x) = d(T(x_1), T(x)) \leq a d(x_1, x),$$

ce qui est impossible. □

Exercice I.5.2. Soient (X, d) un espace métrique, $k \in \mathbb{N}^\times$ et $T : X \rightarrow X$ une application telle que T^k soit contractante. Montrer que T admet un unique point fixe, et que celui-ci est la limite de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_{n+1} = T(x_n)$, $x_0 \in X$.

Donnons maintenant une première version à paramètre, établissant la continuité du point fixe en fonction du paramètre.

Théorème I.5.3 (Point fixe de Banach à paramètre I).

Soient Λ un espace topologique, (X, d) un espace métrique complet et

$$g : \Lambda \times X \rightarrow X$$

une application continue. Soit $a \in [0; 1[$. On suppose que pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application

$$g_\lambda : X \rightarrow X, \quad x \mapsto g(\lambda, x)$$

est a -lipschitzienne. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application g_λ admet un unique point fixe $\varphi(\lambda)$ et l'application $\lambda \rightarrow X$, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ est continue.

Démonstration. D'après le théorème précédent, quel que soit $\lambda \in \Lambda$, g_λ admet un unique point fixe $\varphi(\lambda)$. On a, quels que soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2)) &\leq d(g(\lambda_1, \varphi(\lambda_1)), g(\lambda_2, \varphi(\lambda_2))) \\ &\leq d(g(\lambda_1, \varphi(\lambda_1)), g(\lambda_2, \varphi(\lambda_1))) + d(g(\lambda_2, \varphi(\lambda_1)), g(\lambda_2, \varphi(\lambda_2))) \\ &\leq d(g(\lambda_1, \varphi(\lambda_1)), g(\lambda_2, \varphi(\lambda_1))) + a d(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2)), \end{aligned}$$

d'où

$$(1 - a) d(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2)) \leq d(g(\lambda_1, \varphi(\lambda_1)), g(\lambda_2, \varphi(\lambda_1))).$$

De la continuité de $\lambda \mapsto g(\lambda, x)$ pour x fixé, on déduit la continuité de $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$. \square

Donnons enfin une version établissant la différentiabilité de $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$. Ceci demande bien sûr quelques hypothèses supplémentaires. Il est utile de définir la différentiabilité d'une fonction, ou son caractère \mathcal{C}^p sur des parties d'un espace vectoriel normé autres que des ouverts. La définition suivante est commode :

Définition I.5.4.

On dit qu'une application f définie sur une partie X d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un espace vectoriel normé F est différentiable (resp. de classe \mathcal{C}^p , $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), s'il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de X dans E et une application g différentiable (resp. de classe \mathcal{C}^p) de l'ouvert \mathcal{U} à valeurs dans F telle que f soit la restriction de g à X .

Nous allons adopter la même convention pour la propriété d'être lipschitzienne.

Définition I.5.5.

On dit qu'une application f définie sur une partie X d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un espace vectoriel normé F est a -lipschitzienne s'il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de X dans E et une application g a -lipschitzienne de l'ouvert \mathcal{U} à valeurs dans F telle que f soit la restriction de g à X .

Le fait que la propriété ait lieu sur un ouvert contenant la partie est essentielle dans la démonstration du résultat suivant.

Théorème I.5.6 (Point fixe de Banach à paramètre II).

Soient Λ un ouvert d'un espace de Banach E , X un fermé d'un espace de Banach F et

$$g : \Lambda \times X \rightarrow X$$

une application de classe \mathcal{C}^p , $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Soit $a \in [0; 1[$. On suppose que pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application

$$g_\lambda : X \rightarrow X, \quad x \mapsto g(\lambda, x)$$

est a -lipschitzienne. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application g_λ admet un unique point fixe $\varphi(\lambda)$ et l'application $\lambda \rightarrow X$, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ est de classe \mathcal{C}^p .

Si $p \geq 1$, $d\varphi_\lambda = \Phi_{\lambda, \varphi(\lambda)}^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda)) \right)$ où

$$\Phi_{\lambda, \varphi(\lambda)} : \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad M \mapsto M - \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \circ M.$$

Démonstration. On remarque qu'un fermé d'un espace de Banach est un espace métrique complet et on a déjà montré dans la version I du théorème que $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ est continue. Fixons $\lambda \in \Lambda$. Comme quels que soient x_1, x_2 dans un certain voisinage ouvert de X ,

$$\|g(\lambda, x_1) - g(\lambda, x_2)\|_F \leq a \|x_1 - x_2\|_F,$$

on en déduit que $\left\| \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, x) \right\| \leq a < 1$ pour tout $x \in X$.

L'endomorphisme $\frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, x) : F \rightarrow F$ est donc de norme inférieure à a . Considérons l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E; F)$ donné par $M \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, x) \circ M$. Il est alors clair que cet endomorphisme est de norme inférieure à a . Or si A est un endomorphisme d'un espace de Banach de norme strictement inférieure à 1, $\text{Id} - A$ est un endomorphisme inversible, d'inverse donné par la série normalement convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$. Ainsi

$$\Phi_{\lambda, x} : M \mapsto M - \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, x) \circ M$$

est un endomorphisme inversible de $\mathcal{L}(E, F)$ (voir exercice I.5.7).

En différenciant formellement l'identité $g(\lambda, \varphi(\lambda)) = \varphi(\lambda)$, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \circ d\varphi_\lambda + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda)) = d\varphi_\lambda.$$

Ainsi, l'application linéaire $M = d\varphi_\lambda$ de E dans F , si elle existe, est solution de

$$(I.5.1) \quad M - \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \circ M = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda)).$$

Or, d'après ce qui précède, cette équation admet une unique solution qui est

$$(I.5.2) \quad M = M(\lambda) = \Phi_{\lambda, \varphi(\lambda)}^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda)) \right).$$

Pour montrer que M est effectivement égal à $d\varphi_\lambda$, il faut établir que

$$(I.5.3) \quad \|\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda) - M(h)\|_F = o(h).$$

On a, pour $h \in E$ assez petit,

$$(I.5.4) \quad \begin{aligned} \varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda) &= g(\lambda + h, \varphi(\lambda + h)) - g(\lambda, \varphi(\lambda)) \\ &= g(\lambda + h, \varphi(\lambda) + \gamma) - g(\lambda, \varphi(\lambda)), \end{aligned}$$

où

$$(I.5.5) \quad \gamma = \gamma(h) = \varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda).$$

Comme g est de classe \mathcal{C}^1 , on a pour $h \in E$ et $\gamma \in F$ assez petits,

$$(I.5.6) \quad g(\lambda + h, \varphi(\lambda) + \gamma) - g(\lambda, \varphi(\lambda)) = \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda))(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda))(h) + \Delta(h, \gamma),$$

où $\Delta(h, \gamma)$ est un reste qui est $o(h, \gamma)$. En particulier, pour tout $0 < \epsilon < 1 - a$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|h\|_E < \delta$, $\|\gamma\|_F < \delta$,

$$\|\Delta(h, \gamma)\|_F \leq \epsilon(\|h\|_E + \|\gamma\|_F).$$

De plus, ici $\gamma = \gamma(h) = \varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)$ est continue en h et tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Quitte à prendre un δ plus petit, on a donc pour $\|h\|_E < \delta$,

$$\|\Delta(h, \gamma(h))\|_F \leq \epsilon(\|h\|_E + \|\gamma(h)\|_F).$$

D'après (I.5.4), (I.5.5), (I.5.6), on a pour $\|h\|_E < \delta$,

$$(I.5.7) \quad \|\gamma(h)\|_F \leq \frac{1}{1-a-\epsilon} \left(\left\| \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda)) \right\| + \epsilon \right) \|h\|_E \stackrel{\text{def}}{=} K \|h\|_E.$$

On a par conséquent, pour $\|h\|_E < \delta$ et $0 < \epsilon < 1-a$,

$$\|\Delta(h, \gamma(h))\|_F \leq \epsilon(1+K) \|h\|_E.$$

Revenons à (I.5.3). En utilisant (I.5.6) et (I.5.1)

$$(I.5.8) \quad \begin{aligned} \varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda) - M(h) &= \gamma(h) - M(h) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda))(\gamma(h)) + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi(\lambda))(h) + \Delta(h, \gamma(h)) - M(h) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda))(\gamma(h)) + \left(M - \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \circ M \right)(h) + \Delta(h, \gamma(h)) - M(h) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda))(\gamma(h) - M(h)) + \Delta(h, \gamma(h)). \end{aligned}$$

On réécrit ceci sous la forme :

$$(I.5.9) \quad \left(\text{Id}_F - \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \right) (\gamma(h) - M(h)) = \Delta(h, \gamma(h))$$

Comme $\frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda))$ est de norme inférieure à a , $(\text{Id}_F - \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)))$ est un opérateur inversible, et l'on voit facilement que la norme de son inverse est plus petite que $(1-a)^{-1}$. On en déduit que

$$(I.5.10) \quad \|\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda) - M(h)\|_F = \|\gamma(h) - M(h)\|_F \leq \epsilon(1+K)(1-a)^{-1} \|h\|_E.$$

Ceci montre que φ est différentiable en λ , et $d\varphi_\lambda = M(\lambda)$ avec les notations de la formule (I.5.2) ci-dessus. Montrons par récurrence sur k que φ est de classe \mathcal{C}^k . On a déjà démontré dans la version I du théorème que φ est \mathcal{C}^0 . Supposons donc φ de classe \mathcal{C}^{k-1} , où $1 \leq k \leq p-1$. On reprend la formule (I.5.2) qui donne $d\varphi_\lambda$. L'application g étant de classe \mathcal{C}^p , les applications

$$\lambda \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, \varphi(\lambda)) \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(\lambda, \varphi(\lambda))$$

sont de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Pour conclure, nous utilisons le résultat de l'exercice suivant :

Exercice I.5.7. Soit E un espace de Banach et soit $a \in [0; 1[$. Montrer que pour tout $L \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|L\| < a$, $\text{Id}_E - L$ est inversible, et que son inverse est borné, de norme plus petite que $(1-a)^{-1}$. Montrer que l'application

$$B_{\mathcal{L}(E)}(0, a) \rightarrow \mathcal{L}(E), \quad L \mapsto (\text{Id} - L)^{-1}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ .

Il s'ensuit d'après (I.5.2) que $\lambda \mapsto M(\lambda) = d\varphi_\lambda$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} , et donc φ est finalement de classe \mathcal{C}^k . Par récurrence, φ est de classe \mathcal{C}^p . \square

I.6 Théorème des fonctions implicites

Nous renvoyons à la section I.2.4 pour les notations concernant les différentielles partielles.

Théorème I.6.1 (fonctions implicites).

Soient E , F et G trois espaces de Banach, \mathcal{U} un ouvert de E , \mathcal{V} un ouvert de F , f une application de classe \mathcal{C}^p , $p \geq 1$, de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ dans G et (x_0, y_0) un point de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ tel que la différentielle partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ soit un isomorphisme bicontinu de F dans G . Alors il existe un ouvert \mathcal{U}_0 de \mathcal{U} contenant x_0 , un ouvert \mathcal{V}_0 de \mathcal{V} contenant y_0 et une application φ de classe \mathcal{C}^p , définie sur \mathcal{U}_0 à valeurs dans \mathcal{V}_0 telle que :

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \forall (x, y) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0, f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ si et seulement si } y = \varphi(x).$$

La différentielle de φ est donnée par

$$d\varphi_x = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

En outre, sur tout ouvert convexe \mathcal{U}_0 de \mathcal{U} contenant x_0 , il existe au plus une application continue φ vérifiant les deux conditions précédentes.

Démonstration. On applique le théorème de point fixe de Banach en écrivant l'équation $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ sous la forme $y = g(x, y)$, où

$$g(x, y) = y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y) - f(x_0, y_0)).$$

L'application $g : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^p , $g(x_0, y_0) = y_0$ et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \text{Id} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par continuité de $\frac{\partial g}{\partial y}$, il existe $r_0 > 0$ et $s > 0$ tels que $\bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s) \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V}$

et $\left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\| \leq \frac{1}{2}$ sur $\bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s)$. On peut aussi supposer que $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$ est bornée sur

$\bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s)$, disons $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \leq M$.

Pour tout x in \mathcal{U} , g_x désigne l'application $y \mapsto g(x, y)$ de \mathcal{V} dans G . Pour tout $(x, y) \in \bar{B}(x_0, r_0) \times \bar{B}(y_0, s)$, $d(g_x)_y = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ et d'après l'inégalité des accroissements finis, g_x est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne. Soient $r \leq r_0$, $x \in \bar{B}(x_0, r)$ et $y \in \bar{B}(y_0, s)$. On a

$$\|g_x(y) - y_0\| = \|g_x(y) - g_{x_0}(y_0)\| \leq \|g_x(y) - g_x(y_0)\| + \|g_x(y_0) - g_{x_0}(y_0)\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \right\| \leq \frac{s}{2} + \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \right\| Mr.$$

Prenons $r = \min \left(r_0, \frac{s}{2M \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \right\|} \right)$, de sorte que pour tout $x \in B(x_0, r)$,

$$g_x(\bar{B}(y_0, s)) \subset \bar{B}(y_0, s).$$

Le théorème du point fixe I.5.6 s'applique à

$$g : B(x_0, r) \times \bar{B}(y_0, s) \rightarrow \bar{B}(y_0, s).$$

On en déduit que g_x à un unique point fixe $\varphi(x)$, et que $x \mapsto \varphi(x)$ est de classe \mathcal{C}^p de $B(x_0, r)$ dans $\bar{B}(y_0, s)$. De plus $\varphi(x_0) = y_0$ par unicité.

On pose donc $\mathcal{U}_0 = B(x_0, r)$ et $\mathcal{V}_0 = \bar{B}(y_0, s)$, ce qui achève la démonstration de la première assertion. Le théorème I.5.6 donne aussi la différentielle de φ . Avec les notations de ce théorème,

$$d\varphi_x = \Phi_{x, \varphi(x)}^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right).$$

Calculons ceci, compte tenu du fait que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) = \text{Id}_F - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)).$$

Ici $\Phi_{x, \varphi(x)}$ est l'application linéaire

$$M \mapsto M - \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x)) \circ M = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \circ M.$$

Ainsi $\Phi_{x, \varphi(x)}^{-1}$ est l'application linéaire

$$M \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \circ M.$$

Ceci donne bien

$$d\varphi_x = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)).$$

□

I.7 Théorèmes d'inversion locale et globale

L'énoncé du théorème d'inversion locale fait appel à la notion de \mathcal{C}^k -difféomorphisme entre ouverts d'espaces de Banach.

Définition I.7.1.

Soit f une application de \mathcal{U} dans \mathcal{V} , où \mathcal{U} est un ouvert d'un espace de Banach E et \mathcal{V} un ouvert d'un espace de Banach F . On dit que f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme si f est une bijection de \mathcal{U} dans \mathcal{V} , de classe \mathcal{C}^k , ainsi que f^{-1} .

Le théorème d'inversion locale est l'énoncé suivant, que nous déduisons du théorème des fonctions implicites.

Théorème I.7.2 (Théorème d'inversion locale).

Soit f une application de \mathcal{U} dans F , où \mathcal{U} est un ouvert d'un espace de Banach réel et F un espace de Banach et soit x_0 un point de \mathcal{U} . Si f est de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$ et si la différentielle de f au point x_0 est un isomorphisme bicontinu, alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_0 de x_0 dans \mathcal{U} et un voisinage ouvert \mathcal{V}_0 de $f(x_0)$ tels que f se restreigne en un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de \mathcal{U}_0 dans \mathcal{V}_0 .

Démonstration. On considère $g : F \times \mathcal{U} \rightarrow F$, $g(y, x) = f(x) - y$. Par construction $g(x, y) = 0$ équivaut à $f(x) = y$. L'application g est de classe \mathcal{C}^k et l'on a $g(f(x), x) = 0$. De plus $\frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0), x_0) = df_{x_0}$ est un isomorphisme, et donc, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{U}_1$ de $(f(x_0), x_0)$ dans $F \times \mathcal{U}$ et une application $\varphi : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$ de classe \mathcal{C}^k tels que

$$\{(y, x) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{U}_1 \mid f(x) = y\} = \{(y, \varphi(y)) \mid y \in \mathcal{V}_0\}.$$

On pose alors $\mathcal{U}_0 = \varphi(\mathcal{V}_0)$: c'est un voisinage ouvert de x_0 dans \mathcal{U} et f induit une bijection de \mathcal{U}_0 dans \mathcal{V}_0 d'inverse φ de classe \mathcal{C}^k . \square

On en déduit immédiatement un énoncé global.

Corollaire I.7.3 (Théorème d'inversion globale).

Soit f une application de classe \mathcal{C}^k de \mathcal{U} dans F , où \mathcal{U} est un ouvert d'un espace de Banach réel et F un espace de Banach. Si f est injective et si pour tout x de \mathcal{U} la différentielle df_x de f au point x est un isomorphisme bicontinu, alors $f(\mathcal{U})$ est un ouvert et la bijection réciproque, de $f(\mathcal{U})$ dans \mathcal{U} , est de classe \mathcal{C}^k .

I.8 Exercices

Exercice I.8.1. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que

$$f : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|_E}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice I.8.2. Soit $\Phi : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^n$ ($n \geq 2$ entier positif). Donner un argument pour justifier le fait que Φ est \mathcal{C}^∞ et calculer sa différentielle et sa différentielle seconde.

Exercice I.8.3. On rappelle que $\ell_1(\mathbb{R})$ est l'espace des suites réelles $(x = x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sommables, muni de la norme $\|x\| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$, et que c'est un espace de Banach. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, telle que $f(0) = 0$. On définit

$$F : \ell_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell_1(\mathbb{R}), \quad x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto F(x) = (f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Montrer que F est bien définie, de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice I.8.4. Soit \mathcal{U} un ouvert convexe d'un espace de Banach E et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans un espace de Banach F .

1. Montrer que quels que soient a, b et c dans \mathcal{U} , on a

$$\|f(b) - f(a) - df_c(b-a)\|_F \leq \left(\sup_{u \in [a,b]} \|df_u - df_c\| \right) \|b-a\|_E,$$

où $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0; 1]\} \subset \mathcal{U}$.

Exercice I.8.5. Soit f une application continue de $[0; 1] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^p sur $]0; 1[\times \mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$F : \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^1 f(t, u(t)) dt$$

est de classe \mathcal{C}^p , sa différentielle k -ième étant donnée par

$$d^k F_u(h_1, \dots, h_k) = \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(t, u(t)) h_1(t) \dots h_k(t) dt, \quad (h_1, \dots, h_k \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})).$$

Exercice I.8.6. Une variante astucieuse du théorème de Picard. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $T : X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\times$ avec T^n contractante. Montrer que T admet un unique point fixe x et que pour tout $x_0 \in X$, x est limite de la suite $(T^k(x_0))_k$ lorsque k tend vers l'infini.

Exercice I.8.7. La méthode de Newton. Dans cet exercice, nous élargissons le cadre classique de la méthode de Newton aux espaces de Banach.

Soit \mathcal{U} un ouvert convexe d'un espace de Banach E et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans un espace de Banach F .

1. (Question préliminaire) Montrer que quels que soient a, b et c dans \mathcal{U} , on a

$$\|f(b) - f(a) - df_c(b-a)\|_F \leq \left(\sup_{u \in [a,b]} \|df_u - df_c\| \right) \|b-a\|_E,$$

où $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0; 1]\} \subset \mathcal{U}$.

On suppose qu'en un point $x_0 \in \mathcal{U}$, la différentielle $df_{x_0} : E \rightarrow F$ soit un isomorphisme entre espace de Banach. On suppose aussi qu'il existe une constante $M > 0$ telle que quels que soient a et b dans \mathcal{U} , $\|df_b - df_a\| \leq M \|b-a\|_E$.

2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $df_{x_0+r} : E \rightarrow F$ reste un isomorphisme pour tout r tel que $\|r\|_E < \delta$. On pose $g(r) = df_{x_0+r}^{-1} : F \rightarrow E$. Montrer que quels que soient r et r' dans $B_E(0, \delta)$,

$$\|g(r) - g(r')\| \leq M \times \|g(r)\| \times \|g(r')\| \times \|r - r'\|_E.$$

3. Posons $C = \|g(0)\| = \|df_{x_0}^{-1}\|$. On suppose en outre que $\delta < (2MC)^{-1}$. Montrer que quel que soit r dans $B_E(0, \delta)$,

$$\|g(r)\| \leq \frac{C}{1 - MC \|r\|_E} \leq 2C.$$

Posons maintenant, pour tout $r \in B_E(0, \delta)$, $R(r) = f(x_0) - f(x_0 + r) + df_{x_0+r}(r)$, et définissons $\phi : B_E(0, \delta) \rightarrow E$ par $\phi(r) = df_{x_0+r}^{-1}(f(x_0) - R(r)) = df_{x_0+r}^{-1}(f(x_0 + r) - df_{x_0+r}(r))$.

4. Montrer que quels que soient r et r' dans $B_E(0, \delta)$,

$$\|R(r) - R(r')\|_F \leq M \left(\|r - r'\|_E^2 + \|r'\|_E \times \|r - r'\|_E \right).$$

puis que

$$\begin{aligned} \|\phi(r) - \phi(r')\|_E &\leq 2CM \left(\|r - r'\|_E^2 + \|r'\|_E \times \|r - r'\|_E \right) \\ &\quad + 4C^2M \times \left(\|f(x_0)\|_F + M \|r'\|_E^2 \right) \times \|r - r'\|_E. \end{aligned}$$

5. En déduire que si δ et $\|f(x_0)\|_F$, sont assez petits, il existe une constante $0 < K < 1$ indépendante de r et r' dans $B_E(0, \delta)$ telle que

$$\|\phi(r) - \phi(r')\|_E \leq K \times \|r - r'\|_E.$$

En déduire que si de plus $C \|f(x_0)\|_F \leq (1 - K)\delta$, on a alors

$$\|\phi(r)\|_E \leq \delta.$$

En d'autres termes, si δ et $\|f(x_0)\|_F$, sont assez petits, ϕ est une contraction de $B_E(0, \delta)$ dans elle-même.

6. On pose $x_n = x_0 + r_n$, où $(r_n)_n$ est la suite définie par récurrence en posant $r_0 = 0$ et $r_{n+1} = \phi(r_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ vérifie

$$x_{n+1} = x_n - df_{x_n}^{-1}(f(x_n))$$

et converge vers une limite z vérifiant $f(z) = 0$.

7. Evaluer la vitesse de convergence.

Exercice I.8.8. Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que, pour $\varepsilon > 0$, l'équation $(x - a)(x - b) + \varepsilon x^3 = 0$ admet trois racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ et donner un développement limité à l'ordre 1 de x_1 et x_2 .

Exercice I.8.9. Soient E et F des espaces de Banach, \mathcal{U} un ouvert de E et $f : E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Supposons qu'il existe un point $a \in \mathcal{U}$ tel que $df_a : E \rightarrow F$ soit surjective et supposons qu'il existe un supplémentaire fermé E_2 de $E_1 = \ker df_a$ dans E . Montrer que $f(\mathcal{U})$ contient un voisinage ouvert de $f(a)$.

Exercice I.8.10. Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0; 1]} |f'(t)|$ et soit $F = \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_0 = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$. On rappelle que ce sont des espaces de Banach. On définit

$$\Psi : E \rightarrow F, \quad f \mapsto \Psi(f), \quad \Psi(f)(t) = f'(t) + tf(t)^2.$$

Montrer que Ψ est de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $d\Psi_0 = \frac{d}{dt}$ et que cette application linéaire de E dans F est surjective. Trouver un supplémentaire fermé E_2 dans E de $E_1 = \ker d\Psi_0$. Utiliser l'exercice précédent pour en déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $g \in B_F(0, \epsilon)$, il existe $f \in E$ telle que pour tout $t \in [0; 1]$, $f'(t) + tf(t)^2 = g(t)$.

Exercice I.8.11. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_n(0)$.

(1) Montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{U} de A_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des fonctions $\lambda_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ de classe \mathcal{C}^∞ tels que pour tout $A \in \mathcal{U}$, $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)$ soient les valeurs propres de A et restent distinctes.

(2) On fixe i . Soit $v_i(0)$ un vecteur propre de A_0 pour la valeur propre $\lambda_i(0)$. Montrer que quitte à restreindre le voisinage \mathcal{U} de A_0 de la question précédente, il existe une fonction v_i définie sur \mathcal{U} à valeurs dans \mathbb{R}^n et de classe \mathcal{C}^∞ telle que $v_i(A)$ soit un vecteur propre non nul de A pour la valeur propre $\lambda_i(A)$.

Exercice I.8.12. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \\ |f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y|, \end{cases} .$$

On considère l'équation différentielle sur $[0, 1]$ avec condition aux bords :

$$\begin{cases} u'' - \lambda f(u) = 0 & \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que pour tout $\lambda \in I$, l'équation ci-dessus admet une solution $u_\lambda \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

Chapitre II

Sous-variétés de \mathbb{R}^N

Dans tout ce qui suit, lorsqu'on parle d'une application ou d'une sous-variété de classe \mathcal{C}^k , on suppose que k est un entier au moins égal à 1, ou bien que $k = +\infty$.

II.1 Immersions et submersions

Les notions d'immersion et de submersion sont au coeur de la théorie des sous-variétés. Rappelons rapidement les points importants.

Définition II.1.1.

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application différentiable définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^p . On dit que f est une **immersion** (resp. une **submersion**) en $a \in \mathcal{U}$ si df_a est injective (resp. surjective) de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q . On dit que f est une **immersion** (resp. une **submersion**) si c'est une **immersion** (resp. une **submersion**) en tout point de \mathcal{U} .

Le résultat qui suit est une conséquence du théorème d'inversion locale [I.7.2](#).

Proposition II.1.2.

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m . Soit $a \in \mathcal{U}$ tel que $df_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ soit injective. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de a dans \mathcal{U} tel que la restriction de f à \mathcal{U}_1 soit une immersion en tout point, et de plus, f réalise un homéomorphisme entre \mathcal{U}_1 et son image $f(\mathcal{U}_1)$.

Démonstration. Soit H un supplémentaire de l'image de df_a dans \mathbb{R}^N ,

$$\mathbb{R}^N = df_a(\mathbb{R}^m) \oplus H.$$

On étend f en une application $F : \mathcal{U} \times H \rightarrow \mathbb{R}^N$ en posant

$$F(q, t) = f(q) + t.$$

La restriction de F à $\mathcal{U} \times \{0\}$ coïncide avec f . D'autre part, F est différentiable, sa différentielle en un point (q, t) étant donnée par

$$dF_{q,t} : \mathbb{R}^m \times H \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (h, w) \mapsto df_q(h) + w.$$

Ainsi, il est clair que $dF_{(a,0)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^m \times H$ dans \mathbb{R}^N , et le théorème d'inversion locale garantit l'existence d'un voisinage de $(a, 0)$ dans $\mathcal{U} \times H$ (que l'on peut prendre de la forme $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{Y}$ où \mathcal{U}_1 est un ouvert de \mathcal{U} contenant a et \mathcal{Y} un ouvert de H contenant 0) et d'un voisinage \mathcal{V} de $f(a)$ dans \mathbb{R}^N tel que F réalise un difféomorphisme entre $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{Y}$ et \mathcal{V} . Ceci montre que df_q est injective pour tout $q \in \mathcal{U}_1$ et que f réalise un homéomorphisme de $\mathcal{U}_1 \simeq \mathcal{U}_1 \times \{0\}$ sur son image $f(\mathcal{U}_1) = F(\mathcal{U}_1 \times \{0\})$. \square

Définition II.1.3.

Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction différentiable définie sur un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^m . Si $x \in \mathcal{V}$ est tel que $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ n'est pas surjective, x est appelé **point critique** de f et $a = f(x) \in \mathbb{R}^N$ est appelée **valeur critique** de f . Si $x \in \mathcal{V}$ n'est pas un point critique, c'est un **point régulier**. Si $a \in \mathbb{R}^N$ n'est pas une valeur critique, c'est une **valeur régulière**. C'est en particulier le cas lorsque a n'est pas dans l'image de f .

Exercice II.1.4. Le but de cet exercice est de montrer le

Théorème du rang constant. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application \mathcal{C}^p d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Soit $a \in \mathcal{U}$.

1. Si f est une immersion en a (i.e. si df_a est injective) alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de a dans \mathcal{U} , un voisinage ouvert \mathcal{W}_1 de $f(a)$ dans \mathbb{R}^m et $\Psi : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2 \subset \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme de \mathcal{W}_1 sur un ouvert \mathcal{W}_2 de \mathbb{R}^m tels que $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{W}_1$ et $\Psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_1$. Autrement dit, à un changement de variable au but près, toute immersion est localement égale à l'injection canonique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

2. Si f est une submersion en a (i.e. si df_a est surjective), alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de a dans \mathcal{U} , un ouvert \mathcal{U}_2 de \mathbb{R}^n et un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$ tels que

$$f \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_2$. Autrement dit, à un changement de variable à la source près, toute submersion est égale à la projection canonique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

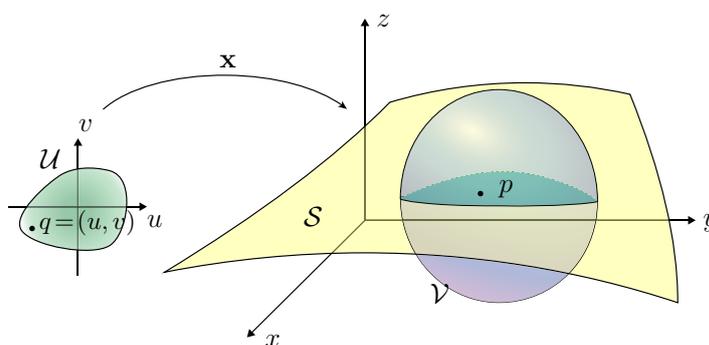
3. Posons $r = \text{rang}(df_a)$. Supposons que df_x soit de rang r pour tout x dans un voisinage de a . Alors il existe

- a) un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$ d'un ouvert \mathcal{U}_2 de \mathbb{R}^n sur un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de a dans \mathcal{U} ,
- b) un difféomorphisme $\Psi : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ d'un voisinage ouvert \mathcal{W}_1 de $f(a)$ dans \mathbb{R}^m sur un ouvert \mathcal{W}_2 de \mathbb{R}^m ,

vérifiant $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{W}_1$ et

$$\Psi \circ f \circ \Phi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_2, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_2$.

FIGURE II.1 – Paramétrage local (ici $m = 2$, $N = 3$)

II.2 Paramétrage local. Système de coordonnées

Une première façon de voir les sous-variétés est celle de nappe paramétrée. Une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N est un objet paramétré localement par des ouverts de \mathbb{R}^m .

Définition II.2.1.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathbb{R}^N est une **sous-variété de dimension m de classe \mathcal{C}^k** si pour tout $p \in \mathcal{S}$, il existe un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m , un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N et une application $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tels que :

1. l'application \mathbf{x} est différentiable de classe \mathcal{C}^k ,
2. l'application \mathbf{x} est un homéomorphisme de \mathcal{U} sur $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}$,
3. (condition de régularité) en tout point $q \in \mathcal{U}$, la différentielle $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ est injective (autrement dit, \mathbf{x} est une immersion).

L'application \mathbf{x} est un **paramétrage local** de la sous-variété \mathcal{S} en p . Son inverse $\mathbf{x}^{-1} : \mathcal{V} \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U}$, est une **carte** ou encore un **système de coordonnées** (locales) de la sous-variété \mathcal{S} en p .

La **codimension** d'une sous-variété \mathcal{S} de dimension m de \mathbb{R}^N est $N - m$. Une sous-variété de codimension 1 est appelée **hypersurface**. Dans le cas $m = 2$, on parlera de **surface**.

Au point 2, la topologie sur \mathcal{S} est celle induite par la topologie usuelle de \mathbb{R}^N .

Remarques II.2.2.

1. La condition 3 implique que $m \leq N$.
2. Nous n'insisterons pas toujours sur les hypothèses de régularité minimales requises pour définir les notions et obtenir les résultats qui suivent. Le lecteur pourra soit supposer que les sous-variétés considérées sont toujours lisses (*i.e.* $k = \infty$) et que toutes les applications sont de classe \mathcal{C}^∞ , soit s'il est courageux, déterminer pour quelles classes de régularité les énoncés ont un sens et sont valides.

3. On peut remplacer \mathbb{R}^N dans le définition ci-dessus par n'importe quel espace vectoriel réel de dimension finie E .

Exemple II.2.3. Un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^N est une sous-variété de \mathbb{R}^N . En tout point de \mathcal{U} , on peut choisir comme paramétrage local l'inclusion de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^N .

Exemple II.2.4. Une sous-variété de dimension 0 de \mathbb{R}^N est un ensemble discret.

Exemple II.2.5. Un sous-espace vectoriel ou affine de \mathbb{R}^N de dimension m est une sous-variété.

Exemple II.2.6. Un ouvert d'une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N est une sous-variété de \mathbb{R}^N (de même classe de régularité et de même dimension).

Exemple II.2.7. Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 des sous-variétés, respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2} . Alors $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$.

Exemple II.2.8. Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N et soit Φ un difféomorphisme de \mathbb{R}^N sur lui-même. Alors $\Phi(\mathcal{S})$ est encore une sous-variété de \mathbb{R}^N .

Exemple II.2.9. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m . Soit $q \in \mathcal{U}$ tel que df_q soit injective. D'après la proposition II.1.2, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de q dans \mathcal{U} tel que la restriction de f à \mathcal{U}_1 soit une immersion en tout point réalisant un homéomorphisme sur son image. Ainsi $\mathcal{S} = f(\mathcal{U}_1)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^N paramétrée par $f : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}$.

Exercice II.2.10. Montrer que le cercle $C(a, r)$ de centre a et de rayon r dans \mathbb{R}^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^2 .

Nous verrons bientôt de nombreux autres exemples de sous-variétés. Voici maintenant quelques exemples d'ensembles qui ne sont pas des sous-variétés :

Exemple II.2.11. $\mathcal{S} = [0; +\infty[$. Tout voisinage ouvert connexe de 0 est de la forme $[0; a[$, $a > 0$, qui n'est jamais homéomorphe à un ouvert connexe de \mathbb{R}^m . C'est évident si $m = 0$. Pour $m = 1$, on remarque que $[0; a[\setminus \{0\}$ est connexe, alors que $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $m \geq 2$, $[0; a[\setminus \{b\}$ a deux composantes connexes pour tout $b \in]0; a[$, alors que $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ n'en a qu'une pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple II.2.12. $\mathcal{S} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Tout voisinage connexe de $(0, 0)$ dans \mathcal{S} est encore homéomorphe à \mathcal{S} . Or $\mathcal{S} \setminus \{(0, 0)\}$ possède 4 composantes connexes, ce qui montre que \mathcal{S} ne peut être homéomorphe à un \mathbb{R}^m .

Exercice II.2.13. $\mathcal{S} = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$. Le point $(0, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Montrer que l'on ne peut pas trouver de paramétrage local en ce point qui vérifie le point 3 de la définition.

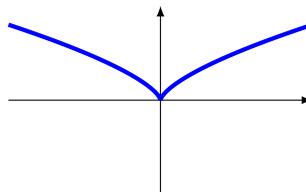


FIGURE II.2 – Point singulier

Exemple II.2.14. Voici un contre-exemple où le paramétrage $\mathbf{x} : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ est une immersion en tout point, mais l'image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 à cause du point multiple en $(0, 0)$.

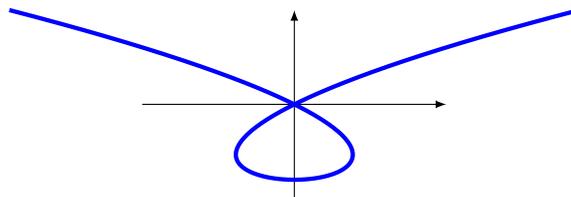


FIGURE II.3 – Point multiple

Exemple II.2.15. Dans cet exemple, le paramétrage $\mathbf{x} : t \in]-1; +\infty[\mapsto (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ est une immersion en tout point, et de plus injectif. Néanmoins, l'image n'est pas une sous-variété à cause du point $(0, 0)$ qui n'admet pas de paramétrage local satisfaisant la condition 2 de la définition.

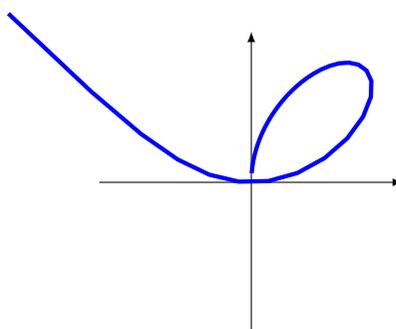


FIGURE II.4 – Le folium de Descartes

Remarque II.2.16. On ne suppose pas qu'une sous-variété est connexe. Toute composante connexe de \mathcal{S} est encore une sous-variété de \mathbb{R}^N de même classe de régularité et de même dimension.

Remarque II.2.17. On ne suppose pas qu'une sous-variété de \mathbb{R}^N soit fermée dans \mathbb{R}^N . Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , la spirale définie par le paramétrage

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto (e^s \cos s, e^s \sin s)$$

a dans son adhérence le point $(0, 0)$ qui n'est pas un point de la sous-variété. Comme autre exemple, on peut citer celui d'une droite privée d'un point.

II.3 Sous-variétés définies par des graphes

Une manière très simple de construire des sous-variétés est de considérer les graphes des applications de classe \mathcal{C}^k d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre espace vectoriel de dimension finie.

Proposition II.3.1.

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ une fonction différentiable de classe \mathcal{C}^k définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m . Le graphe de f

$$\mathbf{Graphe}(f) = \{(u, f(u)), (u \in \mathcal{U})\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} = \mathbb{R}^N$ de dimension m .

Démonstration. Le graphe de f est une sous-variété, un paramétrage global étant

$$\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad u \mapsto (u, f(u)). \quad \square$$

Soit A un isomorphisme linéaire de l'espace ambiant \mathbb{R}^N dans lui-même. Il est évident qu'avec les notations de la proposition, l'ensemble

$$\mathcal{S} = A(\mathbf{Graphe}(f)) = \{A((u, f(u))); u \in \mathcal{U}\}$$

est encore une sous-variété de \mathbb{R}^N (c'est un cas particulier de l'exemple II.2.8). Comme la définition d'une sous-variété est de nature locale, on obtient

Proposition II.3.2.

Soit \mathcal{S} une partie de \mathbb{R}^N et supposons que pour tout point p de \mathcal{S} , il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N , un isomorphisme linéaire $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m et une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ de classe \mathcal{C}^k tels que

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V} \cap \{A((u, f(u))); u \in \mathcal{U}\}.$$

Alors \mathcal{S} est une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N .

Réciproquement, une sous-variété peut-être vue localement comme un graphe, « à un isomorphisme linéaire près » de l'espace ambiant \mathbb{R}^N .

Proposition II.3.3.

Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N . Alors pour tout point p de \mathcal{S} , il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N , un isomorphisme linéaire $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m et une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ de classe \mathcal{C}^k telle que

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V} \cap \{A((u, f(u))); u \in \mathcal{U}\}.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{x} : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ un paramétrage local en p . Soit $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. Soit A un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^N dans lui-même tel que $A^{-1}(d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m)) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$. Alors $d(A^{-1} \circ \mathbf{x})_q = A^{-1} \circ d\mathbf{x}_q$ est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^m dans $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Ecrivons

$A^{-1} \circ \mathbf{x}$ sous la forme $A^{-1} \circ \mathbf{x}(u) = (i(u), j(u))$, $i(u) \in \mathbb{R}^m$, $j(u) \in \mathbb{R}^{N-m}$. Par construction, $di_q = 0$ et di_q est un isomorphisme de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m . Le théorème d'inversion locale donne l'existence d'un ouvert \mathcal{U}' de \mathbb{R}^m contenant q (que l'on suppose inclus dans \mathcal{U}) et d'un ouvert \mathcal{U}_1 de \mathbb{R}^m tels que i réalise un difféomorphisme de \mathcal{U}' sur \mathcal{U}_1 . Soit $\Phi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}'$ son inverse. Soit $u_1 \in \mathcal{U}_1$ et posons $u = \Phi(u_1)$ (et donc $u_1 = i(u)$). On a alors

$$A^{-1} \circ \mathbf{x} \circ \Phi(u_1) = A^{-1} \circ \mathbf{x}(u) = (i(u), j(u)) = (u_1, j \circ \Phi(u_1)).$$

Posons $f = j \circ \Phi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$. Alors $\mathbf{x}(\mathcal{U}') = \{A(u_1, f(u_1)); (u_1 \in \mathcal{U}')\}$. \square

Remarque II.3.4. Les deux propositions qui précèdent fournissent donc une autre définition d'une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N : c'est une partie \mathcal{S} de \mathbb{R}^N vérifiant les hypothèses de la proposition II.3.2.

II.4 Sous-variétés définies par des équations

Certaines sous-variétés peuvent être définie comme l'ensemble des points de l'espace ambiant solutions d'une équation. Par exemple, le cercle unité dans \mathbb{R}^2 est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $x^2 + y^2 = 1$. En revanche, l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 solutions de $xy = 0$ n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 . La proposition suivante donne un critère sur l'équation pour que l'ensemble de ses solutions soit une sous-variété.

Proposition II.4.1.

Soient N et m deux entiers, $N > m$. Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ une fonction de classe \mathcal{C}^k définie sur un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^N .

1. Soit $p \in \mathcal{V}$ tel que df_p soit surjective. Posons $a = f(p)$. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}_1 de p dans \mathcal{V} tel que $f^{-1}(\{a\}) \cap \mathcal{V}_1$ est une sous-variété de dimension m et de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N .
2. Soit a une valeur régulière de f . Alors $\mathcal{S} = f^{-1}(\{a\})$ est une sous-variété de dimension m et de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N .

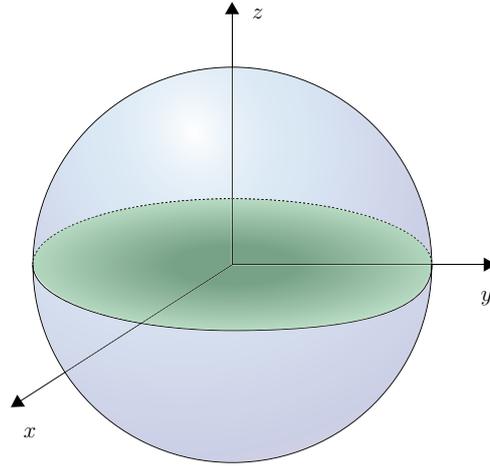
Démonstration. Soit p un point de $f^{-1}(\{a\})$ tel que la différentielle de f en p soit surjective. Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ le noyau de df_p et soit F un sous-espace supplémentaire. Comme df_p est surjective, d'après le théorème du rang, E est de dimension m . Il existe donc un isomorphisme linéaire φ entre E et \mathbb{R}^m . Tout point de \mathcal{V} s'écrit de manière unique sous la forme $p + x + y$, avec $x \in E$ et $y \in F$. On peut donc définir

$$\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad p + x + y \mapsto (\varphi(x), f(p + x + y))$$

pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ tels que $p + x + y \in \mathcal{V}$. La différentielle de Ψ en p est

$$d\Psi_p(v + w) = (\varphi(v), df_p(v + w)) = (\varphi(v), df_p(w)), \quad (v \in E, w \in F).$$

Le théorème du rang implique que la restriction de df_p à F réalise un isomorphisme entre F et \mathbb{R}^{N-m} . On voit donc que $d\Psi_p$ est un isomorphisme entre \mathbb{R}^N et $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$. On applique le théorème d'inversion locale : il existe un ouvert $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ contenant p ,

FIGURE II.5 – Sphère : $\sum_i x_i^2 = 1$

et des ouverts \mathcal{U} , \mathcal{W} respectivement de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^{N-m} , avec $0 \in \mathcal{U}$ et $a \in \mathcal{W}$ tels que $\Psi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ soit un difféomorphisme. Soit ι_1 l'injection canonique de $\mathcal{U} \simeq \mathcal{U} \times \{a\}$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$. Il est clair que l'application $\psi = \Psi^{-1} \circ \iota_1$ est différentiable et injective. De plus $f(\psi(x)) = f(\Psi^{-1}((x, a))) = a$ car $f = p_2 \circ \Psi$, où p_2 est la projection canonique de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$ sur \mathbb{R}^{N-m} . Ainsi $\psi(\mathcal{U}) = f^{-1}(\{a\}) \cap \mathcal{V}_1$ et ψ est un paramétrage local de $\mathcal{S} = f^{-1}(\{a\}) \cap \mathcal{V}_1$ au voisinage de p .

Le deuxième point découle immédiatement du premier, puisque par définition d'une valeur régulière, df_p est surjective pour tout $p \in \mathcal{S} = f^{-1}(\{a\})$. La construction précédente fournit un paramétrage local en p pour tout $p \in \mathcal{S}$. \square

Exemple II.4.2. On voit facilement que la sphère \mathbb{S}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} , car $\mathbb{S}^n = f^{-1}(\{1\})$ où $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$ est différentiable, de différentielle

$$df_x(v) = 2\langle x, v \rangle, (x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}), (v \in \mathbb{R}^{n+1})$$

donc est une submersion en tout point x .

Exemple II.4.3. Plus généralement, toutes les quadriques de \mathbb{R}^N , définies par une équation de la forme

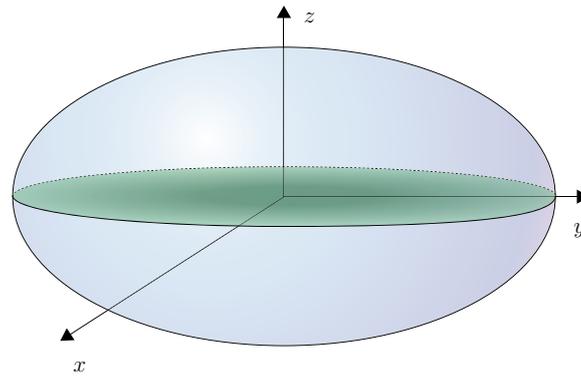
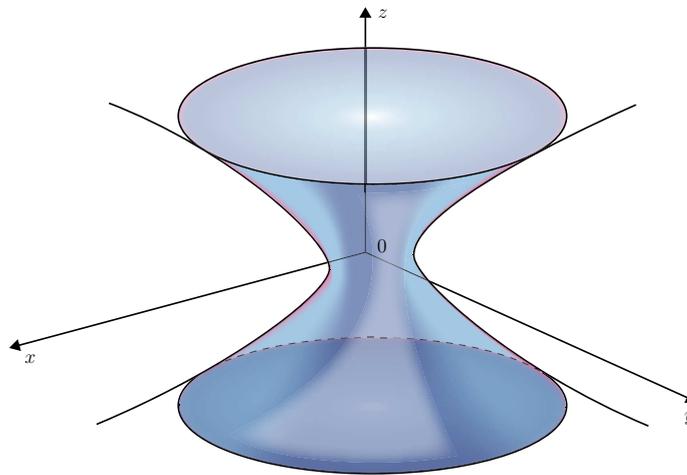
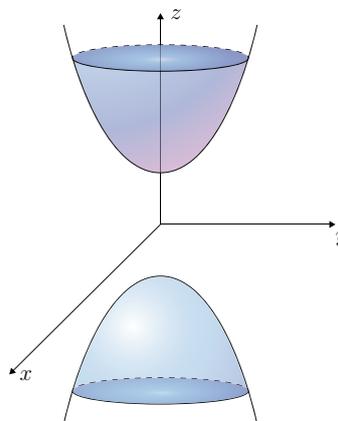
$$\sum_{i=1}^N a_i x_i^2 = 1$$

où les a_i sont dans \mathbb{R} , sont des sous-variétés de \mathbb{R}^N .

Exemple II.4.4 (Le tore). Soit \mathcal{S} le tore d'axe $D = \{x = y = 0\}$ dont les distances respectivement minimale et maximale à l'axe sont $a - r$ et $a + r$, où a et r sont deux réels tels que $0 < r < a$, défini par l'équation $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$. On a donc $\mathcal{S} = f^{-1}(\{r^2\})$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$. La fonction f est différentiable sur $\mathcal{S} \setminus D$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

La différentielle df_p ne s'annule donc pas en $p \in \mathcal{S}$, ce qui montre que \mathcal{S} est une sous-variété de \mathbb{R}^3 . On notera \mathbb{T}^2 le tore obtenu en prenant $a = 2$ et $r = 1$.

FIGURE II.6 – Ellipsoïde : $\sum_i a_i x_i^2 = 1$, $a_i > 0$ FIGURE II.7 – Hyperboloïde à une nappe : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ FIGURE II.8 – Hyperboloïde à deux nappes : $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

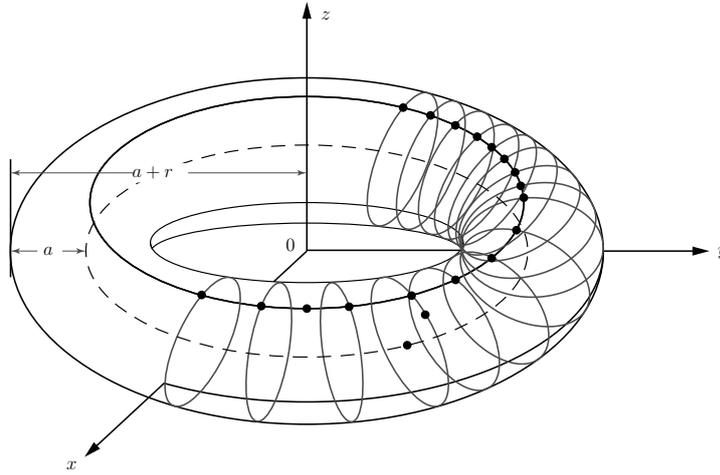


FIGURE II.9 – Tore : $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$

Comme la définition d'une sous-variété est de nature locale, et que par une translation, on peut sans perte de généralité supposer que $a = 0$ dans la proposition ci-dessus, on obtient :

Proposition II.4.5.

Soit \mathcal{S} une partie de \mathbb{R}^N et supposons que pour tout point p de \mathcal{S} , il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N et une fonction $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ de classe \mathcal{C}^k dont 0 est valeur régulière tels que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{V} = \{x \in \mathcal{V} \mid \Psi(x) = 0\}.$$

Alors \mathcal{S} est une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N .

Réciproquement une sous-variété de \mathbb{R}^N peut être définie localement par une équation du type $\Psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ et 0 valeur régulière de Ψ .

Proposition II.4.6.

Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N . Alors pour tout point p de \mathcal{S} , il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N et une fonction $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ de classe \mathcal{C}^k tels que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{V} = \{x \in \mathcal{V} \mid \Psi(x) = 0\},$$

et 0 est une valeur régulière de Ψ .

Démonstration. Soit p un point de \mathcal{S} et soit $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{S}$ un paramétrage de \mathcal{S} au voisinage de p . L'image de la différentielle de \mathbf{x} au point $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ est un sous-espace

vectorel de dimension m de \mathbb{R}^N . Soit H un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m) \oplus H = \mathbb{R}^N.$$

Le sous-espace H ayant dimension $N - m$, il est isomorphe à \mathbb{R}^{N-m} . Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^{N-m} \longrightarrow H$$

un isomorphisme. On considère maintenant l'application

$$\Phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (u, t) \mapsto \mathbf{x}(u) + \varphi(t).$$

L'application Φ est continûment différentiable et sa différentielle au point $(q, 0)$ est un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale montre qu'il existe un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^N contenant p et une application Ψ_1 différentiable de \mathcal{V} dans un ouvert $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} \simeq \mathbb{R}^N$, $q \in \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, \mathcal{U}_2 ouvert contenant 0 dans \mathbb{R}^{N-m} et tels que $\Phi : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}$ et $\Psi_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ soient inverses l'un de l'autre. L'image par Ψ_1 de l'intersection de la variété \mathcal{S} et de \mathcal{V} est incluse dans $\mathcal{U} \times \{0\}$, si l'ouvert \mathcal{V} est choisi suffisamment petit. Composons Ψ_1 par l'application linéaire p_2 , projection canonique de $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m}$ sur \mathbb{R}^{N-m} . Si Ψ est l'application composée $p_2 \circ \Psi_1$ définie sur \mathcal{V} , on a

$$\Phi((u, t)) = \mathbf{x}(u) + \varphi(t) \Leftrightarrow (u, t) = \Psi_1(\mathbf{x}(u) + \varphi(t)),$$

d'où

$$t = p_2(u, t) = \Psi(\mathbf{x}(u) + \varphi(t)).$$

La variété \mathcal{S} est définie par l'équation $\Psi(x) = 0$, au voisinage de p , c'est-à-dire que

$$(\forall x \in \mathcal{V}), \quad [x \in \mathcal{S}] \Leftrightarrow [\Psi(x) = 0].$$

Comme Ψ est composé de Ψ_1 , qui est un difféomorphisme, et de p_2 qui est linéaire surjective, sa différentielle en tout point est surjective, et donc en particulier 0 est une valeur régulière de Ψ . \square

Remarque II.4.7. Les deux propositions qui précèdent fournissent donc une autre définition d'une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N : c'est une partie \mathcal{S} de \mathbb{R}^N vérifiant les hypothèses de la proposition II.4.5.

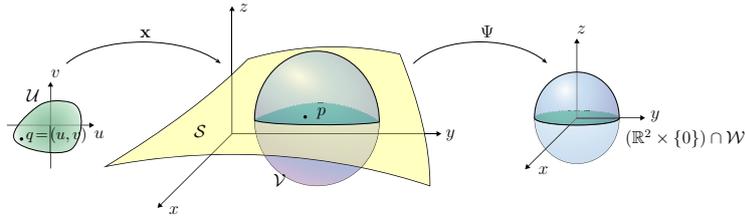
II.5 Autre définition des sous-variétés

On trouve souvent dans la littérature une autre définition des sous-variétés de dimension m dans \mathbb{R}^N , qui exprime le fait que localement une telle sous-variété est « à difféomorphisme près » l'inclusion d'un sous-espace de dimension m . Cette définition est proche de celle donnée en II.2.

Proposition II.5.1.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\times \cup \{\infty\}$ et \mathcal{S} une partie de \mathbb{R}^N . Alors \mathcal{S} est une sous-variété de dimension m de classe \mathcal{C}^k si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{S}$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N , un ouvert \mathcal{W} dans \mathbb{R}^N et un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ tels que

$$\Phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{W}.$$

FIGURE II.10 – Redressement local (ici $m = 2$, $N = 3$)

Démonstration. Supposons que \mathcal{S} soit une sous-variété et soient p un point de \mathcal{S} , \mathcal{V} un voisinage ouvert de p dans \mathbb{R}^N , et $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ un paramétrage local de \mathcal{S} en p . Posons $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ et quitte à translater, supposons $q = 0$. Soit H un supplémentaire de l'image de $d\mathbf{x}_q$ dans \mathbb{R}^N ,

$$\mathbb{R}^N = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m) \oplus H.$$

C'est un sous-espace de dimension $N - m$ de \mathbb{R}^N . Choisissons un isomorphisme linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow H.$$

On étend \mathbf{x} en une application $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^N$ en posant

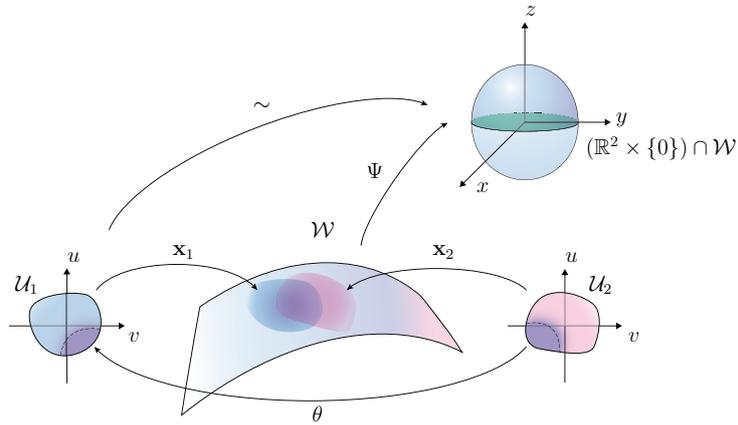
$$F(u, t) = \mathbf{x}(u) + \varphi(t).$$

L'application F est continûment différentiable et $dF_{(q,0)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} \simeq \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R}^N . Ainsi, le théorème d'inversion locale garantit l'existence d'un voisinage de $(q, 0)$ dans $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^{N-m}$ (que l'on peut prendre de la forme $\mathcal{U}' \times \mathcal{Y}$ où \mathcal{U}' est un ouvert de \mathcal{U} contenant q et \mathcal{Y} un ouvert de \mathbb{R}^{N-m} contenant 0) et d'un voisinage \mathcal{V}' de p dans \mathbb{R}^N tel que F réalise un difféomorphisme entre $\mathcal{U}' \times \mathcal{Y}$ et \mathcal{V}' . On peut aussi supposer que ces ouverts sont choisis suffisamment petits, de sorte que $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. Posons $\Phi = F^{-1} : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{U}' \times \mathcal{Y}$. On a alors $\Phi(\mathcal{V}' \cap \mathcal{S}) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap (\mathcal{U}' \times \mathcal{Y})$. Ceci montre que la condition locale voulue est vérifiée en p .

Réciproquement, soient p un point de \mathcal{S} , et $\Phi, \mathcal{W}, \mathcal{V}$ comme l'énoncé de la proposition. On a donc $\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\} \cap \mathcal{W})$. Posons $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap \mathcal{W}$. C'est un ouvert du sous-espace $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ de \mathbb{R}^N . En identifiant $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ et \mathbb{R}^m , on voit \mathcal{U} comme un ouvert de \mathbb{R}^m et si \mathbf{x} désigne la restriction de Φ^{-1} à \mathcal{U} , $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ est un paramétrage local de \mathcal{S} en p . \square

II.6 Changements de paramétrage

Une sous-variété n'a pas de paramétrages privilégiés. Les objets ou les propriétés (différentielles, champs de vecteurs, etc) que nous allons étudier ne dépendent pas d'un choix de paramétrage (néanmoins, un choix judicieux peut souvent faciliter les calculs). Le résultat suivant nous permet d'assurer que le passage d'un paramétrage à un autre se fait toujours par une transformation suffisamment régulière.


 FIGURE II.11 – Changement de paramétrage (ici $m = 2$, $N = 3$)

Proposition II.6.1.

Soit p un point d'une sous-variété \mathcal{S} de dimension m de \mathbb{R}^N et soient

$$\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}$$

deux paramétrages de \mathcal{S} au voisinage de p . Notons $\mathcal{W} = \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1) \cap \mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)$. C'est un voisinage de p dans \mathcal{S} , et le changement de paramétrage

$$\theta = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_2^{-1}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{x}_1^{-1}(\mathcal{W})$$

est un homéomorphisme. Si les deux paramétrages sont de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, le changement de paramétrage est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme.

Démonstration. Comme θ est obtenu par composition de deux homéomorphismes, c'est un homéomorphisme. On ne peut pas conclure par cet argument que c'est un difféomorphisme, puisque \mathbf{x}_1^{-1} est défini sur l'ouvert \mathcal{W} de \mathcal{S} et que l'on ne sait pas encore ce que signifie pour une fonction sur \mathcal{S} d'être différentiable en un point. En revanche, puisque θ est un homéomorphisme, il suffit de vérifier que c'est localement un difféomorphisme.

Reprenons des éléments de la démonstration de la proposition II.5.1. Posons $q_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(p) \in \mathcal{U}_1$. Nous avons étendu \mathbf{x}_1 en une application $F : \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^{N-m} \rightarrow \mathbb{R}^N$ en posant

$$F(u, t) = \mathbf{x}(u) + \varphi(t),$$

où φ est un isomorphisme linéaire entre \mathbb{R}^{N-m} et un supplémentaire de l'image de $d(\mathbf{x}_1)_{q_1}$ dans \mathbb{R}^N . Nous avons ensuite montré grâce au théorème d'inversion locale que F se restreint en un difféomorphisme d'un voisinage de $(q_1, 0) \in \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^{N-m}$ sur son image et appelé $\Phi = F^{-1}$ le difféomorphisme inverse.

Si l'on note P la projection de $\mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^{N-m}$ sur \mathcal{U}_1 , on a alors $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 = P \circ \Phi \circ \mathbf{x}_2$ dans un voisinage de $q_2 = \mathbf{x}_2^{-1}(p) \in \mathcal{U}_2$, où de plus $\Phi \circ \mathbf{x}_2$ a valeurs dans $\mathcal{U}_1 \times \{0\}$. Sous cette forme, il apparaît clairement que $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2$ est un difféomorphisme local en p . \square

II.7 Calcul différentiel sur les sous-variétés

Dans cette section, nous généralisons les outils du calcul différentiel aux sous-variétés.

II.7.1 Applications différentiables sur les sous-variétés

Commençons par définir une notion de fonction différentiable.

Définition II.7.1.

Soit $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une sous-variété \mathcal{S} de dimension m et de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N . On dit que f est différentiable en $p \in \mathcal{S}$ si pour tout paramétrage $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ avec $p \in \mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{S}$, la fonction $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. On dit que f est différentiable sur \mathcal{S} si elle est différentiable en tout point de \mathcal{S} . On dit que f est de classe \mathcal{C}^r , $r \leq k$, sur \mathcal{S} si pour tout paramétrage $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ la fonction $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^r sur \mathcal{U} .

Remarque II.7.2. D'après la proposition II.6.1, pour que f soit différentiable en $p \in \mathcal{S}$, il suffit que $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ soit différentiable en $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ pour un paramétrage local \mathbf{x} . De même, si $r \leq k$, pour que f soit de classe \mathcal{C}^r dans un voisinage de p , il suffit que $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ soit de classe \mathcal{C}^r pour un paramétrage local \mathbf{x} de \mathcal{S} en p .

Exercice II.7.3. Montrer que pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^r sur \mathcal{S} et tout $p \in \mathcal{S}$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans \mathbb{R}^N et une fonction F de classe \mathcal{C}^r de \mathcal{V} dans \mathbb{R} tels que f soit la restriction de F à $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}$.

Montrer que l'on peut construire une telle fonction F sur tout un voisinage de \mathcal{S} (utiliser des partitions de l'unité).

Remarque II.7.4. Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m et de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^N et soit $n \in \mathbb{N}^\times$. On peut étendre immédiatement les définitions de fonction différentiable en un point p de \mathcal{S} ou de fonction de classe \mathcal{C}^r sur \mathcal{S} aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Définissons maintenant plus généralement les applications différentiables entre sous-variétés. Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}). Notons que puisque \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont des espaces topologiques (les topologies étant induites des espaces ambiants), on peut parler d'application continue de \mathcal{S}_1 dans \mathcal{S}_2 .

Définition II.7.5.

Soit $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application continue entre les sous-variétés (supposées de classe au moins \mathcal{C}^r , ($r \geq 1$)) \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2} .

On dit que φ est de classe \mathcal{C}^r (resp. différentiable en $p \in \mathcal{S}_1$) si quels que soient les paramétrages

$$\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1, \quad \mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , l'application $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$ définie sur $\mathbf{x}_1^{-1}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)) \cap \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1))$ à valeurs dans \mathcal{U}_2 est de classe \mathcal{C}^r (resp. différentiable en $\mathbf{x}_1^{-1}(p)$).

Exemple II.7.6. Les paramétrages locaux d'une sous-variété de classe \mathcal{C}^r sont des applications de classes \mathcal{C}^r .

Remarques II.7.7.

1. La proposition II.6.1 montre que φ est de classe \mathcal{C}^r si l'on peut trouver pour tout $p \in \mathcal{S}_1$ des paramétrages locaux \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 respectivement de \mathcal{S}_1 en p et de \mathcal{S}_2 en $\varphi(p)$ tels que $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$ soit de classe \mathcal{C}^r sur $\mathbf{x}_1^{-1}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2)) \cap \mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1))$.
2. On peut voir $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ comme une application de \mathcal{S}_1 dans \mathbb{R}^{N_2} , et parler en tant que telle de sa différentiabilité en un point ou son caractère \mathcal{C}^r (cf. remarque II.7.4). Nous laissons le lecteur vérifier $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ est de classe \mathcal{C}^r au sens de la définition ci-dessus si et seulement si $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ est de classe \mathcal{C}^r au sens de la remarque II.7.4).
3. On vérifie facilement que la composée de deux applications différentiables (resp. de classe \mathcal{C}^r) est une application différentiable (resp. de classe \mathcal{C}^r).
4. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et soit $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^r tracée dans une sous-variété \mathcal{S}_1 (de classe au moins \mathcal{C}^r) de \mathbb{R}^{N_1} . C'est donc une application de classe \mathcal{C}^r de I dans \mathbb{R}^{N_1} dont l'image est dans \mathcal{S}_1 , que l'on peut aussi voir comme une application de classe \mathcal{C}^r de la sous-variété I dans la sous-variété \mathcal{S}_1 au sens de la définition ci-dessus, d'après le point 2. Soit $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application de classe \mathcal{C}^r . Le point 3 montre alors que $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_2$ est de classe \mathcal{C}^r .

II.7.2 Espace tangent

Intuitivement, il est naturel de définir l'espace tangent en un point p d'une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N comme l'espace des vecteurs tangents en p aux courbes tracées sur \mathcal{S} passant par p . Il n'est pas clair que ceci forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^N , mais en utilisant les paramétrages locaux de \mathcal{S} , nous allons voir que tel est le cas.

Définition II.7.8.

Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N . On dit que \vec{v} est un **vecteur tangent** à \mathcal{S} en p s'il existe une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^1 , où I est un intervalle ouvert contenant 0, dont la trace est contenue dans \mathcal{S} , telle que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = \vec{v}$.

On appelle **espace tangent** à \mathcal{S} en p l'ensemble des vecteurs tangents à \mathcal{S} en p .

L'espace tangent en un point q d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^m est tout simplement l'espace vectoriel ambiant \mathbb{R}^m . Faisons le lien grâce aux paramétrages locaux.

Proposition II.7.9.

Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N . Soient $p \in \mathcal{S}$ et $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ un paramétrage local en p . Posons $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$. Alors l'espace tangent à \mathcal{S} en p s'identifie à l'image de \mathbb{R}^m par l'application $d\mathbf{x}_q$. En particulier c'est un sous-espace vectoriel de dimension m de \mathbb{R}^N .

Démonstration. Soit \vec{v} un vecteur tangent à \mathcal{S} en p , c'est-à-dire qu'il existe une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^1 dont la trace est contenue dans \mathcal{S} , définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, telle que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = \vec{v}$. Quitte à réduire I , on peut supposer que la trace de α est dans $\mathbf{x}(\mathcal{U})$. La courbe $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$, $I \rightarrow \mathcal{U}$ est alors de classe \mathcal{C}^1 , d'après remarque II.7.7, point 4 et l'exemple II.7.6.

Par définition de la différentielle, $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = \vec{v}$, ce qui montre que $\vec{v} \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^m)$.

Réciproquement, si $\vec{v} = d\mathbf{x}_q(\vec{w})$ pour un certain $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$, on peut considérer la courbe

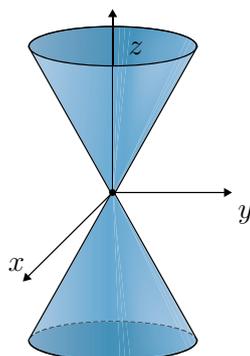
$$\beta : I \rightarrow \mathcal{U}, \quad t \mapsto t\vec{w} + q$$

où I est un intervalle ouvert contenant 0. Posons $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$. On a par définition de la différentielle $\vec{v} = \alpha'(0)$. Ceci montre que \vec{v} est un vecteur tangent en p à \mathcal{S} . \square

Définition II.7.10.

Soit \mathcal{S} une sous-variété. On note $T_p\mathcal{S}$ l'espace tangent à \mathcal{S} en un point $p \in \mathcal{S}$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace ambiant \mathbb{R}^N . On note $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$ le sous-espace tangent affine à \mathcal{S} en p , c'est-à-dire le sous-espace affine passant par p et parallèle à $T_p\mathcal{S}$.

De la discussion qui précède, on tire le résultat suivant qui est surtout pour nous le prétexte à introduire des notations utiles.

FIGURE II.12 – Cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ **Corollaire II.7.11.**

Soient \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N , p un point de \mathcal{S} et $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ un paramétrage local de \mathcal{S} en p . Notons $u = (u_1, \dots, u_m)$ la variable d'une fonction définie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Soit (e_1, \dots, e_m) la base canonique de \mathbb{R}^m . Posons

$$(II.7.1) \quad \mathbf{x}_{u_i}(u) = d\mathbf{x}_u(e_i) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathbf{x}(u + te_i) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}(u)$$

Alors pour tout $u \in \mathcal{U}$, $(\mathbf{x}_{u_1}(u), \dots, \mathbf{x}_{u_m}(u))$ est une base de $T_{\mathbf{x}(u)}\mathcal{S}$.

Exercice II.7.12. Montrer que le cône $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ dans \mathbb{R}^3 n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

Proposition II.7.13.

Si $\mathcal{S} = \{(u, f(u))\}$ est une sous-variété de \mathbb{R}^N définie par le graphe d'une application

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$$

comme dans la section II.3, alors l'espace tangent en $p = (u, f(u))$ est le graphe de df_u .

Si \mathcal{S} est une sous-variété de \mathbb{R}^N définie par

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid F(x) = 0\},$$

où 0 est valeur régulière de F , alors pour tout $p \in \mathcal{S}$, $T_p\mathcal{S} = \ker dF_p$.

Exercice II.7.14. Démontrer la proposition.

II.7.3 Différentielle d'une application différentiable

Grâce à la notion d'espace tangent, nous allons définir la notion de différentielle d'une application entre sous-variétés. Soit $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application continue entre les sous-variétés \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}).

Définissons maintenant la différentielle de φ en un point $p \in \mathcal{S}_1$ où elle est différentiable. Soit \vec{v} un vecteur tangent à \mathcal{S}_1 en p . Par définition, $\vec{v} = \alpha'(0)$ où $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$ est une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle ouvert I contenant 0 dans \mathcal{S} telle que $\alpha(0) = p$. Considérons la courbe $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_2$. Elle vérifie $\beta(0) = \varphi(p)$ et son vecteur tangent en $\varphi(p)$, $\beta'(0)$ est donc dans $T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$.

Reprenons maintenant des éléments de la démonstration de la proposition II.7.9. Le vecteur tangent $\vec{v} = \alpha'(0)$ s'écrit $d\mathbf{x}_q(\vec{w})$, où $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$ est un paramétrage local en p tel que $\mathbf{x}(q) = p$ et ceci pour un unique $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$. Il est clair qu'avec ces notations, $\beta'(0) = d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$, ce qui montre que $\beta'(0)$ ne dépend pas du choix de la courbe α , mais aussi que $d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$ ne dépend pas du paramétrage choisi et que $\vec{v} \mapsto \beta'(0) = d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$ est linéaire.

Définition II.7.15.

Soit $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application continue entre les sous-variétés \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 et p un point de \mathcal{S}_1 où elle est différentiable. Alors il existe une application linéaire

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

caractérisée par l'une des propriétés suivantes :

1. si $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}_1$ s'écrit $\vec{v} = d\mathbf{x}_q(\vec{w})$, où $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$ est un paramétrage local en p tel que $\mathbf{x}(q) = p$ avec $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$, alors $d\varphi_p(\vec{v}) = d(\varphi \circ \mathbf{x})_q(\vec{w})$.
2. si $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}_1$ s'écrit $\vec{v} = \alpha'(0)$, où $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$ est une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle ouvert I contenant 0 dans \mathcal{S} telle que $\alpha(0) = p$, alors $d\varphi_p(\vec{v}) = \beta'(0)$ où $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_2$.

L'application linéaire $d\varphi_p$ est appelée la différentielle de φ au point p .

Remarques II.7.16. Plaçons nous dans le cas où $\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^{N_2}$.

1. Si \mathcal{S}_1 est un ouvert de \mathbb{R}^N , on a pour tout $p \in \mathcal{S}$, $T_p\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}^N$ et l'on retrouve la définition usuelle de $d\varphi$.

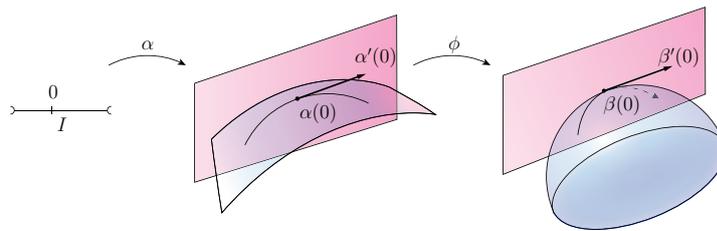


FIGURE II.13 – Différentielle

2. Si φ est la restriction d'une fonction différentiable F définie sur un voisinage ouvert \mathcal{V} de \mathcal{S}_1 dans \mathbb{R}^{N_1} , $d\varphi_p$ est la restriction de dF_p à $T_p\mathcal{S}_1$.

3. Si $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$ est un paramétrage local en p avec $\mathbf{x}(q) = p$, l'application linéaire $d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ est caractérisée par la propriété suivante

$$\varphi(\mathbf{x}(q+h)) = \varphi(p) + d\varphi_p(d\mathbf{x}_q(h)) + o(h)$$

(comme fonction de h définie dans un voisinage approprié de 0 dans \mathbb{R}^m).

Les différentielles se composent de la manière habituelle.

Proposition II.7.17.

Soient \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_3 des sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} , \mathbb{R}^{N_2} et \mathbb{R}^{N_3}) et supposons que les applications

$$\varphi_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2, \quad \varphi_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3,$$

sont telles que φ_1 est différentiable en p , et φ_2 différentiable en $\varphi_1(p)$. Alors $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est différentiable en p , et

$$d(\varphi_2 \circ \varphi_1)_p = d(\varphi_2)_{\varphi_1(p)} \circ d(\varphi_1)_p.$$

Démonstration. Ceci résulte des formules habituelles du calcul différentiel et de la définition II.7.15. □

Notations II.7.18.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}). On note $\mathcal{C}^r(\mathcal{W}_1, \mathcal{S}_2)$ l'espace des applications de classe \mathcal{C}^r d'un ouvert \mathcal{W}_1 de \mathcal{S}_1 dans \mathcal{S}_2 .

Exercice II.7.19. Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^∞ .

1. Montrer que l'inclusion $i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Montrer que les applications constantes $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ .
3. Montrer que l'application identique $\text{Id}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
4. Soit \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^N contenant \mathcal{S} . Montrer que la restriction à \mathcal{S} d'une fonction de classe \mathcal{C}^r sur \mathcal{V} est de classe \mathcal{C}^r .

Exemple II.7.20. Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^∞ . Soit P un hyperplan de \mathbb{R}^N passant par le point $p_0 \in \mathbb{R}^n$, et soit $a \in \mathbb{R}^N$ un vecteur normal unitaire à P en p_0 (c'est-à-dire $\langle x - p_0, a \rangle = 0$ pour tout $x \in P$ et $\|a\| = 1$). La fonction hauteur

$$h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle$$

est de classe \mathcal{C}^∞ car c'est la restriction d'une fonction \mathcal{C}^∞ définie sur l'espace \mathbb{R}^N . Sa différentielle en $p \in \mathcal{S}$ est donnée par :

$$dh_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle v, a \rangle.$$

Exemple II.7.21. Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $p_0 \in \mathbb{R}^N$. La fonction distance au carré

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = \|p - p_0\|^2$$

est de classe \mathcal{C}^∞ car c'est la restriction d'une fonction \mathcal{C}^∞ définie sur l'espace \mathbb{R}^N . Sa différentielle en $p \in \mathcal{S}$ est donnée par

$$df_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto 2\langle v, p - p_0 \rangle.$$

Exemple II.7.22. Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $p_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{S}$. La fonction distance

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p - p_0\|$$

est de classe \mathcal{C}^∞ car c'est la restriction d'une fonction \mathcal{C}^∞ définie sur l'espace $\mathbb{R}^N \setminus \{p_0\}$.

Exercice II.7.23. Calculer la différentielle en un point $p \in \mathcal{S}$ de la fonction distance de l'exemple précédent.

II.7.4 Difféomorphisme local. Inversion locale

Ayant défini les applications différentiables entre sous-variétés et leur différentielles, on peut étendre certaines notions du calcul différentiel. Commençons par la notion de difféomorphisme.

Définition II.7.24.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}) de classe au moins \mathcal{C}^k et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application de \mathcal{S}_1 dans \mathcal{S}_2 . On dit que φ est un \mathcal{C}^k -**difféomorphisme** si c'est un homéomorphisme et si φ et φ^{-1} sont de classe \mathcal{C}^k . On dit alors que \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont \mathcal{C}^k -difféomorphes.

Un des problèmes fondamentaux de la topologie différentielle est la classification des variétés à difféomorphisme près. Un résultat important de H. Whitney (1936) nous dit que toute variété différentiable abstraite de dimension m est difféomorphe à une sous-variété de \mathbb{R}^{2m} , de sorte le problème se ramène à celui de la classification des sous-variétés. C'est d'ailleurs dans cet article de 1936 que la définition rigoureuse des variétés abstraites apparaît pour la première fois, même si des notions approximatives étaient utilisées depuis Riemann, en particulier dans les travaux de H. Weyl et en relativité générale.

Voici quelques résultats de classification. Nous n'explicitons pas tous les termes employés.

Dimension 1. La seule variété compacte connexe de dimension 1 est le cercle \mathbb{S}^1 . Il existe une seule autre sous-variété connexe de dimension 1 non compacte, \mathbb{R} .

Dimension 2. La classification des variétés compactes connexes orientables de dimension 2 est donnée par la liste suivante : la sphère \mathbb{S}^2 , le tore à g trous, $g \geq 1$. Les variétés compactes connexes non orientables sont obtenus en recollant des plans projectifs à ces dernières. Le cas non compact est plus compliqué, car on peut avoir une infinité de trous, ainsi que des « pointes ».

Dimension 3. Le mathématicien G. Perelman a montré récemment que la seule variété compacte de dimension 3 connexe et simplement connexe (c'est-à-dire que tout lacet y est homotope à un lacet constant) est la sphère \mathbb{S}^3 , résolvant ainsi la célèbre conjecture de Poincaré.

Proposition II.7.25.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}) et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

un difféomorphisme. Alors pour tout $p \in \mathcal{S}_1$,

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

est un isomorphisme, d'inverse

$$d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2 \longrightarrow T_p\mathcal{S}_1.$$

En particulier, les dimensions de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont les mêmes.

Démonstration. C'est évident par la formule de composition des différentielles. □

Théorème II.7.26 (Inversion locale).

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}) de classe au moins \mathcal{C}^k , soit $p \in \mathcal{S}_1$, soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application de classe \mathcal{C}^k telle que

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

soit un isomorphisme linéaire. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}_1 de p dans \mathcal{S}_1 et un voisinage ouvert \mathcal{V}_2 de $\varphi(p)$ dans \mathcal{S}_2 tel que $\varphi(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2$ et la restriction de φ à \mathcal{V}_1 réalise un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de \mathcal{V}_1 sur \mathcal{V}_2 .

Démonstration. Soient $\mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ et $\mathbf{x}_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ des paramétrages locaux de \mathcal{S}_1 en p et de \mathcal{S}_2 en $\varphi(p)$ respectivement, tels que $\mathbf{x}_1(\mathcal{U}_1) \subset \varphi^{-1}(\mathbf{x}_2(\mathcal{U}_2))$. On peut appliquer le théorème d'inversion locale 1.7.2 à

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2$$

et en déduire le résultat voulu. □

On en déduit le résultat suivant qui complète la proposition II.3.3.

Corollaire II.7.27.

Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N et soit $p \in \mathcal{S}$. Soit P le sous-espace affine passant par p et parallèle à $T_p\mathcal{S}$. Il existe un voisinage ouvert \mathcal{W} de p dans \mathcal{S} , un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans P , un sous-espace vectoriel H de dimension $N - m$ de \mathbb{R}^N et une fonction différentiable $h : \mathcal{V} \rightarrow H$ tels que \mathcal{W} est le graphe de h .

Démonstration. Soit $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ la projection orthogonale sur P . C'est clairement une application différentiable de \mathcal{S} dans P , car c'est la restriction d'une application différentiable (et même linéaire) de \mathbb{R}^N dans lui-même. En particulier, on a

$$df_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_pP = T_p\mathcal{S}, \quad v \mapsto df_p(v) = v.$$

Comme df_p est l'identité de $T_p\mathcal{S}$, le théorème des fonctions implicites s'applique, et il existe un voisinage ouvert \mathcal{W} de p dans \mathcal{S} , un voisinage ouvert \mathcal{V} de p dans P tel que f réalise un difféomorphisme de \mathcal{W} sur \mathcal{V} , d'inverse $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$. On note π la projection orthogonale sur $H = (T_p\mathcal{S})^\perp$ et l'on pose

$$h : \mathcal{V} \rightarrow H, \quad h(u) = \pi(g(u)).$$

Tout $x \in \mathcal{W}$ s'écrit $x = g(u)$, $u \in \mathcal{V}$ et

$$x = f(x) + \pi(x) = u + \pi(g(u)).$$

Ceci montre le résultat, étant entendu un léger abus de langage : on identifie \mathbb{R}^N à $T_p\mathcal{S} \times H$ par $T_p\mathcal{S} \times H \simeq T_p\mathcal{S} \oplus H = \mathbb{R}^N$. \square

Etendons maintenant les notions d'immersion et de submersion aux applications entre sous-variétés.

Définition II.7.28.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}) et $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application de classe \mathcal{C}^k . On dit que φ est une **immersion** (resp. une **submersion**) au point $p \in \mathcal{S}_1$ si sa différentielle

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

est injective (resp. surjective). On dit que φ est une immersion (resp. une submersion) si c'est une immersion (resp. une submersion) en tout point $p \in \mathcal{S}_1$.

Proposition II.7.29.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}), et $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application de classe \mathcal{C}^k .

1. Supposons que φ soit une submersion en $p \in \mathcal{S}_1$. Alors il existe un voisinage \mathcal{W}_1 de p dans \mathcal{S}_1 tel que $\mathcal{W}_1 \cap \varphi^{-1}(\{\varphi(p)\})$ soit une sous-variété de \mathbb{R}^{N_1} , incluse dans \mathcal{S}_1 .
2. Supposons que φ soit une immersion en $p \in \mathcal{S}_1$. Alors il existe un voisinage \mathcal{W}_1 de p dans \mathcal{S}_1 tel que $\varphi(\mathcal{W}_1)$ soit une sous-variété de \mathbb{R}^{N_2} , incluse dans \mathcal{S}_2 .

Démonstration. Pour le premier point, on peut, grâce à la proposition II.5.1, supposer que $\mathcal{S}_2 = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{V}_2$, \mathcal{V}_2 ouvert de \mathbb{R}^{N_2} , et utiliser alors le point 1 de la proposition II.4.1. Pour le second point, on suppose cette fois que $\mathcal{S}_1 = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{V}_1$, \mathcal{V}_1 ouvert de \mathbb{R}^{N_1} , et on utilise l'exemple II.2.9. \square

II.7.5 Points critiques. Maxima et minima locaux

Les résultats suivants du calcul différentiel sur les sous-variétés découlent aisément de leur analogues en calcul différentiel ordinaire (sur des ouverts de \mathbb{R}^m) en utilisant des paramétrages locaux.

Théorème II.7.30.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}) avec \mathcal{S}_1 connexe, et soit

$$f : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

une application différentiable telle que $df_p = 0$ pour tout $p \in \mathcal{S}_1$. Alors f est constante.

Théorème II.7.31.

Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N et soit $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable de \mathcal{S} à valeurs réelles. Si p est un extrémum local de f , alors $df_p = 0$ sur $T_p\mathcal{S}$.

On introduit donc pour les fonctions différentiables définies sur des sous-variétés la notion de point critique, comme en calcul différentiel usuel.

Définition II.7.32.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}), et soit

$$\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

une application différentiable. Si, en un point $p \in \mathcal{S}_1$, la différentielle

$$d\varphi_p : T_p\mathcal{S}_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{S}_2$$

n'est pas surjective, on dit que p est un **point critique** de φ .

Dans le cas d'une fonction différentiable $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ d'une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N , remarquons que $p \in \mathcal{S}$ est un point critique de f si et seulement si df_p s'annule.

On définit de même comme dans la définition II.1.3 les **points réguliers**, **valeurs critiques** et **valeurs régulières**.

Exemple II.7.33. Dans le contexte ci-dessus, supposons que f soit la restriction à \mathcal{S} d'une fonction différentiable g définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^N contenant \mathcal{S} . Alors $p \in \mathcal{S}$ est un point critique de f si et seulement si $dg_p(T_p\mathcal{S}) = 0$, autrement dit $T_p\mathcal{S} \subset \ker dg_p$.

Exemple II.7.34. Si $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ est un paramétrage local de \mathcal{S} en p , p est un point critique de f si et seulement si $d(f \circ \mathbf{x})_q = 0$, où $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$.

Proposition II.7.35.

Soit $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ une application différentiable définie sur un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^N dont 0 est valeur régulière et soit \mathcal{S} la sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N définie par

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{V} \mid F(x) = 0\}.$$

Soit $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur \mathcal{V} et soit f la restriction de g à \mathcal{S} . Posons $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{N-m}(x))$. Alors un point $p \in \mathcal{S}$ est point critique de f , c'est-à-dire $df_p = 0$, si et seulement s'il existe des réels w_1, \dots, w_{N-m} tels que

$$dg_p = w_1 d(F_1)_p + \dots + w_{N-m} d(F_{N-m})_p.$$

Les composantes du vecteur $w = (w_1, \dots, w_{N-m})$ s'appellent les **multiplicateurs de Lagrange**.

Démonstration. L'espace tangent à \mathcal{S} en p est $\ker dF_p$ (Proposition II.7.13). Le point p est donc un point critique de f si et seulement si

$$\ker dF_p \subset \ker dg_p,$$

autrement dit si la forme linéaire dg_p s'annule sur $\ker dF_p$. Mais remarquons que si $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{N-m}(x))$, alors $\ker dF_p$ est l'intersection des noyaux des formes linéaires $d(F_1)_p, \dots, d(F_{N-m})_p$. Un résultat standard d'algèbre linéaire (à faire absolument en exercice) nous dit que dg_p s'annule sur l'intersection des $\ker d(F_i)_p$ si et seulement si dg_p est combinaison linéaire des $d(F_i)_p$, i.e. s'il existe des réels w_1, \dots, w_{N-m} tels que

$$dg_p = w_1 d(F_1)_p + \dots + w_{N-m} d(F_{N-m})_p.$$

□

Exercice II.7.36 (Diagonalisation des matrices symétriques). Soit A un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien \mathbb{R}^N , c'est-à-dire vérifiant

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle, \quad (v, w \in \mathbb{R}^N).$$

Considérons la fonction

$$f : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle Av, v \rangle.$$

Montrer que v est un point critique de f si et seulement si $Av = f(v)v$. En déduire que A admet un vecteur propre. Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormale de \mathbb{R}^N .

Exercice II.7.37. Reprenons l'exemple II.7.21. Soient \mathcal{S} une hypersurface de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^k , $p_0 \in \mathbb{R}^N$ et

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = \|p - p_0\|^2.$$

On suppose \mathcal{S} compacte. Montrer qu'il existe une droite normale à \mathcal{S} passant par p_0 (c'est-à-dire qu'il existe un point p de \mathcal{S} tel que $p - p_0$ est orthogonal à $T_p\mathcal{S}$).

Montrer que si toutes les droites normales à la surface \mathcal{S} se rencontrent en un point p_0 , alors \mathcal{S} est contenue dans une sphère.

II.7.6 Hessienne

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux sous-variétés (respectivement de \mathbb{R}^{N_1} et \mathbb{R}^{N_2}) et

$$f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$$

une application de \mathcal{S}_1 dans \mathcal{S}_2 . On suppose \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 et f de classe au moins \mathcal{C}^2 . On ne peut pas en général définir une notion de différentielle seconde de f . En effet, la différentielle première en un point p est une application linéaire de $T_p\mathcal{S}_1$ dans $T_p\mathcal{S}_2$. Comme $T_p\mathcal{S}$ dépend de p , on ne peut définir df comme une application de \mathcal{S} dans un espace vectoriel fixe, et donc définir sa différentielle.

Si $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}_1$ est un paramétrage local de \mathcal{S}_1 en p , $f \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ admet une différentielle seconde en $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$

$$q \mapsto d(d(f \circ \mathbf{x}))_q, \quad \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2})) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}).$$

On pourrait être tenté d'utiliser ce fait pour définir malgré tout une différentielle seconde à f en p . Cet espoir est ruiné par le fait qu'une telle définition ne saurait être indépendante du paramétrage local choisi. En effet, si $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}$ est un difféomorphisme entre un autre ouvert \mathcal{U}_1 de \mathbb{R}^m et \mathcal{U} , le paramétrage local

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} \circ h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{S}$$

donne :

$$d(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1} = d(f \circ \mathbf{x} \circ h)_{q_1} = d(f \circ \mathbf{x})_{h(q_1)} \circ dh_{q_1}, \quad (q_1 \in \mathcal{U}_1).$$

Ainsi $q_1 \mapsto d(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1}$ est obtenu comme composition de

$$q_1 \mapsto (d(f \circ \mathbf{x})_{h(q_1)}, dh_{q_1}), \quad \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$$

et de l'application naturelle de composition (bilinéaire)

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{N_2}).$$

Ceci donne avec $p = \mathbf{x}_1(q_1)$:

$$(II.7.2) \quad d^2(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1} = d(f \circ \mathbf{x})_q \circ d^2h_{q_1} + d^2(f \circ \mathbf{x})_q(dh_{q_1}, dh_{q_1}).$$

Cette équation s'interprète ainsi : le membre de gauche est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^{N_2} . Le premier terme du membre de droite est la composée de $(d(dh))_{q_1}$ qui est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^m et de $d(f \circ \mathbf{x})_q$ qui est une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^{N_2} . Le second terme du membre de droite est la composée de (dh_{q_1}, dh_{q_1}) , une application linéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans lui-même et de $d^2(f \circ \mathbf{x})_q$, une application bilinéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^{N_2} .

En revanche, si df_p s'annule, on a $d(f \circ \mathbf{x})_q = df_p \circ d\mathbf{x}_q = 0$, et donc

$$(II.7.3) \quad \begin{aligned} d^2(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1} &= d(f \circ \mathbf{x})_q \circ (d^2h)_{q_1} + d^2(f \circ \mathbf{x})_q(dh_{q_1}, dh_{q_1}) \\ &= d^2(f \circ \mathbf{x})_q(dh_{q_1}, dh_{q_1}). \end{aligned}$$

Ceci permet de définir pour tout $v, w \in T_p\mathcal{S}$,

$$(II.7.4) \quad d^2f_p(v, w) = d^2(f \circ \mathbf{x})_q(d(\mathbf{x}^{-1})_p(v), d(\mathbf{x}^{-1})_p(w)).$$

La formule (II.7.3) montre que cette définition est indépendante du paramétrage, car

$$\begin{aligned} & d^2(f \circ \mathbf{x}_1)_{q_1}(d(\mathbf{x}_1^{-1})_p(v), d(\mathbf{x}_1^{-1})_p(w)) \\ &= d^2(f \circ \mathbf{x})_q(dh_{q_1}, dh_{q_1})(d(h^{-1} \circ \mathbf{x}^{-1})_p(v), d(h^{-1} \circ \mathbf{x}^{-1})_p(w)) \\ &= d^2(f \circ \mathbf{x})_q(d(\mathbf{x}^{-1})_p(v), d(\mathbf{x}^{-1})_p(w)). \end{aligned}$$

Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N et $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{S} . Comme nous venons de le voir, on ne peut en général pas définir de différentielle seconde de f en un point p de \mathcal{S} , sauf dans le cas où p est un point critique de f .

Définition II.7.38.

Supposons que p est un point critique de la fonction $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Posons alors, quels que soient $v, w \in T_p\mathcal{S}$,

$$d^2 f_p(v, w) = d^2(f \circ \mathbf{x})_q(d\mathbf{x}_p^{-1}(v), d\mathbf{x}_p^{-1}(w))$$

où \mathbf{x} est un paramétrage local de \mathcal{S} en p . On a montré que cette définition est indépendante du paramétrage choisi.

Il découle des propriétés des différentielles secondes en calcul différentiel ordinaire que $d^2 f_p$ est une forme bilinéaire symétrique sur $T_p\mathcal{S}$. On appelle cette forme la **hessienne** de f au point critique p . D'autre part, si la fonction f admet un maximum (resp. minimum) local en p , alors $d^2 f_p$ est négative (resp. positive) et réciproquement, si $d^2 f_p$ est définie négative (resp. définie positive), alors f admet un maximum (resp. minimum) local isolé en p .

Exercice II.7.39. Soient $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ une application de classe \mathcal{C}^2 entre deux sous-variétés \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , p un point de \mathcal{S}_1 où la différentielle de f s'annule et $d^2 f_p$ la hessienne de f en p . Montrer que si $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}_1$ est une courbe de classe \mathcal{C}^2 tracée sur \mathcal{S}_1 telle que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = v \in T_p\mathcal{S}_1$, alors

$$d^2 f_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} [f(\alpha(t))].$$

Exercice II.7.40 (Lemme de Morse). Soient \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N , $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{S} et p un point critique de f . On suppose que la hessienne de f en p est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $T_p\mathcal{S}$, de signature (p, q) (on a donc $p + q = m$).

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un paramétrage local $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ de \mathcal{S} en p tel que

$$f(\mathbf{x}(q)) = f(q) + \sum_{i=1}^p u_i^2 - \sum_{i=p+1}^m u_i^2, \quad (q = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}).$$

On note Sym_m l'espace vectoriel des matrices symétriques $m \times m$.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où \mathcal{S} est un ouvert \mathcal{V} de \mathbb{R}^m , $p = 0$, $f(0) = 0$ et $d^2 f_p$ est représentée par la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. On se place dans ce cas dans la suite.
2. Montrer qu'il existe une application $B : \mathcal{V} \rightarrow \text{Sym}_m$, $q \mapsto B(q) = (b_{ij}(q))_{ij}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $q = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{V}$,

$$f(q) = \sum_{i,j=1}^m b_{ij}(q) u_i u_j.$$

3. Soit $A = \text{Diag}(a_1, \dots, a_m)$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_i = \pm 1$. Montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{W} de A dans Sym_m et une application de classe \mathcal{C}^∞

$$p : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$$

telle que $p(A) = I_m$ et si $p(B) = Q$, alors $B = {}^t Q A Q$.

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension m et supposer le résultat vrai au rang $m - 1$. Si $B = (b_{ij})_{ij} \in \text{Sym}_m$ est proche de A , poser

$$T = \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \cdots & -\frac{b_{1m}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \cdot & & \cdots & \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

et vérifier que ${}^t T B T$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & B_1 & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, où $B_1 \in \text{Sym}_{m-1}$ est proche

de $A_1 = \text{Diag}(a_2, \dots, a_m)$.

4. On pose $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $q \mapsto p(B(q))^{-1}(q)$ où p est définie au 3 et B au 2. Montrer que $f(q) = {}^t \varphi(q) A \varphi(q)$ et que $d\varphi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}$. Conclure.

II.8 Exercices

Exercice II.8.1. Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N , contenue dans un ouvert \mathcal{V} . Soit $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un difféomorphisme entre \mathcal{V} et un autre ouvert \mathcal{W} de \mathbb{R}^N . Montrer que $\phi(\mathcal{S})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^N , difféomorphe à \mathcal{S} .

Exercice II.8.2. Montrer que le groupe $\mathbf{SO}(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1 est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice II.8.3. (fibré tangent) Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N . Montrer que l'ensemble

$$T\mathcal{S} = \{(p, v); p \in \mathcal{S}, v \in T_p \mathcal{S}\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Exercice II.8.4. Soit \mathcal{S} une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^N et soit $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application différentiable vérifiant

a. En tout point $p \in \mathcal{S}$, $d\phi_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est injective.

b. ϕ est un homéomorphisme de \mathcal{S} sur son image $\phi(\mathcal{S})$.

Montrer que $\phi(\mathcal{S})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^N et que $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \phi(\mathcal{S})$ est un difféomorphisme.

Application. Soit $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur la sphère unité. Montrer que

$$\mathcal{S}(f) = \{f(p)p; p \in \mathbb{S}^2\}$$

est une surface compacte de \mathbb{R}^3 difféomorphe à \mathbb{S}^2 .

On dit qu'une surface compacte connexe de \mathbb{R}^3 est étoilée par rapport à 0 s'il n'existe pas de demi-droite d'origine 0 dans \mathbb{R}^3 tangente à \mathcal{S} en un point. Montrer que les surfaces étoilées par rapport à 0 sont exactement les surfaces $\mathcal{S}(f)$ définies ci-dessus.

Exercice II.8.5. Soit \mathcal{S} la partie de \mathbb{R}^3 définie par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0\}.$$

Montrer que c'est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

Soit $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ . Trouver les extrema de f sur \mathcal{S} .

Exercice II.8.6. Soient $a > 3$ un réel et \mathcal{S} la partie de \mathbb{R}^3 définie par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - a = 0\}.$$

Montrer que c'est une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Exhiber un difféomorphisme entre \mathcal{S} et \mathbb{S}^2 .

Exercice II.8.7. Soient \mathcal{S} une surface de \mathbb{R}^3 et $a \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

1. Si \mathcal{S} est compact, montrer qu'il existe un point p de \mathcal{S} tel que la droite passant par p et orthogonale à $T_p\mathcal{S}$ soit parallèle au vecteur a .
2. Si \mathcal{S} est connexe, et si pour tout point p de \mathcal{S} , la droite passant par p et orthogonale à $T_p\mathcal{S}$ est parallèle au vecteur a , alors \mathcal{S} est contenue dans un plan orthogonal à a .

Exercice II.8.8. Soient \mathcal{S} une surface et $D \in \mathbb{R}^3$ une droite de \mathbb{R}^3 .

1. Si \mathcal{S} est compact, montrer qu'il existe un point p de \mathcal{S} tel que la droite passant par p et orthogonale à $T_p\mathcal{S}$ intersecte D perpendiculairement.
2. Si \mathcal{S} est connexe, et si pour tout point p de \mathcal{S} , la droite passant par p et orthogonale à $T_p\mathcal{S}$ intersecte D perpendiculairement, alors \mathcal{S} est contenue dans un cylindre d'axe R .

Exercice II.8.9. 1. Soit \mathcal{S} une surface compacte. Montrer qu'il existe une droite qui intersecte \mathcal{S} perpendiculairement en au moins deux points.

2. Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux surfaces compactes qui ne s'intersectent pas. Montrer qu'il existe une droite qui coupe perpendiculairement \mathcal{S}_1 en un point et \mathcal{S}_2 en un autre point.

Exercice II.8.10. Soit \mathcal{S} une surface de \mathbb{R}^3 se trouvant entièrement dans un demi-espace fermé délimité par un plan P . Montrer que \mathcal{S} et P sont tangents en chaque point de leur intersection.

Exercice II.8.11. Soit \mathcal{S} une surface de \mathbb{R}^3 telle que chaque point de \mathcal{S} admette un voisinage contenu dans un plan (resp. une sphère). Montrer que \mathcal{S} est contenue dans un plan (resp. une sphère).

Exercice II.8.12. Soit \mathcal{S} une sous-variété connexe de \mathbb{R}^N . Montrer que deux points de \mathcal{S} peuvent être reliés par un arc de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice II.8.13. Soit X un champ de vecteurs tangents de classe \mathcal{C}^∞ sur une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N . Supposons que $X(p_0) \neq 0$ en un point p_0 de \mathcal{S} . Montrer qu'il existe un paramétrage local $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ en p tel que

$$X(\mathbf{x}(q)) = \mathbf{x}_{u_1}(q), \quad (q \in \mathcal{U}).$$

Exercice II.8.14. Soit \mathbb{S}^{2n-1} la sphère unité de \mathbb{R}^{2n} .

1. Montrer que le champ de vecteurs X de \mathbb{R}^{2n} défini par

$$X = \sum_{i=1}^n -x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}}$$

est tangent à la sphère (et donc se restreint en un champ de vecteur sur la sphère).

2. Lorsque $n = 2$, définir deux autres champs de vecteurs Y et Z , tangents à la sphère, tels que X , Y et Z soient linéairements indépendants en chaque point de \mathbb{S}^3 .

Indication.
$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} = -1$$

3. En déduire que le fibré tangent $T\mathbb{S}^3$ est trivial, c'est-à-dire est diffeomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Exercice II.8.15. On identifie \mathbb{R}^n et l'espace des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}$. Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, on note $(v_1|v_2|\dots|v_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont v_1, \dots, v_n .

Etant donnés $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$, on note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qu'ils engendrent.

On considère la fonction

$$f : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1|v_2|\dots|v_n).$$

1. Pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, donner la différentielle $df_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}$ en l'évaluant en $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$.
2. On note g la restriction de f à $(\mathbb{S}^{n-1})^n$. Montrer que si $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{S}^{n-1})^n$ est un point critique de g , et que de plus (v_1, v_2, \dots, v_n) est libre, alors pour tout $i = 1, \dots, n$, $T_{v_i}\mathbb{S}^{n-1} \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$. En déduire que $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{S}^{n-1})^n$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $\det(v_1|v_2|\dots|v_n) \leq \|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_n\|$.

Chapitre III

Equations différentielles

III.1 Remarques générales

Soit $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow (\mathbb{R}^N)^k$ une fonction continue, où \mathcal{U} est un ouvert de $(\mathbb{R}^N)^k$ et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On s'intéresse aux équations différentielles de la forme

$$(III.1.1) \quad \alpha^{(k)}(t) = X(t, \alpha(t), \dots, \alpha^{(k-1)}(t))$$

dont on cherche les solutions α de classe \mathcal{C}^k définies sur un intervalle ouvert $J \subset I$.

L'équation (III.1.1) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) &= \alpha_2(t) \\ \alpha'_2(t) &= \alpha_3(t) \\ &\dots \\ \alpha'_{k-1}(t) &= X(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_{k-1}(t)) \end{cases}$$

Ce procédé permet de ne considérer que des systèmes d'ordre 1. Plus généralement, un système d'équations différentielles d'ordre quelconque se ramène toujours de cette manière à un système d'ordre un en dimension plus grande, dont la forme générale est

$$\begin{cases} \alpha'_1(t) &= X_1(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t)) \\ \alpha'_2(t) &= X_2(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t)) \\ &\dots \\ \alpha'_r(t) &= X_k(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t)) \end{cases}$$

et de manière abrégée, sous la forme

$$(III.1.2) \quad \alpha'(t) = X(t, \alpha(t))$$

où $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t))$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle ouvert J inclus dans I et à valeurs dans \mathbb{R}^r et $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^r$ où \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^r , est au moins continue.

Sous cette forme, il est clair que l'on peut remplacer \mathbb{R}^r par un espace de Banach quelconque dans la formulation du problème. En pratique, on va utiliser un argument de compacité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz qui nécessite d'être en dimension finie. On suppose donc que X est une application de $I \times \mathcal{U}$ dans E où \mathcal{U} est un ouvert d'un espace de Banach E de dimension finie.

Nous allons adopter un langage géométrique pour parler d'une équation différentielle de la forme (III.1.2), celui des champs de vecteurs, des courbes intégrales, et des flots. Une équation différentielle comme (III.1.2) est donnée par le champ de vecteurs X , et une courbe intégrale du champ de vecteurs est une solution de cette équation différentielle.

Définition III.1.1.

On appelle **champ de vecteurs dépendant du temps** sur un ouvert \mathcal{U} d'un espace de Banach E une application continue

$$X : I \times \mathcal{U} \longrightarrow E,$$

où I est un intervalle ouvert (non vide) de \mathbb{R} . On appelle **courbe intégrale** de classe \mathcal{C}^p , du champ de vecteurs X une courbe paramétrée $\alpha : J \rightarrow \mathcal{U}$ de classe \mathcal{C}^p définie sur un intervalle ouvert J de \mathbb{R} contenu dans I telle que pour tout $t \in J$,

$$\alpha'(t) = X(t, \alpha(t)).$$

Cette courbe intégrale est dite de **condition initiale** $(t_0, x) \in J \times \mathcal{U}$ si $\alpha(t_0) = x$.

Remarque III.1.2. Il est important de noter que les équations différentielles « implicites », c'est à dire de la forme $f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) = 0$, présentent des difficultés qui n'apparaissent pas dans l'étude des équations « ordinaires ». On peut, lorsque $\frac{\partial f}{\partial v}(t_0, x_0, v_0)$ est inversible en un point (t_0, x_0, v_0) annulant f , utiliser le théorème des fonctions implicites pour se ramener au voisinage de ce point aux théorèmes du cours. Nous ne ferons pas ici la théorie générale de telles équations.

III.2 Résultats d'existence et d'unicité locaux : le théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous allons énoncer et démontrer dans cette section des théorèmes d'existence et d'unicité locaux de solutions d'équations différentielles.

Théorème III.2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).

Soit $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow E$ un champ de vecteurs sur un ouvert \mathcal{U} d'un espace de Banach E de dimension finie. Supposons X localement lipschitzien en la seconde variable. Alors, pour tout $\tau_0 \in I$ et pour tout $x_0 \in \mathcal{U}$, il existe $\eta > 0$, $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que si x est dans $B(x_0, \eta)$ et t_0 est dans $]\tau_0 - \delta; \tau_0 + \delta[$, l'équation différentielle avec condition initiale

$$(III.2.1) \quad \begin{cases} \alpha'(t) = X(t, \alpha(t)) \\ \alpha(t_0) = x \end{cases}$$

possède une unique solution définie sur $]t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon[$. Autrement dit, il existe une unique courbe intégrale $\alpha = \alpha_{t_0, x}$ de X définie sur $]t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon[$ et vérifiant $\alpha(t_0) = x$.

L'hypothèse **localement lipschitzien en la seconde variable**, signifie que quel que soit $t_0 \in I$, quel que soit $x_0 \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage J_0 de t_0 dans I , un voisinage \mathcal{U}_0 de x_0 dans \mathcal{U} et une constante $k \geq 0$ tels que quels que soient $t \in J_0$ et $x_1, x_2 \in \mathcal{U}_0$,

$$\|X(t, x_1) - X(t, x_2)\|_E \leq k \|x_1 - x_2\|_E.$$

Remarque III.2.2. Le domaine \mathcal{U} peut être arbitrairement restreint sans changer la conclusion du théorème. On peut donc supposer que X soit k -lipschitzien en la seconde variable pour démontrer le théorème. De même, on peut restreindre l'intervalle I . En particulier le théorème s'applique dès que X est de classe \mathcal{C}^1 : soit $x_1 \in \mathcal{U}$ et $t_1 \in I$. Par continuité de $(t, x) \mapsto dX_{(t,x)}$, il existe un voisinage $]t_1 - a; t_1 + a[\times B(x_1, b)$ de (t_1, x_1) contenu dans $I \times U$, et une constante $k \geq 0$ telle que $\|dX_{(t,x)}\| \leq k$ pour tout (t, x) dans $]t_1 - a; t_1 + a[\times B(x_1, b)$. Le théorème des accroissements finis implique alors que X est k -lipschitzien sur $]t_1 - a; t_1 + a[\times B(x_1, b)$ et en particulier k -lipschitzien en la seconde variable.

Remarque III.2.3. La complication apparente de l'énoncé vient de ce que l'on souhaite l'existence d'une solution dont la taille du domaine de définition, en l'occurrence 2ϵ , soit indépendante de t_0 et x . Cela aura son importance ultérieurement, lorsqu'on considérera les solutions de manière collective.

Remarque III.2.4. On veut parfois obtenir l'existence des solutions sur un intervalle de définition $]\tau_0 - \epsilon'; \tau_0 + \epsilon'[$ centré en τ_0 plutôt qu'en t_0 . Cela n'offre pas de difficulté supplémentaire, car si $|t_0 - \tau_0| \leq \epsilon/2$, on a $]\tau_0 - \epsilon/2; \tau_0 + \epsilon/2[\subset]t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon[$.

Remarque III.2.5. Un théorème de Peano affirme qu'il suffit que X soit continue pour qu'il existe une solution. Mais elle n'est alors pas nécessairement unique comme le montre l'exemple $\alpha'(t) = 2|\alpha(t)|^{1/2}$, $\alpha(0) = 0$: on a alors deux solutions, $\alpha_1(t) = 0$ et $\alpha_2(t) = \text{signe}(t)t^2$. Cet exemple montre aussi que le théorème n'est pas vrai pour des équations implicites $f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) = 0$, puisque l'équation $\alpha'(t)^2 - 4\alpha(t) = 0$ possède deux solutions telles que $\alpha(0) = 0$.

Remarque III.2.6. Un cas particulier important est celui où le champ de vecteur ne dépend pas du temps, c'est-à-dire $X : \mathcal{U} \rightarrow E$, continue (et localement lipschitzienne dans l'énoncé du théorème). Dans la théorie des équations différentielles, on parle d'équations autonomes.

Démonstration. L'équation (III.2.1) est équivalente à

$$(III.2.2) \quad \alpha(t) = x + \int_{t_0}^t X(s, \alpha(s)) ds.$$

Nous allons trouver une telle application α comme point fixe d'un opérateur grâce au théorème de Banach I.5.1.

Soit $k > 0$ tel que X soit k -lipschitzienne en la seconde variable. Soit $a > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, 2a) \subset \mathcal{U}$ et soit $a' > 0$ tel que $[\tau_0 - 2a'; \tau_0 + 2a'] \subset I$. Posons

$$\ell = \sup_{t \in [\tau_0 - 2a'; \tau_0 + 2a'], x \in \bar{B}(x_0, 2a)} \|X(t, x)\|.$$

Introduisons pour tout $x \in B(x_0, a)$, et pour tout $t_0 \in]\tau_0 - a'; \tau_0 + a'[$ l'opérateur

$$S = S_{t_0, x} : \phi \mapsto S_{t_0, x}(\phi), \quad S_{t_0, x}(\phi)(t) = x + \int_{t_0}^t X(s, \phi(s)) ds,$$

agissant sur les fonctions continues ϕ définie sur un intervalle J contenant t_0 et inclus dans I , à valeurs dans \mathcal{U} . Un point fixe α de S donne une solution de (III.2.2) et réciproquement. Il nous faut chercher un espace fonctionnel stable par S , qui soit un espace métrique complet, pour pouvoir appliquer le théorème de Banach.

Soit $b > 0$, $b < \inf(\frac{a}{\ell}, \frac{1}{k}, a')$. Remarquons que $[t_0 - b; t_0 + b] \subset I$ car $b < a'$. Munissons $\mathcal{C}^0([t_0 - b; t_0 + b], \bar{B}(x_0, 2a))$ de la norme de la convergence uniforme sur le compact $[t_0 - b; t_0 + b]$, notée $\|\cdot\|_\infty$: c'est un espace de Banach. Il est clair que l'application $t \mapsto S(\phi)(t)$ est définie et continue pour toute application $\phi \in \mathcal{C}^0([t_0 - b; t_0 + b], \bar{B}(x_0, 2a))$ et que $S(\phi)(t_0) = x$. Montrons que $S(\phi)(t) \in \bar{B}(x_0, 2a)$. On a

$$\begin{aligned} \|S(\phi)(t) - x_0\| &= \left\| x - x_0 + \int_{t_0}^t X(s, \phi(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \int_{t_0}^t \|X(s, \phi(s))\| \, ds \leq a + b\ell \leq 2a. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est le fait que l'on a choisi $b < \frac{a}{\ell}$.

Ainsi S envoie $\mathcal{C}^0([t_0 - b; t_0 + b], \bar{B}(x_0, 2a))$ dans lui-même. Montrons maintenant que S est une application contractante. Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}^0([t_0 - b; t_0 + b], \bar{B}(x_0, 2a))$.

$$\begin{aligned} \|S(\phi_1) - S(\phi_2)\|_\infty &= \sup_{t \in [t_0 - b; t_0 + b]} \left\| \int_{t_0}^t X(s, \phi_1(s)) - X(s, \phi_2(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|X(s, \phi_1(s)) - X(s, \phi_2(s))\| \, ds. \end{aligned}$$

Or, X est k -lipschitzien en la seconde variable, donc pour tout $s \in [t_0 - b; t_0 + b]$,

$$\|X(s, \phi_1(s)) - X(s, \phi_2(s))\| \leq k \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| \leq k \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\|S(\phi_1) - S(\phi_2)\|_\infty \leq kb \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty.$$

Comme on a choisi $b < \frac{1}{k}$, S_x est contractante.

Les conditions d'application du théorème de Banach sont donc vérifiées pour l'application :

$$S : \mathcal{C}^0([t_0 - b; t_0 + b], \bar{B}(x_0, 2a)) \rightarrow \mathcal{C}^0([-b; b], \bar{B}(x_0, 2a)).$$

Il existe donc un point fixe unique α de S dans $\mathcal{C}^0([t_0 - b; t_0 + b], \bar{B}(x_0, 2a))$. L'unicité dans l'énoncé du théorème est un peu plus forte. Pour l'établir, il suffit de vérifier que toute solution α de (III.2.1) définie sur $[t_0 - b; t_0 + b]$ est à valeurs dans $B(x_0, 2a)$. Mais supposons qu'une telle solution α sorte de $B(x_0, 2a)$ sur $[t_0 - b; t_0 + b]$ et soit t_1 l'instant dans cet intervalle le plus proche de t_0 où $\alpha(t_1) \notin B(x_0, 2a)$. Alors, comme $\alpha(t_0) = x \in B(x_0, a)$, d'après l'inégalité des accroissements finis $\|\alpha'(t)\|_E$ doit prendre entre t_0 et t_1 des valeurs strictement supérieures à a/b . Or $b < a/\ell$ et on obtient que $\|\alpha'(t)\|_E$ doit prendre entre t_0 et t_1 des valeurs strictement supérieures à ℓ , ce qui est impossible car tant que x est dans $B(x_0, 2a)$, $\|\alpha'(t)\|_E = \|X(t, \alpha(t))\|_E \leq \ell$.

Pour revenir aux notations de l'énoncé, on prend $\epsilon = b$ et $\delta = a'$, $\eta = a$. \square

Nous allons maintenant utiliser la version « à paramètres » du théorème de Picard pour montrer que si une famille d'équations différentielles dépend de manière \mathcal{C}^p d'un paramètre λ , il en est de même de sa solution donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Remarquons que la condition initiale peut aussi être considérée comme un paramètre.

Théorème III.2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres).

Soit $X : \Lambda \times I \times \mathcal{U} \rightarrow E$ une application de classe \mathcal{C}^p , $p \geq 0$ où Λ est un ouvert d'un espace métrique si $p = 0$ et d'un espace de Banach si $p \geq 1$, I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et \mathcal{U} est un ouvert d'un espace de Banach E (on voit X comme une famille $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de champs de vecteurs sur \mathcal{U}).

Supposons X localement lipschitzien en la variable $x \in \mathcal{U}$. Notons $X(\lambda, t, x) = X_\lambda(t, x)$. Alors, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$, pour tout $\tau_0 \in I$ et pour tout $x_0 \in \mathcal{U}$, il existe $\sigma > 0$, $\eta > 0$, $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que si $\lambda \in B(\lambda_0, \sigma)$, x est dans $B(x_0, \eta)$ et t_0 est dans $] \tau_0 - \delta ; \tau_0 + \delta [$, l'équation différentielle avec condition initiale

$$(III.2.3) \quad \begin{cases} \alpha'(t) = X_\lambda(t, \alpha(t)) \\ \alpha(t_0) = x \end{cases}$$

possède une unique solution définie $\alpha_{\lambda, t_0, x}$ sur $]t_0 - \epsilon ; t_0 + \epsilon [$. Notons

$$\mathcal{E} = \{(t_0, t) \in]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[\times \mathbb{R} \mid t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\}$$

C'est un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 . L'application $F : (\lambda, t_0, t, x) \mapsto \alpha_{\lambda, t_0, x}(t)$ définie sur $B(\lambda_0, \sigma) \times \mathcal{E} \times B(x_0, \eta)$ est de classe \mathcal{C}^p , et de classe \mathcal{C}^{p+1} en t .

Démonstration. Traitons d'abord le cas $p = 0$. Le théorème précédent et sa démonstration montrent que l'on obtient une solution $\alpha_{\lambda, t_0, x}$ comme point fixe de

$$S_{\lambda, t_0, x} : \phi \mapsto S_{\lambda, t_0, x}(\phi), \quad S_{\lambda, t_0, x}(\phi)(t) = x + \int_{t_0}^t X_\lambda(s, \phi(s)) ds,$$

agissant sur $\mathcal{C}^0([t_0 - \epsilon ; t_0 + \epsilon], \bar{B}(x_0, 2\eta))$. Or cet espace dépend de t_0 , et pour pouvoir appliquer le théorème de Picard à paramètres I.5.6, il nous faut reformuler quelque peu le résultat. Posons $\beta_{\lambda, t_0, x}(t) = \alpha_{\lambda, t_0, x}(t - (\tau_0 - t_0))$. Cette application $\beta_{\lambda, t_0, x}$ est définie sur $] \tau_0 - \epsilon ; \tau_0 + \epsilon [$ et vérifie

$$\begin{aligned} \beta'_{\lambda, t_0, x}(t) &= \alpha'_{\lambda, t_0, x}(t - (\tau_0 - t_0)) = X(t - (\tau_0 - t_0), \alpha_{\lambda, t_0, x}(t - (\tau_0 - t_0))) \\ &= X(t - (\tau_0 - t_0), \beta_{\lambda, t_0, x}(t)). \end{aligned}$$

et $\beta_{\lambda, t_0, x}(\tau_0) = x$. Elle est l'unique point fixe de l'opérateur

$$T_{\lambda, t_0, x} : \phi \mapsto T_{\lambda, t_0, x}(\phi), \quad T_{\lambda, t_0, x}(\phi)(t) = x + \int_{\tau_0}^t X_\lambda(s - (\tau_0 - t_0), \phi(s)) ds,$$

sur $\mathcal{C}^0([\tau_0 - \epsilon ; \tau_0 + \epsilon], \bar{B}(x_0, 2\eta))$. Maintenant, il est clair que l'application

$$\Lambda \times] \tau_0 - \delta ; \tau_0 + \delta [\times B_E(x_0, \eta) \times \mathcal{C}^0([\tau_0 - \epsilon ; \tau_0 + \epsilon], \bar{B}(x_0, 2\eta)) \longrightarrow \mathcal{C}^0([\tau_0 - \epsilon ; \tau_0 + \epsilon], \bar{B}(x_0, 2\eta)),$$

$$(III.2.4) \quad (\lambda, t_0, x, \phi) \mapsto T_{\lambda, t_0, x}(\phi)$$

est continue. Le théorème de Picard I.5.3 nous donne la continuité de l'application

$$\Lambda \times] \tau_0 - \delta ; \tau_0 + \delta [\times B_E(x_0, \eta) \longrightarrow \mathcal{C}^0([\tau_0 - \epsilon ; \tau_0 + \epsilon], \bar{B}(x_0, 2\eta)),$$

$$(III.2.5) \quad (\lambda, t_0, x) \mapsto \beta_{\lambda, t_0, x}.$$

On en déduit la continuité de

$$\Lambda \times]\tau_0 - \delta; \tau_0 + \delta[\times B_E(x_0, \eta) \times]t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(III.2.6) \quad (\lambda, t_0, x, t) \mapsto \alpha_{\lambda, t_0, x}(t) = \beta_{\lambda, t_0, x}(t + (\tau_0 - t_0)).$$

De plus, on sait que $t \mapsto \alpha_{\lambda, t_0, x}(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Supposons maintenant $p \geq 1$. On laisse au lecteur le soin de montrer que l'application (III.2.4) est de classe \mathcal{C}^p (en s'inspirant de l'exercice I.8.5). Il s'ensuit d'après le théorème de point fixe de Banach/Picard à paramètres, version différentiable I.5.6 que (III.2.5) est aussi de classe \mathcal{C}^p . On en déduit facilement que (III.2.6) est de classe \mathcal{C}^p en (λ, t_0, x) . On sait déjà que (III.2.6) est de classe \mathcal{C}^1 en t . Mais comme $\alpha'_{\lambda, t_0, x}(t) = X_\lambda(t, \alpha_{\lambda, t_0, x}(t))$, une récurrence immédiate montre que (III.2.6) est de classe \mathcal{C}^{p+1} en t . On en déduit que (III.2.6) est de classe \mathcal{C}^p . \square

Reformulons ce résultat avec la notion de flot local. On reprend les mêmes notations que dans le théorème précédent.

Définition III.2.8.

Un **flot local** en (λ_0, τ_0, x_0) de X est la donnée d'un voisinage ouvert \mathcal{W} de λ_0 dans Λ , d'un voisinage ouvert \mathcal{U}' de x_0 dans \mathcal{U} , d'un intervalle ouvert J contenant τ_0 et contenu dans I , d'une constante $\epsilon > 0$ et d'une application

$$F : \mathcal{W} \times \mathcal{E} \times \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U},$$

où

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(J, \epsilon) = \{(t_0, t) \in J \times \mathbb{R} \mid t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\},$$

tels que pour tout $\lambda \in \mathcal{W}$, pour tout $t_0 \in J$, pour tout $x \in \mathcal{U}'$,

$$t \mapsto \alpha_{\lambda, t_0, x}(t) = F(\lambda, t_0, t, x)$$

soit l'unique courbe intégrale de X_λ définie sur $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ de condition initiale (t_0, x) .

Remarque III.2.9. La longueur de l'intervalle de définition de la courbe intégrale $\alpha_{\lambda, t_0, x}$ est indépendante de $\lambda \in \mathcal{W}$, $t_0 \in J$ et $x \in \mathcal{U}'$. L'ensemble \mathcal{E} est un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 .

Notons au passage la reformulation suivante des propriétés du flot

Proposition III.2.10.

Un flot local F comme dans la définition précédente vérifie pour tout (λ, t_0, t, x) dans le domaine de définition de F ,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\lambda, t_0, t, x) = X(t, F(\lambda, t_0, t, x)), \quad F(\lambda, t_0, t_0, x) = x.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres III.2.7, se reformule en

Théorème III.2.11.

Soient $X : \Lambda \times I \times \mathcal{U} \rightarrow E$ comme dans le théorème III.2.7 et $(\lambda_0, \tau_0, x_0) \in \Lambda \times I \times \mathcal{U}$. Alors il existe un voisinage ouvert \mathcal{W} de λ_0 dans Λ , un intervalle J ouvert contenant τ_0 , un voisinage ouvert \mathcal{U}' de x_0 dans \mathcal{U} et une constante $\epsilon > 0$ définissant un flot local F en (λ_0, τ_0, x_0) . Si le champ de vecteurs X est de classe \mathcal{C}^p , alors F aussi et de classe \mathcal{C}^{p+1} en t .

L'énoncé d'unicité est le suivant : soient $\lambda \in \mathcal{W}$, $t_0 \in J$, $x \in \mathcal{U}'$. Si

$$\gamma :]t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon'[\rightarrow E$$

avec $\epsilon' \leq \epsilon$ vérifie $\gamma'(t) = X_\lambda(t, \gamma(t))$ et $\gamma(t_0) = x$, alors $\gamma(t) = \alpha_{\lambda, t_0, x}(t) = F(\lambda, t_0, t, x)$ pour tout $t \in]t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon'[,$

Remarque III.2.12. Souvent nous voulons étudier des équations différentielles où le champ de vecteurs est sans dépendance en un paramètre λ . On reformule facilement les résultats précédents sans cette dépendance.

III.3 Temps de vie des solutions. Flot global

Nous nous intéressons maintenant au problème du prolongement des courbes intégrales. Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas d'un champ de vecteurs sans dépendance en un paramètre λ (cf. Remarque III.2.12) mais il n'y aurait pas de difficulté majeure supplémentaire à considérer le cas général.

Proposition III.3.1.

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ un champ de vecteurs dépendant du temps. Supposons que X soit localement lipschitzien en la seconde variable de sorte que le théorème III.4.5 s'applique. Soient $(\tau_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$ et α_1 et α_2 , définies respectivement sur des intervalles ouverts J_1 et J_2 contenus dans I et contenant τ_0 , des courbes intégrales de X ayant même condition initiale (τ_0, x_0) . Alors elles coïncident sur $J_1 \cap J_2$.

Démonstration. L'ensemble A des points t de $J_1 \cap J_2$ tels que $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ est fermé dans $J_1 \cap J_2$ par continuité. Il est ouvert d'après le théorème III.4.5. Comme $J_1 \cap J_2$ est un intervalle ouvert non vide, donc connexe, on a $A = J_1 \cap J_2$. \square

Remarque III.3.2. Quand le champ de vecteur X ne dépend pas du temps, on prend bien sûr $I = \mathbb{R}$ dans la proposition III.3.1.

Définition III.3.3.

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow E$ un champ de vecteurs dépendant du temps. Supposons que X soit localement lipschitzien en la seconde variable. Soit $(\tau_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$. Définissons $J_{\tau_0}(x_0)$ comme l'union de tous les intervalles ouverts J contenant τ_0 tels qu'il existe une courbe intégrale $\alpha : J \rightarrow \mathcal{U}$ de condition initiale (τ_0, x_0) . La proposition montre qu'il existe une unique courbe intégrale α_{τ_0, x_0} de condition initiale (τ_0, x_0) définie sur $J_{\tau_0}(x_0)$. On appelle cette courbe intégrale la **courbe intégrale maximale** de X de condition initiale (τ_0, x_0) .

Ceci permet de définir le flot global de X .

Définition III.3.4.

Posons

$$\mathcal{D} = \{(\tau_0, t, x_0) \in I \times I \times \mathcal{U} \mid t \in J_{\tau_0}(x_0)\}.$$

L'application

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}, \quad F(\tau_0, t, x_0) = \alpha_{\tau_0, x_0}(t)$$

où α_{τ_0, x_0} est la courbe intégrale maximale de X de condition initiale (τ_0, x_0) , définie sur $J_{\tau_0}(x_0)$, est appelée **flot global** de X , et \mathcal{D} est son domaine de définition.

Pour tout $\tau_0 \in I$, on pose

$$\mathcal{D}_{\tau_0} = \{(t, x_0) \in I \times \mathcal{U} \mid t \in J_{\tau_0}(x_0)\}.$$

Dans le cas où le champ de vecteurs X est indépendant du temps, on peut simplifier les notations : on prend dans ce cas $I = \mathbb{R}$, et l'on fixe $\tau_0 = 0$. On note alors simplement $J(x_0)$ pour $J_0(x_0)$, $F(t, x_0)$ pour $F(0, t, x_0)$, etc... Énonçons maintenant une propriété importante du flot dans ce cas. Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $c \in \mathbb{R}$, on note $I + c$ l'intervalle $\{t \in \mathbb{R}; t - c \in I\}$.

Théorème III.3.5.

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $X : \mathcal{U} \rightarrow E$ un champ de vecteurs qui ne dépend pas du temps et lipschitzien. Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et α la courbe intégrale maximale de condition initiale x_0 définie sur l'intervalle $J(x_0)$. Soit $t_1 \in J(x_0)$. Alors la courbe intégrale

$$\beta : J(x_0) - t_1 \rightarrow \mathcal{U}, \quad t \mapsto \beta(t) = \alpha(t + t_1)$$

est la courbe intégrale maximale de X de condition initiale $x_1 = \alpha(t_1)$.

Remarque III.3.6. Reformulons le théorème III.3.5, en posant pour tout $(t, x) \in \mathcal{D}_0$,

$$F_t \cdot x = \alpha_x(t) = F(t, x).$$

où α_x la courbe intégrale maximale de X de condition initiale x . On a alors, lorsque (t, x) et $(s, F_t \cdot x)$ sont dans \mathcal{D}_0 ,

$$(III.3.1) \quad F_s \cdot (F_t \cdot x) = F_{t+s} \cdot x.$$

Si $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{U}$, F_t est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $t \mapsto F_t$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe des bijections de \mathcal{U} .

En général, lorsque le champ de vecteurs $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow E$ dépend du temps, on a le résultat plus général suivant :

Théorème III.3.7.

Soit $(t_0, x) \in I \times \mathcal{U}$. Supposons que s et $s + t$ soient dans $J_{t_0}(x)$. On a alors

$$F(t_0, s + t, x) = F(s, s + t, F(t_0, s, x)).$$

Démonstration. Les applications $t \mapsto F(t_0, s + t, x)$ et $t \mapsto F(s, s + t, F(t_0, s, x))$ vérifient la même équation différentielle avec même condition initiale $(0, F(t_0, s, x))$. \square

Théorème III.3.8.

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow E$ un champ de vecteurs dépendant du temps. Supposons que X soit localement lipschitzien en la seconde variable. Alors :

- a. \mathcal{D} est un ouvert de $I \times I \times \mathcal{U}$.
- b. Si X est de classe \mathcal{C}^p , F est de classe \mathcal{C}^p sur \mathcal{D} .

Démonstration. Soit $(\tau_0, t, x_0) \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire $t \in J_{\tau_0}(x_0)$. Nous voulons montrer qu'il existe un voisinage de (τ_0, t, x_0) dans $I \times I \times \mathcal{U}$ inclus dans \mathcal{D} où F est de classe \mathcal{C}^p .

Introduisons l'ensemble A des $s \in I$ tels qu'il existe un ouvert \mathcal{O} de $I \times I$ contenant (τ_0, s) et un voisinage ouvert \mathcal{U}' de x_0 dans \mathcal{U} vérifiant

- (i) $\mathcal{O} \times \mathcal{U}' \subset \mathcal{D}$.
- (ii) F est de classe \mathcal{C}^p sur $\mathcal{O} \times \mathcal{U}'$.

Il s'agit donc de montrer que pour tout $t \in J_{\tau_0}(x_0)$, on a $t \in A$.

Posons

$$Q_{\tau_0, x_0} = \{t \in J_{\tau_0}(x_0) \cap [\tau_0, +\infty[; [\tau_0; t] \subset A\}.$$

Nous voulons établir que $Q_{\tau_0, x_0} = J_{\tau_0}(x_0) \cap [\tau_0, +\infty[$.

Remarquons que le théorème d'existence d'un flot local $(\mathcal{E}(J, \epsilon), \mathcal{U}', F)$ en (τ_0, x_0) montre que $\mathcal{E}(J, \epsilon) \times \mathcal{U}'$ est un ouvert contenu dans \mathcal{D} et contenant (τ_0, τ_0) , et donc $\tau_0 \in Q_{\tau_0, x_0}$; en particulier Q_{τ_0, x_0} est non vide. On voit donc que Q_{τ_0, x_0} est un intervalle commençant en τ_0 . Soit b sa borne supérieure (éventuellement $+\infty$). Si $b = +\infty$, a fortiori la borne supérieure de $J_{\tau_0}(x_0)$ est aussi $+\infty$. Supposons b fini. Montrons que b est aussi la borne supérieure de $J_{\tau_0}(x_0)$. En effet, dans le cas contraire, $b \in J_{\tau_0}(x_0)$. Il existe alors un

flot local $(J_1, 2\epsilon_1, \mathcal{U}_1, F)$ en $(b, x_1 = F(\tau_0, b, x_0))$. Il existe η tel que si $t_2 \in]b - \eta; b[$, alors $x_2 = F(\tau_0, t_2, x_0) \in \mathcal{U}_1$ et $t_2 \in J_1$ donc $t \mapsto F(t_2, t, x_2)$ est défini sur $]t_2 - 2\epsilon_1, t_2 + 2\epsilon_1[$. Prenons t_2 dans l'intervalle $] \max(b - \epsilon_1, b - \eta); b[$.

On a alors $t_2 \in Q_{\tau_0, x_0}$ et il existe un ouvert \mathcal{O}_2 de $I \times I$ contenant (τ_0, t_2) et un ouvert \mathcal{U}_2 de \mathcal{U} contenant x_0 tels que $\mathcal{O}_2 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{D}$ et F est de classe \mathcal{C}^p sur $\mathcal{O}_2 \times \mathcal{U}_2$.

Comme $x_2 = F(\tau_0, t_2, x_0) \in \mathcal{U}_1$, et que $(t_0, t, x) \mapsto F(t_0, t, x)$ est continue, en restreignant au besoin \mathcal{O}_2 et \mathcal{U}_2 , on peut supposer que $(t, F(t_0, t, x)) \in J_1 \times \mathcal{U}_1$ pour tout $(t_0, t, x) \in \mathcal{O}_2 \times \mathcal{U}_2$. Il existe une courbe intégrale de condition initiale $(t, F(t_0, t, x))$ définie sur $]t - 2\epsilon_1; t + 2\epsilon_1[$ donc $s \mapsto F(t, t + s, F(t_0, t, x))$ est défini sur $] - 2\epsilon_1, 2\epsilon_1[$. Or d'après le théorème III.3.7, $F(t_0, t + s, x) = F(t, t + s, F(t_0, t, x))$ le membre de droite étant défini pour $(t_0, t, x, s) \in \mathcal{O}_2 \times \mathcal{U}_2 \times] - 2\epsilon_1, 2\epsilon_1[$ et est de classe \mathcal{C}^p sur cet ouvert. Soit t_3 dans $[b, b + \epsilon_1[$. Comme $t_3 \in [b, b + \epsilon_1[$ et $t_2 \in]b - \epsilon_1, b[$, on a $|t_3 - t_2| < 2\epsilon_1$, et donc

$$(\tau_0, t_3) \in \mathcal{O}_3 := \{(t_0, t + s), (t_0, t) \in \mathcal{O}_2, s \in] - 2\epsilon_1, 2\epsilon_1[\}.$$

Or \mathcal{O}_3 est un ouvert contenant (τ_0, t_3) , et l'on a donc établi que $(t_0, t, x) \mapsto F(t_0, t, x)$ est défini et de classe \mathcal{C}^p sur $\mathcal{O}_3 \times \mathcal{U}_2$, c'est-à-dire $t_3 \in A$. Il en résulte que $[b; t_2 + \epsilon_1[\subset Q_{\tau_0, x_0}$, ce qui contredit la définition de b . Donc $b = \sup J(x_0)$.

On raisonne de même avec

$$P_{\tau_0, x_0} = \{t \in J(x_0) \cap] - \infty, \tau_0[\mid [t; \tau_0] \subset A\}$$

et les bornes inférieures, pour aboutir à la conclusion que $Q_{\tau_0, x_0} \cup P_{\tau_0, x_0} = J_{\tau_0}(x_0)$. Le théorème est conséquence immédiate de ce résultat. \square

III.3.1 Un critère de temps de vie infini (lemme des bouts)

Si une courbe intégrale d'un champ de vecteurs sur un ouvert \mathcal{U} ne dépendant pas du temps n'a pas un temps de vie infini, c'est que cette courbe ne reste dans aucun compact de \mathcal{U} (la solution « explose » lorsque on s'approche des bornes de l'intervalle de définition de cette courbe intégrale).

Théorème III.3.9.

Soit \mathcal{U} un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $X : \mathcal{U} \rightarrow E$ un champ de vecteurs qui ne dépend pas du temps et lipschitzien. Soit $(\tau_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ et soit α_{τ_0, x_0} la courbe intégrale maximale de condition initiale (τ_0, x_0) , définie sur l'intervalle $J_{\tau_0}(x_0)$. Soit b la borne supérieure de $J_{\tau_0}(x_0)$ et supposons que $\alpha_{\tau_0, x_0}([\tau_0, b[)$ reste dans une partie compacte K de \mathcal{U} . Alors $b = +\infty$. On a un énoncé analogue avec la borne inférieure de $J_{\tau_0}(x_0)$

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe un flot local en $(0, x)$, et donc un intervalle J ouvert contenant 0, un voisinage ouvert \mathcal{U}_x de x dans \mathcal{U} tels que pour tout $y \in \mathcal{U}_x$, il existe une unique courbe intégrale α_y définie sur J de condition initiale $(0, y)$. La partie compacte K est recouverte par les ouverts \mathcal{U}_x , et par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{x_i}$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $] - 2\epsilon; 2\epsilon[$ soit inclus dans tous les $J_0(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Ainsi, pour tout y dans K , il existe une courbe intégrale α_y définie sur $] - 2\epsilon; 2\epsilon[$ de condition initiale $(0, y)$, autrement dit $] - 2\epsilon; 2\epsilon[\subset J_0(y)$.

Soit $b = \sup J_{\tau_0}(x_0)$ comme dans l'énoncé et supposons $b < +\infty$. Alors $b - \epsilon \in J_{\tau_0}(x_0)$. Considérons la courbe intégrale β de condition initiale $(0, y_0) = \alpha_{\tau_0, x_0}(b - \epsilon)$. Par hypothèse, $y_0 \in K$, et donc β définie au moins sur $] -2\epsilon; 2\epsilon[$ et $t \mapsto \beta(t + b - \epsilon)$ est une courbe intégrale définie au moins sur $]b - 3\epsilon; b + \epsilon[$ qui coïncide avec α_{τ_0, x_0} sur $]b - 3\epsilon; b[$ car elles ont même valeur en $b - \epsilon$. On peut alors prolonger α_{τ_0, x_0} au-delà de b , ce qui est contradictoire avec la définition de b . \square

III.4 Equations différentielles sur les sous-variétés

III.4.1 Champs tangents à une sous-variété

Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^N . Soit $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs dépendant du temps, vérifiant les conditions du théorème III.2.11, où \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant \mathcal{S} et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0. Supposons que pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \mathcal{S}$, $X(t, x) \in T_x \mathcal{S}$. Alors il est clair intuitivement que les courbes intégrales de X de condition initiale dans \mathcal{S} vont rester dans \mathcal{S} pour t suffisamment petit. Si \mathcal{S} est fermée, les courbes intégrales ne peuvent en sortir, comme le montre le résultat suivant ;

Proposition III.4.1.

Soit \mathcal{S} une sous-variété fermée de \mathbb{R}^N et $X : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs dépendant du temps, vérifiant les conditions du théorème III.2.11, où \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant \mathcal{S} et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0. Supposons que pour tout $t \in I$, pour tout $x \in \mathcal{S}$, $X(t, x) \in T_x \mathcal{S}$. Soit γ une courbe intégrale de X définie sur un intervalle $]a; b[$ contenant 0, telle que $\gamma(0) \in \mathcal{S}$, alors pour tout $t \in]a; b[$, $\gamma(t) \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Soit $\tau = \sup\{t \in [0; b[\mid \gamma(t) \in \mathcal{S}\}$. Supposons $\tau < b$. Comme \mathcal{S} est fermée, $\gamma(\tau) \in \mathcal{S}$. Soit Φ une carte locale en $\gamma(\tau)$, comme dans la définition II.5.1 i.e.

$$\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$$

où \mathcal{V} est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant $\gamma(\tau)$, $\mathcal{W} = \Phi(\mathcal{V})$ est un ouvert de \mathbb{R}^N et

$$\Phi : \mathcal{V} \cap \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{W}.$$

Quitte à restreindre l'ouvert \mathcal{V} , on le suppose inclus dans \mathcal{U} . Soit Y le champ de vecteurs (dépendant du temps) sur \mathcal{W} défini par

$$Y(t, \Phi(x)) = d\Phi_x(X(t, x)), \quad (x \in \mathcal{V}).$$

La courbe $\sigma(t) = \Phi(\gamma(t))$ vérifie

$$(III.4.1) \quad \sigma'(t) = d\Phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = d\Phi_{\gamma(t)}(X(t, \gamma(t))) = Y(t, \sigma(t))$$

et $\sigma(\tau) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Si $z \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap \mathcal{W}$, alors $Y(t, z) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Posons $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{N-m}$. L'équation (III.4.1) s'écrit alors

$$(III.4.2) \quad \begin{cases} x'(t) = A(t, (x(t), y(t))) \\ y'(t) = B(t, (x(t), y(t))) \end{cases}$$

où $A(t, (x, y))$ (resp. $B(t, (x, y))$) est la projection de $Y(t, (x, y))$ sur \mathbb{R}^m (resp. \mathbb{R}^{N-m}). On pose $x(\tau) = x_0$. On a $y(\tau) = 0$. Soit x la solution de

$$x'(t) = A(t, x(t), 0), \quad x(\tau) = x_0$$

dont l'existence et l'unicité sur un certain intervalle ouvert contenant τ est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on constate que $(x(t), 0)$ est solution de (III.4.2), et que, quitte à restreindre l'intervalle de définition, c'est la seule d'après le même théorème. On en conclut que y reste nul tant qu'il est défini, et donc $\gamma(t) = \Phi^{-1}(\sigma(t)) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ pour tout t dans un petit intervalle autour de τ . Ceci contredit la maximalité de τ , et ainsi $\tau = b$ et $\gamma(t) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in [0; b[$. On raisonne de même pour montrer que $\gamma(t) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in]a; 0]$. \square

Exemples III.4.2.

1. Avec les notations ci-dessus, si X est tel que $X(t, x)$ est toujours orthogonal à x , alors $\gamma(t)$ reste sur une sphère.
2. Soit $H(q, p)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Posons $X_H = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$. Comme

$$dH_{(q,p)}(X_H(q, p)) = 0,$$

X_H ceci est un champ de vecteurs tangents aux hypersurfaces $H(q, p) = c$ (on suppose que H est de classe \mathcal{C}^1 et que c est une valeur régulière de H , de sorte que l'équation $H(q, p) = c$ définit bien une sous-variété). En mécanique classique, H est le hamiltonien d'un système, q étant la position et p l'impulsion et le résultat nous dit que l'énergie est conservée au cours du temps.

3. L'équation différentielle

$$M'(t) = \Omega(t) \wedge M(t),$$

où Ω et M sont dans \mathbb{R}^3 , décrit le mouvement libre d'un solide de moment cinétique M et de moment d'inertie Ω . On a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|M(t)\|^2 \right) = \langle M'(t), M(t) \rangle = \langle \Omega(t) \wedge M(t), M(t) \rangle = 0.$$

On en déduit que la norme du moment cinétique est préservée.

On aimerait maintenant obtenir un énoncé « intrinsèque » à la sous-variété \mathcal{S} . Pour cela, introduisons les notions de champ de vecteurs tangents à une sous-variété dépendant du temps, de courbe intégrale sur une sous-variété et de flot sur une sous-variété.

Définition III.4.3.

On appelle **champ de vecteurs tangents dépendant du temps** sur une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N une application continue

$$X : I \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

où I est un intervalle ouvert et où pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \mathcal{S}$, $X(t, x) \in T_x \mathcal{S}$. On appelle **courbe intégrale** de classe \mathcal{C}^p , du champ de vecteurs X une courbe paramétrée $\alpha : J \rightarrow \mathcal{S}$ de classe \mathcal{C}^p définie sur un intervalle ouvert J de \mathbb{R} contenu dans I , telle que pour tout $t \in J$, $\alpha'(t) = X(t, \alpha(t))$. Cette courbe intégrale est dite de **condition initiale** $(t_0, x) \in I \times \mathcal{S}$ si $\alpha(t_0) = x$.

On appelle **flot local** de X en $(\tau_0, x_0) \in I \times \mathcal{S}$ la donnée d'un voisinage ouvert \mathcal{U} de x_0 dans \mathcal{S} , d'un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant τ_0 , d'un $\epsilon > 0$ tels que pour tout $t_0 \in J$, pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe une unique courbe intégrale $\alpha_{t_0, x}$ de X de condition initiale (t_0, x) définie sur $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. On note alors

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(J, \epsilon) = \{(t_0, t) \in J \times \mathbb{R} \mid t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\}$$

et

$$F : \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (t_0, t, x) \mapsto \alpha_{t_0, x}(t).$$

On note $(\mathcal{E}(J, \epsilon), \mathcal{U}, F)$ ce flot local.

Remarque III.4.4. Comme dans la remarque III.2.6, un cas important est celui où le champ de vecteurs tangents X ne dépend pas du temps. Dans la définition ci-dessus, il n'y a alors pas la contrainte que l'intervalle J dans le domaine de définition du flot local soit contenu dans un intervalle prescrit I , ou en d'autres termes, on peut prendre $I = \mathbb{R}$.

On obtient alors le théorème d'existence et d'unicité locale suivant, en utilisant les paramétrages locaux pour se ramener au théorème III.2.11. Nous laissons les détails de la démonstration au lecteur qui pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition III.4.1.

Théorème III.4.5.

Soient $X : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs tangents dépendant du temps sur une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N et $(\tau_0, x_0) \in I \times \mathcal{S}$. Supposons que X soit localement lipschitzien en la seconde variable. Alors il existe un intervalle J ouvert contenant τ_0 , une constante $\epsilon > 0$ et un voisinage ouvert \mathcal{U} de x_0 dans \mathcal{S} définissant un flot local $(\mathcal{E}(J, \epsilon), \mathcal{U}, F)$ en (τ_0, x_0) . Si le champ de vecteurs tangents X est de classe \mathcal{C}^p , alors F aussi.

De plus, on a un énoncé d'unicité : soient $t_0 \in J$, $x \in \mathcal{U}$. Si $\gamma :]t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon'[\rightarrow \mathbb{R}^N$ avec $\epsilon' \leq \epsilon$ vérifie $\gamma'(t) = X(t, \gamma(t))$ et $\gamma(t_0) = x$, alors $\gamma(t) = \alpha_{t_0, x}(t) = F(t_0, t, x)$ pour tout $t \in]t_0 - \epsilon', t_0 + \epsilon'[$.

Remarque III.4.6. Comme un ouvert d'une sous-variété est une sous-variété, il n'y a pas lieu d'énoncer le théorème avec un ouvert de \mathcal{S} remplaçant \mathcal{S} . En revanche, la démonstration se ramène au théorème III.2.11 via les paramétrages locaux.

Soit $X : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs tangents dépendant du temps sur une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N . Supposons que X soit localement lipschitzien en la seconde variable. Soit $(\tau_0, x_0) \in I \times \mathcal{S}$. Comme dans les définitions III.3.3 et III.3.4, on peut définir $J_{\tau_0}(x_0)$ comme l'union de tous les intervalles ouverts J contenant τ_0 tels qu'il existe une courbe intégrale $\alpha : J \rightarrow \mathcal{U}$ de condition initiale (τ_0, x_0) . et montrer qu'il existe une unique courbe intégrale α_{τ_0, x_0} de condition initiale (τ_0, x_0) définie sur $J_{\tau_0}(x_0)$ (la courbe intégrale maximale de X de condition initiale (τ_0, x_0)). Ceci permet de définir le flot global de X .

Définition III.4.7.

Posons

$$\mathcal{D} = \{(\tau_0, t, x_0) \in I \times I \times \mathcal{S} \mid t \in J_{\tau_0}(x_0)\}.$$

L'application

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}, \quad F(\tau_0, t, x_0) = \alpha_{\tau_0, x_0}(t)$$

où α_{τ_0, x_0} est la courbe intégrale maximale de X de condition initiale (τ_0, x_0) , définie sur $J_{\tau_0}(0)$, est appelée **flot global** de X , et \mathcal{D} est son domaine de définition.

Pour tout $\tau_0 \in I$, on pose

$$\mathcal{D}_{\tau_0} = \{(t, x_0) \times I \times \mathcal{S} \mid t \in J_{\tau_0}(x_0)\}.$$

Dans le cas où le champ de vecteurs tangents X sur la sous-variété \mathcal{S} est indépendant du temps, on peut simplifier les notations : on prend dans ce cas $I = \mathbb{R}$, et l'on fixe $\tau_0 = 0$. On note alors simplement $J(x_0)$ pour $J_0(x_0)$, $F(t, x_0)$ pour $F(0, t, x_0)$, etc...

Soit $(t_0, x) \in I \times \mathcal{S}$. Supposons que s et $s + t$ soient dans $J_{t_0}(x)$. La formule de composition

$$F(t_0, s + t, x) = F(s, s + t, F(t_0, s, x)).$$

du théorème III.3.7 est alors encore valide dans ce cadre. Lorsque le champs de vecteurs tangents X ne dépend pas du temps, on fixe les conditions initiales en temps à $\tau_0 = 0$, et cette formule devient comme en III.3.1 lorsque (t, x) et $(s, F_t \cdot x)$ sont dans \mathcal{D}_0 ,

$$(III.4.3) \quad F_s \cdot (F_t \cdot x) = F_{t+s} \cdot x.$$

On obtient aussi bien sûr aussi l'analogie du théorème III.3.8.

Théorème III.4.8.

Soit $X : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs tangents dépendant du temps sur une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N . Supposons que X soit localement lipschitzien en la seconde variable. Alors :

- a. \mathcal{D} est un ouvert de $I \times I \times \mathcal{S}$.
- b. Si X est de classe \mathcal{C}^p , F est de classe \mathcal{C}^p sur \mathcal{D} .

Lorsque \mathcal{S} est une sous-variété compacte de \mathbb{R}^N , les courbes intégrales d'un champ de vecteurs tangents sont définies sur \mathbb{R} tout entier grâce au théorème III.3.9.

Théorème III.4.9.

Soit X un champ de vecteurs tangents qui ne dépend pas du temps et lipschitzien sur une sous-variété compacte \mathcal{S} de \mathbb{R}^N . Alors le domaine de définition de son flot global est

$$\mathcal{D}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{S}.$$

La formule (III.4.3) est donc valide quels que soient $t, s \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{S}$. D'autre part, si X est de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_t : x \mapsto F_t \cdot x = F(t, x)$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^r de \mathcal{S} d'inverse F_{-t} . En effet F_0 est l'identité de \mathcal{S} et les F_t sont de classe \mathcal{C}^1 car le flot global F l'est. Nous obtenons donc le

Corollaire III.4.10.

Supposons X est de classe \mathcal{C}^r . Notons $\text{Diff}_r(\mathcal{S})$ le groupe des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^r , de \mathcal{S} . L'application $t \mapsto F_t$ est un morphisme de groupes de \mathbb{R} dans $\text{Diff}_r(\mathcal{S})$.

III.5 Exercices

Exercice III.5.1. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre sur \mathbb{K} des matrices carrés $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , munie de la norme $\|X\| = \text{Tr}({}^tXX)$. Soit X un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'exponentielle de X , notée $\exp X$, désigne la somme de la série (normalement convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

1. Montrer les propriétés suivantes de l'exponentielle. Quels que soient X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quels que soient t, s dans \mathbb{K} :

- (i) Si X et Y commutent $\exp X \exp Y = \exp(X + Y)$,
- (ii) l'exponentielle est à valeurs dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ et

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X),$$

- (iii) $\exp(sX) \exp(tX) = \exp((s + t)X)$,
- (iv) L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tX)$ est l'unique solution différentiable de l'équation différentielle du premier ordre

$$a'(t) = X a(t)$$

avec la condition initiale $a(0) = I_n$.

Remarque. On peut reformuler (iii) en disant que $t \mapsto \exp tX$ est un morphisme de groupes (continu) de \mathbb{R} dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. On appelle un tel morphisme un *sous-groupe à un paramètre* de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$.

2. Montrer qu'un morphisme de groupe continu $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ est de classe \mathcal{C}^∞ . En déduire que tout sous-groupe à un paramètre de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ est de la forme $t \mapsto \exp tX$ pour un certain X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra commencer par remarquer que pour tout $s, x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+s} \phi(u) du = \phi(x) \int_0^s \phi(u) du.$$

3. Montrer que l'application \exp de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même est de classe \mathcal{C}^∞ . On pourra appliquer les théorèmes du cours sur le flot du champ de vecteur (ne dépendant pas du temps) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{Y}(A, B) = (BA, 0).$$

4. Calculer la différentielle de \exp en 0. En déduire qu'il existe un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un voisinage \mathcal{V} de Id dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ tels que \exp réalise un difféomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{V} . On note Log son inverse.
5. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}' de Id dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ tel que le seul sous-groupe de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ inclus dans \mathcal{V}' soit le sous-groupe trivial $\{I_n\}$.
Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. On pose

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exp tX \in G, (\forall t \in \mathbb{R})\}.$$

6. Montrer que \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

7. Montrer que si G est discret dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$, alors $\mathfrak{g} = \{0\}$.
8. On suppose dans la suite G non discret, et connexe (et toujours fermé). Soit $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $h_k \neq I_n$, une suite d'éléments de G tendant vers I_n . Soit h une valeur d'adhérence de la suite $\frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}$ (cette suite est bien définie pour k assez grand, et est à valeurs dans la sphère unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Montrer que $h \in \mathfrak{g}$. On pourra commencer par remarquer que si $\frac{t}{\|\text{Log}(h_k)\|} \in \mathbb{Z}$, alors $\exp\left(t \frac{\text{Log}(h_k)}{\|\text{Log}(h_k)\|}\right) \in G$.
9. Soit E un supplémentaire de \mathfrak{g} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{W} de 0 dans E tel que $(\exp \mathcal{W}) \cap G = \{\text{Id}\}$.

10. On définit

$$\Phi : \mathfrak{g} \times E, \quad (X, Y) \mapsto \exp X \exp Y.$$

Montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{U}_0 de 0 dans \mathfrak{g} , un voisinage \mathcal{W}_0 de 0 dans E et un voisinage \mathcal{V}_0 de I_n dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ tels que Φ réalise un difféomorphisme entre $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{W}_0$ et \mathcal{V}_0 . Montrer que l'on a alors $\mathcal{V}_0 \cap G = \exp \mathcal{U}_0$. En déduire que localement, au voisinage de I_n , G est une sous-variété.

11. Montrer que G est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp \mathfrak{g}$ engendre G . Montrer que l'espace tangent de G en Id est \mathfrak{g} .
12. Expliciter \mathfrak{g} lorsque $G = \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(n)$.

Exercice III.5.2. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. On se propose de montrer que l'on a alors

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[B, A]\right) = \exp B \cdot \exp A \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[A, B]\right).$$

1. Posons

$$\alpha(t) = \exp(-t(A + B)) \cdot \exp(tB) \cdot \exp(tA)$$

Montrer que $\alpha'(t) = \exp(-t(A + B)) \cdot \phi(t) \cdot \exp(tB) \cdot \exp(tA)$, où

$$\phi(t) = -A + \exp(tB) \cdot \exp(tB) \cdot A \cdot \exp(-tB).$$

2. Calculer $\phi'(t)$ et en déduire que $\alpha(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}[B, A]\right)$, puis le résultat cherché.

Exercice III.5.3. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^N contenant 0 et soient X_1, \dots, X_N des champs de vecteurs sur \mathcal{U} de classe \mathcal{C}^∞ . Pour tout $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$X_a(x) = \sum_{i=1}^N a_i X_i(x).$$

Ceci définit un champ de vecteurs sur \mathcal{U} . On note $t \mapsto \alpha_a(t)$ la courbe intégrale du champ de vecteurs X_a qui passe par 0 à $t = 0$ et l'on définit ϕ par $\phi(t, a) = \alpha_a(t)$.

1. Montrer que l'on a la relation d'homogénéité,

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}), \quad \phi(\lambda t, a) = \phi(t, \lambda a).$$

ceci pour tout t suffisamment petit de sorte que les deux termes soient définis.

2. En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $\|a\| < \eta$, alors la courbe intégrale α_a est définie sur $[-1; 1]$.

3. Pour tout $a \in B(0, \eta)$, on pose

$$\Phi(a) = \alpha_a(1) = \phi(1, a).$$

On suppose que les vecteurs $X_1(0), \dots, X_N(0)$ forment une base de \mathbb{R}^N . Montrer que Φ est un difféomorphisme local en 0.

Exercice III.5.4. Soit $t \mapsto A(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $t \mapsto \alpha(t)$, $I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une solution de l'équation différentielle

$$\alpha'(t) = A(t) \cdot \alpha(t).$$

On suppose que pour tout t , la matrice $A(t)$ est antisymétrique. Montrer que si $\alpha(t_0)$ est une matrice orthogonale pour un certain t_0 , alors $\alpha(t)$ est orthogonale pour tout t .

Exercice III.5.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et considérons l'équation différentielle

$$\alpha'(t) = -\alpha(t) \cdot A \cdot \alpha(t).$$

Montrer qu'il existe un intervalle J de \mathbb{R} contenant $[-\|A\|^{-1}; \|A\|^{-1}]$ tel qu'il existe une solution de classe \mathcal{C}^∞ de l'équation différentielle ci-dessus avec $\alpha(0) = I_n$, et que sur l'intervalle $[-\|A\|^{-1}; \|A\|^{-1}]$, on a $\alpha(t) = (I_n + tA)^{-1}$.

Exercice III.5.6. 1. Calculer la différentielle de $A \mapsto \det(A)$ d'abord pour $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ puis plus généralement pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. En déduire que si $t \mapsto A(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\frac{d}{dt} [t \mapsto \det(A(t))] = \det(A(t)) \operatorname{Tr}(A(t)^{-1}A'(t))$$

3. Considérons un champ de vecteurs \mathcal{C}^1 indépendant du temps sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n . Soit F son flot, que l'on suppose défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$. On pose $F_t(x) = F(t, x)$. On cherche une condition pour que les difféomorphismes F_t de \mathcal{U} préservent le volume. Cette propriété est équivalente à $g_x(t) = \det(d(F_t)_x) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{U}$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante est $\operatorname{Tr} dX_x = 0$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

Exercice III.5.7. Soit X un champ de vecteurs tangents de classe \mathcal{C}^∞ sur une sous-variété \mathcal{S} de \mathbb{R}^N . Supposons que $X(p_0) \neq 0$ en un point p_0 de \mathcal{S} . Montrer qu'il existe un paramétrage local $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ en p_0 tel que

$$X(\mathbf{x}(q)) = \mathbf{x}_{u_1}(q), \quad (q \in \mathcal{U}).$$

Exercice III.5.8. Soit $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un difféomorphisme entre deux sous-variétés. Soit X un champ de vecteurs tangents de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{S} et $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ son flot. Montrer que le flot du champ de vecteurs ϕ_*X sur \mathcal{S}' est donné par

$$\phi \circ F \circ (\operatorname{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1}) : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{S}',$$

où

$$\mathcal{D}' = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}' \mid (t, \phi^{-1}(p)) \in \mathcal{D}\}.$$

Exercice III.5.9. La surface d'un fluide unidimensionnel est décrite par une fonction $u(t, x)$ qui est la hauteur de fluide au temps t et au point $x \in \mathbb{R}$. Dans une limite de petite amplitude, la dynamique de la vague est régie par l'équation de Korteweg-de-Vries (1895) :

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx}u + u^p) = 0, \quad p \in \{2, 3\}$$

où la valeur de p dépend du fluide. On cherche des solutions correspondant à la propagation sans déformation d'une vague

$$u(t, x) = Q(x - t).$$

1) Montrez qu'une condition suffisante est que le profil Q vérifie le système dynamique

$$Q'' - Q + Q^p = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) On se propose de décrire toutes les solutions de

$$(*) \quad Q'' - Q + Q^p = 0, \quad Q(0) = a, \quad Q'(0) = b, \quad Q = Q(t)$$

pour $p \in \{2, 3\}$. Expliquez pourquoi il suffit d'étudier les solutions pour $t > 0$ et montrez que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale sur $[0, T)$, $T = T(a, b)$.

3) Décrire toutes les solutions stationnaires en temps (points d'arrêt du système dynamique).

4) Montrez que l'énergie mécanique totale

$$E(t) = \frac{1}{2}(Q')^2 - \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{p+1}Q^{p+1}$$

est conservée le long des trajectoires.

5) On suppose $p = 3$. Tracez dans le plan $(Q, Q') = (x, y)$ les lignes de niveau de

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - f(x), \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{p+1}x^{p+1}.$$

En déduire que toutes les solutions sont globales en temps.

6) Montrez que les trajectoires sont périodiques en temps pour $E \neq 0$. On pourra tracer le "portrait de phase", c'est-à-dire tracer les trajectoires dans le plan (Q, Q') en indiquant le sens de parcours.

7) Montrez que la solution pour $E = 0$ est "homocline" i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (Q(t), Q'(t)) = 0.$$

Calculez $Q(t)$ (on pourra introduire le changement de variable $y = \frac{1}{Q^{\frac{p-1}{2}}}$).

8) Reprendre l'étude pour $p = 2$. On montrera en particulier que toutes les solutions avec $E > 0$ explosent en temps fini.

9) Discuter la stabilité de la solution homocline.

Chapitre IV

Calcul des variations. Equation d'Euler-Lagrange

Dans ce chapitre, nous donnons sous forme d'exercice quelques éléments de calcul des variations. Nous établissons l'équation d'Euler-Lagrange, puis des principes de conservation de certaines quantités lorsque le Lagrangien est invariant par un sous-groupe à un paramètre de difféomorphismes (théorème de Noether). Sous une hypothèse de régularité du Lagrangien, on réécrit localement l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme d'une équation différentielle ordinaire satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On en déduit l'existence et l'unicité locale d'une solution.

Soit V un espace de Hilbert de dimension finie. Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1]; V)$, muni de la norme

$$\|\gamma\|_E = \sup_{t \in [0; 1]} \|\gamma(t)\| + \sup_{t \in [0; 1]} \|\gamma'(t)\|.$$

Soit I un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$ et

$$L : I \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u, q, v) \mapsto L(u, q, v)$$

une application de classe \mathcal{C}^2 . (On a pris des noms de variables proches de celles des physiciens ; on peut penser à la variable q comme à une position, et à la variable v comme une vitesse. Les physiciens, qui n'ont peur de rien, utilisent même la notation \dot{q} pour cette variable. La variable u est elle dans cet esprit une variable de temps, la variable t étant réservée dans ce problème à la fonction γ . On ne saurait trop conseiller de choisir des noms de variables différents pour toutes les fonctions intervenant dans un problème, c'est peut-être lourd mais c'est prudent).

On fixe a, b dans V et l'on note $E_{a,b}$ le sous-espace des $\gamma \in E$ tel que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ (espaces des courbes à extrémités fixées a et b dans V).

1. Rappeler pourquoi $E_{a,b}$ est un espace complet. Montrer que c'est un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $E_{0,0}$. Passer en revue rapidement le cours pour se convaincre que le cadre naturel du calcul différentiel est en fait naturellement celui des espaces affines associés à des espaces vectoriels normés.

On définit

$$\hat{L} : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{L}(\gamma) = \int_0^1 L(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt$$

2. Montrer que \hat{L} est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $d\hat{L}_\gamma$ pour $\gamma \in E$.

3. Soit $B : [0; 1] \rightarrow V^*$ une fonction continue telle que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^1([0; 1]; V)$ vérifiant $h(0) = h(1) = 0$, on a

$$\int_0^1 B(t) \cdot h'(t) dt = 0.$$

Montrer que B est constante (Lemme de du Bois-Raymond).

4. Soit $A, B : [0; 1] \rightarrow V^*$ des fonctions continues telles que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^1([0; 1]; V)$ vérifiant $h(0) = h(1) = 0$, on a

$$\int_0^1 (A(t) \cdot h(t) + B(t) \cdot h'(t)) dt = 0.$$

Montrer que B est différentiable et $B' = A$.

5. Montrer que si γ est un point critique de la restriction de \hat{L} à $E_{a,b}$, alors on a pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\frac{d}{dt} \left[t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \right] = \frac{\partial L}{\partial q}(t, \gamma(t), \gamma'(t)).$$

6. A quel moment a-t-on utilisé l'hypothèse que V est de dimension finie ?
7. Montrer que si L ne dépend pas de la première variable u , alors la fonction

$$H(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \gamma'(t)) \cdot \gamma'(t) - L(\gamma(t), \gamma'(t))$$

est constante.

Nous supposons dans ce problème que les solutions γ de l'équation d'Euler-Lagrange que nous considérons sont de classe \mathcal{C}^2 . Lorsque le Lagrangien est régulier (voir préambule de la question (14) pour la définition de cette notion), ceci est toujours le cas.

8. On suppose ici $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et de la norme qui en découle. On suppose que $L = T - U$, où T ne dépend que de v , $T(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2$ (on reconnaît l'énergie cinétique), et U ne dépend que de q (c'est un « potentiel »). Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange ($E.L$) est alors l'équation de Newton

$$\gamma''(t) = -\nabla U(\gamma(t)),$$

où ∇U désigne le gradient de U .

On voudrait tout d'abord reformuler les résultats du préambule dans le cas où le Lagrangien L n'est pas défini sur $I \times V \times V$, mais sur une partie de la forme $I \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, où \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 sont des ouverts de V . Par exemple, avec les notations de la première question, on voudrait autoriser un potentiel $U(q) = \frac{1}{\|q\|}$ défini seulement sur $V \setminus \{0\}$.

On veut donc imposer aux courbes $\gamma \in E$ de vérifier : pour tout $t \in [0; 1]$, $\gamma(t) \in \mathcal{U}_1$, $\gamma'(t) \in \mathcal{U}_2$ (les courbes restent confinées dans \mathcal{U}_1 , et leurs vecteurs tangents dans \mathcal{U}_2). Notons $E(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ (respectivement $E_{a,b}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$) l'ensemble des $\gamma \in E$ (respectivement $\gamma \in E_{a,b}$) vérifiant ces conditions. Commençons par une question préliminaire de topologie.

9. Soient K et \mathcal{U} respectivement un compact et un ouvert d'un espace métrique X (on note d la distance). On suppose $K \subset \mathcal{U}$. Pour tout $\epsilon > 0$, on note

$$K_\epsilon = \bigcup_{x \in K} B(x, \epsilon).$$

C'est l'ensemble des points à distance plus petite que ϵ de K . On veut montrer que pour ϵ assez petit, on a $K_\epsilon \subset \mathcal{U}$. Introduisons le complémentaire F de \mathcal{U} dans X . Montrer en raisonnant par l'absurde que l'inf de la fonction

$$d : K \times F \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

est strictement positif et conclure.

10. En déduire que $E(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ et $E_{a,b}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ sont ouverts respectivement dans E et $E_{a,b}$ que les résultats de l'exercice rappelés ci-dessus restent valides. On pourra fixer γ_0 dans l'un de ces espaces, et appliquer la question précédente aux compacts $K = \{\gamma_0(t) \mid t \in [0; 1]\}$ et $K' = \{\gamma'_0(t) \mid t \in [0; 1]\}$

On s'intéresse maintenant à savoir ce qu'il advient de l'équation d'Euler-Lagrange lorsqu'on effectue un changement de variables. Supposons donc que L soit défini sur $I \times \mathcal{U} \times V$ où \mathcal{U} est un ouvert de V , et soit $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ un difféomorphisme (au moins \mathcal{C}^2) d'un ouvert \mathcal{V} de V sur \mathcal{U} . Posons

$$L_1 : I \times \mathcal{V} \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, q_1, v_1) \mapsto L(u, \phi(q_1), d\phi_{q_1}(v_1)).$$

11. Montrer que si $\beta = \phi \circ \gamma$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange pour L , où $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathcal{V}$, alors γ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange pour L_1 .

Dans la suite, on suppose le Lagrangien L défini sur $I \times \mathcal{U} \times V$. Soit X un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{U} ne dépendant pas du temps. On note $(s, x) \mapsto F(s, x) = F_s(x)$ son flot, que l'on suppose défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$. Rappelons que pour tout $s \in \mathbb{R}$, F_s est un difféomorphisme de \mathcal{U} dans lui-même, et que $F_{s_1} \circ F_{s_2} = F_{s_1+s_2}$. On suppose que L est invariant sous l'action du groupe à un paramètre de difféomorphismes $(F_s)_{s \in \mathbb{R}}$, c'est-à-dire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $(u, q, v) \in I \times \mathcal{U} \times V$,

$$L(u, F_s(q), d(F_s)_q(v)) = L(u, q, v).$$

12. Différencier cette identité par rapport à s , et évaluer en $s = 0$.
13. Soit γ une courbe dans \mathcal{U} vérifiant l'équation d'Euler-Lagrange. En se servant de la question précédente, montrer que la fonction

$$t \mapsto Q(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial s}(s, \gamma(t)) \right]_{|s=0}$$

est constante.

Remarque. Ce résultat fondamental est le théorème de Noether : si le Lagrangien est invariant sous l'action d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes, on peut associer une quantité conservée. C'est par exemple le fondement de la physique des particules (modèle standard, etc). A titre d'exemple, les plus courageux pourront reprendre le Lagrangien de la première question dans le cas où $V = \mathbb{R}^3$ et où le potentiel U admet une

symétrie sphérique, $U(q) = \frac{1}{\|q\|}$ par exemple, et déduire de l'invariance du Lagrangien par rotation l'invariance du « moment cinétique ».

Nous revenons maintenant à l'équation d'Euler-Lagrange pour une courbe γ , et nous aimerions transformer celle-ci en une équation différentielle du second ordre vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour cela, il faut faire certaines hypothèses. Tout d'abord, on suppose le Lagrangien défini sur $I \times V \times V$ (pour simplifier les notations) et γ de classe \mathcal{C}^2 . Rappelons que pour tout $(u, q, v) \in I \times V \times V$, $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(u, q, v)$ est une forme bilinéaire symétrique sur V :

$$(\ell_1, \ell_2) \in V \times V \mapsto \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(u, q, v) \cdot (\ell_1, \ell_2).$$

On peut voir

$$\ell_1 \in V \mapsto \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(u, q, v) \cdot (\ell_1, \cdot)$$

comme une application linéaire de V à valeurs dans $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$. L'hypothèse supplémentaire que l'on fait dans la suite est que cette application linéaire est un isomorphisme de V sur $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$. On dit alors que le Lagrangien est *régulier*.

14. On pose

$$\Phi : I \times V \times V \rightarrow I \times V \times \mathcal{L}(V; \mathbb{R}), \quad (u, q, v) \mapsto (u, q, \frac{\partial L}{\partial v}(u, q, v)).$$

Montrer qu'en tout point (u_0, q_0, v_0) de $I \times V \times V$, $d\Phi_{(u_0, q_0, v_0)}$ est un isomorphisme. En déduire que si l'on pose $p = \frac{\partial L}{\partial v}(u, q, v) \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$, on peut localement autour de ce point (u_0, q_0, v_0) exprimer v comme une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $(u, q, p) \in I \times V \times \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$:

$$v = g(u, q, p).$$

15. En remplaçant (u, q, v) par $(t, \gamma(t), \gamma'(t))$ et p par $p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(t, \gamma(t), \gamma'(t))$, réécrire localement l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \gamma'(t) = g(t, \gamma(t), p(t)) \\ p'(t) = \frac{\partial L}{\partial q}(t, \gamma(t), g(t, \gamma(t), p(t))). \end{cases}$$

et que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites pour celui-ci.

16. En déduire que si on se donne $(t_0, q_0, v_0) \in]0; 1[\times V \times V$, il existe un intervalle ouvert $J \subset]0; 1[$ tel qu'il existe une unique courbe γ vérifiant l'équation d'Euler-Lagrange avec $\gamma(t_0) = q_0$ et $\gamma'(t_0) = v_0$.

Deuxième partie
Analyse complexe

Nous allons présenter la théorie des *fonctions holomorphes* qui sont des fonctions d'une variable complexe, « dérivables au sens complexe ». Comme on le verra rapidement, cette classe de fonctions coïncide avec celle des fonctions analytiques de la variable complexe, c'est-à-dire des fonctions développables en série entière au voisinage de tout point. Les fonctions holomorphes sont omniprésentes en mathématiques comme en physique (le lecteur intéressé pourra consulter à ce sujet [8, paragraphe 82]). L'une des raisons de leur présence en physique est que les *fonctions harmoniques*, c'est-à-dire les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont le Laplacien est nul, i.e. $\Delta f = 0$, sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, sont localement les parties réelles de fonctions holomorphes, et que les potentiels, qui apparaissent en physique, satisfont bien souvent cette propriété.

Au cours de son élaboration au dix-neuvième siècle (Gauss, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Poincaré), la théorie a conduit à plusieurs des innovations majeures de cette période ; citons le développement de la rigueur en analyse, de la topologie et de la théorie du potentiel. Elle fait aujourd'hui partie de la culture de base en mathématiques et entretient des liens profonds avec l'arithmétique, la topologie, la géométrie algébrique, la géométrie riemannienne, l'étude des équations aux dérivées partielles, etc.

Le résultat le plus important de la théorie, s'il faut en dégager un, est la « formule des résidus ». Cette formule est certainement l'une des plus belles des mathématiques. Son importance conceptuelle ne saurait être surestimée, mais elle revêt aussi un intérêt pratique considérable pour le calcul de certaines intégrales de fonctions à valeurs réelles de la variable réelle (par exemple des transformées de Fourier).

Nous n'avons recherché ni l'exhaustivité ni les hypothèses minimales dans les théorèmes. Par exemple, il est possible de définir les fonctions holomorphes comme les fonctions dérivables au sens complexe, sans faire d'hypothèse de continuité des dérivées et le théorème de Morera, fort utile pour des applications fines, affirme que cela ne change rien aux objets ainsi définis. On verra dans les cours de mathématiques ultérieurs (voir le cours de MAT 433 *Distributions, analyse de Fourier, EDP*) que l'on peut même s'affranchir totalement des hypothèses de régularité dans le cadre de la *théorie des distributions*. Le lecteur intéressé est encouragé à consulter l'abondante littérature [2], [1], [11], [7], [4] .

En ce qui concerne la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, qui ont des propriétés tout à fait surprenantes, le lecteur pourra consulter [9] et [6].

Chapitre V

Fonctions holomorphes

Notations. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note :

$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r ,

$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$ le disque fermé de centre z_0 et de rayon r ,

$D(z_0, r)^\times = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ le disque ouvert privé de son centre z_0 et de rayon r ,

$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$ le cercle de centre z_0 et de rayon r ,

$\Im m(z)$ et $\Re e(z)$ les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe z .

V.1 Conditions de Cauchy réelles. \mathbb{C} -dérivabilité

Considérons une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I non vide de \mathbb{R} . La définition de la dérivabilité en un point $x \in I$ de la fonction f est l'existence de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Remplaçons le corps de nombres réel par le corps des nombres complexes. Ce qui précède a toujours un sens, c'est-à-dire que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert non vide de \mathbb{C} , est une fonction continue, on dit que f est \mathbb{C} -dérivable, ou encore dérivable au sens complexe, en un point $z \in \Omega$ si

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(z+\omega) - f(z)}{\omega}$$

existe (dans \mathbb{C}). Si tel est le cas, on note $f'(z)$ cette limite, la *dérivée au sens complexe de f au point z* .

Définition V.1.1.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si elle est \mathbb{C} -dérivable en tout point de Ω et si $z \mapsto f'(z)$ est continue sur Ω . On note $\text{Hol}(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur \mathbb{C}) des fonctions holomorphes sur Ω .

Ainsi, les fonctions holomorphes sont les fonctions « de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe ». Identifions \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 grâce à l'application $z \mapsto (x, y)$ où

$$x = \Re e(z), \quad \text{et} \quad y = \Im m(z).$$

Autrement dit, $z = x + iy$. Ainsi, une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ comme ci-dessus peut être vue comme une fonction d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Notons aussi

$$f(z) = P(z) + iQ(z),$$

où $P(z) = \Re(f(z))$ et $Q(z) = \Im(f(z))$ et avec l'identification entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

c'est-à-dire $P(z) = f_1(x, y)$ et $Q(z) = f_2(x, y)$.

Rappelons que f est dite différentiable en un point (x, y) de Ω s'il existe une application linéaire $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que :

$$(V.1.1) \quad \|f(x+h, y+k) - f(x, y) - df_{(x,y)}(h, k)\| = o(\|(h, k)\|).$$

Ici, la norme est la norme euclidienne usuelle de \mathbb{R}^2 (mais toutes les normes sur \mathbb{R}^2 étant équivalentes, le choix d'une autre norme ne changerait pas la définition). Si (h, k) est de norme suffisamment petite, $(x+h, y+k)$ est bien dans Ω . De plus remarquons que (V.1.1) caractérise $df_{(x,y)}$, c'est-à-dire que l'application linéaire $df_{(x,y)}$ est bien définie, elle est appelée différentielle de f en (x, y) .

Dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , l'application linéaire $df_{(x,y)}$ est représentée par la matrice

$$(V.1.2) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

La fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 elle est différentiable en tout point de Ω et si les dérivées partielles $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ sont des fonctions continues sur Ω .

Reprenons l'identification entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 pour écrire $z = x + iy$, $\omega = h + ik$, et (V.1.1) sous la forme

$$(V.1.3) \quad |f(z+\omega) - f(z) - df_z(\omega)| = o(|\omega|).$$

On voit maintenant df_z comme une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Une question naturelle qui se pose alors est : à quelle condition sur df_z la fonction f est-elle \mathbb{C} -dérivable en z ?

Proposition V.1.2.

Avec les notations ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est différentiable au point z et df_z est \mathbb{C} -linéaire,
- (ii) f est \mathbb{C} -dérivable en z .

Démonstration. Une application \mathbb{C} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est donnée par la multiplication par un nombre complexe $\lambda = \alpha + i\beta$. Vue comme application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , c'est une similitude, dont la matrice dans la base canonique est

$$(V.1.4) \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire df_z est donc \mathbb{C} -linéaire si et seulement si

$$(V.1.5) \quad \frac{\partial P}{\partial x}(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z).$$

On appelle ces relations les *conditions de Cauchy réelles*.

Supposons (i). Alors les conditions de Cauchy sont vérifiées et df_z est la multiplication par

$$\lambda_z = \alpha_z + i\beta_z, \quad \text{avec} \quad \alpha_z = \frac{\partial P}{\partial x}(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \quad \text{et} \quad \beta_z = -\frac{\partial P}{\partial y}(z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(z).$$

Le développement limité (V.1.3) s'écrit donc

$$|f(z + \omega) - f(z) - \lambda_z \omega| = o(|\omega|),$$

et ceci entraîne bien sûr que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(z + \omega) - f(z)}{\omega} = \lambda_z$

Réciproquement, supposons maintenant (ii), et notons $\lambda_z = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(z + \omega) - f(z)}{\omega}$. On a alors

$$|f(z + \omega) - f(z) - \lambda_z \omega| = o(|\omega|).$$

Ceci nous dit que f est différentiable en z et que df_z est égale à la multiplication par λ_z et est donc \mathbb{C} -linéaire. \square

Remarque V.1.3. Introduisons les opérateurs différentiels suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Les conditions de Cauchy (V.1.5) sont alors équivalentes à la condition

$$(V.1.6) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$

De plus, lorsque cette condition est réalisée, on a alors

$$(V.1.7) \quad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

De plus, $z \mapsto f'(z)$ est continue si et seulement si f est \mathcal{C}^1 comme fonction de deux variables réelles.

Donnons maintenant quelques règles de calcul pour les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. On suppose les fonctions de classe \mathcal{C}^1 comme fonctions de deux variables réelles, mais pas nécessairement holomorphes. Par linéarité des dérivées partielles, on a $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, pourvu que f ait des dérivées partielles d'ordre 1 au point où l'on effectue le calcul. Par linéarité encore, on obtient immédiatement le formulaire habituel

$$(V.1.8) \quad \frac{\partial(f+g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(1/f)}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f^2},$$

et l'on obtient des identités semblables pour l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Pour la composition, il s'agit de dériver la composée de fonctions de deux variables. La formule obtenue est particulièrement simple.

Lemme V.1.4.

On a

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial z}(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g \right)(z) \times \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g \right)(z) \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z),$$

et l'on a une identité semblable pour l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$f \circ g = \tilde{f} \left(\frac{g + \bar{g}}{2}, \frac{g - \bar{g}}{2i} \right),$$

et de dériver la fonction composée de manière habituelle. On laisse les détails de ce calcul au lecteur. \square

Les propriétés de stabilité par les opérations usuelles des fonctions \mathcal{C}^1 , la formule (V.1.8) et les formules du Lemme V.1.4 donnent la proposition suivante :

Proposition V.1.5.

Les combinaisons linéaires et produits de fonctions holomorphes définies sur un même ouvert sont des fonctions holomorphes sur cet ouvert. Si f est holomorphe, alors $1/f$ est holomorphe sur l'ouvert où f ne s'annule pas. Enfin, si $f \in \text{Hol}(\Omega)$, $g \in \text{Hol}(\Omega')$ et si $g(\Omega') \subset \Omega$, alors $f \circ g \in \text{Hol}(\Omega')$.

Bien entendu, les dérivées complexes se calculent avec les formules habituelles. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée complexe de $z \mapsto z^n$ est donnée par $z \mapsto n z^{n-1}$. On déduit de (V.1.8) et du lemme V.1.4 les formules :

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), (f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

Exemple V.1.6. Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ à coefficients complexes définit une fonction $z \mapsto P(z)$ qui est holomorphe sur \mathbb{C} dont la dérivée complexe est donnée par $z \mapsto P'(z)$ (où P' est la dérivée de la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$). Pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$, les fractions rationnelles

$$z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

sont des fonctions holomorphes en dehors de l'ensemble des zéros de Q , dont la dérivée complexe est donnée par

$$z \mapsto \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}.$$

Plus généralement, les séries entières définissent des fonctions holomorphes.

Proposition V.1.7.

Une série entière

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$ définit une fonction holomorphe sur son disque ouvert de convergence et la dérivée complexe de f est donnée par

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

On en profite pour rappeler que le *rayon de convergence* $R \in [0, +\infty]$ d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est le sup des $\rho \geq 0$ tels que la série est *normalement convergente* sur le disque fermé de rayon ρ . C'est aussi le sup des $\rho \geq 0$ tels que la suite $(|a_n| \rho^n)_{n \geq 0}$ est bornée.

Démonstration. Remarquons d'abord que la série $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que la série f . Soit $z \in D(0, R)$ et ω suffisamment petit de sorte que $z + \omega \in D(0, R)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \omega) - f(z)}{\omega} - \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} &= \sum_{n \geq 1} a_n \left(\frac{(z + \omega)^n - z^n}{\omega} - n z^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n \left(\left(\sum_{k=1}^n (z + \omega)^{n-k} z^{k-1} \right) - n z^{n-1} \right) = \sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (z + \omega)^{n-k} z^{k-1} - z^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} z^{k-1} ((z + \omega)^{n-k} - z^{n-k}) \right) = \sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} z^{k-1} \omega \left(\sum_{j=1}^{n-k} (z + \omega)^{j-1} z^{n-k-j} \right) \right) \\ &= \omega \sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-j} z^{n-j-1} (z + \omega)^{j-1} \right) = \omega \sum_{n \geq 1} a_n \left(\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) z^{n-j-1} (z + \omega)^{j-1} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, en posant $\rho = \max(|z|, |z + \omega|)$, on a

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) z^{n-j-1} (z + \omega)^{j-1} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} j z^{j-1} (z + \omega)^{n-j-1} \right| \leq \sum_{j=1}^{n-1} j \rho^{n-2} \leq \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}.$$

D'où

$$\left| \frac{f(z + \omega) - f(z)}{\omega} - \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \right| \leq |\omega| \sum_{n \geq 2} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2},$$

et le membre de gauche tend vers 0 car la série $\sum_{n \geq 2} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}$ converge (on a $\rho < R$

et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 2} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}$ est le même que celui de f , c'est-à-dire R). □

Une récurrence immédiate donne le corollaire suivant :

Corollaire V.1.8.

Une série entière

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$, admet des dérivées au sens complexe de tout ordre, données par des séries entières de même rayon de convergence R par les formules

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}.$$

Exemple V.1.9. Bon nombre de fonctions usuelles sont des fonctions holomorphes. Par exemple, la fonction exponentielle

$$z \mapsto e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!},$$

est une fonction holomorphe dont la dérivée complexe est $z \mapsto e^z$. On rappelle que le rayon de convergence de cette série entière est infini et que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Toutes les fonctions construites à partir de la fonction exponentielle comme par exemple les fonctions trigonométriques

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z},$$

ou hyperboliques

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz), \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz),$$

et

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z} = -i \tan(iz),$$

sont des fonctions holomorphes sur leurs domaines de définition respectifs. On laisse le soin au lecteur de déterminer les domaines de définition des fonctions \tan et \tanh et les dérivées complexes de toutes ces fonctions.

Cette abondance de fonctions holomorphes ne doit pas nous faire oublier qu'il convient de faire attention et, si f est une fonction holomorphe, alors $z \mapsto |f(x)|$ (module de f) ou $z \mapsto \overline{f(z)}$ (fonction complexe conjuguée) ne sont essentiellement jamais holomorphes (sauf si la fonction f est constante).

Introduisons la définition :

Définition V.1.10.

Une fonction holomorphe $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est *biholomorphe* si h est une bijection de Ω_1 sur Ω_2 dont la réciproque h^{-1} est holomorphe sur Ω_2 .

Le résultat qui suit est une conséquence du théorème d'inversion locale.

Corollaire V.1.11.

Soit $f \in \text{Hol}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors, il existe un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ contenant z_0 tel que :

- (i) le sous-ensemble $\Omega_2 := f(\Omega_1)$ est un ouvert de \mathbb{C} ;
- (ii) la restriction de f à Ω_1 est une application biholomorphe de Ω_1 sur Ω_2 .

Démonstration. Par hypothèse, la jacobienne de la fonction f au point z_0 est une similitude de rapport non nul, c'est donc un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale nous permet d'affirmer qu'il existe un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ contenant z_0 tel que le sous ensemble $\Omega_2 := f(\Omega_1)$ est un ouvert de \mathbb{C} et tel que la restriction de f à Ω_1 est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Ω_1 sur Ω_2 , c'est-à-dire une bijection Ω_1 sur Ω_2 dont la réciproque f^{-1} est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

En particulier, pour tout $z \in \Omega_1$, la matrice jacobienne de f^{-1} en $f(z)$ est l'inverse de la matrice jacobienne de f en z (ce qui impose d'ailleurs que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_1$). C'est donc une similitude (de rapport $1/f'(z)$) ce qui, d'après la proposition V.1.2, prouve que la fonction f^{-1} est holomorphe. \square

Une application intéressante du résultat que nous venons tout juste de démontrer est la suivante :

Corollaire V.1.12.

L'exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ est un biholomorphisme local, dont l'image est $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En particulier, pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}^\times$, on peut définir localement (par exemple sur un disque $D(0, r)$ assez petit contenu dans \mathbb{C}^\times) un « logarithme complexe » $z \mapsto \text{Log}(z)$ (dépendant du choix d'un antécédent de z_0 par \exp) holomorphe.

Démonstration. Comme \mathbb{C}^\times est connexe par arcs (donc connexe), il suffit de démontrer que Ω , l'image de \mathbb{C} par l'application exponentielle, est à la fois non vide (facile), ouvert et fermé dans \mathbb{C}^\times .

Étant donné que la dérivée de la fonction exponentielle ne s'annule jamais, Ω est d'après le théorème d'inversion locale un voisinage ouvert de chacun de ses points. Donc Ω est un ouvert de \mathbb{C}^\times . De plus $1 \in \Omega$ puisque $1 = e^0$. On conclut qu'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte (pour la distance euclidienne) de centre 1 et de rayon r est incluse dans Ω .

Remarquons que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2},$$

ce qui implique en particulier que Ω est un sous-groupe (multiplicatif) de \mathbb{C}^\times .

Supposons maintenant que $z \in \mathbb{C}^\times \setminus \Omega$. Alors $z\Omega := \{zw : w \in \Omega\} \subset \mathbb{C}^\times \setminus \Omega$ car si $z_0 \in z\Omega \cap \Omega$, on peut écrire $z_0 = zu = v$ avec $u, v \in \Omega$ et donc $z = v/u \in \Omega$, ce qui nous donne une contradiction. Mais $z\Omega$ est un sous-ensemble ouvert (tout comme Ω) de sorte

que le complémentaire de Ω ,

$$\mathbb{C}^\times \setminus \Omega = \bigcup_{z \in \mathbb{C}^\times \setminus \Omega} z \Omega,$$

est un ouvert de \mathbb{C}^\times (comme réunion d'ouverts de \mathbb{C}^\times). En particulier, son complémentaire Ω est donc un fermé de \mathbb{C}^\times . Finalement, Ω est à la fois ouvert et fermé dans \mathbb{C}^\times (et est non vide), c'est donc que $\Omega = \mathbb{C}^\times$. \square

Nous reviendrons un peu plus tard sur la question fondamentale de la définition globale du logarithme complexe (voir la Proposition VIII.2.2).

V.2 Transformations conformes

Soit $f \in \text{Hol}(\Omega)$. On s'intéresse au comportement de f au voisinage d'un point z_0 tel que $f'(z_0) \neq 0$.

Remarque V.2.1. On verra plus tard (Théorème VI.6.4) que, pourvu que f ne soit pas localement constante, les points d'annulation de f' sont isolés et que cette hypothèse n'est donc pas très restrictive.

Considérons deux arcs de classe \mathcal{C}^1

$$\gamma_1, \gamma_2 :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{C},$$

qui passent par z_0 quand $t = 0$. On suppose ces arcs réguliers au voisinage de $t = 0$, c'est-à-dire que $\gamma_j'(0) \neq 0$ et l'on rappelle que $\gamma_j'(0)$ correspond au vecteur tangent au point $z_0 = \gamma_j(0)$ (remarquer que l'on peut supposer γ_j injectif pour $|t|$ assez petit d'après le théorème d'inversion locale). Pour $j = 1, 2$, les arcs images $f \circ \gamma_j$ ont pour tangentes $f'(z_0)\gamma_j'(0)$ en $t = 0$ de sorte que l'angle entre les tangentes à γ_j en z_0 est le même que l'angle entre les tangentes aux arcs images en $f(z_0)$ (en d'autres termes, on utilise le fait que la jacobienne de f est une similitude). On fait référence à cette propriété de conservation des angles en disant que les fonctions holomorphes sont des *transformations conformes*.

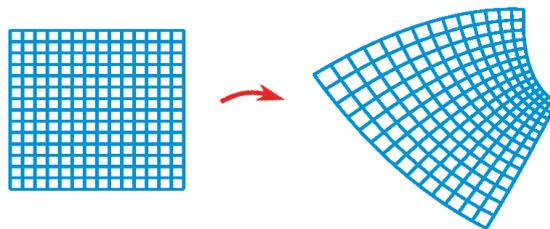


FIGURE V.1 – Transformation conforme.

Si l'on regarde l'image par une application holomorphe du « grillage » formée des droites verticales et horizontales du plan par une application holomorphe (disons sur un domaine où la dérivée ne s'annule pas), on obtient un « grillage » constitué de courbes dont les tangentes sont orthogonales aux endroits où ces courbes se croisent. Si l'on observe que les lignes de niveau

$$\Re(f) = c \quad \text{et} \quad \Im(f) = c',$$

Ce sont les images des droites verticales et horizontales

$$\Re(z) = c \quad \text{et} \quad \Im(z) = c',$$

par la réciproque f^{-1} de f – qui est une fonction holomorphe au voisinage de $f(z_0)$ d’après le Corollaire V.1.11 – le résultat précédent montre que ces lignes de niveau sont des courbes dont les tangentes sont orthogonales aux points où elles se coupent.

Exemple V.2.2. Dans le cas où $g = \tanh$, on a

$$f(z) = \operatorname{argtanh} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z+1}{z-1} \right),$$

et l’on obtient la Figure V.2.

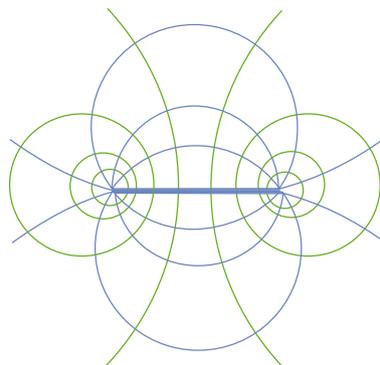


FIGURE V.2 – Lignes de niveau de la fonction $\operatorname{argtanh}$.

Le lecteur féru d’électromagnétisme reconnaîtra sur la Figure V.2 les équipotentielles (en vert) et les lignes du champ magnétique (en bleu) créés par deux fils infinis parallèles, contenus dans un plan normal au plan des lignes de champs, parcourus par des courants d’intensités égales et constantes de sens opposés. Cette propriété bien connue d’orthogonalité entre lignes de champs et équipotentielles, dans le cas plan, reflète la nature conforme des applications holomorphes. Cette observation est intimement liée au fait que le potentiel est une fonction *harmonique* et au lien entre fonctions harmoniques réelles et les parties réelles de fonctions holomorphes.

V.3 Exercices

Exercice V.3.1. Trouver les fonctions holomorphes f , g et h telles que

$$\Re f(x+iy) = 2xy, \quad \Re g(x+iy) = e^x \cos y, \quad \Re h(x+iy) = \sin(x+y) \cosh(x-y).$$

Exercice V.3.2. Montrer qu’une fonction holomorphe, qui est définie sur un ouvert connexe Ω et qui est à valeurs réelles, est constante.

Exercice V.3.3. On considère les fonctions de variable complexe z définies par

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{z}, \quad g(z) := \frac{\sin(\pi z)}{z^2 - 1}, \quad h(z) := \tan z.$$

- 1) Déterminer les domaines d'holomorphie de ces fonctions.
- 2) Montrer que ces fonctions sont sommes de leurs séries de Taylor en 0.
- 3) Déterminer le rayon de convergence des séries de Taylor en 0 de ces fonctions.

Exercice V.3.4. Calculer le rayon de convergence de la série hypergéométrique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1)}{\gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + n - 1)} \frac{z^n}{n!},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $-\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$.

Exercice V.3.5. Soit f une fonction mesurable bornée à support dans \mathbb{R}^+ . On définit la fonction \hat{f} par

$$\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} f(t) dt.$$

- 1) Montrer que \hat{f} est une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}^- := \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$.
- 2) Montrer que si de plus f est à support compact, alors \hat{f} est holomorphe sur \mathbb{C} .

Chapitre VI

Propriétés des fonctions holomorphes

VI.1 Intégration le long d'un chemin

Commençons par rappeler la :

Définition VI.1.1.

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{C} . Un chemin γ (orienté) de Ω est une application continue de classe \mathcal{C}^1 par morceaux

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega,$$

où $a < b$. Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dira que γ est un *lacet*. Le *chemin opposé* $\gamma^{\text{opp}} : [a, b] \rightarrow \Omega$ est défini par

$$\gamma^{\text{opp}}(t) := \gamma(a + b - t).$$

Remarque VI.1.2. Dans la définition de \mathcal{C}^1 par morceaux, nous supposons que la dérivée admet des limites à gauche et à droite en tout point de discontinuité. En particulier, cette dérivée reste bornée.

Exemple VI.1.3. Le lacet $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$, pour $t \in [0, 2\pi]$ est le cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, qui est parcouru dans le *sens direct*.

On dit que deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ sont *composables* si $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Auquel cas, on peut définir le *chemin composé*

$$\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \Omega,$$

par

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Définition VI.1.4.

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue et si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin, on définit l'intégrale de f le long du chemin γ par la formule

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Bien que γ' ne soit pas continue, elle reste bornée (remarque VI.1.2) et l'intégrale est bien définie.

Exemple VI.1.5. Si γ est le lacet qui décrit le cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$ tel qu'il est donné dans l'exemple précédent et si f est définie sur un ouvert contenant ce cercle, nous avons

$$\int_{\gamma} f(z) dz = i r \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{it} dt.$$

On vérifie immédiatement que les propriétés suivantes sont satisfaites :

Proposition VI.1.6.

Soit f une fonction définie sur Ω . Alors :

- (i) si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin et si $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme croissant,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz,$$

où $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$;

- (ii) si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^{\text{opp}}} f(z) dz;$$

- (iii) Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ sont deux chemins composables alors

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

La démonstration de ces trois propriétés ne pose aucune difficulté et est laissée en exercice au lecteur.

Remarque VI.1.7. La première propriété nous dit que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du paramétrage du chemin, mais seulement du sens de parcours. Ceci explique certains abus de notations, par exemple dans l'exemple VI.1.5, on note $\Gamma = C(z_0, r)$ le cercle de centre z_0 et de rayon r , et on écrit souvent $\int_{\Gamma} f(z) dz$ plutôt que $\int_{\gamma} f(z) dz$. Il faut comprendre que l'on a choisit un paramétrage du cercle (par exemple γ) qui le parcourt dans le sens trigonométrique.

Voici un premier résultat sur les intégrales le long de chemins qui fait intervenir la notion de fonction holomorphe.

Théorème VI.1.8.

Soit $f \in \text{Hol}(\Omega)$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin de Ω . On suppose que f admet une primitive holomorphe F sur Ω , c'est-à-dire que $F \in \text{Hol}(\Omega)$ et que $f = F'$.

Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est un lacet, on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Commençons par un simple calcul valable pour toutes les fonctions.

Lemme VI.1.9.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et γ un chemin de classe \mathcal{C}^1 de Ω .

Alors

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \bar{\gamma}'(t).$$

En particulier, si f est holomorphe, on a

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Démonstration. La démonstration utilise le lemme V.1.4. Les détails sont laissés en exercice au lecteur. \square

Démonstration. [du Théorème VI.1.8] On suppose pour simplifier que γ est un chemin de classe \mathcal{C}^1 (le cas général où γ n'est que \mathcal{C}^1 par morceaux se traite en décomposant γ en chemins de classe \mathcal{C}^1). En appliquant la formule du lemme ci-dessus, on voit facilement que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ce qui termine la démonstration de la formule. \square

VI.2 La formule intégrale de Cauchy

La formule intégrale de Cauchy est une des formules les plus importantes – et certainement une des formules aux conséquences les plus surprenantes – de la théorie des fonctions holomorphes.

Théorème VI.2.1.

Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$. On suppose que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et l'on note $\Gamma := C(z_0, r)$ le bord de ce disque (que l'on suppose orienté positivement i.e. parcouru dans le sens trigonométrique). Soit $f \in \text{Hol}(\Omega)$. Alors,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

pour tout $z \in D(z_0, r)$.

Démonstration. Il est clair que le théorème est une conséquence des deux formules suivantes

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} d\omega = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{\omega - z} = 2i\pi.$$

Quitte à changer ω en $z_0 + r\omega$, on peut supposer que $z_0 = 0$ et que $r = 1$.

Étape 1. Calcul de la seconde intégrale. On pose $\omega := e^{i\theta}$ puis

$$\int_{\Gamma} \frac{d\omega}{\omega - z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - z} = i \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - ze^{-i\theta}}.$$

Comme $|z| < 1$, on a un développement en série normalement convergente pour $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\frac{1}{1 - ze^{-i\theta}} = \sum_{n \geq 0} z^n e^{-in\theta},$$

que l'on peut donc intégrer terme à terme pour trouver

$$i \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - ze^{-i\theta}} = i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 2i\pi,$$

ce qui démontre la formule espérée.

Étape 2. Calcul de la première intégrale. Pour tout $t \in [0, 1[$, on pose

$$I(t) := \int_{\Gamma_t} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} d\omega,$$

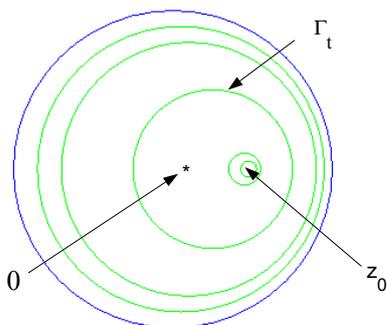
où $\Gamma_t := C(tz, 1-t)$, i.e. on rétracte continûment le cercle $\Gamma_0 = C(0, 1)$ sur le point z (c'est un cas particulier d'homotopie de chemins, notion sur laquelle nous reviendrons). On suppose bien entendu que Γ_t est parcouru dans le sens trigonométrique.

On pose $\omega = tz + (1-t)e^{i\theta}$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, de telle sorte que

$$(VI.2.1) \quad I(t) = i \int_0^{2\pi} \frac{f(tz + (1-t)e^{i\theta}) - f(z)}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} F(t, \theta) d\theta,$$

où par définition

$$F(t, \theta) := i \frac{f(tz + (1-t)e^{i\theta}) - f(z)}{e^{i\theta} - z} e^{i\theta}.$$

FIGURE VI.1 – Déformation continue du cercle Γ sur le point z .

On remarque que

$$\omega \mapsto \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z},$$

est une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et continue sur Ω . En particulier, la fonction $(t, \theta) \mapsto F(t, \theta)$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ et \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[\times [0, 2\pi]$. On conclut que I est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et que cette fonction, qui est *a priori* continue sur $[0, 1]$, se prolonge par continuité sur $[0, 1]$ en prenant $I(1) = 0$ (dépendance en t de l'intégrale (VI.2.1)). De plus, pour tout $t \in]0, 1[$, la dérivée de I s'obtient en dérivant sous le signe somme :

$$I'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta) d\theta.$$

Or, un simple calcul montre que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta) = -if'(tz + (1-t)e^{i\theta})e^{i\theta} = \frac{\partial G}{\partial \theta}(t, \theta),$$

où nous avons défini

$$G(t, \theta) := \frac{f(tz + (1-t)e^{i\theta})}{t-1}.$$

Mais alors, pour tout $t \in]0, 1[$

$$I'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \theta}(t, \theta) d\theta = G(t, 2\pi) - G(t, 0) = 0.$$

La fonction I est donc constante sur l'intervalle $]0, 1[$, donc sur l'intervalle $[0, 1]$ (par continuité) et $I(1) = I(0) = 0$. \square

Comme nous allons maintenant le voir, la formule intégrale de Cauchy a de très nombreuses conséquences dont certaines sont assez surprenantes.

VI.3 Fonctions holomorphes vs fonctions analytiques

Nous nous intéressons aux fonctions analytiques, i.e. les fonctions qui sont développables en séries entières, et nous démontrons que l'ensemble de ces fonctions coïncide avec l'ensemble des fonctions holomorphes.

Définition VI.3.1.

Une fonction f est *analytique* sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction f admet un développement en série entière de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

qui est convergente dans un voisinage de z_0 (le rayon de convergence de la série est strictement positif).

Remarque VI.3.2. Supposons que la série entière

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

ait un rayon de convergence $\rho > 0$. Alors f est analytique sur $D(z_0, \rho)$: en tout point $\omega \in D(z_0, \rho)$, $f(z)$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $\rho - |\omega - z_0|$.

Exercice VI.3.3. Démontrer l'assertion de la remarque ci-dessus.

Le résultat suivant montre que les fonctions holomorphes et les fonctions analytiques ne forment qu'une seule et même catégorie.

Théorème VI.3.4.

Une fonction est holomorphe sur Ω si et seulement si elle est analytique sur Ω .

En particulier, les fonctions holomorphes sont de classe \mathcal{C}^∞ , alors que leur définition ne leur demandait *a priori* que d'être de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration. Supposons que f soit analytique sur Ω . En tout point z_0 de Ω , la fonction f est donnée sur un certain disque ouvert $D(z_0, \rho(z_0))$ par une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.

On utilise alors la proposition V.1.7 qui nous dit que f est holomorphe sur $D(z_0, \rho(z_0))$, avec $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ sur ce disque. La propriété d'être holomorphe étant locale, ceci montre que $f \in \text{Hol}(\Omega)$.

Inversement, supposons que la fonction f soit holomorphe sur Ω . Soit $z \in D(z_0, r)$, avec $0 < r < \infty$. On suppose que $r > 0$ est assez proche de 0 de telle sorte que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$. On note Γ le cercle bordant $\bar{D}(z_0, r)$, autrement dit $\Gamma := C(z_0, r)$, cercle que l'on suppose toujours parcouru dans le sens trigonométrique. Alors, grâce à la formule intégrale de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

En posant $\omega = z_0 + r e^{i\theta}$, on trouve que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta} + z_0 - z} r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{1 - \frac{z-z_0}{r} e^{-i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-z_0}{r} \right)^n f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

La majoration

$$\left| \left(\frac{z-z_0}{r} \right)^n f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} \right| \leq \sup_{\Gamma} |f| \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n,$$

et le fait que $|z-z_0| < r$ assurent la convergence normale de la série, permettant d'invertir l'intégration et la sommation pour conclure que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n,$$

où

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

ce qui termine la preuve. □

La preuve précédente donne en fait le résultat plus précis suivant :

Corollaire VI.3.5 (Estimées de Cauchy).

Supposons f holomorphe sur l'ouvert Ω . Soit $z_0 \in \Omega$. Alors, f admet un développement en série entière au voisinage de z_0 dont le rayon de convergence est au moins

$$\rho(z_0) = \sup\{r > 0 \mid \bar{D}(z_0, r) \subset \Omega\},$$

et pour tout $z \in D(z_0, \rho(z_0))$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

Pour tout $0 < r < \rho(z_0)$, et pour tout $z \in D(z_0, r)$, on a

$$(VI.3.1) \quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}} d\omega.$$

De plus, on a les *estimées de Cauchy*

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{\sup_{C(z_0, r)} |f|}{r^n},$$

pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. La première assertion a en fait été établie dans la démonstration du théorème par l'utilisation du théorème de Cauchy. La seconde assertion est formelle, elle vient de la propriété de dérivabilité terme à terme des séries entières sur leurs disques de convergence : dans le développement

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

les coefficients a_n sont donnés par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

C'est-à-dire que f est analytique si et seulement si f est somme de sa série de Taylor au voisinage de tout point. La formule donnant $f^{(n)}(z)$ s'obtient en dérivant sous le signe somme la formule intégrale de Cauchy. \square

Ce résultat est assez étonnant dans la mesure où la formule (VI.3.1) permet de calculer les dérivées complexes de f en fonction des valeurs de f . On déduit du Théorème VI.3.4, le résultat très important suivant, dont une variante globale plus subtile sera donnée plus tard (voir le Théorème VIII.1.1).

Corollaire VI.3.6 (Existence locale de primitives).

Toute fonction holomorphe admet localement une primitive. Plus précisément, si f est une fonction holomorphe sur un disque ouvert D , il existe $F \in \text{Hol}(D)$ qui est une *primitive* de f , i.e. $F' = f$ sur D .

Démonstration. Il suffit de remarquer que toute série entière convergent sur D admet une primitive convergent sur D . \square

VI.4 Théorèmes de Morera et de Goursat

Dans cette section, nous donnons deux exercices concernant la caractérisation des fonctions holomorphes. De la caractérisation des fonctions holomorphes obtenue dans le premier, on peut tirer un énoncé dû à Goursat, qui montre que dans la définition des fonctions holomorphes, on peut se passer de l'hypothèse de continuité de la dérivée au sens complexe.

Exercice VI.4.1 (Théorème de Morera). Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω . On suppose que

$$(VI.4.1) \quad \int_{[a,b]} f(z) dz + \int_{[b,c]} f(z) dz + \int_{[c,a]} f(z) dz = 0,$$

pour tous $a, b, c \in \Omega$ tels que le triangle plein de sommets a, b et c est inclus dans Ω .

1) Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Pour tout $z \in D(z_0, r)$, on note

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Montrer que F est dérivable au sens complexe sur $D(z_0, r)$ et calculer F' .

2) En déduire que f est holomorphe sur Ω .

3) Inversement, montrer que si f est holomorphe sur un ouvert Ω alors (VI.4.1) est vérifié pour tous $a, b, c \in \Omega$ tels que le triangle plein de sommets a, b et c est inclus dans Ω .

Exercice VI.4.2 (Théorème de Goursat). En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue admettant une dérivée au sens complexe $f'(z)$ en tout point $z \in \Omega$, alors f est holomorphe.

VI.5 Fonctions holomorphes définies par une intégrale

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit X un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^N (muni de la mesure de Lebesgue dx). Supposons que F soit une fonction définie sur $\Omega \times X$ et que l'on veuille définir une fonction f sur Ω par la formule

$$(VI.5.1) \quad f(z) = \int_X F(z, x) dx.$$

Il faut bien sûr s'assurer que l'intégrale est bien définie. Les théorèmes généraux de la théorie de Lebesgue fournissent facilement des conditions suffisantes pour que la fonction f soit holomorphe. Par exemple, en utilisant Fubini, on obtient le critère suivant.

Théorème VI.5.1.

Dans la situation ci-dessus, on suppose de plus que :

(i) pour tout $x \in X$, $z \mapsto F(z, x)$ est holomorphe sur Ω

(ii) pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r_0 > 0$ tel que le disque $D(z_0, r_0)$ soit inclus dans Ω , et une fonction g_{z_0} intégrable sur X (au sens de Lebesgue) avec pour tout $z \in D(z_0, r_0)$ et tout $x \in X$, $|F(z, x)| \leq g_{z_0}(x)$.

Alors la fonction f définie par (VI.5.1) est bien définie et holomorphe sur Ω . De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k F}{\partial z^k}(z, x) dx.$$

Démonstration. La condition (ii) assure que l'intégrale (VI.5.1) est bien définie, et par le théorème de convergence dominée, on voit même facilement qu'elle est continue. L'holomorphie, comme la continuité, étant une propriété locale, il suffit de l'établir, pour tout $z_0 \in \Omega$ sur un disque ouvert centré en z_0 et inclus dans Ω . Fixons z_0 et choisissons $r_0 > 0$ comme dans (ii) et imposons même de plus (quitte à prendre un r_0 un peu plus petit) que $\bar{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$. Comme $z \mapsto F(z, x)$ est holomorphe sur Ω , on a d'après la formule de Cauchy, pour tout $z \in D(z_0, r_0)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \left(\int_{C(z_0, r_0)} \frac{F(\omega, x)}{\omega - z} d\omega \right) dx.$$

On a pour tout $(\omega, x) \in C(z_0, r_0) \times X$,

$$\left| \frac{F(\omega, x)}{\omega - z} \right| \leq \frac{g_{z_0}(x)}{r - |z - z_0|}$$

et comme g_{z_0} est intégrable sur X , la fonction $(\omega, x) \mapsto \left| \frac{F(\omega, x)}{\omega - z} \right|$ est intégrable sur $C(z_0, r_0) \times X$. Par le théorème de Fubini, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_0)} \left(\int_X \frac{F(\omega, x)}{\omega - z} dx \right) d\omega = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{\int_X F(\omega, x) dx}{\omega - z} d\omega \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega. \end{aligned}$$

Ainsi f vérifie la formule de Cauchy. On en déduit par la démonstration du théorème VI.3.4 que f est analytique, donc holomorphe sur $D(z_0, r_0)$. On a de plus d'après la formule (VI.3.1)

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{\int_X F(\omega, x) dx}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega.$$

La majoration $\left| \frac{F(\omega, x)}{\omega - z_0} \right| \leq \frac{g_{z_0}(x)}{r^{k+1}}$ permet d'appliquer Fubini dans l'autre sens, et l'on obtient en appliquant encore une fois (VI.3.1) à $z \mapsto F(z, x)$

$$f^{(k)}(z_0) = \int_X \left(\frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_0)} \frac{F(\omega, x)}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega \right) dx = \int_X \frac{\partial^k F}{\partial z^k}(z_0, x) dx.$$

□

Remarque VI.5.2. On peut utiliser différentes variantes, sur le même principe. Par exemple si la fonction F est donnée par une série entière

$$F(z, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x) (z - z_0)^n$$

de rayon de convergence au moins égal à $R > 0$ pour tout $x \in X$, avec les fonctions a_n intégrables sur X et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n z^n$, où $A_n = \int_X |a_n(x)| dx$, de rayon de convergence au moins R , on utilise le théorème d'inversion des signes \sum et \int (donc encore Fubini) pour obtenir un développement en série entière

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_X a_n(x) dx \right) (z - z_0)^n$$

sur $D(z_0, R)$.

On peut aussi voir F comme une fonctions de trois variables, en remplaçant la variable complexe z par deux variables réelles u et v , montrer par les théorèmes de Lebesgue de continuité et de dérivation sous le signe \int (en vérifiant leur hypothèses) que f est de classe \mathcal{C}^1 comme fonction de deux variables réelles, avec

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \int_X \frac{\partial F}{\partial u}(u, v, x) dx, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \int_X \frac{\partial F}{\partial v}(u, v, x) dx.$$

On vérifie alors immédiatement les équations de Cauchy-Riemann qui montrent que f est holomorphe. De plus on a alors $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \int_X \frac{\partial F}{\partial z}(z, x) dx$.

Corollaire VI.5.3.

Soient Ω et \mathcal{U} deux ouverts de \mathbb{C} et soit $(z, u) \mapsto F(z, u)$ une fonction continue sur $\Omega \times \mathcal{U}$, holomorphe en z pour tout $u \in \mathcal{U}$, alors pour tout chemin γ dans \mathcal{U} , la formule

$$f(z) = \int_{\gamma} F(z, u) du$$

définit une fonction holomorphe sur Ω .

VI.6 Les zéros des fonctions holomorphes

Commençons par le Théorème de Liouville¹ qui est une conséquence directe des estimées de Cauchy.

Théorème VI.6.1 (Théorème de Liouville).

Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ une fonction bornée sur \mathbb{C} . Alors, f est constante.

Voici une application du Théorème de Liouville qui permet de démontrer un grand classique :

Corollaire VI.6.2 (Théorème de d'Alembert-Gauss).

Tout polynôme non constant à coefficients complexes possède une racine dans \mathbb{C} . En d'autres termes, le corps \mathbb{C} est algébriquement clos.

Nous laissons la démonstration du théorème de Liouville et du théorème de d'Alembert-Gauss au lecteur, ce sont les questions 2 et 3 de l'exercice suivant :

Exercice VI.6.3. Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} et bornée.

- 1) Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \geq 1$.
- 2) En déduire que f est constante.
- 3) Montrer que tout polynôme non constant admet un zéro dans \mathbb{C} .
- 4) On suppose qu'il existe deux réels $a, b > 0$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|f(z)| \leq a + b|z|^m,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq m$.

- 5) Soit h une fonction non constante, holomorphe sur \mathbb{C} . Montrer que $h(\mathbb{C})$, l'image de \mathbb{C} par h , est dense dans \mathbb{C} .

Ainsi les polynômes s'annulent sur \mathbb{C} , mais pas très souvent comme on le sait ! C'est un phénomène, qui se généralise aux fonctions holomorphes.

1. Joseph Liouville, X 1825

Théorème VI.6.4 (Principe des zéros isolés).

Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω non identiquement nulle. Alors, les zéros de f sont isolés. C'est-à-dire que, si $f(z_0) = 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $z \in \Omega \cap (D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\})$, $f(z) \neq 0$.

Démonstration. L'ensemble

$$U := \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\},$$

est fermé (comme intersection de fermés) et ouvert (car f est somme de sa série de Taylor au voisinage de tout point, donc identiquement nulle en un voisinage d'un point de U). Comme f est non identiquement nulle, $U \neq \Omega$ de sorte que $U = \emptyset$ (c'est là que nous utilisons la connexité de Ω). Conclusion, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un entier $n > 0$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Soit z_0 un zéro de f . Soit N le plus petit entier tel que $f^{(N)}(z_0) \neq 0$. On peut alors écrire au voisinage de z_0

$$f(z) = (z - z_0)^N \left(a_N + \sum_{n>N} a_n (z - z_0)^{n-N} \right),$$

ce qui permet de conclure facilement que f ne s'annule pas dans un voisinage épointé de z_0 . \square

Remarque VI.6.5. La connexité n'entre en jeu que pour avoir un joli énoncé. Dans le cas général, la preuve permet de conclure que si les zéros ne sont pas isolés, la fonction holomorphe est nulle sur une des composantes connexes (nécessairement ouverte) de Ω .

Corollaire VI.6.6 (Principe du prolongement analytique).

Deux fonctions holomorphes f et g sur un ouvert connexe Ω qui coïncident sur une partie X de Ω ayant un point d'accumulation dans Ω , coïncident partout.

Démonstration. Considérons $f - g$: l'ensemble de ses zéros contient X , et comme cet ensemble est fermé par continuité de $f - g$, il contient le point d'accumulation² donné par l'énoncé : ce point est un zéro non isolé de l'ensemble des zéros de $f - g$, et l'on en déduit que $f - g$ par le principe des zéros isolés. \square

Souvent, dans les exemples, f et g coïncident sur un ouvert, ou bien sur un arc, et on peut alors conclure.

Voici un exemple de prolongement analytique d'une fonction holomorphe définie par une série entière.

Exemple VI.6.7. Par exemple la fonction holomorphe définie sur $D(0, 1)$ par la série

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} z^n,$$

admet un *prolongement analytique* à $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. En effet, la fonction $g(z) := \frac{1}{1-z}$ est elle aussi analytique et coïncide avec f sur le disque unité ouvert.

2. Un point d'accumulation de X est un point a tel que tout voisinage de a intersecte $X \setminus \{a\}$.

Nous donnerons prochainement un exemple plus subtil de prolongement analytique dans le cas de la fonction Gamma. Poursuivons par une application intéressante du principe des zéros isolés.

Proposition VI.6.8.

Les fonctions polynômes sont denses dans $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$. Elles sont aussi denses dans $L^2(]0, +\infty[, e^{-x} dx)$.

Démonstration. Montrons que l'espace des fonctions polynômes forme un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$. Pour ce faire, il suffit de démontrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ est orthogonale pour le produit hermitien de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ à toutes les fonctions polynômes, alors c'est la fonction nulle.

Soit f une telle fonction. Définissons

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{zx} e^{-x^2} dx.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la convergence de cette intégrale pour tout z . Les résultats de la section VI.5 nous permettent d'affirmer sans trop de peine que F est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . De plus la dérivée n -ième au sens complexe de la fonction F est donnée par

$$F^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) e^{zx} e^{-x^2} dx,$$

et par conséquent

$$F^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) e^{-x^2} dx.$$

Par hypothèse $F^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que F est identiquement nulle sur \mathbb{C} . En particulier

$$F(-i\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx = 0,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Autrement dit, la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x) e^{-x^2}$ est nulle. On conclut que $f = 0$, ce qui termine la démonstration. Nous laissons le soin au lecteur d'adapter cette démonstration pour démontrer la deuxième assertion. \square

VI.7 Propriété de la moyenne et principe du maximum.

On commence par interpréter la formule de Cauchy comme une *formule de la moyenne* qui est une propriété assez surprenante dont jouissent les fonctions holomorphes : la valeur d'une fonction holomorphe en un point z est égale à la moyenne de cette fonction sur tout cercle centré en z .

Théorème VI.7.1 (Formule de la moyenne).

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et $\bar{D}(z, r)$ un disque fermé contenu dans Ω , avec $r > 0$. Alors,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. Grâce à la formule intégrale de Cauchy, on a, en remplaçant $\omega = z + r e^{i\theta}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta,$$

où $C(z, r)$ est le cercle de centre z et de rayon $r > 0$. □

On en déduit immédiatement le cas particulier suivant des estimées de Cauchy :

$$|f(z)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(z + r e^{i\theta})|.$$

Il n'y a pour l'instant rien de nouveau, mais nous allons voir que l'on dispose en fait d'énoncés beaucoup plus généraux qui constituent un point important de la théorie.

Théorème VI.7.2 (Principe du maximum).

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω . On suppose que la fonction $z \mapsto |f(z)|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$ alors f est constante sur Ω .

Démonstration. Supposons que $|f|$ ait un maximum local en $z_0 \in \Omega$, i.e. qu'il existe un disque fermé $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in \bar{D}(z_0, r)$. On va montrer qu'il existe un voisinage de z_0 , où f est constante. L'ouvert Ω étant connexe, le principe du prolongement analytique nous dit alors que f est constante sur Ω .

Donnons une première démonstration du résultat. La fonction f est développable en série entière au voisinage de z_0 et l'on peut écrire

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n.$$

On suppose que f n'est pas constante au voisinage de z_0 , donc il existe au moins un $a_n \neq 0$. Soit N le plus petit entier non nul tel que $a_n \neq 0$. Écrivons

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^N \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^{n-N}.$$

On note $g(z) := \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^{n-N}$ et l'on développe

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= |f(z_0) + (z - z_0)^N g(z)|^2 \\ &= |f(z_0)|^2 + 2\Re \left((z - z_0)^N g(z) \overline{f(z_0)} \right) + |z - z_0|^{2N} |g(z)|^2. \end{aligned}$$

On pose $z = z_0 + t e^{i\beta}$ où $t, \beta \in \mathbb{R}$. Le développement limité de $t \mapsto |f(z_0 + t e^{i\beta})|^2$, en puissances de t est donné par la formule

$$|f(z_0 + t e^{i\beta})|^2 = |f(z_0)|^2 + 2 \Re \left(e^{iN\beta} g(z_0) \overline{f(z_0)} \right) t^N + O(t^{N+1}),$$

On vérifie que l'on peut choisir $\beta \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $\Re \left(e^{iN\beta} g(z_0) \overline{f(z_0)} \right) > 0$. Avec ce choix, on a $|f(z_0 + t e^{i\beta})|^2 > |f(z_0)|^2$ pour tout $t > 0$ proche de 0 ce qui contredit le fait que z_0 est le point où $|f|$ est maximale. Conclusion, f est constante au voisinage de z_0 .

Donnons maintenant une autre démonstration de ce résultat qui, cette fois-ci s'appuie sur la formule de la moyenne. Pour tout $r < R$, définissons

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

qui n'est rien d'autre que le n -ième coefficient de Fourier de la fonction périodique $f_r : \theta \mapsto f(z_0 + r e^{i\theta})$.

La formule de la moyenne démontrée dans le théorème précédent, nous permet d'écrire que

$$|c_0| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \right| = |f(z_0)| = \sup_{\bar{D}(z_0, r)} |f(z)|.$$

D'autre part, d'après l'égalité de Parseval, nous avons

$$|c_0|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{z \in \bar{D}(z_0, r)} |f(z)|^2 d\theta = |c_0|^2,$$

et donc nécessairement $c_n = 0$ pour tout $n \neq 0$, autrement dit $f_r \equiv c_0 = f(z_0)$ pour tout $r < R$, ce qui entraîne que f est constante sur $D(z_0, R)$. \square

VI.8 Suites et séries de fonctions holomorphes

La formule intégrale de Cauchy permet de démontrer que les suites et les séries de fonctions holomorphes définies sur un ouvert Ω qui convergent uniformément sur tout compact inclu dans Ω , convergent vers une fonction holomorphe.

Théorème VI.8.1.

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω . On suppose que cette suite de fonctions converge uniformément vers une fonction f , sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$. Alors, la fonction f est holomorphe et la suite des dérivées complexes $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f' sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$.

Démonstration. Soit $\bar{D} := \bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ un disque fermé de Ω . La distance de \bar{D} au complémentaire de Ω est strictement positive car la fonction $d(x, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ est une fonction continue donc elle atteint son minimum sur le compact \bar{D} et comme cette fonction ne s'annule pas sur \bar{D} , son minimum est strictement positif. On peut donc choisir $R > r$ tel

que $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$. On note dans la suite $C := C(z_0, R)$, le cercle de centre z_0 et de rayon R , que l'on suppose parcouru dans le sens trigonométrique.

Si g est une fonction holomorphe sur Ω , on peut écrire, en utilisant la formule intégrale de Cauchy, que pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{g(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

Nous avons déjà vu qu'en dérivant par rapport à z cette formule, on trouvait l'expression

$$g'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{g(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega.$$

Étant donné que $|\omega - z| \geq R - r$, on a, grâce aux estimées de Cauchy,

$$\sup_{z \in \bar{D}(z_0, r)} |g'(z)| \leq \frac{1}{(R - r)^2} \sup_{z \in C(z_0, R)} |g(z)|.$$

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\bar{D}(z_0, R)$, vers une fonction f , entraîne donc la convergence uniforme de la suite $(f'_n)_{n \geq 0}$ sur $\bar{D}(z_0, r)$, vers une fonction notée h , et, par passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'égalité

$$f'_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f_n(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega,$$

on trouve que

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega,$$

pour tout $z \in \bar{D}(z_0, r)$.

Maintenant, par passage à la limite $n \rightarrow \infty$, dans l'égalité

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

on conclut que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

pour tout $z \in \bar{D}(z_0, r)$. On vérifie, en utilisant les théorèmes de la théorie de l'intégration, que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $\bar{D}(z_0, r)$, que sa dérivée par rapport à \bar{z} est nulle, i.e. que cette fonction est holomorphe, et que

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega.$$

En particulier, $f' = h$, ce qui termine la démonstration. □

On obtient, en utilisant des arguments semblables, le :

Théorème VI.8.2.

Soit

$$f := \sum_{n \geq 0} f_n,$$

une série de fonctions holomorphes sur Ω , qui converge normalement (uniformément) sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$. Alors,

$$g := \sum_{n \geq 0} f'_n,$$

la série des dérivées complexes, converge normalement (uniformément) sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$ et f est une fonction holomorphe dont la dérivée est donnée par g .

On rappelle qu'une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement si la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge (i.e. elle converge normalement pour la norme de la convergence uniforme) et l'on dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément si la suite $(\sum_{j=0}^n f_j)_{n \geq 0}$ converge uniformément. Bien entendu la convergence normale d'une série de fonction entraîne la convergence uniforme de cette série.

VI.9 Exercices

Exercice VI.9.1. Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

1) Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(0,r)} f(z_0 + x + iy) dx dy.$$

2) En déduire que, si f est holomorphe et bornée sur \mathbb{C} , f est constante.

Exercice VI.9.2. Soit $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et \bar{D} son adhérence.

1) Montrer que si le produit de deux fonctions holomorphes sur D est nul, l'une des deux fonctions est nulle.

2) Soient f, g deux fonctions continues sur \bar{D} , holomorphes sur D . Montrer que si fg est nulle sur le cercle $\partial\bar{D} = \bar{D} - D$, alors f ou g est nulle sur \bar{D} .

Exercice VI.9.3 (Lemme de Schwarz). Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On suppose $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$.

1) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$.

2) Montrer que si $|f'(0)| = 1$ alors $f(z) = f'(0)z$ pour tout $z \in D$.

3) On suppose que f est bijective holomorphe de D dans D et que sa réciproque f^{-1} est elle aussi holomorphe. De plus on suppose $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et

$$f(z) = \alpha z,$$

pour tout $z \in D$.

4) Supposons que f n'est pas bijective. Montrer que $|f(z)| < |z|$ pour tout $z \in D \setminus \{0\}$.

Exercice VI.9.4. Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Pour $a \in D$ et $z \in D$ on note

$$f_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

1) Montrer que $f_a(D) \subset D$.

2) Montrer que f_a est une bijection holomorphe de D dans lui-même.

3) En utilisant le résultat de la question 3 de l'exercice ?? en déduire que si f est une bijection holomorphe de D dans lui-même alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in D$ tels que

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Exercice VI.9.5. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω . On suppose que la suite converge simplement vers une fonction f et que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C telle que

$$\sup_K |f_n(z)| \leq C,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que f est holomorphe.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C telle que

$$\sup_K |f_n^{(k)}(z)| \leq C,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice VI.9.6. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème (de l'application ouverte pour les fonctions holomorphes). Soit Ω un ouvert connexe non vide de \mathbf{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ une application holomorphe non constante. Alors l'image $f(\Omega)$ est un ouvert de \mathbf{C} .

On se place dans les hypothèses du théorème. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un point z_0 de Ω tel que $f(\Omega)$ n'est pas un voisinage de $f(z_0)$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre complexes qui ne sont pas dans $f(\Omega)$ et qui converge vers $f(z_0)$.

1) Montrer qu'il existe $r > 0$ avec les propriétés suivantes :

(i) $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$, (ii) pour tout $z \in \bar{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, $f(z) \neq f(z_0)$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bien définie et holomorphe sur Ω et qu'il existe $z_n \in C(z_0, r)$ tel que pour tout $z \in \bar{D}(z_0, r)$, $|f(z) - \alpha_n| \geq |f(z_n) - \alpha_n|$.

3) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $z \in C(z_0, r)$, $|f(z) - f(z_0)| \geq \epsilon$. En déduire que pour n assez grand, $|f(z_n) - \alpha_n| \geq \frac{\epsilon}{2}$ et aboutir à une contradiction avec le fait que la suite α_n tend vers $f(z_0)$.

Exercice VI.9.7 (Formule du noyau de Bergman). Soit $D = D(0, 1)$ le disque unité ouvert. On note $\text{Hol}^2(D)$ l'espace des fonctions holomorphes et de carré sommable sur D . C'est un sous-espace de $L^2(D)$.

1) Montrer que $\text{Hol}^2(D)$ est un sous-espace fermé de $L^2(D)$. On pourra utiliser l'exercice VI.9.1.

2) En déduire que pour tout $y \in D$, il existe une fonction holomorphe g_y sur D telle que pour tout $f \in \text{Hol}^2(D)$,

$$f(y) = \int_D \overline{g_y(z)} f(z) dz$$

3) On considère le développement en série entière $g_y(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(y) z^n$. Que donne l'identité précédente appliquée à la fonction $z \mapsto z^n$?

4) En déduire que pour tout $f \in \text{Hol}^2(D)$, pour tout $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(x + iy)}{(1 - (x - iy)z)^2} dx dy.$$

Exercice VI.9.8. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω . On suppose que la suite converge simplement vers une fonction f et que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C(K)$ telle que

$$\sup_K |f_n(z)| \leq C(K),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que f est holomorphe.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C(k, K)$ telle que

$$\sup_K |f_n^{(k)}(z)| \leq C(k, K),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre VII

Formule des résidus

VII.1 Homotopie - Ouverts simplement connexes

On formalise ici la notion de *déformation continue* de chemins que nous avons déjà rencontrée dans la preuve de la formule intégrale de Cauchy.

Définition VII.1.1.

Soient Ω un ouvert non vide de \mathbb{C} et $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ deux chemins dans Ω . Une *homotopie* entre γ_0 et γ_1 dans Ω , est une application $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1]^2; \Omega)$ telle que

$$\gamma(0, t) = \gamma_0(t), \quad \text{et} \quad \gamma(1, t) = \gamma_1(t),$$

pour tout $t \in [0, 1]$;

On dit que γ est une *homotopie de lacets* si de plus $\gamma(s, 0) = \gamma(s, 1)$, pour tout $s \in [0, 1]$ (autrement dit, $t \mapsto \gamma(t, s)$ est un lacet pour tout $s \in [0, 1]$). On dit alors que les lacets γ_0 et γ_1 sont homotopes ;

On dit que Ω est *simplement connexe* s'il est connexe et si tout lacet γ de Ω est homotope à un lacet constant.

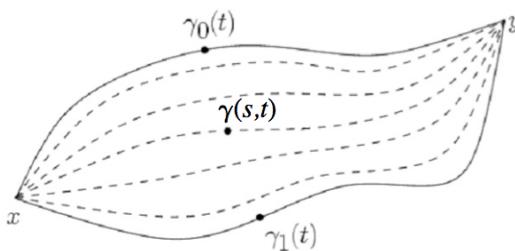


FIGURE VII.1 – Homotopie entre γ_0 et γ_1 .

Lemme VII.1.2.

La relation « il existe une homotopie de lacets entre γ_0 et γ_1 » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de Ω .

Démonstration. La réflexivité est claire. Pour la symétrie, on observe que si γ est une homotopie de lacets entre γ_0 et γ_1 , alors, $\gamma(1-s, t)$ est une homotopie de lacets entre γ_1 et γ_0 .

Passons à la transitivité. On a donc trois lacets γ_1, γ_2 et γ_3 , et des homotopies de lacets $\gamma_{i,i+1}(s, t)$ entre γ_i et γ_{i+1} , pour $i = 1, 2$. On définit alors

$$\gamma(s, t) := \begin{cases} \gamma_{1,2}(2s, t) & \text{si } s \leq 1/2 \\ \gamma_{2,3}(2s-1, t) & \text{si } s \geq 1/2, \end{cases}$$

qui est une homotopie de lacets entre γ_1 et γ_3 . \square

Remarque VII.1.3. Donnons-nous un point $z_0 \in \Omega$ d'un ouvert connexe. On peut définir l'ensemble $\pi_1(\Omega)$ des classes d'équivalence d'homotopie de lacets de point de base z_0 . On peut montrer que la composition des lacets définit une *structure de groupe* sur $\pi_1(\Omega)$. C'est le *groupe fondamental de Poincaré* de Ω . Comme on le voit, on peut le définir pour des espaces beaucoup plus généraux que Ω . En ces termes, dire que l'ensemble connexe Ω est simplement connexe, c'est dire que ce groupe est réduit à l'élément neutre. En particulier $\pi_1(\mathbb{C})$ est réduit à l'élément neutre. Le lecteur intéressé pourra démontrer que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ et (plus difficile) que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\})$ est isomorphe au groupe libre à deux générateurs¹.

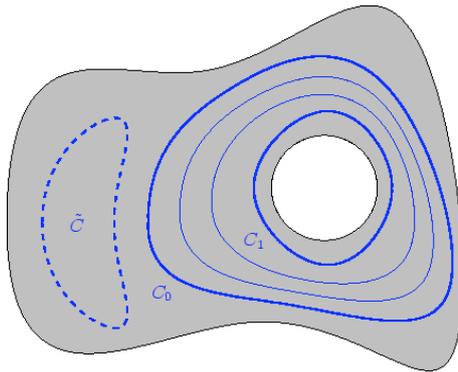


FIGURE VII.2 – Les courbes C_0 et C_1 sont homotopes. Les courbes \tilde{C} et C_0 ne sont pas homotopes.

Donnons un exemple simple et utile d'ouvert simplement connexe. Rappelons que Ω est dit étoilé s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ le segment $[\omega, z]$ est contenu dans Ω . On dit alors que Ω est étoilé en ω . En particulier, un ouvert convexe est étoilé.

Proposition VII.1.4.

Un ouvert étoilé est simplement connexe.

1. Le groupe libre à deux générateurs x et y se compose du mot vide e , qui joue le rôle d'élément neutre, et de tous les « mots » formés à partir des symboles x, x^{-1}, y et y^{-1} et dans lesquels n'apparaissent pas les séquences $xx^{-1}, x^{-1}x, yy^{-1}$ ou $y^{-1}y$ (on dit que ces mots sont réduits). La « loi de composition interne » est la concaténation de deux mots, étant entendu que les séquences $xx^{-1}, x^{-1}x, yy^{-1}$ ou $y^{-1}y$ sont réduites, i.e. n'apparaissent pas. Par exemple la concaténation de $xyx^{-1}y$ et de $y^{-1}xyx^{-1}x$ est $xyyx^{-1}x$ et la concaténation d'un mot avec e est le mot lui-même

Démonstration. Supposons Ω étoilé en ω . Soit γ_0 un lacet de Ω . On vérifie que

$$\gamma(s, t) := s\omega + (1 - s)\gamma_0(t),$$

est une homotopie de lacets entre γ_0 et le lacet constant de valeur ω . \square

VII.2 Invariance par homotopie de l'intégrale sur un lacet d'une fonction holomorphe

Théorème VII.2.1.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , γ une homotopie de lacets entre γ_0 et γ_1 dans Ω , et $f \in \text{Hol}(\Omega)$, alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Démonstration. Soit $n > 0$ et $K_{i,j}$ le carré plein

$$K_{i,j} := \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right].$$

On a

$$K := [0, 1]^2 = \bigcup_{0 \leq i, j \leq n-1} K_{i,j}.$$

On note $C := \partial K$, et $C_{i,j} := \partial K_{i,j}$ les bords de K et de $K_{i,j}$, pour tous $0 \leq i, j, \leq n-1$. On considère ces bords comme des lacets orientés dans le sens direct. Soit

$$\gamma : K \rightarrow \Omega,$$

une homotopie entre γ_0 et γ_1 . On note v le chemin $v(s) := \gamma(s, 0) = \gamma(s, 1)$.

On décompose l'arc image $\Gamma = \gamma(C)$ de a manière suivante

$$\Gamma = \gamma_0^{opp} \cup v \cup \gamma_1 \cup v^{opp}.$$

On déduit la formule — du moins, dans le cas où v est également de classe \mathcal{C}^1 par morceaux —, de l'intégrale de f le long de Γ

$$(VII.2.1) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_v f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_v f(z) dz.$$

L'idée est maintenant, grâce à la compacité de K , de « grillager » la surface $\gamma(K)$ en une réunion finie de surfaces contenues dans des ouverts assez petits dans lesquels $f(z) dz$ a une primitive holomorphe grâce au Corollaire VI.3.6. L'intégrale de f le long de Γ sera alors la somme des intégrales de f sur les bords des surfaces $\Gamma_{i,j} = \gamma(K_{i,j})$ (on utilise ici la propriété d'additivité de l'intégrale sur une composée de chemins) et donc cette intégrale sera nulle en vertu du Théorème VI.1.8. D'une certaine manière, on pourrait s'arrêter là, le reste n'étant que mise en forme technique de l'idée exposée. Expliquons malgré tout les détails.

On recouvre $\gamma(K)$ par des disques ouverts $D_\alpha \subset \Omega$, $\alpha \in A$, sur lesquels f admet une primitive holomorphe (voir le Corollaire VI.3.6). Comme $\gamma(K)$ est un compact—comme image d'un compact par une application continue—on peut choisir un nombre de Lebesgue $\delta > 0$ du recouvrement. Par définition, on a

$$\forall x \in \gamma(K), \quad \exists \alpha \in A \quad \text{tel que} \quad D(x, \delta) \subset D_\alpha.$$

Comme γ est continue, elle est uniformément continue sur le compact K (Théorème de Heine). Ceci permet de choisir n assez grand de sorte que pour tout $x, y \in K$ contenus dans un carré de côté $1/n$ on ait $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \delta$. On a alors

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \exists \alpha \in A \quad \text{tel que} \quad \gamma(K_{i,j}) \subset D_\alpha.$$

On pourrait être tenté de prendre $\Gamma_{i,j}$ comme étant le chemin image du bord orienté (dans le sens direct) de $C_{i,j}$. Ceci est correct si l'on suppose de plus que γ est de classe \mathcal{C}^1 . Mais, pour les applications, il est préférable de ne pas supposer que γ est de classe \mathcal{C}^1 . L'idée est alors de remplacer les chemins intermédiaires par des chemins affines par morceaux.

On commence par remplacer $\gamma(0, t), \gamma(1, t)$ par des chemins affines par morceaux, tout en restant dans les disques D_α dans chaque pas de la subdivision. Pour cela, on définit $\Gamma_{-1,j}$ comme le chemin orienté obtenu en composant le chemin γ restreint à $\{0\} \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ avec le segment $[\gamma(0, \frac{j+1}{n}), \gamma(0, \frac{j}{n})]$. De même, on définit $\Gamma_{n,j}$ comme l'opposé du chemin orienté obtenu en composant le chemin γ restreint à $\{1\} \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ avec le segment $[\gamma(1, \frac{j+1}{n}), \gamma(1, \frac{j}{n})]$. Enfin, on « grille » en définissant $\Gamma_{i,j}$, pour $i, j = 0, \dots, n-1$, comme étant le chemin orienté affine par morceaux dont l'image est un quadrilatère orienté de sommets $\gamma(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}), \gamma(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}), \gamma(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n})$ et $\gamma(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n})$.

Comme le disque D_α qui contient $\gamma(K_{i,j})$ est convexe, il contient $\Gamma_{i,j}$. Comme f a une primitive sur D_α , l'intégrale de f le long du lacet $\Gamma_{i,j}$ est nulle. Par construction, les $\Gamma_{i,j}$, pour $-1 \leq i, j \leq n$, grillagent $\gamma(C)$ (remarquons que les bords de deux quadrilatères consécutifs ont un côté commun). Par additivité de l'intégrale, on a

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=-1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\Gamma_{i,j}} f(z) dz,$$

car les contributions des côtés intérieurs se détruisent deux à deux et donc, grâce à la formule (VII.2.1)²

$$0 = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz,$$

ce qui termine la démonstration. □

On obtient le :

Corollaire VII.2.2.

On suppose Ω simplement connexe. Alors, pour tout lacet γ de Ω et pour toute fonction holomorphe $f \in \text{Hol}(\Omega)$, on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

2. La formule (VII.2.1) est maintenant valable ici car le chemin continu a été remplacé par un chemin affine par morceaux.

Démonstration. Considérer une homotopie de lacets entre le lacet γ et un lacet constant et appliquer le théorème précédent. \square

Remarque VII.2.3. Il peut être intéressant de faire le lien entre le résultat du Corollaire VII.2.2 et le Théorème de la divergence (Formule de Green-Riemann) qui est d'un usage fréquent en physique. Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{C})$, on peut décomposer $f = P + iQ$ où P et Q sont deux fonctions à valeurs réelles. Supposons que Γ est le bord (orienté positivement) d'un domaine compact $U \subset \Omega$. Dans ce cas

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (Pdx - Qdy) + i \int_{\Gamma} (Qdx + Pdy).$$

Le Théorème de Green-Riemann, nous donne alors

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = - \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + i \int_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Supposons maintenant que f est une fonction holomorphe, les conditions de Cauchy réelles nous assurent justement que les deux membres de droite sont nuls. On retrouve donc le fait que, dans le cas particulier où Γ est le bord d'un domaine du plan U et où f est holomorphe sur U , on a

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

VII.3 Indice d'un lacet

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet dans \mathbb{C} dont on note Γ l'image et soit $z_0 \notin \Gamma$.

Définition VII.3.1.

L'indice de γ en z_0 est défini par

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt.$$

On vérifie que $\text{Ind}_{z_0}(\gamma^{\text{opp}}) = -\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ (voir la Définition VI.1.1).

Proposition VII.3.2.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet dans \mathbb{C} dont on note Γ l'image. Alors pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, $\text{Ind}_z(\gamma)$ est dans \mathbb{Z} . La fonction $z \mapsto \text{Ind}_z(\gamma)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Démonstration. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note

$$f(t) := \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0} du \right).$$

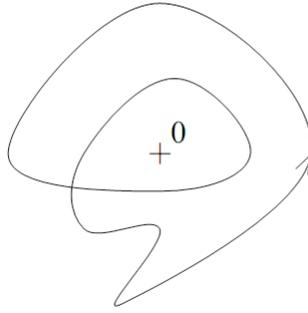


FIGURE VII.3 – Lacet d'indice 2 par rapport à l'origine.

On vérifie que

$$\frac{f'}{f} = \frac{(\gamma - z_0)'}{\gamma - z_0},$$

sauf aux points où γ n'est pas \mathcal{C}^1 , mais ces points sont en nombre fini. On a donc

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \frac{\gamma(t) - z_0}{\gamma(0) - z_0}.$$

Comme $f(0) = 1$ et $\gamma(0) = \gamma(1)$, on a $f(1) = 1$ et donc $e^{2i\pi \text{ind}_{z_0}(\gamma)} = 1$, ce qui termine la démonstration du premier point. Ensuite, on vérifie facilement par les théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale que $z_0 \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt$ est continue. Etant à valeurs entières, elle est constante sur les composantes connexes de son ensemble de définition. \square

Géométriquement parlant, l'indice de γ en z_0 compte algébriquement le nombre de tours que fait γ autour de z_0 .

Exemple VII.3.3. Soit D un disque (ouvert) de \mathbb{C} et $C = \partial D$ le bord de ce disque. On suppose C parcouru dans le sens trigonométrique. On vérifie alors que

$$\text{Ind}_{z_0}(C) = 1,$$

pour tout $z_0 \in D$. Pour le vérifier, on peut considérer le cas du disque unité centré à l'origine, développer la fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ en puissances de $1/z$ et appliquer la formule intégrale de Cauchy. Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$, on vérifie que

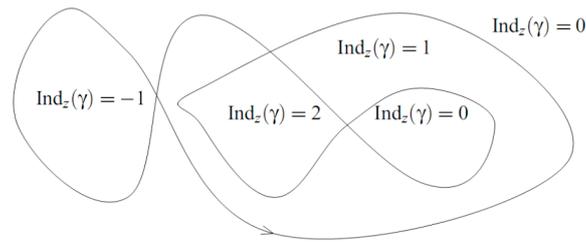
$$\text{Ind}_{z_0}(C) = 0.$$

Pour le démontrer, on peut par exemple appliquer la formule intégrale de Cauchy à $f \equiv 1$.

Proposition VII.3.4.

L'indice est invariant par homotopie de lacets. Plus précisément, s'il existe une homotopie dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ entre deux lacets γ_0 et γ_1 , alors $\text{Ind}_{z_0}(\gamma_0) = \text{Ind}_{z_0}(\gamma_1)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème VII.2.1. Il est bien sûr crucial qu'aucun des lacets γ_s de l'homotopie ne passe par z_0 .

FIGURE VII.4 – Variation de l'indice d'un lacet par rapport à la position de z .

VII.4 Fonctions méromorphes, résidus

Commençons par définir la notion de fonction méromorphe.

Définition VII.4.1.

Soit $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On dit que z_0 est un pôle de f si :

- (i) f ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en z_0 ,
 - (ii) il existe un entier $m \in \mathbb{N}^\times$ tel que $(z - z_0)^m f$ est bornée au voisinage de z_0 .
- Une fonction f est *méromorphe* sur Ω si f est holomorphe en dehors d'une partie P de Ω sans point limite dans Ω et si les points de P vérifient la condition (ii) ci-dessus, de sorte que ce sont soit des points où la fonction se prolonge en une fonction holomorphe, soit des pôles de f .

Les fonctions holomorphes sont évidemment méromorphes. Si f, g sont deux fonctions méromorphes sur Ω et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors les fonctions $\alpha f + \beta g$ et fg sont elles aussi méromorphes.

Remarque VII.4.2. La propriété pour la partie P de Ω d'être sans point limite (i.e. il n'y a pas de point dans $\Omega \setminus P$ qui soit limite d'une suite de points de P) est plus forte que d'être constituée de points isolés. Par exemple, l'ensemble $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ a un point limite dans \mathbb{C} qui est 0, mais est constitué de points isolés dans \mathbb{C} . L'union de deux parties P_1 et P_2 sans point limite est encore sans point limite, et ainsi, on voit facilement que la somme de deux fonctions méromorphes sur Ω est encore méromorphe.

Proposition VII.4.3.

Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . Alors $g := \frac{1}{f}$ est méromorphe sur Ω

Démonstration. On sait déjà que g est holomorphe sur $\Omega \setminus Z$, où Z est l'ensemble des zéros de f , qui est formé de points isolés d'après le théorème VI.6.4. Il s'agit donc de montrer que tout point $z_0 \in Z$ est un pôle de g . Mais au voisinage de z_0 , f admet un

développement en série entière de la forme $f(z) = (z - z_0)^N \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, avec $N \geq 1$ et $a_0 \neq 0$. Ainsi, au voisinage de z_0 ,

$$(z - z_0)^N g(z) = \left(a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n \right)^{-1}$$

qui se prolonge par continuité en z_0 et reste donc bornée dans un voisinage de z_0 . \square

Proposition VII.4.4.

Soit f une fonction méromorphe sur Ω et $z_0 \in \Omega$. Alors, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que

$$f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n (z - z_0)^n,$$

sur $D(z_0, r)^\times$. On dira que f admet un *développement de Laurent*^a dans un voisinage de z_0 . Ce développement est unique et l'on a convergence normale de la série sur la couronne

$$C_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} := \{z \in \Omega : \varepsilon < |z - z_0| < \bar{\varepsilon}\},$$

pour tout $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} < r$.

Enfin, si f admet un pôle en z_0 si et seulement si $m \geq 1$ et $\exists n \leq -1, a_n \neq 0$.

^a. Pierre Alphonse Laurent, X 1830;

Démonstration. Soit P l'ensemble entrant dans la définition de la méromorphie de f sur Ω . Si $z_0 \in \Omega \setminus P$, f est holomorphe au voisinage de z_0 , et l'assertion à démontrer est déjà connue.

Soit $z_0 \in P$. Par définition, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ est holomorphe sur $D^\times := D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et est bornée sur $D := D(z_0, r)$.

Maintenant, g est une fonction holomorphe sur D^\times dont le module, $|g|$, est borné sur D par une constante $M > 0$, on peut utiliser les estimées de Cauchy (voir le Corollaire VI.3.5) appliquées à g sur le disque $D(z, |z - z_0|/2) \subset D^\times$ pour obtenir la majoration

$$|g'(z)| \leq \frac{2M}{|z - z_0|},$$

pour tout $z \in D(z_0, r/2) - \{z_0\}$. On en déduit que

$$h(z) := (z - z_0)^2 g(z) = (z - z_0)^{m+2} f(z),$$

est de classe \mathcal{C}^1 en z_0 , de plus $h'(z_0) = 0$ de sorte que $h \in \text{Hol}(D)$. Or on sait que les fonctions holomorphes admettent sur D un unique développement en série entière

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

qui converge normalement sur tout compact contenu dans D (voir le Corollaire VI.3.5). On a alors,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n-2-m},$$

sur le disque épointé D^\times . La réciproque est évidente. \square

Corollaire VII.4.5.

Avec les notations ci-dessus, soit $z_0 \in P$ et supposons que la fonction f reste bornée au voisinage de z_0 (par exemple si f se prolonge par continuité en z_0). Alors f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 .

Démonstration. : On considère le développement en série de Laurent en z_0 pour étudier le comportement asymptotique de $|f|$ en z_0 . Le terme prépondérant est celui de la puissance la plus négative de z , et l'on voit que pour que la fonction reste bornée au voisinage de z_0 il faut qu'il n'y ait pas de puissance négative de z dans le développement. Autrement dit celui-ci est un développement en série entière donc holomorphe en z_0 . \square

Définition VII.4.6.

Avec les notations précédentes, on définit $\text{res}_{z_0}(f)$, le *résidu de f en z_0* , par la formule

$$\text{res}_{z_0}(f) := a_{-1}.$$

La propriété suivante est une conséquence directe du résultat de la Proposition VII.4.4 :

Corollaire VII.4.7.

L'application $f \mapsto \text{res}_{z_0}(f)$ est une forme linéaire sur l'espace des fonctions méromorphes sur Ω à valeurs dans \mathbb{C} .

Le lien entre l'intégration sur un chemin fermé et le résidu d'une fonction méromorphe est donné par l'énoncé suivant :

Proposition VII.4.8.

Soit $z_0 \in \Omega$ un pôle de la fonction méromorphe f . Alors, pour tout $r > 0$ assez petit, on a

$$\text{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} f(z) dz,$$

où $C(z_0, R)$ désigne le cercle de centre z_0 et de rayon R , que l'on suppose parcouru dans le sens trigonométrique.

Démonstration. Le développement de Laurent de f en z_0

$$f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n (z - z_0)^n,$$

est normalement convergent sur $C(z_0, r)$ pourvu que $r > 0$ soit assez petit. Par conséquent, on peut intégrer terme à terme cette série. Or, on a

$$\int_{C(z_0, r)} (z - z_0)^n dz = i r^{1+n} \int_0^{2\pi} e^{i(1+n)\theta} d\theta,$$

qui vaut 0 si $n \neq -1$ et $2i\pi$ sinon. Conclusion, on a

$$\begin{aligned} \int_{C(z_0, r)} f(z) dz &= \int_{C(z_0, r)} \left(\sum_{n \geq -m} a_n (z - z_0)^n \right) dz \\ &= \sum_{n \geq -m} \left(\int_{C(z_0, r)} a_n (z - z_0)^n dz \right) \\ &= 2i\pi a_{-1}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

VII.5 La formule des résidus

Dans cette section, nous allons donner une puissante formule d'intégration qui permet de calculer, pour toute fonction où $f \in \text{Hol}(\Omega)$, la circulation³ de la *forme différentielle* $f(z) dz$ le long d'une courbe fermée. Nous avons déjà vu la formule,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

qui est valable pour tout lacet $\gamma \subset \Omega$ pourvu que la fonction f soit holomorphe sur Ω et admette une primitive holomorphe F sur Ω (voir le Théorème VI.1.8). Énonçons maintenant la formule générale :

Théorème VII.5.1 (Formule des résidus).

On suppose que Ω est un ouvert *simplement connexe*. Soit f une fonction *méromorphe* sur Ω , qui a un ensemble fini de pôles S . Soit γ un lacet inclus dans $\Omega \setminus S$. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{s \in S} \text{res}_s(f) \text{Ind}_s(\gamma).$$

Le Théorème précédent assure que si Ω est simplement connexe, et si f est holomorphe l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

est nulle le long de tout lacet γ , ce qui est une généralisation de la formule de Cauchy pour un cercle (un disque étant convexe donc simplement connexe). On verra par ailleurs

3. Cette notion est largement utilisée en physique (par exemple dans l'énoncé du théorème d'Ampère sur la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé) et en mathématiques (par exemple dans la formule de Green-Riemann sur l'intégrale curviligne des formes différentielles).

que toutes les fonctions holomorphes admettent des primitives sur les ouverts simplement connexes (voir le Théorème VIII.1.1). Donc, le Théorème des résidus est compatible avec le Théorème VI.1.8, ce qui somme toute est assez heureux.

Démonstration. Écrivons le développement de Laurent de f au point $s \in S$

$$f(z) = \sum_{n \geq -N} a_n (z - s)^n = Q_s(z) + \sum_{n \geq 0} a_n (z - s)^n,$$

pour z proche de $s \in S$ où les coefficients a_n et la fonction Q_s dépendent du point s . La fonction $f(z) - \sum_{s \in S} Q_s(z)$ est holomorphe sur Ω qui est supposé simplement connexe donc, d'après le Corollaire VII.2.2, on a

$$\int_{\gamma} \left(f(z) - \sum_{s \in S} Q_s(z) \right) dz = 0.$$

Mais, pour $n \neq -1$, la fonction $z \mapsto (z - s)^n$ a une primitive dans un voisinage de γ , on conclut que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} Q_s(z) dz = a_{-1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - s} = \operatorname{res}_s(f) \operatorname{Ind}_s(\gamma).$$

Ce qui termine la démonstration de la formule des résidus. \square

Remarque VII.5.2. La démonstration montre que l'hypothèse « Ω simplement connexe » peut être remplacée par « le lacet γ est homotope à un lacet constant ».

VII.6 Formule des résidus et le calcul d'intégrales

La formule des résidus permet de calculer de nombreuses intégrales autrement inaccessibles. Elle est particulièrement utile pour les transformations de Fourier, bien que ce ne soit pas sa seule utilisation. Donnons — sans preuve — une méthode basée sur la formule des résidus, qui permet de calculer des intégrales. Le lecteur justifiera au cas par cas cette méthodes sur les exemples.

On se donne un ouvert connexe borné U de \mathbb{C} dont le bord est un arc \mathcal{C}^1 par morceaux. Par exemple, U pourra être un disque, un demi-disque ou plus généralement un secteur angulaire d'un disque, un triangle, un polygone... Ainsi, γ tourne autour de chaque point de U une seule fois. On peut supposer (quitte à renverser le sens de parcours) que γ est orienté dans le sens direct. Ceci signifie que $\gamma(t) - i\varepsilon\gamma'(t)$ est dans U pour tout ε assez petit). Dans ce cas, l'indice des points de U relativement à γ est égal à 1. En pratique, cette dernière assertion est très facile de justifier en utilisant l'invariance par homotopie de l'indice et en déformant continûment γ en un cercle par exemple.

Soit maintenant Ω un ouvert simplement connexe contenant \bar{U} , l'adhérence de U , et f une fonction méromorphe sur Ω . On suppose que f n'a pas de pôle sur γ . On note S l'ensemble des pôles de f qui sont contenus dans U . C'est un ensemble fini (exercice). La formule des résidus s'écrit alors

$$(VII.6.1) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{s \in S} \operatorname{res}_s(f),$$

ce qui permet de calculer l'intégrale de f le long de γ .

À titre d'exemple, expliquons comment la méthode ci-dessus permet de calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Elle est donnée par l'intégrale

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx.$$

Supposons dans un premier temps que $\xi > 0$ et considérons, pour tout $R > 0$ l'ouvert

$$U_R := \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) < 0, \quad |z| < R\},$$

dont le bord Γ_R est constitué du segment réel $[-R, R]$ et de l'arc de cercle inférieur $\{Re^{i\theta} : \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$. On a alors

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2} dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\exp(-iRe^{i\theta}\xi)}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} d\theta$$

La seconde intégrale s'estime en module par

$$\left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\exp(R \sin \theta \xi)}{R^2 - 1} R d\theta \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1},$$

qui tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. Grâce à la formule (VII.6.1), on a

$$- \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2} dz = 2i\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{z \in U_R} \operatorname{res}_z \left(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2} \right).$$

Or la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right)$ n'a que deux pôles, et seul $-i$ est dans U_R (dès que $R > 1$). En ce point le résidu de cette fonction vaut $\frac{i}{2}$. Conclusion, nous avons démontré que

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\xi}.$$

Le calcul dans le cas où $\xi < 0$ se ramène au calcul ci-dessus par parité, car le changement de variable $y = -x$ montre que $\hat{f}(-\xi) = \hat{f}(\xi)$. En conclusion, on a montré que

$$\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

On trouvera dans les exercices d'autres applications de cette technique.

VII.7 Exercices

Exercice VII.7.1. Déterminer si les fonctions suivantes de la variable complexe z sont méromorphes sur \mathbb{C} et déterminer leurs pôles éventuels

$$f(z) := \frac{z^2}{z^4 + 1}, \quad g(z) := \frac{1 - \cos z}{z^2}, \quad h(z) := \sin(1/z), \quad k(z) := \frac{1}{\cosh z}.$$

Exercice VII.7.2. Soit $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que $z \mapsto f(1/z)$ est méromorphe en 0 si et seulement si f est une fonction polynomiale.

Exercice VII.7.3. Déterminer les pôles et résidus des fonctions suivantes

$$f(z) := \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}, \quad g(z) := \cot z, \quad h(z) := \frac{\sin z}{(z+2)^2}.$$

Exercice VII.7.4. Soit $f : D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1) Soit g une fonction holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$. Vérifier que

$$r \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} g(z) dz,$$

ne dépend pas de $r \in]0, 1[$.

2) Soit $z \in D(0, 1) \setminus \{0\}$. Montrer que la fonction g définie sur $D(0, 1) \setminus \{0, z\}$ par

$$g(\zeta) := \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta},$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$.

3) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

pour tout $0 < s < |z| < r < 1$.

4) En déduire que f admet un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

dans $D(0, 1) \setminus \{0\}$ avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

5) Montrer que f possède un prolongement holomorphe dans $D(0, 1)$ si et seulement si $|f(z)|$ reste borné quand $|z|$ tend vers 0.

6) Montrer que f est méromorphe, non holomorphe, dans $D(0, 1)$ si et seulement si $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 0.

7) Soit $\epsilon > 0$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $D(a, r)$ n'intersecte pas l'image de $D(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ par f . Montrer que la fonction g définie sur $D(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ par

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a},$$

se prolonge en une fonction holomorphe en 0.

8) On suppose que f n'est pas méromorphe en 0. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, l'image de $D(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ par f est dense dans \mathbb{C} .

Exercice VII.7.5 (Automorphismes de \mathbb{C}). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un automorphisme de \mathbb{C} , c'est-à-dire une bijection holomorphe de \mathbb{C} dans lui-même dont la réciproque f^{-1} est aussi holomorphe. On suppose $f(0) = 0$. Montrer en utilisant la question (8) de l'exercice VII.7.4 que $z \mapsto g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ est méromorphe en 0 et en déduire que f est de la forme $z \mapsto az$ pour un certain $a \in \mathbb{C}^\times$. Quelle est la forme générale d'un automorphisme de \mathbb{C} ?

Exercice VII.7.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_{\Gamma} \left(z + \frac{1}{z} \right)^n \frac{dz}{z},$$

où Γ désigne le cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru dans le sens direct. En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx.$$

Exercice VII.7.7. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n + 2$, calculer

$$I_{n,m} := \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^m} dx.$$

Exercice VII.7.8. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

On pourra utiliser la formule des résidus en prenant une ellipse comme lacet.

Exercice VII.7.9 (Principe de réflexion de Schwarz).

Soit D le disque unité. Notons $D^+ = \{z \in D \mid \Im m(z) \geq 0\}$ le demi-disque supérieur et $D^- = \{z \in D \mid \Im m(z) \leq 0\}$ le demi-disque inférieur.

1) On suppose que $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et holomorphe sur $D \setminus]-1, 1[$. Montrer que f est holomorphe sur D .

2) Soit $f : D^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue holomorphe sur $D^+ \setminus]-1, 1[$ et prenant des valeurs réelles sur $] -1, 1[$. On définit F sur D par $F(z) = f(z)$ si $z \in D^+$ et $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $z \in D^-$. Montrer que f est holomorphe sur D .

3) Généraliser l'énoncé (1) à un ouvert Ω rencontrant \mathbb{R} quelconque et (2) à un ouvert Ω rencontrant \mathbb{R} et stable par conjugaison complexe.

Exercice VII.7.10 (La fonction \wp de Weierstrass). Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau i.e. un sous-groupe discret de la forme $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ où ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . On rappelle, ou on admet, ou on le démontre que pour tout entier $k \geq 3$ la série

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|^k}$$

est convergente. 1) Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} qui est Λ -périodique i.e. satisfait

$$f(z + \lambda) = f(z),$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$. Montrer que f est constante.

2) Montrer que la série

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right),$$

définit une fonction méromorphe Λ -périodique sur \mathbb{C} et paire dont on précisera les pôles. Pour établir la périodicité, on calculera $\wp'(z)$.

3) Pour tout entier $k \geq 3$, on pose

$$E_k(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k}.$$

Etablir que

$$\frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \lambda^{-k-2} (-1)^k z^k$$

en déduire le développement en série de Laurent de $\wp(z)$ au voisinage de 0 en fonction des $E_k(\Lambda)$. Remarquer que les E_k avec k impair sont nuls.

Montrer que

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60E_4(\Lambda)\wp(z) - 140E_6(\Lambda).$$

VII.8 Le théorème de Rouché

Le théorème de Rouché⁴ est un résultat qui permet de comparer le nombre de zéros et de pôles de deux fonctions méromorphes qui sont, en un sens à préciser, proches. Ce théorème peut en particulier être utilisé pour localiser les pôles et les zéros des fonctions méromorphes. On commence par le :

Lemme VII.8.1.

Soit g une fonction méromorphe sur un ouvert Ω et soit U un ouvert tel que $\bar{U} \subset \Omega$. On suppose que le bord Γ de U est un lacet orienté positivement qui ne contient pas de pôles ni de zéros de g . Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = Z_g - P_g$$

où Z_g et P_g sont le nombre de zéros et de pôles de g (dans U (les zéros et pôles étant comptés avec multiplicité)).

Démonstration. On écrit en un point z_0 de Ω le développement en série de g sous la forme $g(z) = (z - z_0)^N g_1(z)$, avec g_1 holomorphe ne s'annulant pas dans un voisinage de z_0 , et l'on a alors

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{N}{z - z_0} + \frac{g_1'(z)}{g_1(z)}$$

On applique la formule des résidus, en constatant que l'ensemble des pôles de $\frac{g'(z)}{g(z)}$ est exactement la réunion de l'ensemble des zéros et de l'ensemble des pôles de g , d'après la formule qui précède, valide aussi pour $N = 0$ et pour $N < 0$. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le :

4. Eugène Rouché, X 1852.

Théorème VII.8.2 (Théorème de Rouché).

Soient f et g deux fonctions méromorphes sur un ouvert Ω de \mathbb{C} , et U un ouvert tel que $\bar{U} \subset \Omega$. On suppose que le bord Γ de U est un lacet orienté positivement et que

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad \text{pour tout } z \in \Gamma.$$

Alors

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

où Z_f et P_f (respectivement Z_g et P_g) sont le nombre de zéros et de pôles de f (respectivement de g) dans U (les zéros et pôles étant comptés avec multiplicité).

Démonstration. Posons $h = f/g$: c'est une fonction méromorphe sur Ω . Remarquons que l'hypothèse implique que g ne s'annule pas sur Γ , et celle-ci se réécrit

$$|1 - h(z)| < 1, \quad (\forall z \in \Gamma).$$

La fonction h est holomorphe dans un voisinage de Γ et $h(\Gamma) \subset D(1, 1)$ est une courbe fermée. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{h(\Gamma)} \frac{dz}{z} = 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)g(z) - f(z)f'(z)}{f(z)g(z)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme précédent pour conclure. \square

Le Théorème de Rouché permet de donner une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. En effet, si $P \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ est un polynôme de degré $n \geq 1$, on note

$$f(z) := P(z) \quad \text{et} \quad g(z) = a_n z^n,$$

où a_n est le coefficient du terme de plus haut degré de P . Si $R > 0$ est choisi assez grand,

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|,$$

sur $C(0, R)$. Le théorème de Rouché nous assure que f et $z \rightarrow z^n$ ont le même nombre de zéros (comptés en tenant compte de la multiplicité des zéros) dans $D(0, R)$. Donc P a n zéros dans $D(0, R)$.

Le lecteur trouvera dans les exercices suivants d'autres applications du Théorème de Rouché.

Exercice VII.8.3. On note $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans \mathbb{C} , \bar{D} son adhérence et $C := \partial D$.

- 1) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω qui contient \bar{D} . On suppose que $|f(z)| < 1$ sur C . Montrer que $f(D) \subset D$ et que f a un unique point fixe dans D .
- 2) Déterminer le nombre de racines de $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z - 1$ dans D .
- 3) Déterminer le nombre de racines de $Q(z) = z^4 - 6z + 3$ dans l'anneau

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Exercice VII.8.4. Soit $n \in \mathbb{N}^\times$.

1) Montrer que

$$|\sin z| < |z \cos z|,$$

pour tout $z = x + iy$ tel que $\max(|x|, |y|) = n\pi$.

2) En déduire que toutes les solutions de $\tan z = z$ sont réelles.

Chapitre VIII

Existence de primitives - Logarithme Complexe

VIII.1 Existence de primitives

Nous avons déjà vu un résultat local d'existence de primitive holomorphe pour une fonction holomorphe (voir le Corollaire VI.3.6). Démontrons maintenant le :

Théorème VIII.1.1.

Toute fonction f qui est holomorphe sur un ouvert Ω simplement connexe, admet sur cet ouvert une primitive holomorphe qui est unique à une constante additive près.

Démonstration. Donnons nous $z_0 \in \Omega$. L'ensemble des points de Ω qui peuvent être reliés à z_0 par un chemin (même polygonal par morceaux) est clairement un ouvert et un fermé non vide de Ω . Comme Ω est connexe, cet ensemble est égal à Ω . Pour tout $\omega \in \Omega$, choisissons γ_ω un chemin reliant z_0 à ω et définissons

$$F(\omega) := \int_{\gamma_\omega} f(z) dz.$$

Si γ'_ω est un autre chemin qui relie z_0 à ω , le chemin $\gamma'_\omega \vee \gamma_\omega^{opp}$ est alors un lacet, homotope à un lacet constant (car, par hypothèse, Ω est simplement connexe). D'après l'invariance par homotopie de l'intégrale le long d'un lacet (voir le Théorème VII.2.2), on a

$$\int_{\gamma_\omega} f(z) dz - \int_{\gamma'_\omega} f(z) dz = 0.$$

Autrement dit, $F(\omega)$ ne dépend pas du choix du chemin qui relie z_0 à ω . Soit $r > 0$ tel que $D(\omega, r) \subset \Omega$. Pour tout $h \in D(0, r)$, puisque le choix du chemin est indifférent pour le calcul de $F(\omega + h)$, on peut choisir le chemin

$$\gamma_{\omega+h} := \gamma_\omega \vee \gamma_{[\omega, \omega+h]},$$

où $\gamma_{[\omega, \omega+h]}(t) := \omega + th$, pour $t \in [0, 1]$. Ce qui nous donne la formule

$$\frac{F(\omega + h) - F(\omega)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{[\omega, \omega+h]}} f(z) dz = \int_0^1 f(\omega + th) dt.$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\omega + h) - F(\omega)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(\omega + th) dt = f(\omega).$$

On en déduit immédiatement que F est \mathbb{C} -dérivable en ω et que $F'(\omega) = f(\omega)$. Grâce aux propriétés de dérivabilité des intégrales, la formule ci-dessus prouve également que F est de classe \mathcal{C}^1 de sorte que F est bien une fonction holomorphe. \square

VIII.2 Logarithme complexe

Cet énoncé permet de construire de nombreuses fonctions holomorphes. En particulier, nous pouvons définir le logarithme complexe d'une fonction holomorphe h sur un ouvert Ω ne s'annulant pas.

Définition VIII.2.1.

Soit $h \in \text{Hol}(\Omega)$ ne s'annulant pas. On appelle logarithme de h et l'on note $\text{Log}(h)$ toute primitive holomorphe—lorsqu'elle existe—de la fonction h'/h .

Un logarithme complexe sur un ouvert connexe est donc bien défini à addition d'un scalaire près. Le résultat qui suit est un corollaire immédiat du théorème d'existence de primitives.

Proposition VIII.2.2.

Si Ω est un ouvert simplement connexe et si, $h \in \text{Hol}(\Omega)$ ne s'annule pas, alors la fonction h admet un logarithme complexe.

En particulier, on peut définir $z \mapsto \text{Log}(z)$ sur la *coupure* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ comme étant la primitive de $z \mapsto 1/z$ s'annulant en $z = 1$; cette fonction coïncide avec le logarithme usuel sur \mathbb{R}_+^\times (noté \log). On dira que c'est la *détermination principale du logarithme complexe*.

Exercice VIII.2.3. Démontrer les propriétés suivantes de la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$:

- (i) $\exp(\text{Log}(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $\text{Log}(\exp z) = z$ pour tout z tel que $-\pi < \Im m(z) < \pi$.
- (ii) $\text{Log}(z) = \log(r) + i\text{Arg}(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, l'argument étant ici dans $] -\pi, \pi[$.
- (iii) $\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) = \text{Log}(z_1 z_2) \pmod{2i\pi}$, quels que soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ tels que $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Soit h une fonction holomorphe et $\text{Log}(h)$ un logarithme de h . Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on peut maintenant définir

$$h^\alpha(z) := e^{\alpha \text{Log}(h(z))}.$$

Dans le cas de la détermination principale du logarithme, ceci permet par exemple de définir la *détermination principale de la racine carrée* $z \mapsto \sqrt{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ qui prolonge la

racine usuelle définie sur \mathbb{R}_+^\times . Comme c'est déjà le cas pour la fonction logarithme, on ne peut pas prolonger la racine carrée en une fonction holomorphe sur tout le plan complexe (exercice).

Dans le cas particulier où $h(z) = z$, on définit ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto z^\alpha$ par

$$z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Log}(z)},$$

sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On vérifie que l'on a là une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On vérifie aussi que la fonction

$$\alpha \mapsto z^\alpha,$$

est quant à elle holomorphe sur \mathbb{C} .

L'existence du logarithme d'une fonction holomorphe permet d'étendre les résultats sur les séries de fonctions aux produits de fonctions holomorphes.

Théorème VIII.2.4.

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions holomorphes, qui sont définies sur un ouvert Ω , qui converge normalement sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$. Alors, la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$g_n(z) := \prod_{j=0}^n (1 + f_j(z)),$$

converge, uniformément sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$, vers une fonction holomorphe g sur Ω . On note alors $g(z) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + f_j(z))$. La fonction g s'annule en un point exactement lorsque l'un des facteurs du produit infini s'annule en ce point, ce qui n'arrive que pour un nombre fini de facteurs, et l'ordre de ce zéro de g est la somme des ordres de ce zéro pour ces facteurs.

Démonstration. Étant donné un disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{z \in \bar{D}} |f_n(z)| < 1/2$, pour tout $n \geq m$. On peut utiliser le fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\operatorname{Log}(1 + \omega)| \leq C |\omega|$ pour tout $\omega \in D(0, 1/2)$ et appliquer le résultat du Théorème VI.8.2 pour montrer que la série

$$\sum_{j=m}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_j),$$

converge uniformément sur \bar{D} vers une fonction holomorphe. On en déduit que la suite de fonctions holomorphes $(g_n)_{n \geq 0}$ converge, uniformément sur tout disque fermé $\bar{D} \subset \Omega$, vers une fonction holomorphe.

Montrons maintenant l'assertion sur les zéros. Comme pour tout réel $a > 0$, on a $1 + a \leq e^a$, on en déduit que pour toute suite finie $(a_i)_{i=0, \dots, n}$ de réels positifs,

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\right).$$

D'autre part, pour toute suite finie $(z_i)_{i=0, \dots, n}$ de nombres complexes, on a facilement en développant le produit

$$\left| \prod_{i=1}^n (1 + z_i) - 1 \right| \leq \prod_{i=1}^n (1 + |z_i|) - 1,$$

d'où

$$\left| \prod_{i=1}^n (1 + z_i) - 1 \right| \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n |z_i|\right) - 1.$$

On se place sous sur un disque fermé \bar{D} contenu dans Ω . Le reste $\sum_{j=N+1}^{\infty} |f_j(z)|$ tend uniformément vers 0 lorsque N tend vers l'infini sur \bar{D} , et par continuité de $x \mapsto e^x - 1$ en 0, on voit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $M > N_0$, et pour tout $z \in \bar{D}$,

$$\left| \prod_{j=N_0+1}^M (1 + f_j(z)) - 1 \right| \leq e^{\sum_{j=N_0+1}^M |f_j(z)|} - 1 \leq \epsilon.$$

On en déduit

$$\left| \prod_{j=0}^M (1 + f_j(z)) - \prod_{j=0}^{N_0} (1 + f_j(z)) \right| \leq \epsilon \left| \prod_{j=0}^{N_0} (1 + f_j(z)) \right|,$$

Puis

$$\left| \prod_{j=0}^M (1 + f_j(z)) \right| \geq (1 - \epsilon) \left| \prod_{j=0}^{N_0} (1 + f_j(z)) \right|$$

En passant à la limite lorsque M tend vers l'infini, on obtient

$$|g(z)| = \left| \prod_{j=0}^{\infty} (1 + f_j(z)) \right| \geq (1 - \epsilon) \left| \prod_{j=0}^{N_0} (1 + f_j(z)) \right|.$$

On voit donc les zéros de g sur \bar{D} sont parmi ceux produit fini $\left| \prod_{j=0}^{N_0} (1 + f_j(z)) \right|$, et la réciproque étant évidente, l'assertion du théorème s'ensuit. \square

À titre d'illustration de ces résultats, montrons que la fonction Γ a un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Exemple VIII.2.5 (Étude de la fonction Γ). La fonction Γ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, par

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Il est facile de voir grâce aux théorèmes usuels sur les fonctions définies par des intégrales que Γ est de classe \mathcal{C}^1 comme fonction de deux variables, et par les théorèmes de dérivation sous l'intégrale, qu'elle annule l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. La fonction Γ est donc holomorphe sur le demi-plan $\Re(z) > 0$.

On laisse le soin au lecteur de montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

pour tout $\Re(z) > 0$ et en particulier $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On peut se servir de cette formule pour définir Γ comme une fonction méromorphe sur le demi-plan $\Re(z) > -1$ avec pour seul pôle $\{0\}$, puis par une récurrence simple, comme fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec pour pôles les entiers négatifs ou nuls.

Donnons maintenant une expression de Γ sous forme de produit $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. On définit la suite de fonctions

$$f_n(t) := \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^z \mathbf{1}_{[0,n]}(t),$$

dont on vérifie d'une part qu'elle converge simplement vers la fonction $z \mapsto e^{-t} t^z$ quand n tend vers $+\infty$ et d'autre part que

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{\Re(z)},$$

sur $[0, \infty[$. En appliquant le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt,$$

pourvu que $\Re(z) > 0$.

Un changement de variable nous permet d'écrire que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du,$$

et, en utilisant n intégrations par parties, on démontre que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Finalement, on conclut que pour tout z tel que $\Re(z) > 0$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} z n^{-z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

On peut réécrire l'expression qui apparaît dans le membre de droite sous la forme

$$n^{-z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) = e^{-z(\log n - \sum_{j=1}^n 1/k)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

On rappelle que la constante d'Euler est définie par

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n.$$

En particulier, la suite de fonctions

$$z \mapsto e^{-z(\log n - \sum_{j=1}^n 1/j)},$$

converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers la fonction holomorphe $z \mapsto e^{\gamma z}$.

Maintenant, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$ et tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$u_k(z) := \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} - 1.$$

On utilise le fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|(1+z)e^{-z} - 1| \leq C|z|^2,$$

pour tout $z \in \bar{D}(0, R)$, pour démontrer que

$$|u_k(z)| \leq C \frac{R^2}{k^2},$$

pour tout $z \in \bar{D}(0, R)$. En particulier, on voit que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge normalement sur tout $\bar{D}(0, R)$ et le théorème précédent nous assure que la fonction

$$z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}},$$

est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . Les entiers négatifs sont des zéros de cette fonction. Tout ceci montre que

$$z \mapsto \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}} \right)^{-1},$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ qui coïncide avec la fonction Γ sur le demi-plan $\Re(z) > 0$. Par prolongement analytique, elle coïncide avec la fonction Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}} \right)^{-1}.$$

VIII.3 Exercices

Exercice VIII.3.1. On note $\Omega := \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes définies sur Ω et dont le carré est égal à $z \mapsto z(z-1)$.

Exercice VIII.3.2. 1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $]0, +\infty[$ se prolonge de manière unique en une fonction f_α holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

2) Déterminer le développement en série entière de f_α en 1 et la dérivée de f_α .

3) Pour quels α peut-on prolonger f_α à \mathbb{C}^* , à \mathbb{C} ?

Troisième partie

Sujets d'examen

Calcul différentiel et fonctions holomorphes

Contrôle classant du 2 novembre 2016

Les résultats du cours ou des exercices vus en travaux dirigés peuvent être utilisés en donnant des références précises. Toutes les sous-variétés considérées, ainsi que les applications entre celles-ci, sont supposées de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice I

Soit $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0, xz + yz + xy = 3\}$.

- (1) Montrer que \mathcal{S} est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

Soit g la restriction de $(x, y, z) \mapsto xyz$ à \mathcal{S} .

- (2) Quels sont les points critiques de g et quelle est la valeur de g en ces points ?

Soit $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0 \text{ et } \min(x, y, z) \in]0, \frac{1}{6}[\}$.

- (3) Montrer si $(x, y, z) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{S}$, $g(x, y, z) < 1/2$.
 (4) Montrer que g atteint son sup et donner sa valeur.
 (5) Quel est le parallélépipède rectangle de \mathbb{R}^3 de surface 6 et de volume maximal ?

Exercice II

Soit \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^n . Soit \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^n intersectant \mathcal{S} , et $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de \mathcal{V} sur un ouvert \mathcal{W} de \mathbb{R}^n .

- (1) Justifier (en étant bref mais précis) que $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ et $\phi(\mathcal{S} \cap \mathcal{V})$ sont des sous-variétés de \mathbb{R}^n .

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $\theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ un difféomorphisme. On note θ^{-1} son inverse et l'on définit θ^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par $\theta^0 = \text{Id}_{\mathcal{U}}$, $\theta^{k+1} = \theta^k \circ \theta$, et $\theta^{-k} = (\theta^k)^{-1}$. On suppose que $\theta^m = \text{Id}_{\mathcal{U}}$ pour un entier $m \geq 2$. Soit $a \in \mathcal{U}$ tel que $\theta(a) = a$. Posons $A = d\theta_a$ et

$$u(x) = \sum_{p=0}^{m-1} A^{-p}(\theta^p(x)), \quad (x \in \mathcal{U}).$$

- (2) Montrer que u est un difféomorphisme local en a et que $A \circ u(x) = u \circ \theta(x)$.
 (3) Dédire des deux premières questions que $\mathcal{S} = \{a \in \mathcal{U} \mid \theta(a) = a\}$, l'ensemble des points fixes de θ , est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Exercice III

Soit X un champ de vecteurs (ne dépendant pas du temps) de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^N . Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On rappelle que le gradient de f au point $a \in \mathcal{U}$ est le vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^N$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, $df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ (le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^N).

- (1) Montrer que la fonction f est constante sur les courbes intégrales du champ de vecteurs X si et seulement si le gradient de f en tout point $a \in \mathcal{U}$ est orthogonal au vecteur $X(a)$.

Soit X le champ de vecteurs défini sur \mathbb{R}^2 par

$$X(x, y) = (y - y^5, x).$$

- (2) Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto 3x^2 - 3y^2 + y^6$ est constante sur les courbes intégrales de X .
- (3) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ l'équation $f(x, y) = c$ est une sous-variété de dimension 1 compacte de \mathbb{R}^2 . Montrer que les solutions de $f(x, y) = -2$ sont les deux points $(0, -1)$ et $(0, 1)$ et que si l'on retire le point $(0, 0)$ des solutions de $f(x, y) = 0$, on obtient une sous-variété \mathcal{S} de dimension 1 de \mathbb{R}^2 telle que $f^{-1}(\{0\}) = \mathcal{S} \cup \{(0, 0)\}$ est compacte.
- (4) Quelles sont les courbes intégrales constantes de X ?
- (5) Montrer que si $(a, b) \notin \mathcal{S}$, la courbe intégrale maximale du champ de vecteurs X de condition initiale (a, b) en $t = 0$ est définie sur \mathbb{R} tout entier.
- (6) (à ne traiter que s'il reste du temps à la fin, question hors barème). Argumenter pour justifier que l'on a aussi la même conclusion que la question précédente si la condition initiale (a, b) est dans \mathcal{S} .

Exercice IV

Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie, on note $\text{End}(V)$ l'espace des applications linéaires de E dans E et $\mathbf{GL}(V)$ l'ensemble des applications linéaires inversibles de E dans E . On rappelle que

$$\exp_V : \text{End}(V) \rightarrow \mathbf{GL}(V), \quad \lambda \mapsto \exp(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}$$

est une application de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout $\lambda \in \text{End}(V)$,

$$t \mapsto \exp(t\lambda), \quad \mathbb{R} \mapsto \mathbf{GL}(V)$$

est un morphisme de groupe de classe \mathcal{C}^∞ , unique solution de l'équation différentielle $\alpha'(t) = \lambda\alpha(t)$, avec la condition initiale $\alpha(0) = \text{Id}_V$. Soit n un entier strictement positif. On a les mêmes résultats en remplaçant $\text{End}(V)$ par $\mathcal{M} := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{GL}(V)$ par $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, pour $\exp_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice dans \mathcal{M} , on pose

$$\phi(A) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad X \mapsto \phi(A)(X) = [A, X] = AX - XA,$$

et si B est une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\Phi(B) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad X \mapsto \Phi(B)(X) = BXB^{-1}.$$

(1) Montrer que $A \mapsto \phi(A)$ est une application linéaire de \mathcal{M} dans $\mathcal{E} := \text{End}(\mathcal{M})$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}$, $\exp_{\mathcal{E}}(\phi(A))$ est donc un élément de $\mathbf{GL}(\mathcal{E})$.

(2) Soient $A, Y \in \mathcal{M}$. Montrer que les applications

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto f(t) = \Phi(\exp_{\mathcal{M}}(tA))(Y)$$

et

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto g(t) = \exp_{\mathcal{E}}(t\phi(A))(Y)$$

sont égales. (On pourra chercher une équation différentielle satisfaite par f et g .)

En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\Phi(\exp_{\mathcal{M}}(A)) = \exp_{\mathcal{E}}(\phi(A)).$$

On simplifie les notations en posant $\exp_{\mathcal{M}}(X) = \exp(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}$. Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on pose

$$u(s, t) = \exp(s(A + tY)), \quad F(s, t) = \exp(-sA) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t).$$

(3) Montrer que $F(1, 0) = \exp(-A) d(\exp)_A(Y)$.

(4) Déduire du calcul de $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t)$ que $\frac{\partial F}{\partial s}(s, 0) = \exp_{\mathcal{E}}(-s\phi(A))(Y)$.

(5) Montrer que $F(s, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{n+1} \frac{\phi(A)^n}{(n+1)!}(Y)$.

(6) En déduire une formule (sous forme de série) pour $d(\exp)_A(Y)$.

Exercice V

Déterminer $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^3 + 8)}$ pour chacun des contours Γ suivants, tous parcourus dans le sens direct :

(1) Le carré de sommets $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(10, 10)$, $(0, 10)$.

(2) Le cercle $|z| = 1$.

(3) Le cercle $|z| = 3$.

Exercice VI

Soit $\phi : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$.

(1) Montrer que ϕ réalise une bijection biholomorphe de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Quel est son inverse ?

(2) Montrer que l'image par ϕ de l'intervalle réel $] - 1, 1]$ est $] - \infty, 0]$.

(3) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ telle que $f(z)^4 = \phi(z)$ et $f(2) \in]0, +\infty[$.

- (4) Prouver $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 1$. Montrer que la fonction $g(z) = f(\frac{1}{z})$ est une fonction holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$ qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$. En déduire qu'elle est donnée par une série entière $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$. Calculer c_0 , c_1 et c_2 .
- (5) Montrer que la série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < +\infty$ est une série entière en $\frac{1}{z}$. Que valent $\int_{\Gamma} f(z) dz$ et $\int_{\Gamma} z f(z) dz$, où Γ est le cercle de centre 0 et de rayon 10, parcouru dans le sens direct ?

Correction

Exercice I

(1) Etudions $F(x, y, z) = xz + yz + xy$. On a $\nabla F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ qui ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathcal{U} = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Ainsi $df_{(x,y,z)}$ est toujours surjective sur \mathcal{U} et toutes les valeurs de la restriction de F à \mathcal{U} sont régulières. Ceci montre en particulier que $\mathcal{S} = F^{-1}(\{3\})$ est une sous-variété.

(2) Les points critiques de g à sont les points où le gradient de g et celui de F sont colinéaires. On a $\nabla g(x, y, z) = (yz, xz, xz)$ et $\nabla F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} yz(x + z) = xz(y + z) \\ xz(x + y) = xz(x + z) \\ xz(x + y) = yz(x + y) \end{cases}$$

avec en outre bien sûr la condition $(x, y, z) \in \mathcal{S}$. La seule solution est $(1, 1, 1)$ et $g(1, 1, 1) = 1$ donc le sup est ≥ 1 .

(3) Si l'une des coordonnées de $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ est dans $]0; 1/6[$ alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 6$ et ainsi

$$\frac{1}{6} > \frac{xyz}{3} = \frac{xyz}{yz + xz + xy} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^{-1},$$

d'où $xyz < 1/2$, et on ne peut pas approcher le sup sur cette partie de \mathcal{S} .

(4) Soit F le fermé $[1/6; +\infty[$ dans \mathbb{R}^3 . Son intersection avec \mathcal{S} est aussi l'intersection de F avec $F^{-1}(\{3\})$ qui est fermé. C'est donc un fermé. Mais si $(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap F$, on a

$$3 = xy + yz + xz \geq (x + y)z \geq \frac{1}{3}z,$$

et donc $z \leq 9$, et de même pour x et y . On voit donc que $\mathcal{S} \cap F$ est borné, donc compact. Le sup de la restriction de g à $\mathcal{S} \cap F$ est donc atteint, et d'après la question précédente, c'est le sup de g sur \mathcal{S} . Il est atteint en un point critique, donc en $(1, 1, 1)$ (c'est le seul point critique). On a donc $\sup_{(x,y,z) \in \mathcal{S}} g(x, y, z) = 1$.

(5) Le volume d'un parallélépipède rectangle de cotés x, y, z est xyz et sa surface est $2(xy + yz + zx)$, donc la réponse est le cube de coté 1.

Exercice II

(1) Le premier point est évident, car le fait d'être une sous-variété est une propriété locale. Pour vérifier le second, il faut choisir une caractérisation des sous-variétés parmi les 3 proposées en cours. Si l'on choisit de travailler avec la caractérisation par les paramétrages locaux, on voit assez facilement que si \mathbf{x} est un paramétrage local de $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ en a , alors $\phi \circ \mathbf{x}$ est un paramétrage local de $\phi(\mathcal{S} \cap \mathcal{V})$ en $\phi(a)$. Pour changer un peu, voyons ce que cela donne avec la caractérisation comme solution d'une équation. Soit $a \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$. On sait qu'il existe un ouvert \mathcal{V}_1 de \mathbb{R}^n contenant a (et que l'on peut supposer inclus dans \mathcal{V}) et une fonction $F : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ (où m est la dimension de \mathcal{S}) admettant 0 comme valeur régulière et telle que $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_1 = \{p \in \mathcal{V}_1 \mid F(p) = 0\}$. Comme ϕ se restreint en un difféomorphisme sur son image $\phi(\mathcal{V}_1)$, qui est donc un ouvert, on voit que la fonction $F \circ \phi^{-1}$, définie sur $\phi(\mathcal{V}_1)$, est telle que $\phi(\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_1) = \{r \in \phi(\mathcal{V}_1) \mid F \circ \phi^{-1}(r) = 0\}$. Il reste à voir que 0 est valeur régulière de $F \circ \phi^{-1}$. Soit donc $r \in \phi(\mathcal{V}_1)$ tel que $F \circ \phi^{-1}(r) = 0$.

On a $d(F \circ \phi^{-1})_r = dF_{\phi^{-1}(r)} \circ d(\phi^{-1})_r$. Or $dF_{\phi^{-1}(r)}$ est surjective car 0 est valeur régulière de F , et $d(\phi^{-1})_r$ est un isomorphisme car ϕ est un difféomorphisme. Donc $d(F \circ \phi^{-1})_r$ est surjective pour tout $r \in \phi(\mathcal{V}_1)$ et 0 est valeur régulière de $F \circ \phi^{-1}$.

(2) On calcule $du_a(h) = \sum_{p=0}^{m-1} A^{-p}(d(\theta^p)_a(h))$. Or comme $\theta(a) = a$, $d(\theta^p)_a = (d\theta_a)^p = A^p$, d'où $du_a(h) = \sum_{p=0}^{m-1} A^{-p}(A^p(h)) = mh$. Ainsi $du_a = m\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, qui est inversible, et l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale.

Remarquons que comme $\theta^m = \text{Id}_{\mathcal{U}}$, on obtient en différentiant cette égalité et en évaluant en a que $A^m = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et l'on a alors

$$\begin{aligned} A \circ u(x) &= \sum_{p=0}^{m-1} A^{-p+1}(\theta^p(x)) = \sum_{p=-1}^{m-2} A^{-p}(\theta^{p+1}(x)) = \sum_{p=0}^{m-2} A^{-p}(\theta^{p+1}(x)) + A^{-1}(x) \\ &= \sum_{p=0}^{m-2} A^{-p}(\theta^{p+1}(x)) + A^{-1}A^m(\theta^m(x)) = \sum_{p=0}^{m-1} A^{-p}(\theta^p(\theta(x))) = u \circ \theta(x). \end{aligned}$$

(3) Soit $a \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_a de a dans \mathcal{U} et un voisinage ouvert \mathcal{V}_a de $u(a)$ tel que u soit un difféomorphisme de \mathcal{U}_a sur \mathcal{V}_a . Montrons que $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}_a$ est une sous-variété. Comme le fait d'être une sous-variété est une propriété locale, ceci suffit à montrer que \mathcal{S} est une sous-variété. D'après la question précédente encore, si $x \in \mathcal{U}_a$, alors x est dans \mathcal{S} si et seulement si $u(x)$ est dans le sous-espace propre de A pour la valeur propre 1. Notons $E \subset \mathbb{R}^n$ ce sous-espace. Un sous-espace vectoriel est une sous-variété, et donc d'après la première question, $E \cap \mathcal{V}_a$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}_a = u^{-1}(E \cap \mathcal{V}_a)$ sont des sous-variétés.

Exercice III

(1) Soit α une courbe intégrale du champ de vecteur X . La fonction $t \mapsto f(\alpha(t))$ est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, c'est-à-dire si $df_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$. Or pour tout $a \in \mathcal{U}$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $df_a(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle$ et d'autre part $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. On obtient donc que $t \mapsto f(\alpha(t))$ est constante si et seulement si pour tout t ,

$$\langle \nabla f(\alpha(t)), X(\alpha(t)) \rangle = 0.$$

Supposons que pour tout $a \in \mathcal{U}$, $\langle \nabla f(a), X(a) \rangle = 0$. Alors f est constante sur la courbe intégrale α . Réciproquement, pour tout $a \in \mathcal{U}$, si f est constante sur toute courbe intégrale α , on prend la courbe intégrale de condition initiale a à $t = 0$ dont l'existence est garantie sur un intervalle ouvert contenant 0 par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient en évaluant

$$\langle \nabla f(\alpha(t)), X(\alpha(t)) \rangle = 0.$$

en $t = 0$ que $\langle \nabla f(a), X(a) \rangle = 0$.

(2) On a $\nabla f(x, y) = (6x, -6y + 6y^5)$ et

$$\langle \nabla f(x, y), X(x, y) \rangle = 6x(y - y^5) + (-6y + 6y^5)x = 0.$$

On conclut grâce à la première question.

(3) Si c est une valeur régulière, $f(x, y) = c$ définit une sous-variété de \mathbb{R}^2 . Or c est une valeur régulière, si pour tout (x, y) tel que $f(x, y) = c$, $df_{(x,y)}$ est surjective. Une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est surjective si et seulement si elle est non nulle, et ceci

équivalent à $\nabla f(x, y) \neq 0$. Or $\nabla f(x, y) = (6x, -6y + 6y^5) = (6x, -6y(1 - y)(1 + y)(1 + y^2))$ est nulle exactement en $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. En dehors de $c = f(0, 0) = 0$, $c = f(0, 1) = f(0, -1) = -2$, $f(x, y) = c$ définit donc une sous-variété de \mathbb{R}^2 (de dimension 1). Cette sous-variété est fermée, et on voit facilement qu'elle est bornée. Elle est donc compacte.

On a

$$\begin{aligned} f(x, y) + 2 &= 3x^2 + y^6 - 3y^2 + 2 = 3x^2 + (y^2 - 1)(y^4 + y^2 - 2) \\ &= 3x^2 + (y^2 - 1)(y^2 + 2)(y^2 - 1) = 3x^2 + (y^2 - 1)^2(y^2 + 2) \geq 0 \end{aligned}$$

et ceci ne peut être nul que lorsque $x = 0$ et $y = \pm 1$. On a donc $f^{-1}(\{-2\}) = \{(0, 1), (0, -1)\}$. Remarquons que c'est une sous-variété compacte de dimension 0.

Si on enlève le point $(0, 0)$ qui pose problème, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de $f(x, y) = 0$ est alors aussi une sous-variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2 (on voit que \mathcal{S} est non vide car elle contient un point de la forme $(0, y)$ avec y entre 1 et 2). Comme ci-dessus, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est lui fermé borné, donc compact.

(4) Les solutions constantes vérifient $\alpha'(t) = 0 = X(\alpha(t))$ et sont donc données par les 0 du champ de vecteurs. Ceux-ci sont les points $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

(5) Si $(a, b) \neq \mathcal{S}$, alors soit $f(a, b)$ est une valeur régulière de f , soit $(a, b) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. Dans le premier cas, la courbe intégrale reste dans une sous-variété compacte, et on peut appliquer le théorème III.3.21 du poly qui dit qu'alors les courbes intégrales maximales sont définies sur \mathbb{R} , et dans le second cas, les courbes intégrales sont constantes et on a la même conclusion.

(6) On reprend la démonstration du théorème III.3.21 du poly avec une condition initiale dans \mathcal{S} et l'argument de compacité appliqué à $f^{-1}(\{0\}) = \mathcal{S} \cup \{(0, 0)\}$ et l'on constate que l'on a la même conclusion : la courbe intégrale maximale est définie sur \mathbb{R} .

Exercice IV

(1) C'est clair : pour tout $A \in \mathcal{M}$, $Y \mapsto AY - YA$ est linéaire, donc $\phi(A) \in \mathcal{E} = \text{End}(\mathcal{M})$, et on a aussi la linéarité en A , donc ϕ est linéaire de \mathcal{M} dans \mathcal{E} .

(2) On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} [\Phi(\exp_{\mathcal{M}}(tA))(Y)] = \frac{d}{dt} [\exp_{\mathcal{M}}(tA)Y \exp_{\mathcal{M}}(-tA)] \\ &= A \exp_{\mathcal{M}}(tA)Y \exp_{\mathcal{M}}(-tA) - \exp_{\mathcal{M}}(tA)Y \exp_{\mathcal{M}}(-tA)A = [A, f(t)] \end{aligned}$$

et $f(0) = Y$. D'autre part

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt} [\exp_{\mathcal{E}}(t\phi(A))(Y)] = \frac{d}{dt} [\exp_{\mathcal{E}}(t\phi(A))](Y) \\ &= [\phi(A) \exp_{\mathcal{E}}(t\phi(A))](Y) = \phi(A) (\exp_{\mathcal{E}}(t\phi(A))(Y)) = [A, g(t)] \end{aligned}$$

et $g(0) = Y$. Ainsi, f et g sont solutions de la même équation différentielle $\alpha' = [A, \alpha]$. Le champ de vecteur $X \mapsto [A, X]$ sur \mathcal{M} étant polynomial, donc \mathcal{C}^∞ , la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique, en particulier l'énoncé d'unicité, et on conclut que $f = g$. Comme ceci est vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}$, on en déduit que pour tout $A \in \mathcal{M}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\exp_{\mathcal{M}}(tA)) = \exp_{\mathcal{E}}(t\phi(A)).$$

On évalue alors en $t = 1$ pour obtenir l'identité voulue.

(3) On a

$$F(1, 0) = \exp(-A) \frac{\partial u}{\partial t}(1, 0) = \exp(-A) \frac{d}{dt} [\exp(A + tY)]_{t=0} = \exp(-A) d \exp_A(Y).$$

(4)

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \frac{d}{ds} \left[s \mapsto \exp(-sA) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) \right] = -A \exp(-sA) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) + \exp(-sA) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, t)$$

On évalue en $t = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, 0) = -A \exp(-sA) \frac{\partial u}{\partial t}(s, 0) + \exp(-sA) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, 0)$$

Or $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(s, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) = (A + tY)u(s, t)$, d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, t) = \frac{d}{dt} [t \mapsto (A + tY)u(s, t)] = Yu(s, t) + (A + tY) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t).$$

Ceci donne en $t = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, 0) = Yu(s, 0) + A \frac{\partial u}{\partial t}(s, 0) = Y \exp sA + A \frac{\partial u}{\partial t}(s, 0).$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(s, 0) &= -A \exp(-sA) \frac{\partial u}{\partial t}(s, 0) + \exp(-sA) \left(Y \exp sA + A \frac{\partial u}{\partial t}(s, 0) \right) \\ &= \exp(-sA) Y \exp sA \end{aligned}$$

On utilise maintenant la question 2 et on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, 0) = \exp(-sA) Y \exp sA = \Phi(\exp(-sA))(Y) = \exp_{\mathcal{E}}(-s\phi(A))(Y).$$

(5) On a

$$F(s, 0) = \int_0^s \frac{\partial F}{\partial s}(r, 0) dr + F(0, 0).$$

Or $F(0, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0)$ et comme $u(0, t) = I_n$, on a $F(0, 0) = 0$, d'où

$$F(s, 0) = \int_0^s \frac{\partial F}{\partial s}(r, 0) dr = \int_0^s \exp_{\mathcal{E}}(-r\phi(A))(Y) dr = \int_0^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-r\phi(A))^n}{n!} (Y) dr.$$

Cette série entière de rayon de convergence infini s'intègre terme à terme et on obtient

$$F(s, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^{n+1}}{(n+1)!} \phi(A)^n (Y).$$

(6) En utilisant I.4 et I.6, on obtient

$$F(1, 0) = \exp(-A) d \exp_A(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \phi(A)^n (Y).$$

D'où

$$d \exp_A(Y) = \exp(A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \phi(A)^n (Y).$$

Exercice V

Les pôles sont $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_2 = -2$, $z_3 = \bar{z}_1 = 2e^{\frac{i5\pi}{3}}$. Le résidu en z_i est $\frac{1}{3z_j^2} = -\frac{z_j}{24}$.

(1) le seul pôle où l'indice de Γ est non nul est z_1 et l'intégrale vaut donc $-\frac{2i\pi \times 2e^{\frac{i\pi}{3}}}{24} = -\frac{i\pi e^{\frac{i\pi}{3}}}{6}$.

(2) L'intégrale vaut 0 car aucune singularité n'est à l'intérieur du contour.

(3) L'intégrale peut être prise sur n'importe quel cercle centré en l'origine et de rayon $R > 2$. On a pour $R > 2$:

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{dz}{z^3 + 8} \right| \leq \frac{2\pi R}{R^3 - 8}$$

et donc en faisant tendre R vers $+\infty$ on obtient que le résultat demandé est 0.

Exercice VI

(1) ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ en tant que fraction rationnelle. Son inverse est $\psi : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto -\frac{z+1}{z-1}$, comme on peut le vérifier directement, et qui est elle aussi holomorphe sur son domaine de définition.

(2) On étudie la fonction ϕ sur $] -1, 1]$. Sa dérivée est $\phi'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} > 0$ est donc strictement croissante. La limite de cette fonction en -1^+ est $-\infty$ et sa valeur en 1 est 0.

(3) La restriction de ϕ à $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ est donc à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus] -\infty, 0]$ et on peut donc poser pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $f(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \log(\phi(z))\right)$, où \log est la détermination principale du logarithme. C'est une fonction holomorphe vérifiant les propriétés voulues, en particulier $f(2) > 0$.

Soit g une autre fonction vérifiant ces propriétés. Alors $f(z)^4 = g(z)^4 = \phi(z)$, ce qui montre que $\frac{f}{g}$ est une fonction définie sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ et à valeurs dans les racines quatrièmes de l'unité. Comme l'image d'un connexe par une application continue est connexe, $\frac{f}{g}$ est constante, et la condition en $z = 2$ nous dit que cette constante est réelle strictement positive, donc c'est 1, ce qui montre l'unicité.

(4) Comme $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \phi(z) = 1$, on obtient par continuité de l'exponentielle et du logarithme que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 1$. Ainsi g admet un prolongement par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$, et en particulier, elle reste bornée au voisinage de 0. Elle se prolonge donc (cours) en une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$, et admet un développement en série entière en 0 de rayon de convergence au moins égal à 1. Soit $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ ce développement en série entière. On a $c_0 = g(0) = 1$. Comme

$$g(z)^4 = f\left(\frac{1}{z}\right)^4 = \phi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{1 - z}{1 + z},$$

on obtient en dérivant

$$4g'(z)g(z)^3 = -\frac{2}{(1+z)^2},$$

ce que l'on évalue en 0 pour obtenir $4g'(0) = -2$, d'où $c_1 = g'(0) = -1/2$. De même

$$4g''(z)g(z)^3 + 12g'(z)^2 = \frac{2}{(1+z)^3},$$

ce qui donne $c_2 = g''(0)/2 = -1/8$.

(5) On a pour tout $\omega \in D(0, 1)$, $g(\omega) = \sum_{n \geq 0} c_n \omega^n$, d'où, si z est tel que $|z| > 1$, en posant $\omega = 1/z$,

$$f(z) = g(\omega) = \sum_{n \geq 0} c_n \omega^n = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{1}{z^n}.$$

On a

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} -\frac{g(\omega)}{\omega^2} d\omega \quad (*)$$

où γ est le cercle de centre 0 et de rayon $1/10$. D'après les formules de Cauchy, cette intégrale vaut $2i\pi g'(0) = -i\pi$. De même

$$\int_{\Gamma} z f(z) dz = \int_{\gamma} -\frac{g(\omega)}{\omega^3} d\omega$$

et ceci vaut $2i\pi g''(0)/2 = -i\pi/4$.

On a obtenu (*) en faisant le changement de variables $\omega = \frac{1}{z}$, ce qui est peut-être un peu cavalier sans justification mais si on revient aux définitions avec $\rho = 10$,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) i\rho e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} g(\rho^{-1} e^{-i\theta}) i\rho e^{i\theta} d\theta$$

là on fait le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$ et on obtient

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} g(\rho^{-1} e^{i\theta}) i\rho e^{-i\theta} (-1) d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{g(\rho^{-1} e^{i\theta})}{\rho^{-2} e^{2i\theta}} i\rho^{-1} e^{i\theta} d\theta = \int_{\gamma} -\frac{g(\omega)}{\omega^2} d\omega.$$

Calcul différentiel et fonctions holomorphes

Contrôle classant du 23 octobre 2017

Les résultats du cours peuvent être utilisés en donnant des références précises.

Exercice I

Soit $a > 1$. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}.$$

On pourra écrire cette intégrale sous la forme $\int_C f(z) dz$ où f est une fonction méromorphe sur un ouvert contenant le disque unité fermé et C est le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice II

On rappelle que $z \mapsto e^z$ est surjective de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^\times . Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle définie sur un ouvert connexe \mathcal{U} de \mathbb{C} contenant 0. On suppose que quels que soient z, z' dans \mathcal{U} tels que $z + z' \in \mathcal{U}$, on ait $f(z + z') = f(z)f(z')$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = e^{bz}$.

Exercice III

Soit \mathcal{V} un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de \mathcal{V} . Soit

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

une application de classe \mathcal{C}^1 .

1. On suppose qu'il existe $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que tout i dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = f_i(x).$$

Montrer que la matrice jacobienne de f est symétrique en tout point x de \mathcal{V} , c'est-à-dire que pour tout i et tout j dans $\{1, \dots, n\}$,

$$(1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x),$$

et que de plus on a pour tout $x \in \mathcal{V}$

$$(2) \quad \phi(x) = \phi(a) + \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) f_i(tx + (1-t)a) \right) dt.$$

2. Réciproquement, on suppose maintenant que la matrice jacobienne de f est symétrique en tout point x de \mathcal{V} , c'est-à-dire que l'on a (1). Montrer en dérivant sous le signe \int que si ϕ est donnée par la formule (2), on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = f_i(x).$$

Ainsi, une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert convexe de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n dont la matrice jacobienne en tout point est symétrique est de la forme $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)$ pour une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^2 définie le même ouvert et à valeurs réelles (Lemme de Poincaré).

Exercice IV

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et soit $j : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On fixe $(a, b) \in \mathcal{U}$. On s'intéresse aux fonctions $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ de classe \mathcal{C}^2 dont le déterminant de la matrice jacobienne est égal à j . On suppose donc que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$(3) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = j(x, y).$$

On suppose de plus que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0.$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de $(f(a, b), b)$ dans \mathbb{R}^2 , un voisinage ouvert \mathcal{U}_1 de (a, b) dans \mathcal{U} et un difféomorphisme

$$\Phi : (u, v) \mapsto (\phi(u, v), \psi(u, v))$$

de classe \mathcal{C}^2 de \mathcal{V} sur \mathcal{U}_1 tels que $\Phi(f(x, y), y) = (x, y)$.

2. Montrer que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x, y), y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x, y), y) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

3. Quitte à diminuer l'ouvert \mathcal{U}_1 , on peut le supposer convexe, ce que l'on fait désormais. Posons pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}_1$,

$$J(x, y) = \int_a^x j(t, y) dt,$$

et pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}$,

$$\alpha(u, v) = g(\phi(u, v), v), \quad \beta(u, v) = J(\phi(u, v), v).$$

Montrer que α et β sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{V} et que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}(f(x, y), y) = \frac{\partial \beta}{\partial u}(f(x, y), y) = j(x, y) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1}.$$

4. En déduire en utilisant la conclusion de l'exercice I qu'il existe une fonction ω de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{V} telle que $\frac{\partial \omega}{\partial u}(f(x, y), y) = g(x, y)$ et $\frac{\partial \omega}{\partial v}(f(x, y), y) = J(x, y)$.

Exercice V

Le plan \mathbb{R}^2 est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dans certaines questions, on identifie \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} de la manière usuelle. Soient \bar{D} le disque unité fermé dans \mathbb{C} et C le cercle unité. Soit $F : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$, continue. On veut montrer que F admet un point fixe. Supposons que F n'admette pas de point fixe, c'est-à-dire $F(z) \neq z$ pour tout $z \in \bar{D}$.

1. Pour tout $z \in \bar{D}$, notons $G(z)$ l'intersection du cercle unité avec la demi-droite ouverte $\{F(z) + t(z - F(z)) : t > 0\}$ (faire un dessin). Montrer que $z \mapsto G(z)$ est continue sur \bar{D} (ne pas hésiter à donner une formule pour $G(z)$), et que $G(z) = z$ si $z \in C$.

2. On pose pour tout $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, $\gamma_s(t) = G(se^{it})$. Calculer l'indice en 0 des deux lacets γ_0 et γ_1 . En conclure que F admet un point fixe (Théorème de Brouwer).

Exercice VI

Soit $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right)$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{S}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x, y) = c\}.$$

1. Montrer que si $c \neq 0$, alors \mathcal{S}_c est une sous-variété de \mathbb{R}^2 ou bien l'ensemble vide. Donner dans chaque cas la dimension, la classe de régularité.

2. Montrer que pour tout c , l'ensemble \mathcal{S}_c est compact. Faire un dessin donnant l'allure des \mathcal{S}_c , $c \in \mathbb{R}$.

3. On se propose de décrire les solutions $t \mapsto Q = Q(t)$ de l'équation différentielle

$$(5) \quad Q'' - Q + Q^3 = 0,$$

avec conditions initiales

$$(6) \quad Q(0) = a, \quad Q'(0) = b.$$

Ecrire le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto X(x, y)$ de \mathbb{R}^2 dont les courbes intégrales sont les solutions de l'équation (5). Expliquez pourquoi il suffit d'étudier les solutions pour $t > 0$ et montrer que pour toute condition initiale $(a, b) \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle $[0, T[$, $T = T(a, b)$.

4. Quelles sont les solutions constantes ?

5. Montrez que si Q est solution de (5), la fonction $t \mapsto E(Q(t), Q'(t))$ est constante sur l'intervalle de définition de Q et que la trajectoire $t \mapsto (Q(t), Q'(t))$ reste dans \mathcal{S}_c avec $c = E(a, b)$, où (a, b) est la condition initiale.

6. Montrer que si $c \neq 0$, le champ de vecteurs X est tangent à la sous-variété \mathcal{S}_c .

7. Montrer que si $c = E(a, b) \neq 0$, la solution de (5) avec conditions initiales (6) est définie sur \mathbb{R} tout entier et périodique en temps.

8. Montrez que pour $E(a, b) = 0$ alors la solution $Q(t)$ de (5) avec conditions initiales (6) est définie sur \mathbb{R} tout entier et vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (Q(t), Q'(t)) = 0.$$

Calculez Q (on pourra introduire le changement de variable $H = \frac{1}{Q}$).

9. La surface d'un fluide unidimensionnel est décrite par une fonction $u(t, x)$ qui est la hauteur de fluide au temps t en $x \in \mathbb{R}$. Dans une limite de petite amplitude, la dynamique de la vague est régie par l'équation de Korteweg-de-Vries (1895) :

$$\partial_t u + \partial_x (\partial_{xx} u + u^3) = 0,$$

où l'on a noté $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. On cherche des solutions correspondant à la propagation sans déformation d'une vague

$$u(t, x) = Q(x - t).$$

Montrez qu'une condition suffisante est que Q vérifie (5).

I. On prend $f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{a + \frac{z-z^{-1}}{2i}} = \frac{2}{2aiz + z^2 - 1}$. Les pôles de cette fonction sont les racines de $z^2 + 2aiz - 1$, c'est-à-dire $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$ et $z_1 = -ia - i\sqrt{a^2 - 1}$. On voit facilement que seul le premier est dans le disque unité ouvert, et le second n'est pas dans le cercle unité. On calcule le résidu :

$$f(z) = \frac{2}{(z - z_0)(z - z_1)} = \frac{2}{z_0 - z_1} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1} \right)$$

Comme $z_0 - z_1 = 2i\sqrt{a^2 - 1}$, on a $\text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}$. L'indice de C en z_0 étant 1, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = 2i\pi \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

II. On se place sur un disque $D(0, r)$ contenu dans \mathcal{U} . La fonction f est non identiquement nulle dans $D(0, r)^\times$ sinon elle est identiquement nulle sur tout \mathcal{U} d'après le principe du prolongement analytique. On prend $z_0 \neq 0$ dans ce disque tel que $f(z_0) \neq 0$ et on considère $z_n = 2^{-n}z_0$. On a donc

$$f(z_n) = f(z_{n+1} + z_{n+1}) = f(z_{n+1})^2$$

On choisit b tel que $e^{bz_0} = f(z_0)$. On voit immédiatement par récurrence que $f(z_n) = e^{bz_n}$ pour tout n et de plus $f(0) = 1 = e^0$. Les fonctions f et $z \mapsto e^{bz}$ coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans \mathcal{U} , elles sont donc égales.

III1. C'est le lemme de Schwarz. Ensuite, on dérive $t \mapsto \phi(tx + (1-t)a)$. On a

$$\frac{d}{dt} [t \mapsto \phi(tx + (1-t)a)] = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(tx + (1-t)a) (x_i - a_i) = \sum_i f_i(tx + (1-t)a) (x_i - a_i)$$

et on intègre entre 0 et 1.

III2. On dérive sous le signe f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \left(x \mapsto \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(tx + (1-t)a) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(f_i(tx + (1-t)a) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx + (1-t)a) t \right) dt. \end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse :

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(f_i(tx + (1-t)a) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx + (1-t)a) t \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \mapsto t f_i(tx + (1-t)a)] dt = f_i(x). \end{aligned}$$

IV1. On applique le théorème d'inversion locale à $G(x, y) = (f(x, y), y)$ en (a, b) . La matrice jacobienne en (x, y) est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et est donc non nul par hypothèse, en particulier $dG_{(a,b)}$ est un isomorphisme. Il existe donc des ouverts \mathcal{U}_1 et \mathcal{V} comme dans l'énoncé tels G soit un difféomorphisme de \mathcal{U}_1 sur \mathcal{V} . On prend alors $\Phi = G^{-1}$, et on a pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}_1$,

$$\Phi(f(x, y), y) = \Phi(G(x, y)) = (x, y).$$

En particulier $\phi(f(x, y), y) = x$ et $\psi(f(x, y), y) = y$, d'où $\psi(u, v) = v$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}$.

IV2. On différencie $\phi(f(x, y), y) = x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} [(x, y) \mapsto \phi(f(x, y), y)] &= \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x, y), y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} [(x, y) \mapsto \phi(f(x, y), y)] &= \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x, y), y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x, y), y) = 0. \end{aligned}$$

Ceci donne immédiatement les formules voulues.

IV3. On voit que $\frac{\partial J}{\partial x}(x, y) = j(x, y)$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v}(f(x, y), y) &= \frac{\partial}{\partial v} [(u, v) \mapsto g(\phi(u, v), v)](f(x, y), y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(f(x, y), y), y) \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x, y), y) + \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(f(x, y), y), y) \\ &= -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1} j(x, y). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial u}(f(x, y), y) &= \frac{\partial}{\partial u} [(u, v) \mapsto J(\phi(u, v), v)](f(x, y), y) \\ &= \frac{\partial J}{\partial x}(\phi(f(x, y), y), y) \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x, y), y) = \frac{\partial J}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x, y), y) = j(x, y) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

IV4. Le lemme de Poincaré de l'exercice I donne l'existence de ω vérifiant $\frac{\partial \omega}{\partial u}(u, v) = \alpha(u, v)$ et $\frac{\partial \omega}{\partial v}(u, v) = \beta(u, v)$. En appliquant ceci à $(u, v) = (f(x, y), y)$, on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial u}(f(x, y), y) = \alpha(f(x, y), y) = g(\phi(f(x, y), y), y) = g(x, y)$$

et

$$\frac{\partial \omega}{\partial v}(f(x, y), y) = \beta(f(x, y), y) = J(\phi(f(x, y), y), y) = J(x, y).$$

V1. $G(z)$ est défini par : il existe $k(z) \geq 0$ tel que $z - G(z) = k(z)(F(z) - z)$ et $|G(z)| = 1$, d'où $(z - k(z)(F(z) - z))(\bar{z} - k(z)(\overline{F(z)} - \bar{z})) = 1$. Posons $\lambda(z) = F(z) - z$. On résout alors $z\bar{z} - 1 - k(z)(\lambda + \bar{\lambda})(z) + k(z)^2|\lambda(z)|^2 = 0$. On remarque que le discriminant

$$\Delta(z) = (\lambda + \bar{\lambda})^2(z) + 4|\lambda(z)|^4(1 - |z|^2)$$

est un réel positif ou nul et est une fonction continue de z . Il n'y a qu'une solution positive ou nulle qui est

$$k(z) = \frac{-(\lambda + \bar{\lambda})(z) + \sqrt{\Delta(z)}}{2|\lambda(z)|^2}.$$

Comme $\lambda(z) = F(z) - z$ ne s'annule pas, la fonction $z \mapsto k(z)$ est bien définie sur \bar{D} et est continue.

On en déduit la continuité de $G(z) = z - k(z)(F(z) - z)$. On a immédiatement $G(z) = z$ sur le cercle unité car dans ce cas $k(z) = 0$.

V2. γ_0 est le lacet constant $G(0)$ et γ_1 est le lacet $\gamma_1(t) = G(e^{it}) = e^{it}$, c'est-à-dire le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. Les indices respectifs de ces deux lacets par rapport à 0 sont 0 et 1. Pourtant, ils sont homotopes, et on aboutit à une contradiction. Donc F admet un point fixe.

VII. On remarque d'abord que E est polynomiale, donc \mathcal{C}^∞ . On a $\nabla E(x, y) = (-x + x^3, y)$ qui ne s'annule qu'en $(0, 0)$ et $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Donc si c n'est pas égal à $E(0, 0) = 0$ ou à $E(-1, 0) = E(1, 0) = -\frac{1}{4}$, c est une valeur régulière de E , et \mathcal{S}_c est une sous-variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2 et de classe \mathcal{C}^∞ . Etudions le cas $c = -\frac{1}{4}$. L'équation est donc

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4} = f(x).$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}$ est paire et $f'(x) = x(1 - x^2)$ donc f atteint son maximum en $x = 1$ et $f(x) \leq f(1) = 0$, avec égalité si et seulement si $x = \pm 1$. Les solutions sont donc les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, et donc

$$\mathcal{S}_{-\frac{1}{4}} = \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

est une sous-variété de classe \mathcal{C}^∞ et de dimension 0.

On trace donc les lignes de niveau dans le quart de plan $(x > 0, y > 0)$ et on complète par symétrie. Soit $E_{\min} = -\frac{1}{4}$, alors pour $E < -E_{\min}$, la ligne de niveau $E(x, y) = E$ est vide, et réduite à $(1, 0)$ pour $E = E_{\min}$. Pour $E_{\min} < E \leq 0$, $E(x, y) = E$ est une courbe fermée avec

$$\begin{cases} 0 < x_1(E) < x < x_2(E) & \text{pour } E_{\min} < E < 0 \\ 0 \leq x \leq 1 & \text{for } E = 0. \end{cases}$$

On a donc deux "yeux" par symétrie. Pour $E > 0$, la courbe de niveau est à nouveau une courbe fermée qui "englobe" les deux yeux. Faire un dessin !

2. Les \mathcal{S}_c sont fermées comme image réciproque d'un point par une application continue. Supposons que

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}(2y^2 + x^4 - 2x^2 + 1 - 1) = \frac{1}{4}(2y^2 + (x^2 - 1)^2 - 1) = c.$$

On en déduit que $2y^2 + (x^2 - 1)^2 \leq 4c + 1$, et de là, facilement, que x et y sont bornés. Les fermés bornés de \mathbb{R}^2 sont compacts, cqfd.

3. C'est Cauchy-Lipschitz sur $F' = X(F(t))$, avec $X(x, y) = (y, x - x^3)$. Si $Q(t)$ est solution, $Q(-t)$ aussi, donc il suffit de regarder forward en temps.

4. Les points d'arrêt sont les solutions de $F(X) = 0$ i.e. $(0, 0), (\pm 1, 0)$.

5. On dérive :

$$\phi'(t) = Q''(t)Q'(t) - Q'(t)Q(t) + Q'(t)Q(t)^3,$$

et on reporte $Q''(t) = Q(t) - Q^3(t)$, et on obtient 0. Les courbes $(t \mapsto (Q(t), Q'(t)))$ restent donc dans les lignes de niveau \mathcal{S}_c de la fonction E .

6. Pour $c \neq 0$, l'espace tangent à \mathcal{S}_c en (x, y) est l'orthogonal de $\nabla E(x, y) = (-x + x^3, y)$. Il suffit donc de constater que le produit scalaire de $\nabla E(x, y)$ avec $X(x, y)$ est nul.

7. On reste sur des sous-variétés compactes, on applique le lemme des bouts pour montrer que les solutions sont définies sur \mathbb{R} . On suit les trajectoires, et force est de constater que l'on revient au même point après un certain temps (solution à la Fernand Raynaud).

8. La solution est définie sur \mathbb{R} grâce encore au lemme des bouts qui s'applique. On peut par symétrie raisonner pour $t > 0$. La ligne de niveau contient comme seul point d'arrêt $(0, 0)$ qui ne peut être atteint en temps fini par Cauchy Lipschitz et est donc l'attracteur quand $t \rightarrow +\infty$. On peut supposer sans perte de généralité quitte à translater en temps que l'on part du point

$$Q'(0) = 0, \quad Q(0) = \sqrt{2}$$

et alors en regardant le parcours sur la ligne de niveau ($Q'(t) < 0$ pour t proche de 0) on a

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{dQ}{\sqrt{\frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{4}Q^4}} = -2dt.$$

On change de variable comme proposé, on secoue et on obtient facilement la formule de l'onde solitaire de KdV

$$Q(t) = \left(\frac{2}{\cosh^2(t)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

9. On injecte l'ansatz $u(t, x) = Q(x - t)$ et on calcule

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx}u + u^3) = [\partial_x Q + \partial_x(\partial_{xx}Q + Q^3)](x - t) = [(Q'' - Q + Q^3)'](x - t) = 0.$$

Calcul différentiel et fonctions holomorphes

Contrôle classant du 19 novembre 2017

Les résultats du cours ou des exercices vus en travaux dirigés peuvent être utilisés en donnant des références précises.

Exercice I. On peut si on le souhaite répondre d'abord à la question (2) en admettant le résultat de la question (1).

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0; 1]$ (\mathbb{C} privé du segment réel $[0; 1]$).

(1) Montrer que pour tout lacet γ dans Ω , $\text{Ind}_0(\gamma) = \text{Ind}_1(\gamma)$.

(2) Soit

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}.$$

Montrer que pour tout lacet γ dans Ω , $\int_{\gamma} f(\omega) d\omega = 0$.

Exercice II. (Un théorème de convexité de Hadamard)

Soit Ω l'ouvert de \mathbb{C} délimité par les deux droites verticales $\Re(z) = 0$ et $\Re(z) = 1$:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}.$$

On note $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω et $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ son bord.

Soit f une fonction continue et bornée sur $\bar{\Omega}$, holomorphe sur Ω . On pose $M = \sup_{\bar{\Omega}} |f|$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|.$$

Soient ϵ et p deux réels strictement positifs. On pose

$$F(z) = p^z e^{\epsilon z^2} f(z).$$

1. Montrer que pour tout $z = (x + iy) \in \Omega$, $|F(z)| \leq \max(p, 1)e^{\epsilon(1-y^2)}M$ et que $F(z)$ tend vers 0 lorsque y tend vers $\pm\infty$. En déduire que $|F|$ atteint sa borne supérieure.
2. Montrer que la borne supérieure de $|F|$ sur $\bar{\Omega}$ est atteinte sur l'une des deux droites qui délimitent $\bar{\Omega}$ et en déduire successivement que pour tout $z = x + iy \in \bar{\Omega}$,

$$|F(z)| \leq \max(M(0), pe^{\epsilon}M(1)),$$

puis

$$|f(z)| \leq p^{-x} |e^{-\epsilon z^2}| \max(M(0), pe^{\epsilon}M(1)),$$

et enfin

$$|f(z)| \leq p^{-x} \max(M(0), pM(1)).$$

3. En déduire, en choisissant bien p , que pour tout $x \in [0, 1]$

$$M(x) \leq M(1)^x M(0)^{1-x}.$$

Exercice III. Soient $a > 3$ un réel et \mathcal{S} la partie de \mathbb{R}^3 définie par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - a = 0\}.$$

(1) Montrer que \mathcal{S} une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

(2) Montrer que chaque demi-droite issue de 0 intersecte \mathcal{S} en exactement un point, qui n'est pas 0.

(3) Montrer que la projection

$$\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto \frac{p}{\|p\|}$$

(où \mathbb{S}^2 est la sphère unité de \mathbb{R}^3) vérifie que, pour tout $p \in \mathcal{S}$, $d\pi_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_{\pi(p)}\mathbb{S}^2$ est un isomorphisme, et en déduire que π réalise un difféomorphisme entre \mathcal{S} et \mathbb{S}^2 .

Exercice IV. On munit \mathbb{R}^{n+1} du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel. Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Soit \mathcal{S} l'hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} définie par le graphe d'une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ :

$$\mathcal{S} = \{(x, \phi(x)), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et posons $p = (x, \phi(x)) \in \mathcal{S}$. Montrer que $(-\nabla\phi(x), 1)$ est orthogonal à l'hyperplan tangent à \mathcal{S} en p . Donner l'expression du vecteur $N(x)$ orthogonal à l'hyperplan tangent $T_p\mathcal{S}$, de norme 1 et vérifiant $\langle N(p), e_{n+1} \rangle > 0$ en fonction du gradient $\nabla\phi(x)$ de ϕ en p . En déduire que $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

(2) Montrer que quels que soient x, h dans \mathbb{R}^n , $N(x)$ est orthogonal à $dN_x(h)$.

(3) Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $(x, u) \mapsto (x, \phi(x)) + u(N(x))$. Montrer que F réalise un difféomorphisme d'un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vers un voisinage \mathcal{V} de $p_0 = (0, \phi(0))$ dans \mathbb{R}^{n+1} .

Soit $\Theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ l'inverse de F . On a donc

$$\Theta(y) = (s(y), u(y)) \text{ avec } y = (s(y), \phi(s(y)) + u(y)N(s(y))).$$

(4) Montrer que pour tout $y \in \mathcal{V}$, $\nabla u(y) = N(s(y))$, puis expliquer brièvement pourquoi cette égalité est en fait valide pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ proche de \mathcal{S} .

Exercice V. (Encore un théorème de Hadamard)

(1) (Lemme de Grönwall) Soient C et v deux fonctions continues à valeurs réelles définies sur \mathbb{R}^+ et A une constante positive. Supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$v(t) \leq C(t) + A \int_0^t v(s) ds.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$v(t) \leq C(t) + A \int_0^t C(s)e^{A(t-s)} ds.$$

On pourra introduire $V(t) = \int_0^t v(s) ds$ et étudier la fonction $t \mapsto w(t) = V(t)e^{-At}$.

L'espace \mathbb{R}^N est munit de la norme euclidienne usuelle, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ de la norme d'opérateur. Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $f(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, df_x est inversible, et il existe deux constantes positives A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\|(df_x)^{-1}\| \leq A\|x\| + B$.

(2) Fixons $x \in \mathbb{R}^N$. On cherche une courbe $\alpha_x : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$(*) \quad \forall t \in [0; 1], \quad f(\alpha_x(t)) = tx.$$

Montrer que α_x vérifie (*) si et seulement si α_x est solution sur $[0, 1]$ d'une équation différentielle avec condition initiale

$$(**) \quad \beta'(t) = X_x(\beta(t)), \quad \beta(0) = 0,$$

pour un certain champ de vecteurs X_x sur \mathbb{R}^N que l'on déterminera. Vérifier que $(x, y) \mapsto X_x(y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

(3) On considère la solution α_x maximale de (**), définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0. Montrer que $b = +\infty$.

(4) En déduire une application $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

(5) Montrer que g est injective puis qu'en tout point $x \in \mathbb{R}^N$, dg_x est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^N sur lui-même et en déduire que l'image de g est ouverte dans \mathbb{R}^N .

(6) Montrer que $y \in \mathbb{R}^N$ est dans l'image de g si et seulement si $g(f)(y) = y$. En déduire que l'image de g est fermée dans \mathbb{R}^N .

(7) Conclure que f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Correction.

Exercice I. (1) L'idée est d'utiliser un argument d'invariance par homotopie, on peut le faire de différentes manières. On a

$$\text{Ind}_0(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}, \quad \text{Ind}_1(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1}$$

Posons $\Gamma(s, t) = \gamma_s(t) = \gamma(t) - s$, pour $s, t \in [0, 1]$. On a donc $\gamma_0 = \gamma$ et on a une homotopie de chemins de γ_0 et γ_1 . D'autre part, $\gamma_s(t)$ ne passe pas par 0 car γ ne rencontre pas le segment $[0, 1]$. L'indice en 0 de γ_s est toujours défini, et il est invariant par homotopie, donc $\text{Ind}_0(\gamma) = \text{Ind}_0(\gamma_s)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Or, par changement de variable $z \mapsto z - 1$,

$$\text{Ind}_0(\gamma_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} = \text{Ind}_1(\gamma).$$

Une variante encore plus simple (mais équivalente au fond) est de considérer la fonction $s \mapsto \text{Ind}_s(\gamma)$ pour $s \in [0, 1]$. Elle est bien définie car γ ne passe pas par un tel s , elle est continue par la formule intégrale qui définit l'indice, et elle a des valeurs entières d'après le cours : elle est donc constante!

(2) D'après la formule des résidus,

$$\int_{\gamma} f(\omega) d\omega = 2i\pi(\text{Res}_0(f)\text{Ind}_0(\gamma) + \text{Res}_1(f)\text{Ind}_1(\gamma)).$$

Or

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

et donc $-\text{Res}_0(f) = \text{Res}_1(f) = 1$. On a montré en (1) que $\text{Ind}_0(\gamma) = \text{Ind}_1(\gamma)$, et on obtient donc $\int_{\gamma} f(\omega) d\omega = 0$.

Exercice II. (1) Soit $z = x + iy \in \bar{\Omega}$. On a

$$|F(z)| = |p^x p^{iy} e^{\epsilon(x^2 - y^2 + 2ixy)} f(z)| = p^x e^{\epsilon(x^2 - y^2)} |f(z)| \leq \max(p, 1) e^{\epsilon(1 - y^2)} M$$

Il est donc clair que $F(z)$ tend vers 0 lorsque $y \rightarrow \pm\infty$. Si f est identiquement nulle, F aussi, et les assertions qui restent à démontrer sont claires. Si f n'est pas identiquement nulle, F non plus, donc $\sup_{\bar{\Omega}} |F| > 0$, et d'après ce qui précède, il existe $A > 0$ tel que si $\Im m(z) > A$, alors $|F(z)| < \frac{1}{2} \sup_{\bar{\Omega}} |F|$. La borne supérieure de $|F(z)|$ sur $\bar{\Omega}$ est donc égale à la borne supérieure sur le rectangle $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C}, |\Re e(z)| \leq 1, |\Im m(z)| \leq A\}$ qui est compact. Cette borne supérieure est donc atteinte sur ce compact.

(2) La fonction F est continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur Ω . D'après le principe du maximum, si $|F|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors F est constante sur Ω et par continuité, constante sur $\bar{\Omega}$, et en particulier pour tout $z \in \bar{\Omega}$, $|F(z)| = M(0)$, ce qui démontre l'assertion voulue.

Si $|F|$ n'admet pas de maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors la borne supérieure est atteinte sur $\bar{\Omega} \setminus \Omega$, c'est-à-dire sur l'une des deux droites $\Re e(z) = 0$ et $\Re e(z) = 1$. On a donc pour tout $z \in \bar{\Omega}$,

$$|F(z)| \leq \max\left(\sup_{\Re e(z)=0} |F(z)|, \sup_{\Re e(z)=1} |F(z)|\right).$$

Or

$$|F(z)| = |p^x p^{iy} e^{\epsilon(x^2 - y^2 + 2ixy)} f(z)| = p^x e^{\epsilon(x^2 - y^2)} |f(z)| \leq \begin{cases} e^{-\epsilon y^2} M(0) \leq M(0) & \text{si } x = 0 \\ p e^{\epsilon(1 - y^2)} M(1) \leq p e^{\epsilon} M(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

ce qui est l'assertion voulue. On en déduit immédiatement la deuxième inégalité. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient pour $z = x + iy \in \bar{\Omega}$,

$$|f(z)| \leq p^{-x} \max(M(0), pM(1)).$$

(3) On a alors en choisissant $p = M(0)/M(1)$ (si $M(1)M(0) \neq 0$), de sorte que les deux termes du max soient égaux à $M(0)$,

$$|f(x + iy)| \leq \left(\frac{M(0)}{M(1)}\right)^{-x} M(0) = M(1)^x M(0)^{1-x}.$$

On a la conclusion voulue en passant au sup sur la droite $\Re z = x$.

Si $M(1) = 0$, on a $|f(z)| \leq p^{-x} M(0)$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient que f est identiquement nulle (sur Ω , puis par continuité, sur $\bar{\Omega}$).

Si $M(0) = 0$, $|f(z)| \leq p^{1-x} M(1)$, et en faisant tendre p vers 0^+ , on obtient que f est identiquement nulle (sur Ω , puis par continuité, sur $\bar{\Omega}$).

Exercice III. On calcule le gradient de $F : \nabla F(x, y, z) = (2xe^{x^2}, 2ye^{y^2}, 2ze^{z^2})$. Celui-ci est nul seulement en $(0, 0, 0)$ qui n'est pas un point de \mathcal{S} donc 0 est valeur régulière de F et \mathcal{S} est une sous-variété.

Chaque demi-droite issue de 0 intersecte \mathcal{S} en un seul point : en effet, si l'on fixe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, l'étude de la fonction $h(t) = e^{t^2x^2} + e^{t^2y^2} + e^{t^2z^2}$ montre l'assertion, car elle est strictement croissante, vaut 3 < a en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

On peut projeter \mathcal{S} sur la sphère \mathbb{S}^2 . Notons π la projection $p \mapsto \frac{p}{\|p\|}$. On a

$$d\pi_p(v) = \frac{v}{\|p\|} - \frac{\langle p, v \rangle}{\|p\|^3} p.$$

On restreint π à \mathcal{S} . On veut montrer que $d\pi_p$ est un isomorphisme entre $T_p\mathcal{S}$ et $T_{\frac{p}{\|p\|}}\mathbb{S}^2$. Par égalité des dimensions, il suffit de montrer l'injectivité. Soit $v \in T_p\mathcal{S}$ (c'est-à-dire $\langle v, \nabla F(p) \rangle = 0$) tel que

$$d\pi_p(v) = \frac{v}{\|p\|} - \frac{\langle p, v \rangle}{\|p\|^3} p = 0.$$

Cette équation montre que p et v sont colinéaires, et donc si $v \neq 0$, $\langle p, \nabla F(p) \rangle = 0$. Avec $p = (x, y, z)$, cela donne $2x^2e^{x^2} + 2y^2e^{y^2} + 2z^2e^{z^2} = 0$, d'où $p = 0$: contradiction. Donc $v = 0$. On en déduit que π est un difféomorphisme local de \mathcal{S} sur \mathbb{S}^2 . Comme c'est aussi une bijection, c'est un difféomorphisme global.

Exercice IV.

(1) L'hyperplan tangent à $p = (x, \phi(x))$ est $\{(h, d\phi_x(h)), h \in \mathbb{R}^n\}$. Or, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle (h, d\phi_x(h)), (-\nabla\phi(x), 1) \rangle = \langle h, -\nabla\phi(x) \rangle + d\phi_x(h) = 0.$$

Posons $N(x) = \frac{(-\nabla\phi(x), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla\phi(x)\|^2}}$. On a bien $\langle N(x), e_{n+1} \rangle > 0$ et donc $N(x)$ vérifie les propriétés voulues.

(2) $\langle N(x), N(x) \rangle = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et en différentiant, on obtient

$$\langle N(x), dN_x(h) \rangle + \langle dN_x(h), N(x) \rangle = 2\langle N(x), dN_x(h) \rangle = 0.$$

(3) Il s'agit évidemment d'appliquer le théorème d'inversion locale, et donc de vérifier que $dF_{(0,0)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R}^{n+1} . On a, quels que soient $x, h \in \mathbb{R}^n$, $u, k \in \mathbb{R}$,

$$dF_{x,u}(h, k) = (h, d\phi_x(h)) + kN(x) + u dN_x(h),$$

et donc

$$dF_{(0,0)}(h, k) = (h, d\phi_0(h)) + kN(0).$$

Comme $(h, d\phi_0(h))$ et $kN(0)$ sont orthogonaux, on voit immédiatement que $dF_{(0,0)}(h, k) = 0$ implique que $(h, k) = 0$: l'application linéaire $dF_{(0,0)}$ est injective, et c'est donc un isomorphisme par égalité de la dimension de l'espace de départ et de celui d'arrivée.

(4) On différencie la formule donnée dans l'énoncé : on a, quels que soient $y, h \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$h = (ds_y(h), d\phi_{s(y)}(ds_y(h))) + du_y(h)N(s(y)) + u(y) dN_{s(y)}(ds_y(h)).$$

Prenons le produit scalaire avec $N(s(y))$, en remarquant que $(ds_y(h), d\phi_{s(y)}(ds_y(h)))$ est dans le plan tangent à \mathcal{S} en $(s(y), \phi(s(y)))$ et donc orthogonal à $N(s(y))$ et $dN_{s(y)}(ds_y(h))$ est aussi orthogonal à $N(s(y))$ d'après la question (2). Il reste donc

$$\langle h, N(s(y)) \rangle = du_y(h) = \langle h, \nabla u(y) \rangle.$$

On en tire la conclusion voulue.

On peut refaire le même raisonnement qu'en (3) et (4) en $(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, les arguments sont les mêmes.

Exercice V.

(1) On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= V'(t)e^{-At} - AV(t)e^{-At} = v(t)e^{-At} - AV(t)e^{-At} \\ &\leq (C(t) + AV(t))e^{-At} - AV(t)e^{-At} = C(t)e^{-At}. \end{aligned}$$

On intègre cette inégalité sur $[0, t]$, ce qui donne

$$w(t) - w(0) = V(t)e^{-At} \leq \int_0^t C(s)e^{-As} ds,$$

soit $V(t) \leq \int_0^t C(s)e^{A(t-s)} ds$, que l'on réinjecte dans l'inégalité de départ :

$$v(t) \leq C(t) + \int_0^t C(s)e^{A(t-s)} ds.$$

(2) On différencie (*) : $df_{\alpha_x(t)}(\alpha'_x(t)) = x$, d'où $\alpha'_x(t) = (df_{\alpha_x(t)})^{-1}(x)$. On pose donc $X_x(y) = df_y^{-1}(x)$, et l'on constate que $(x, y) \mapsto X_x(y)$ est de classe \mathcal{C}^1 , f étant \mathcal{C}^2 .

D'autre part on voit que α_x vérifiant (*) vérifie l'équation différentielle de (**). Pour la condition initiale, il y a un léger problème d'énoncé, on a $f(\alpha_x(0)) = 0$ mais ceci n'implique pas $\alpha_x(0) = 0$ (ce que l'on peut dire c'est que df_0 étant inversible, le théorème d'inversion locale s'applique, et que dans un voisinage de 0 donné par ce théorème, l'équation $f(x) = 0$ n'admet que la solution $x = 0$, mais il pourrait y avoir des solutions ailleurs). Ceci n'a pas d'incidence sur le reste de l'exercice, qui n'utilise que l'implication (**) \Rightarrow (*). Pour rétablir une équivalence, le plus simple est de rajouter l'hypothèse $\alpha_x(0) = 0$ dans (*).

Réciproquement, si β est solution de (**), définie sur $[0; 1]$, avec X comme ci-dessus, on voit que $\beta = \alpha_x$ par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

(3) D'après le lemme des bouts, si b est fini, alors la solution explose en temps fini, c'est-à-dire que $\alpha_x(t)$ n'est pas borné lorsque x tend vers b . Or pour tout $t \in [0; b[$,

$$\begin{aligned} \|\alpha_x(t)\| &\leq \int_0^t \|\alpha'_x(u)\| du \leq \int_0^t \|X_x(\alpha_x(u))\| du = \int_0^t \|df_{\alpha_x(u)}^{-1}(x)\| \times \|x\| du \\ &\leq \int_0^t (A\|\alpha_x(u)\| + B) \times \|x\| du \leq B\|x\|t + A\|x\| \int_0^t \|\alpha_x(u)\| du \end{aligned}$$

On applique alors le lemme de Grönwall et l'on obtient

$$\|\alpha_x(t)\| \leq B\|x\|t + \int_0^t AB\|x\| se^{A(t-s)} ds \leq B\|x\|b + \int_0^b AB\|x\| be^{A(b-s)} ds < +\infty.$$

Ceci contredit le fait que $\alpha_x(t)$ n'est pas borné lorsque x tend vers b , et ainsi $b = +\infty$.

(4) On pose $g(x) = \alpha_x(1)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, le champ de vecteurs X étant \mathcal{C}^1 , $(x, t) \mapsto \alpha_x(t)$ est \mathcal{C}^1 et donc $x \rightarrow g(x) = \alpha_x(1)$ est \mathcal{C}^1 . De plus, on a bien $f(g(x)) = x$.

(5) Si $g(x_1) = g(x_2)$, on a $x_1 = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = x_2$ et donc f est injective. En différentiant $f(g(x)) = x$, on obtient $df_{g(x)} \circ dg_x = \text{Id}_{\mathbb{R}^N}$ et donc dg_x est inversible, d'inverse $df_{g(x)}$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale en tout point de \mathbb{R}^n , et l'on en déduit que l'image de g est un voisinage de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

(6) Si $y = g(z)$ est dans l'image de g , alors $g(f(y)) = g(f(g(z))) = g(z) = y$. Réciproquement, si $g(f(y)) = y$ alors y est dans l'image de g . On en déduit que l'image de g est $\{y \in \mathbb{R}^N \mid g(f(y)) - y = 0\}$, donc fermée, cet ensemble étant l'image réciproque de 0 par une application continue.

(7) L'image de g est ouverte, fermée et non vide dans \mathbb{R}^N qui est connexe : c'est \mathbb{R}^N tout entier, et g est surjective. Ainsi g est bijective et $g^{-1} = f$. Par le théorème d'inversion globale, g est un difféomorphisme, et donc f aussi.

Index

- Analytique
 - fonction, 16
- Biholomorphe
 - fonction, 6
- Biholomorphisme, 6
- carte, 36
- Cauchy
 - formule de Cauchy, 13
- champ de vecteurs, 66
- changement de paramétrage, 45
- Circulation, 11
- condition initiale, 66
- Conforme
 - transformation, 8
- courbe intégrale, 66
- Développement de Laurent, 36
- difféomorphisme, 53
- espace tangent, 49
- flot
 - global, 72, 78
 - local, 70
- Formule
 - de Cauchy, 14
 - de la moyenne, 22
- hessienne, 60
- Homotopie, 29
- hypersurface, 36
- immersion, 34, 56
- Indice d'un lacet, 33
- localement lipschitzien, 67
- Logarithme complexe, 46
- Méromorphe
 - fonction, 35
- multiplicateurs de Lagrange, 58
- paramétrage
 - d'une sous-variété, 36
- point
 - critique, 34, 57
 - régulier, 34, 57
- Principe du maximum, 22
- Prolongement analytique, 20
- Résidu, 35
- Résidus
 - formule des, 38
- Simplement connexe, 29
- submersion, 34, 56
- surface, 36
- système de coordonnées, 36
- Théorème
 - de d'Alembert-Gauss, 19
 - de Liouville, 19
- théorème
 - d'inversion globale, 29
 - d'inversion locale, 29, 55
 - de point fixe de Banach, 22–24
 - des accroissements finis, 14
 - des fonctions implicites, 27
- valeur
 - critique, 34
 - régulière, 57
 - régulière, 34
- valeur
 - critique, 57
- vecteur tangent, 49
- Zéros isolés, 20

Bibliographie

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis : An introduction of the theory of analytic functions of one complex variable*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [2] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [3] , H. Cartan. *Calcul différentiel* .
Hermann , Paris, 1977.
- [4] P. Colmez *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Editions de l'Ecole Polytechnique 2009.
- [5] F. Golse *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Cours de l'Ecole Polytechnique.
- [6] R. C. Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables (Function theory I Local theory II Homological theory III)*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990.
- [7] S. G. Krantz. *Complex analysis : the geometric viewpoint*, volume 23 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, second edition, 2004.
- [8] L.D. Landau et E.M. Lifschitz. *Electrodynamics of Continuous media in Course of Theoretical Physics*, volume 8. Pergamon Press, Oxford, New-York, Beijing, Frankfurt, 1984.
- [9] R. Narasimhan. *Several complex variables*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995. Reprint of the 1971 original.
- [10] F. Pacard. *Analyse réelle et complexe*. Cours de l'Ecole Polytechnique.
- [11] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [12] C. Viterbo *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Cours de l'Ecole Polytechnique.