
SUR LES PAQUETS D'ARTHUR DES GROUPES CLASSIQUES RÉELS

par

Colette Moeglin & David Renard

Résumé. — Cet article s'insère dans un projet d'étude des paquets d'Arthur pour les groupes classiques réels commencé dans [AMR]. Notre but est de donner une description explicite de ces paquets et d'établir la propriété de multiplicité un pour ceux-ci (qui est connue pour les groupes p -adiques et complexes). Le résultat principal est ici une construction de paquets à partir de paquets unipotents de facteurs de Levi (c -Levi) par induction cohomologique. Un outil important de la démonstration est un énoncé de commutativité entre induction cohomologique et transfert endoscopique spectral.

Abstract. — This article is part of a project started in [AMR] which consists in investigating Arthur packets for real classical groups. Our goal is to give an explicit description of these packets and to establish the multiplicity one property (which is known to hold for p -adic and complex groups). The main result in this paper is a construction of packets from unipotent packets on c -Levi factors using cohomological induction. An important tool used in the argument is a statement of commutativity between cohomological induction and spectral endoscopic transfer.

1. Introduction

Soit G un groupe classique réel, c'est-à-dire un groupe symplectique ou bien un groupe spécial orthogonal. Notre but dans cet article, ainsi que dans une série d'articles compagnons ([MRb], [MRc]) est de décrire de manière aussi explicite que possible les représentations irréductibles de G qui sont composantes locales d'une représentation automorphe de carré intégrable. Plus précisément, soit F un corps de nombres et soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur F . Les représentations automorphes de carré intégrables de \mathbf{G} sont les représentations irréductibles du groupe $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ (\mathbb{A}_F est le groupe des adèles de F) apparaissant comme sous-représentations dans $L^2(\mathbf{G}(F)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$. Pour les décrire, J. Arthur a introduit des paramètres locaux

$$\psi_v : W'_{F_v} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G = \widehat{G} \rtimes W'_{F_v},$$

où v décrit l'ensemble des places de F , et W'_{F_v} est le groupe de Deligne-Weil de F_v (si v est une place archimédienne, $W'_{F_v} = W_F$ est le groupe de Weil de F_v). Ces paramètres, en plus de leur propriétés locales, doivent satisfaire à une propriété de compatibilité globale qui ne nous intéresse pas directement ici ; disons simplement que pour les groupes classiques quasi-déployés et leurs variantes, elle n'est décrite qu'artificiellement dans [Art13], et que pour l'exprimer plus généralement, il faudra attendre la description des groupes tannakiens associés aux corps de nombres.

Soit donc ψ_v un paramètre d'Arthur local et notons $A(\psi_v)$ le groupe des composantes connexes du centralisateur de ψ_v dans \widehat{G} (en fait, il faut en général passer à un revêtement cf. [Art13], chapitre 9, mais ceci est inutile dans le cas des groupes quasi-déployés, et des groupes classiques même non quasi-déployés). Arthur suggère qu'au paramètre ψ_v est attaché une combinaison linéaire de représentations irréductibles de $\mathbf{G}(F_v)$ à coefficients dans l'espace des fonctions à valeurs complexes sur le groupe $A(\psi_v)$, fonctions invariantes par conjugaison. On note $\pi^A(\psi_v)$ cette combinaison linéaire. Ces objets $\pi^A(\psi_v)$ doivent être compatible à l'endoscopie. Cela ne suffit pas à les définir dans le cas quasi-déployé. Pour compléter la définition dans ce cas et pour les groupes classiques, Arthur ajoute la compatibilité à l'endoscopie tordue et cela suffit alors. Limitons nous dans ce qui suit aux cas des groupes classiques. Le groupe $A(\psi_v)$ est alors abélien (c'est même un 2-groupe), les fonctions invariantes par conjugaison sur ce groupe sont donc directement des combinaisons linéaires à coefficients complexes de caractères de ce groupe et on cherche donc une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations irréductibles de $\mathbf{G}(F_v) \times A(\psi_v)$.

Quand le groupe classique est quasi-déployé, Arthur montre dans [Art13] que $\pi^A(\psi_v)$ est une représentation unitaire de $\mathbf{G}(F_v) \times A(\psi_v)$, c'est-à-dire que la combinaison linéaire est à coefficients entiers positifs (au lieu d'être des nombres complexes), on a donc une représentation semi-simple (par construction) et la propriété supplémentaire est que cette représentation est unitaire. Remarquons que les $\pi^A(\psi_v)$ dépendent du choix des facteurs de transfert géométrique et en suivant Kottwitz et Shelstad, les facteurs de transfert sont normalisés par des choix de données de Whittaker.

Pour les formes intérieures pures des groupes classiques quasi-déployés sur F_v , la compatibilité à l'endoscopie suffit encore à caractériser $\pi^A(\psi_v)$; ce qui n'est pas clair, c'est que $\pi^A(\psi_v)$ soit une représentation unitaire de $\mathbf{G}(F_v) \times A(\psi_v)$ ([Art13], Conjecture 9.4.2) comme dans le cas quasi-déployé. Ceci est établi pour les paramètres *unipotents* dans [MRc], en utilisant les mêmes méthodes globales qu'Arthur (c'est-à-dire la stabilisation de la formule des traces (tordue)). Les résultats de cet article et de [MRb] montrent alors que cette propriété est en fait vraie pour tous les paramètres ψ_v .

Une question importante qui se pose alors est celle de la *décomposition* de la représentation $\pi^A(\psi_v)$ en représentations irréductibles et du calcul des coefficients. Pour les groupes classiques et une place archimédienne complexe, ce problème est résolu dans [MRa], le cas des places réelles avec l'hypothèse supplémentaire que le caractère infinitésimal est entier et régulier est traité en [AMR] et dans ces deux cas les coefficients sont un et les représentations irréductibles apparaissant sont simples à décrire. Pour le cas des places réelles, cela se fait avec l'induction parabolique ordinaire et l'induction cohomologique. Disons tout de suite, avant de détailler, que cet article généralise les méthodes et les résultats de [AMR] et que l'on obtient le même type de description très explicite mais sous l'hypothèse que les paramètres des séries discrètes intervenant dans ψ_v sont grands les uns par rapport aux autres et grand par rapport à la partie unipotente. Donc par rapport à [AMR], on montre que de « rajouter » une partie unipotente ne change pas les résultats. Pour avoir le cas général, on utilise les techniques usuelles de translation du caractère infinitésimal, c'est l'objet de l'article [MRb], mais là on perd la description précise puisque la translation traverse des murs. Soyons plus précis sur le contenu de cet article.

Nous ne considérons donc que le cas des places archimédiennes réelles, et dans la suite de cette introduction, \mathbf{G} est maintenant un groupe classique défini sur \mathbb{R} dont on note $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ le groupe de ses points réels. On considère la représentation standard du L -groupe de G , $\mathrm{Std}_G : {}^L G \rightarrow \mathbf{GL}_N(\mathbb{C})$, et par composition avec cette représentation standard, on peut voir un paramètre d'Arthur pour G comme une représentation de $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Cette représentation est complètement réductible et dans sa décomposition en irréductibles, on va distinguer une partie *de bonne parité* et une partie *de mauvaise parité*. De plus, dans la partie de bonne parité, nous distinguons une partie *discrète*, et une partie *unipotente*. Une première réduction, qui fera l'objet d'un article ultérieur, est de montrer que la description des représentations $\pi^A(\psi)$

se ramène au cas où les paramètres sont de bonne parité, par une induction parabolique qui préserve l'irréductibilité des composantes. On se limite donc ici au cas de bonne parité.

La réduction établie dans cet article dans le théorème 9.3 ramène le cas d'un paramètre de bonne parité, dont la partie discrète satisfait à une certaine condition de régularité, au cas des paramètres unipotents pour lequel on a au moins le calcul des coefficients, ils valent encore un, et une description des composantes irréductibles en termes de la correspondance de Howe (cf. [MRc] et [Moe]). Expliquons cette condition de régularité.

On suppose que l'on a un paramètre d'Arthur ψ_G pour notre groupe classique \mathbf{G} , qui après composition avec la représentation standard, donne une représentation ψ de $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension N , et que celle-ci admet une décomposition $\psi = \psi_d \oplus \psi'$. On suppose que ψ_d est une représentation irréductible de la forme $V(0, t) \otimes R[c]$. Ici $R[c]$ est une représentation algébrique irréductible de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension c et $V(0, t)$ est une représentation irréductible de dimension 2 de $W_{\mathbb{R}}$, paramètre de Langlands d'une série discrète auto-duale de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ notée $\delta(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2})$, de caractère infinitésimal $(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2})$, t étant un entier supérieur ou égal à c . Ainsi ψ_d est le paramètre d'Arthur d'une représentation de Speh, notée $\Pi_{\psi_d}^{\mathbf{GL}} = \mathbf{Speh}(\delta(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}), c)$. La condition de bonne parité devant être vérifiée ici est $t + c - 1$ pair si le groupe dual de \mathbf{G} est orthogonal, impair s'il est symplectique. A torsion près par le caractère signe de $W_{\mathbb{R}}$, le paramètre ψ' est obtenu à partir d'un paramètre $\psi_{G'}$ d'un groupe classique \mathbf{G}' de même type que \mathbf{G} , de rang $n - c$ si n est le rang de \mathbf{G} , par composition avec la représentation standard de \mathbf{G}' . La propriété de régularité exigée est ici que t soit suffisamment grand par rapport au caractère infinitésimal du paramètre ψ' (la condition exacte est (8.1.2)). Remarquons que l'on ne suppose pas ici une forme particulière pour ψ' , même si comme nous l'avons expliqué ci-dessus, l'application principale sera de partir de paramètres unipotents de bonne parité et d'ajouter un à un des blocs discrets ψ_d pour obtenir tous les paramètres de bonne parité réguliers.

L'idée est de proposer une formule pour la représentation $\pi^A(\psi_G)$ à partir de la représentation $\pi^A(\psi_{G'})$ et des entiers t et c , et de montrer qu'elle satisfait bien les propriétés voulues relativement à l'endoscopie et à l'endoscopie tordue qui caractérisent la représentation d'Arthur (théorème 8.3). La formule donnant $\pi^A(\psi_G)$ fait intervenir les foncteurs d'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman à partir de sous-groupe de Levi de G (c -Levi) de la forme

$$L_i \simeq \mathbf{U}(i, c - i) \times G'_i$$

où $\mathbf{U}(i, c - i)$ est un groupe unitaire réel attaché à une signature $(i, c - i)$ et G'_i est une forme intérieure pure du groupe \mathbf{G}' . La vérification de l'identité endoscopique tordue vers le groupe tordu $(\mathbf{GL}_N(\mathbb{R}), \theta_N)$ se fait essentiellement comme dans [AMR], en reprenant de manière cruciale certains résultats qui y ont été établis. Dans [AMR], les identités endoscopiques ordinaires n'apparaissent pas car elles avaient déjà été établies par Adams et Johnson mais ce n'est le cas ici, et leur vérification est le point technique principal de l'article. Elle se fait grâce à un principe de commutation entre transfert endoscopique et induction cohomologique, qui nous semble présenter un intérêt intrinsèque et constitue à ce titre le deuxième résultat important de l'article. Un tel principe doit être valide en général, mais ce que montre le cas des groupes classiques pour lequel nous l'établissons ici est que l'énoncé en est nécessairement subtil. Ceci se devine du fait que si l'induction parabolique ordinaire commute au transfert, elle ne commute pas aux foncteurs d'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman. Pour avoir des formules de commutation, il faut introduire certains caractères de torsion sur les sous-groupes de Cartan (voir l'appendice) que l'on retrouve dans la proposition 7.1. Pour avoir des formules agréables, nous préférons renormaliser les foncteurs de Vogan-Zuckerman pour y inclure les torsions. Ces foncteurs renormalisés, dans les cas des groupes orthogonaux, commutent aux transferts endoscopiques (Eq. (7.2.3)) et pour les groupes symplectiques, il reste une torsion.

Donnons maintenant rapidement une idée de l'organisation de l'article. La section 2 fixe les notations et donne quelques rappels sur les paramètres et la classification de Langlands, puis sur les paramètres d'Arthur et les propriétés des représentations qui leur sont conjecturalement

attachées, en particulier les identités de transfert endoscopiques ordinaires (Eq. (2.3.5)). La section 3.1 introduit les groupes classiques quasi-déployés considérés dans cet article : groupes symplectiques et groupes spéciaux orthogonaux quasi-déployés. La section 3.2 explique une partie des résultats de [Art13], en particulier l'existence de la représentation $\pi^A(\psi_G)$ attachée à un paramètre d'Arthur, et sa caractérisation par les identités endoscopiques (2.3.5) (pour les données endoscopiques elliptiques du groupe \mathbf{G}) et l'identité endoscopique tordue (3.2.4). La section 3.3 est une simple remarque sur l'extension dans [MRc] des résultats d'Arthur aux groupes classiques non nécessairement quasi-déployés. La section 4 a pour but d'expliquer avec plus de détails qu'au début de cette introduction les motivations de notre travail et les résultats obtenus. La façon dont les paramètres se décomposent la définition des parties de bonne parité, de mauvaise parité, discrète et unipotente sont donnés en 4.1. On donne ensuite les principaux énoncés de réduction obtenus dans cet article et les articles attenants ainsi que ce qui est connu dans le cas unipotent. Dans la section 5, nous revenons à un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{R} quelconque, pour rappeler quelques résultats de la littérature qui nous seront utiles, en particulier le lien entre donnée de Whittaker et paire fondamentale de type Whittaker, la notion de c -sous-groupe de Levi (ce sont les sous-groupes de Levi à partir desquels se fait l'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman), la paramétrisation des séries discrètes selon Adams et Shelstad, etc. Dans la section 5.4 on énonce un résultat de stabilité de certaines représentations virtuelles obtenue par induction cohomologique (proposition 5.6) essentiel à la formulation même de notre résultat de commutation entre transfert endoscopique et induction cohomologique. Toutefois, pour éviter de trop alourdir le texte, nous ne le démontrerons que pour les groupes classiques un peu plus loin dans le texte, section 6.4. Dans la section 6 nous revenons au cadre des groupes classiques, et nous spécialisons à ceux-ci les discussions sur les séries discrètes et c -Levi, ce qui fait apparaître naturellement les (classes d'équivalence de) formes intérieures pures $\mathbf{SO}(p, q)$ des groupes spéciaux orthogonaux quasi-déployés. Dans les sections 6.5 et 6.6 nous rappelons de manière explicite les données endoscopiques elliptiques des groupes classiques, et les c -Levi maximaux des groupes endoscopiques correspondants. Ceci détermine le cadre pour notre énoncé de commutation entre l'induction cohomologique et transfert endoscopique qui est établi dans la section 7 (proposition 7.1) et après renormalisation des foncteurs d'induction cohomologique dans la section 7.2, dans le théorème 7.6. L'extension aux groupes classiques non quasi-déployés est discutée dans la section 7.3. La section 8 décrit le résultat de l'ajout d'un bloc discret de paramètre suffisamment grand à un paramètre d'Arthur, que nous avons déjà décrit ci-dessus. Par une récurrence immédiate, mise en place dans la section 9, on en tire le théorème de réduction 9.3. Enfin l'appendice, tiré en grande partie de [AV92], introduit les caractères de torsion apparaissant dans notre énoncé de commutation entre induction cohomologique et transfert endoscopique et les calcule explicitement pour les groupes classiques.

2. Notations et généralités

On note $\Gamma = \{1, \sigma\}$ le groupe de Galois de \mathbb{C}/\mathbb{R} . Si \mathbf{G} est un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{R} , on identifie \mathbf{G} au groupe de ses points complexes, et l'on note σ_G l'action de σ sur \mathbf{G} . On note $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ le groupe des points réels de \mathbf{G} . On fixe alors une involution de Cartan τ_G , qui commute avec σ_G . On pose $\mathbf{K}_G = \mathbf{G}^{\tau_G}$ et $K_G = G^{\tau_G}$, c'est un sous-groupe compact maximal de G . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit simplement τ et K plutôt que τ_G et K_G . Par représentation de G , nous entendons un (\mathfrak{g}, K_G) -module de longueur finie, et par représentation virtuelle, un élément du groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations de G . On note $[\pi]$ l'image d'une représentation π dans ce groupe de Grothendieck. On note $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G .

Introduisons un invariant important d'un tel groupe \mathbf{G} . On pose

$$(2.0.1) \quad q(G) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{K}) - c(G)$$

où $c(G)$ est la moitié de la dimension de la partie déployée d'un sous-groupe de Cartan fondamental (*i.e.* maximale compact) de G . C'est un entier, et si les rangs de G et K sont égaux, cet entier est égal à la moitié de la dimension de l'espace symétrique G/K .

Le signe de Kottwitz attaché au groupe \mathbf{G} est

$$(2.0.2) \quad e(G) = (-1)^{q(G)-q(G^*)}.$$

où \mathbf{G}^* est une forme intérieure quasi-déployée de G .

Exemple 2.1. — Pour un groupe unitaire réel $\mathbf{U}(a, b)$ attaché à un espace hermitien de signature (a, b) , on a $q(\mathbf{U}(a, b)) = ab$ et pour un groupe spécial orthogonal réel $\mathbf{SO}(a, b)$ attaché à un espace quadratique de signature (a, b) , on a $q(\mathbf{SO}(a, b)) = ab$.

Lorsque l'on a un groupe algébrique défini sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on note par la lettre gothique correspondante l'algèbre de Lie du groupe de ses points complexes.

2.1. Paramètres de Langlands. — Dans cette section, nous rappelons brièvement la classification de Langlands utilisant le L -groupe, principalement dans le but d'introduire les notations utilisées dans le reste de l'article. Nous renvoyons le lecteur à [Bor79] pour plus de détails.

Le groupe de Weil de \mathbb{C} est $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{\times}$. Le groupe de Weil $W_{\mathbb{R}}$ de \mathbb{R} est une extension non scindée de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par \mathbb{C}^{\times} :

$$(2.1.1) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{C}^{\times} \longrightarrow W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

En identifiant \mathbb{C}^{\times} avec son image dans $W_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\{\pm 1\}$, on voit que $W_{\mathbb{R}}$ est engendré par \mathbb{C}^{\times} et un élément j qui se projette sur $-1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec les relations :

$$(2.1.2) \quad j^2 = -1 \in \mathbb{C}^{\times}, \quad jzj^{-1} = \bar{z}, \quad (z \in \mathbb{C}^{\times}).$$

Soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{R} , et soit \widehat{G} le dual de Langlands de \mathbf{G} . On fixe un épingle $\mathbf{spl}_{\widehat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha}\})$ de \widehat{G} . On construit le L -groupe de \mathbf{G}^{Γ} comme un produit semi-direct

$$(2.1.3) \quad {}^L G = \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}},$$

où l'action de $W_{\mathbb{R}}$ sur \widehat{G} se factorise par la projection $W_{\mathbb{R}} \rightarrow \Gamma$, et l'action de $\sigma \in \Gamma$ sur \widehat{G} , que l'on note $\sigma_{\widehat{G}}$ laisse stable $\mathbf{spl}_{\widehat{G}}$.

Définition 2.2. — Un paramètre de Langlands est un morphisme continu :

$$\phi : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L G$$

tel que

- a) $p_{W_{\mathbb{R}}} \circ \phi = \text{Id}_{W_{\mathbb{R}}}$,
- b) la restriction $\phi|_{\mathbb{C}^{\times}} : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \widehat{G} \times \mathbb{C}^{\times}$ a pour image des éléments dont la composante dans \widehat{G} est semi-simple.

Le groupe \widehat{G} agit par conjugaison sur l'ensemble des paramètres de Langlands, et l'on note $\Phi(G)$ l'ensemble de ces classes de conjugaison. On note $\Phi_{\text{temp}}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de paramètres de Langlands d'image bornée.

Là encore, nous commettrons fréquemment l'abus de langage consistant à ne pas distinguer entre un paramètre de Langlands et l'élément de $\Phi(G)$ qu'il définit.

Le théorème de classification de Langlands est l'existence d'une partition de $\Pi(G)$:

$$(2.1.4) \quad \Pi(G) = \coprod_{\phi \in \Phi(G)} \Pi(\phi, G)$$

où les $\Pi(\phi, G)$, appelés L -paquets, ou paquets de Langlands, sont des ensembles finis (de classes d'équivalence) de représentations irréductibles. Le point essentiel est bien entendu l'ensemble des propriétés de cette partition. Donnons-en quelques unes. Tous les éléments d'un paquet ont même caractère infinitésimal. Pour les représentations tempérées, on a

$$(2.1.5) \quad \Pi_{\text{temp}}(G) = \coprod_{\phi \in \Phi_{\text{temp}}(G)} \Pi(\phi, G).$$

Pour tout $\phi \in \Phi_{\text{temp}}(G)$, la représentation virtuelle

$$(2.1.6) \quad \sum_{\pi \in \Pi(\phi, G)} [\pi]$$

est stable. Rappelons ce que cela signifie. L'application qui à une représentation de longueur finie associe son caractère passe au groupe de Grothendieck et induit une application linéaire injective du groupe de Grothendieck dans l'espace des distributions sur G invariante par conjugaison. Dire qu'une représentation virtuelle est stable signifie que son caractère est une distribution stablement invariante sur G . Pour ce qui concerne la notion de stabilité, nous renvoyons par exemple à [She79] et [Bou04]. Ceci n'est plus vrai pour un paquet non tempéré. Soit $\phi \in \Phi(G)$, non nécessairement tempéré. Les représentations $\pi \in \Pi(\phi, G)$ sont obtenues dans la classification de Langlands comme uniques sous-représentations irréductibles de représentations standard $I(\pi)$, obtenues par induction parabolique à partir d'un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G , et d'un paquet « essentiellement tempéré » de M .

Définition 2.3. — Appelons « pseudo-paquet », et notons $\Pi^\sharp(\phi, G)$, l'ensemble des $I(\pi)$ pour $\pi \in \Pi(\phi, G)$. Définissons la représentation virtuelle

$$(2.1.7) \quad [\pi(\phi, G)] = \sum_{I(\pi) \in \Pi^\sharp(\phi, G)} [I(\pi)].$$

Le paquet $\Pi(\phi, G)$ est aussi obtenu de la manière suivante dans la classification de Langlands : il existe un sous-groupe parabolique $\mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ de \mathbf{G} défini sur \mathbb{R} , et un paramètre de Langlands ϕ_M discret qui factorise ϕ par l'inclusion ${}^L M \hookrightarrow {}^L G$ tels que les éléments du paquet $\Pi(\phi, G)$ sont les sous-représentations irréductibles des $\text{Ind}_P^G(\pi_M)$, où les π_M parcourent le paquet de séries discrètes (i.e. essentiellement de carré intégrable modulo le centre) $\Pi(\phi_M, M)$. On a alors

$$(2.1.8) \quad [\pi(\phi, G)] = \sum_{\pi_M \in \Pi(\phi_M, M)} [\text{Ind}_P^G(\pi_M)].$$

Il est bien connu ([She79], [AJ87], Lemma 4.3) que $[\pi(\phi, G)]$ est une représentation virtuelle stable de G .

Remarque 2.4. — Remarquons que lorsque ϕ est tempéré, $[\pi(\phi, G)]$ est aussi égale à (2.1.6).

Remarque 2.5. — Selon le contexte, on appelle « représentations standard » les représentations $I(\pi)$ de (2.1.7) ou les représentations $\text{Ind}_P^G(\pi_M)$ de (2.1.8).

2.2. Paramètres d'Arthur. — Les notations sont les mêmes que dans la section précédente.

Définition 2.6. — Un paramètre d'Arthur pour G est un morphisme de groupes continu

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

tel que

- (i) la restriction de ψ à $W_{\mathbb{R}}$ est un paramètre de Langlands tempéré,
- (ii) la restriction de ψ à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ est algébrique.

Le groupe \widehat{G} agit par conjugaison sur l'ensemble des paramètres d'Arthur, et l'on note $\Psi(G)$ l'ensemble de ces classes de conjugaison. On identifie $\Phi_{\text{temp}}(G)$ à l'ensemble des paramètres d'Arthur de restriction triviale à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

A tout paramètre d'Arthur ψ , on associe un paramètre de Langlands

$$(2.2.1) \quad \phi_{\psi} : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow {}^L G, \quad w \mapsto \psi(w, \begin{pmatrix} |w|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}),$$

où $w \mapsto |w|$ est le morphisme de groupe de $W_{\mathbb{R}}$ dans \mathbb{R}_{+}^{\times} défini par $|j| = 1$ et $|z| = z\bar{z}$ si $z \in \mathbb{C}^{\times}$.

2.3. Paquets d'Arthur. — Dans [Art84], [Art89], J. Arthur conjecture l'existence de paquets $\Pi(\psi, G)$ attachés aux paramètres $\psi \in \Psi(G)$, devant posséder certaines propriétés. Parmi les principales, citons le fait que les $\Pi(\psi, G)$ sont finis, constitués de (classes d'équivalence) de représentations *unitaires*, ayant toutes le même caractère infinitésimal. Le paquet d'Arthur $\Pi(\psi, G)$ contient le paquet de Langlands $\Pi(\phi_{\psi}, G)$. Ils doivent satisfaire les identités de caractères attendues dans la théorie de l'endoscopie (standard et tordue), c'est ce qui est appelé le *transfert spectral*. En revanche, ces paquets ne sont pas disjoints, et ne sont pas des réunions de L -paquets.

Donnons quelques précisions au sujet des conjectures d'Arthur, en faisant quelques hypothèses simplificatrices qui seront vérifiées pour les groupes que nous allons étudier. Certains termes (« forme intérieure pure », « donnée de Whittaker ») seront précisés plus loin dans le texte. On suppose que \mathbf{G} quasi-déployé, ou bien est une forme intérieure pure d'un groupe quasi-déployé.

Soit ψ un paramètre d'Arthur pour le groupe G . Soit S_{ψ} le centralisateur de l'image de ψ dans \widehat{G} et S_{ψ}^0 sa composante connexe neutre. On pose

$$(2.3.1) \quad A(\psi) = S_{\psi}/S_{\psi}^0.$$

On suppose que les groupes $A(\psi)$ sont abéliens. Notons $\widehat{A(\psi)}$ le groupe des caractères de $A(\psi)$.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, Arthur conjecture l'existence d'une combinaison linéaire à coefficients complexes de représentations irréductibles de $G \times A(\psi)$, notée $\pi^A(\psi, G)$ devant vérifier un certain nombre de propriétés, dont nous allons détailler certaines. Le paquet $\Pi(\psi, G)$ est alors l'ensemble des représentations irréductibles de G qui apparaissent dans $\pi^A(\psi, G)$.

Pour tout $x \in A(\psi)$, on considère la représentation virtuelle obtenue en évaluant $\pi^A(\psi, G)$ en $s_{\psi}x$, à savoir

$$(2.3.2) \quad [\pi(x, \psi, G)] = \pi^A(\psi)(s_{\psi}x)$$

où s_{ψ} est l'image dans $A(\psi)$ de l'élément $\psi((1, -\text{Id}))$, $(1, -\text{Id}) \in W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$. Ce sont ces représentations virtuelles qui apparaissent dans les identités de transfert endoscopiques.

Lorsque $x = 1$, (2.3.2) doit être une représentation virtuelle stable, que l'on note simplement

$$(2.3.3) \quad [\pi(\psi, G)] = \pi(1, \psi, G) = \pi^A(\psi)(s_{\psi}).$$

Lorsque $\psi = \phi$ est un paramètre tempéré, l'élément s_ϕ est trivial, et de plus il résulte des travaux de Shelstad (voir [She10] et [She08]) que $\pi^A(\phi, G)$ est de la forme

$$(2.3.4) \quad \pi^A(\phi, G) = \bigoplus_{\eta \in \widehat{A(\phi)}} \pi(\phi, \eta, G) \boxtimes \eta$$

où les $\pi(\phi, \eta, G)$ sont des représentations irréductibles tempérées de G ou 0 et celles qui sont non nulles décrivent exactement le paquet $\Pi(\phi, G)$ et sont donc en particulier non isomorphes deux à deux. La notation (2.3.3) pour $\psi = \phi$ paramètre de Langlands tempéré est bien compatible avec (2.1.7) grâce à la remarque 2.4.

Soit x un élément dans le centralisateur de ψ dans \widehat{G} tel que $x^2 = 1$, et notons encore x l'image de x dans $A(\psi)$. Soit $(\mathbf{H}, \mathcal{H}, x, \xi)$ est une donnée endoscopique elliptique de \mathbf{G} , qui factorise ψ . Nous renvoyons à [LS87] et [KS99a] pour la définition d'une donnée endoscopique. Nous considérons ici le transfert spectral, pour lequel, outre ces deux références, on peut aussi consulter [She08]. Pour simplifier, nous supposons que \mathcal{H} est isomorphe au L -groupe de \mathbf{H} , et que cet isomorphisme composé avec $\xi : \mathcal{H} \rightarrow {}^L G$ donne un plongement de L -groupes $\iota_{H,G} : {}^L H \rightarrow {}^L G$.

Le paramètre ψ se factorise en $\psi = \iota_{H,G} \circ \psi_x$, ce qui définit la paramètre d'Arthur ψ_x pour \mathbf{H} dans la formule ci-dessous. Le transfert est normalisé par le choix d'une donnée de Whittaker pour G . L'identité de transfert endoscopique s'écrit :

$$(2.3.5) \quad \text{Trans}_H^G([\pi(\psi_x, H)]) = e(G) \pi(x, \psi, G).$$

Remarquons que dans le cas d'un paramètre de Langlands tempéré ϕ , l'identité endoscopique devient (Shelstad, [She10] et [She08]), avec les notations introduites en (2.3.4)

$$(2.3.6) \quad \text{Trans}_H^G([\pi(\phi_H, H)]) = e(G) \sum_{\eta \in \widehat{A(\phi)}} \eta(x) [\pi(\phi, \eta, G)].$$

Remarque 2.7. — Remarquons que lorsque on prend $x = 1$, le groupe endoscopique associé est la forme intérieure quasi-déployée de \mathbf{G} , notons-la \mathbf{G}^* , et l'identité endoscopique devient, pour tout paramètre d'Arthur ψ

$$\text{Trans}_{G^*}^G([\pi(\psi, G^*)]) = e(G) [\pi(\psi, G)].$$

Lorsque G est un groupe classique quasi-déployé, J. Arthur donne dans [Art13] une définition des $\pi^A(\psi, G)$. Il montre que ce sont des représentations unitaires de $G \times A(\psi)$, qui sont caractérisées par les identités endoscopiques (2.3.5), pour toutes les données endoscopiques elliptiques de G , ainsi qu'une identité d'endoscopie tordue, où \mathbf{G} apparaît comme un groupe endoscopique pour un groupe tordu $(\mathbf{GL}_N, \theta_N)$, θ_N étant l'automorphisme extérieur de \mathbf{GL}_N . Nous en dirons plus sur tout ceci dans la section 3.2.

3. Les groupes classiques et leurs paquets d'Arthur

3.1. Les groupes classiques. — Les « groupes classiques » quasi-déployés que nous considérons sont ceux qui apparaissent dans les données endoscopiques elliptiques simples des groupes tordus $(\mathbf{GL}_N, \theta_N)$ selon la terminologie d'Arthur cf. [Art13], §I.2 (voir le paragraphe suivant). Le plus commode est encore d'en faire la liste, et de fixer quelques notations pour pouvoir s'y référer facilement. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on considère les groupes de rang n suivants :

A. Le groupe symplectique \mathbf{Sp}_{2n} .

C'est un groupe déployé. Son dual de Langlands est $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})$ et son L -groupe est le produit direct $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$.

On note $\theta_N : \mathbf{GL}_N \rightarrow \mathbf{GL}_N$ l'automorphisme défini par $g \mapsto J_N({}^t g^{-1})J_N^{-1}$. On définit le produit semi-direct $\mathbf{G}_N^+ = \mathbf{GL}_N \rtimes \langle \theta_N \rangle$. C'est un groupe algébrique réductif non connexe. L'automorphisme θ_N étant d'ordre 2, ce groupe compte deux composantes connexes, et l'on note $\tilde{\mathbf{G}}_N = \mathbf{GL}_N \rtimes \theta_N$ celle qui ne contient pas l'élément neutre. On note \tilde{G}_N l'ensemble des points réels de $\tilde{\mathbf{G}}_N$. On obtient ainsi un espace tordu au sens de Labesse [LW13].

La donnée de $(\mathbf{G}, \mathbf{Std}_G)$ est celle d'une *donnée endoscopique tordue* elliptique pour \tilde{G}_N . Nous renvoyons le lecteur à [KS99a] et [Art13] pour tout ce qui concerne la théorie de l'endoscopie tordue. Rappelons seulement que dans une telle situation, Kottwitz et Shelstad définissent un facteur de transfert, permettant de définir une application $\text{Trans}_{\text{geo}}$ (« *transfert géométrique* ») entre l'espace des intégrales orbitales sur \tilde{G}_N et l'espace des intégrales orbitales stables sur G . Ceci est démontré par D. Shelstad dans [She12]. Ce facteur de transfert n'est défini *a priori* qu'à une constante multiplicative près, mais le choix de la donnée de Whittaker sur $\mathbf{GL}_N(\mathbb{R})$ (cf. [AMR] section 5.2) permet de fixer cette constante ([KS99a], section 5.3).

Par dualité, ce transfert d'intégrales orbitales définit un transfert spectral entre représentations virtuelles stables de G et représentations virtuelles de \tilde{G}_N , noté

$$(3.2.3) \quad \text{Trans}_G^{\tilde{G}_N}$$

Soit $\psi_G \in \Psi(G)$ un paramètre d'Arthur pour le groupe G . Posons $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$. C'est un paramètre d'Arthur (auto-dual) pour le groupe G_N . Soit $\Pi_\psi^{\mathbf{GL}}$ la représentation irréductible autoduale de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{R})$ associée à ce paramètre (cf. [AMR], §3.1).

L'identité endoscopique tordue est alors

$$(3.2.4) \quad \text{Trans}_G^{\tilde{G}_N}([\pi(\psi_G, G)]) = \text{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi^{\mathbf{GL}}),$$

le membre de droite étant la trace tordue, normalisée par la donnée de Whittaker (cf. [AMR], Définition 5.4).

Lorsque le paramètre ψ_G est trivial sur le facteur $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, le paquet $\Pi(\psi_G, G)$ est un paquet de Langlands tempéré, la représentation virtuelle $[\pi(\psi_G, G)]$ est la somme des représentations du paquet, et l'identité (3.2.4) est alors démontrée par P. Mezo [Mez], à un facteur multiplicatif près. Nous avons démontré dans [AMR] qu'en fait l'identité (3.2.4) est valide, autrement dit que le facteur multiplicatif restant à déterminer dans Mezo est 1. Le résultat de Mezo et le fait que le transfert endoscopique commute à l'induction entraîne le résultat suivant pour les pseudo-paquets (cf. Définition 2.3).

Proposition 3.1. — *Soient G un groupe classique quasi-déployé comme ci-dessus et ϕ_G un paramètre de Langlands pour G . Posons $\phi = \mathbf{Std}_G \circ \phi_G$. On a alors*

$$\text{Trans}([\pi(\phi_G, G)]) = \text{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\phi^{\mathbf{GL}}).$$

3.3. Formes intérieures pures. — Dans [MRc] les résultats d'Arthur sont étendus aux formes intérieures pures des groupes spéciaux orthogonaux quasi-déployés. Soit \mathbf{G} l'une de ces formes intérieures pures, que l'on peut voir comme un groupe $\mathbf{SO}(p, q)$ (voir sections 6.1 et 6.2). Pour les groupes symplectiques, il n'y a pas de forme intérieure pure de \mathbf{Sp}_{2n} qui ne soit pas équivalente à \mathbf{Sp}_{2n} .

Les $\pi^A(\psi, G)$ sont alors simplement caractérisées par les identités endoscopiques (2.3.5). Remarquons que lorsque \mathbf{G} est la forme quasi-déployée, l'identité endoscopique avec $x = 1$ est tautologique. Ce n'est pas le cas lorsque l'on a une forme intérieure non quasi-déployée, l'identité endoscopique avec $x = 1$ (le groupe endoscopique \mathbf{H} est alors la forme intérieure quasi-déployée de \mathbf{G}) donne une relation supplémentaire qui remplace celle donnée par le transfert endoscopique tordu et suffit à compléter la caractérisation de $\pi^A(\psi, G)$.

Dans ce cadre, les $\pi^A(\psi, G)$ ne sont pas supposées *a priori* être des représentations unitaires de $G \times A(\psi)$, mais on montre dans *loc. cit.* que tel est bien le cas pour les paramètres unipotents.

Les résultats de réduction énoncés dans la section suivante permettent au final d'étendre ce résultat à tous les paramètres. Notons ce résultat.

Proposition 3.2. — *Soit \mathbf{G} une forme intérieure pure d'un groupe orthogonal quasi-déployé, et soit ψ un paramètre d'Arthur pour \mathbf{G} . Alors $\pi^A(\psi, G)$ est une représentation unitaire de $G \times A(\psi)$.*

4. Énoncé des résultats de réduction

Comme nous l'avons expliqué dans les deux sections précédentes, les $\pi^A(\psi_G, G)$ attachées aux paramètres ψ_G des groupes classiques sont caractérisées par des identités endoscopiques, mais l'on aimerait en savoir plus sur celles-ci. En particulier, on aimerait déterminer la décomposition des $\pi^A(\psi_G, G)$ et montrer que les coefficients sont 1 (propriété de multiplicité un). Pour cela, nous obtenons des résultats de réduction que nous allons maintenant décrire.

4.1. Décomposition des paramètres. — Soit \mathbf{G} l'un des groupes classiques de la section 3.1.

Définition 4.1. — On définit la *bonne parité* pour le groupe G comme étant 1 mod 2 si le groupe dual est symplectique (cas **B**), et 0 mod 2 si le groupe dual est orthogonal (cas **A**, **C**, **D**).

Soit ψ_G un paramètre d'Arthur de \mathbf{G} . Posons

$$\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}_N(\mathbb{C}).$$

Cette représentation de $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ est semi-simple. Rappelons que les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{R}}$ sont de deux types (cf. [AMR], §3.1) : les représentations $W(s, \epsilon)$, $s \in \mathbb{C}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, de dimension 1 (c'est le paramètre de Langlands de la représentation $\gamma(s, \epsilon) : x \mapsto \mathbf{sgn}(x)|x|^s$ de $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R})$), et les représentations $V(s, t)$, $s \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{N}^{\times}$ (c'est le paramètre de Langlands de la représentation essentiellement de carré intégrable modulo le centre $\delta(s, t)$ de caractère infinitésimal $(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2})$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$). On note $R[a]$ un représentant de l'unique classe d'équivalence de représentations algébriques de dimension a de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

Avec ces notations, on peut donc écrire la décomposition en irréductibles de ψ sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \psi = & \bigoplus_i (W(s_i, \epsilon_i) \boxtimes R[a_i] \oplus W(-s_i, \epsilon_i) \boxtimes R[a_i]) \oplus \bigoplus_j (V(s_j, t_j) \boxtimes R[a_j] \oplus V(-s_j, t_j) \boxtimes R[a_j]) \\ & \oplus \bigoplus_k (W(0, \epsilon_k) \boxtimes R[a_k] \oplus W(0, \epsilon_k) \boxtimes R[a_k]) \oplus \bigoplus_{\ell} (V(0, t_{\ell}) \boxtimes R[a_{\ell}] \oplus V(0, t_{\ell}) \boxtimes R[a_{\ell}]) \\ & \oplus \bigoplus_m W(0, \epsilon_m) \boxtimes R[a_m] \oplus \bigoplus_r V(0, t_r) \boxtimes R[a_r] \end{aligned}$$

Dans la première somme, les s_i sont dans $i\mathbb{R}^{\times}$ et les ϵ_i dans $\{0, 1\}$. Dans la deuxième somme, les s_j sont dans $i\mathbb{R}^{\times}$ et les t_j dans \mathbb{N}^{\times} . Dans la troisième somme, les ϵ_k sont dans $\{0, 1\}$ et la parité des $a_k - 1$ est mauvaise. Dans la quatrième somme, les t_{ℓ} sont dans \mathbb{N}^{\times} et la parité de $t_{\ell} + a_{\ell} - 1$ est mauvaise. Dans la cinquième somme, les ϵ_m sont dans $\{0, 1\}$ et la parité des $a_m - 1$ est bonne. Dans la sixième somme, les t_r sont dans \mathbb{N}^{\times} et la parité de $t_r + a_r - 1$ est bonne.

En effet, le paramètre est θ_N -stable. La contribution des facteurs irréductibles non θ_N -stable apparaît alors sous la forme de la première et deuxième somme. Ce qu'il faut remarquer ensuite, c'est que la multiplicité d'un facteur $W(0, \epsilon) \boxtimes R[a]$ (resp. $V(0, t) \boxtimes R[a]$) dans ψ est paire lorsque la parité de $a - 1$ (resp. $t + a - 1$) est mauvaise. La contribution de ces facteurs apparaît alors sous la forme de la troisième et quatrième somme.

On note ψ_{mp} le paramètre formé avec les quatre premières sommes, et ψ_{bp} celui formé avec les deux dernières. On a alors $\psi = \psi_{mp} \oplus \psi_{bp}$. On décompose aussi ψ_{bp} en $\psi_{bp,u}$ (cinquième somme) et $\psi_{bp,disc}$ (sixième somme).

On remarque que ψ_{mp} s'écrit sous la forme $\psi_{mp} = \rho \oplus \rho^*$ (ρ^* est la contrégradiente de ρ). Une telle décomposition n'est pas unique.

4.2. Réduction aux paramètres de bonne parité. — Les résultats de cette section seront démontrés ailleurs. Soit \mathbf{G} l'un des groupes classiques de la section 3.1. Soit ψ_G un paramètre d'Arthur pour \mathbf{G} , et comme précédemment posons $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$. Considérons une décomposition de ψ de la forme :

$$(4.2.1) \quad \psi = \rho \oplus \rho^* \oplus \psi'$$

où, dans ρ , il n'apparaît que des facteurs de mauvaise parité. Le paramètre ψ' se factorise par le L -groupe d'un groupe classique quasi-déployé \mathbf{G}' de même type que \mathbf{G} . Soit $\psi_{G'}$ le paramètre d'Arthur pour le groupe \mathbf{G}' tel que $\psi' = \mathbf{Std}_{G'} \circ \psi_{G'}$. Notons $N_\rho = \sum_k N_k$ la dimension de la représentation ρ de $W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, et soit $\Pi_\rho^{\mathbf{GL}}$ la représentation de $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{C})$ de paramètre d'Arthur ρ (cf. [AMR], §3.1). Le groupe G admet un sous-groupe de Levi maximal standard M isomorphe à $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R}) \times G'$, et ceci fournit une injection

$$(4.2.2) \quad \iota : \mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R}) \times {}^L G' \hookrightarrow {}^L G$$

de sorte que $\psi_G = \iota \circ (\psi_{G'}, \rho)$.

Remarque 4.2. — Les groupes $A(\psi_G)$ et $A(\psi_{G'})$ sont naturellement isomorphes.

Proposition 4.3. — Soit $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$ et soient $\pi(\psi_G, \eta, G)$ et $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$ les représentations semi-simples de G et G' respectivement attachées par Arthur (cf. (3.2.1), où pour $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$ on tient compte de la remarque ci-dessus). On a alors

$$(4.2.3) \quad \pi(\psi_G, \eta, G) = \mathrm{Ind}_P^G (\Pi_\rho^{\mathbf{GL}} \otimes \pi(\psi_{G'}, \eta, G')),$$

où P est un sous-groupe parabolique standard maximal de G de facteur de Levi M .

Théorème 4.4. — Soit $\pi' \in \Pi(\psi', G')$. Alors $\mathrm{Ind}_P^G (\Pi_\rho^{\mathbf{GL}} \otimes \pi')$ est irréductible.

Corollaire 4.5. — Si les $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$ ont la propriété de multiplicité 1 et sont disjointes, les $\pi(\psi_G, \eta, G)$ aussi. Ainsi la propriété de multiplicité 1 pour $\pi^A(\psi_G, G)$ découle de celle pour $\pi^A(\psi_{G'}, G')$. D'autre part, si la décomposition en irréductibles de $\pi^A(\psi_{G'}, G')$ est connue, alors elle l'est en principe pour $\pi^A(\psi_G, G)$.

Evidemment, la formulation de la seconde partie est un peu vague, connaître la décomposition en irréductible de $\pi^A(\psi_{G'}, G')$, cela veut dire savoir donner les paramètres des composantes irréductibles des $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$ dans une classification connue. Il faut savoir ensuite ce que donne une induction parabolique irréductible dans cette classification, ce qui est le cas pour les classifications usuelles ([KV95], Chapter 11).

Si \mathbf{G} est maintenant un groupe spécial orthogonal non quasi-déployé de rang n , donc une forme intérieure pure de l'un des groupes de la section 3.1, cas **B, C, D**, il faut légèrement adapter la formulation de ces résultats (voir la section 3.3). Si $N_\rho > \inf(p, q)$, on a $\pi^A(\psi_G, G) = 0$. Si $N_\rho \leq \inf(p, q)$, G admet un sous-groupe de Levi maximal standard M isomorphe à $\mathbf{GL}_{N_\rho}(\mathbb{R}) \times G'$, où G' est un groupe spécial orthogonal de rang $n - N_\rho$. Si l'on fait l'hypothèse que $\pi^A(\psi_{G'}, G')$ est une représentation unitaire de $G' \times A(\psi_{G'})$, alors les $\pi(\psi_{G'}, \eta, G')$ sont bien définis pour tout $\eta \in \widehat{A(\psi_{G'})}$ et la formule (4.2.3) définit une représentation unitaire $\pi(\psi_G, \eta, G)$ de G pour tout $\eta \in \widehat{A(\psi_G)} \simeq \widehat{A(\psi_{G'})}$. On en déduit une représentation unitaire de $G \times A(\psi_G)$:

$$\pi^A(\psi_G, G) = \bigoplus_{\eta \in A(\psi_G)} \pi(\psi_G, \eta, G) \boxtimes \eta,$$

et l'on vérifie qu'elle satisfait bien aux identités endoscopique voulues. La proposition, le théorème et le corollaire ci-dessus sont donc toujours valides, mais ils sont précédés de

Proposition 4.6. — *Si $\pi^A(\psi_{G'}, G')$ est une représentation unitaire de $G' \times A(\psi_{G'})$, alors $\pi^A(\psi_G, G)$ est une représentation unitaire de $G \times A(\psi_G)$.*

Ainsi, la description des paquets d'Arthur est réduite au cas des paramètres de bonne parité.

4.3. Cas des paramètres unipotents de bonne parité. — Dans cette section, \mathbf{G} désigne un groupe classique non nécessairement quasi-déployé, c'est-à-dire l'un des groupes quasi-déployés de la section 3.1 ou bien une forme intérieure pure d'un groupe spécial orthogonal. On considère le cas des paramètres unipotents de bonne parité. On suppose donc que ψ_G est tel que $\psi = \psi_{u, bp}$.

Théorème 4.7. — *Soit ψ_G un paramètre d'Arthur pour G tel que $\mathbf{Std}_G \circ \psi_G = \psi = \psi_{u, bp}$. Alors $\pi^A(\psi_G, G)$ est une représentation unitaire de $G \times A(\psi_G)$ qui vérifie la propriété de multiplicité un.*

Pour les groupes classiques quasi-déployés (les groupes classiques sur \mathbb{C} sont aussi traités), on sait d'après Arthur que $\pi^A(\psi_G, G)$ est une représentation unitaire de $G \times A(\psi_G)$, ceci a déjà été dit. La propriété de multiplicité un est établie par le premier auteur dans [Moe]. Le cas des groupes classiques non quasi-déployés est réglé en [MRc].

Le problème de classification est lui aussi essentiellement résolu dans [Moe], en termes de correspondance de Howe. D'autre part, on a le résultat suivant.

Théorème 4.8. — *Soit $\pi \in \Pi(\psi_G, G)$. Alors π est une représentation faiblement unipotente au sens de [KV95], Chapter XII.*

Ceci est démontré dans [MRb].

4.4. Réduction du cas des paramètres de bonne parité réguliers au paramètres unipotents. — Soit G un groupe classique, et soit ψ_G un paramètre d'Arthur pour G . Supposons que ψ_G soit de bonne parité, on décompose donc $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$ en

$$\psi = \left(\bigoplus_{r=1, \dots, R} V(0, t_r) \boxtimes R[a_r] \right) \oplus \left(\bigoplus_{m=1, \dots, M} W(0, \epsilon_m) \boxtimes R[a_m] \right)$$

où $\psi_{u, bp} := \bigoplus_{m=1, \dots, M} W(0, \epsilon_m)$ est unipotent de bonne parité. On suppose que ψ_G vérifie la condition de régularité suivante :

$$(4.4.1) \quad \forall r = 1, \dots, R-1, \quad t_r - a_r + 1 > t_{r+1} + a_{r+1} - 1 \quad \text{et} \quad t_R - a_R + 1 > \max_{m=1, \dots, M} \{a_m - 1\}$$

Le théorème 9.3 donne une formule pour la représentation unitaire $\pi^A(\psi_G, G)$ utilisant l'induction cohomologique et les représentations $\pi^A(\psi_{G'}, G'_i)$ attachée à la partie unipotente du paramètre. Ceci résout le problème de classification et celui de multiplicité un pour de tels paramètres.

4.5. Réduction du cas des paramètres de bonne parité au cas régulier. — On se place dans le même contexte que la section précédente, mais l'on ne suppose plus la condition de régularité (4.4.1). Dans [MRb], nous obtenons une formule pour $\pi^A(\psi_G, G)$ en introduisant un paramètre ψ_G^{reg} de G vérifiant

$$\psi^{reg} = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G^{reg} = \left(\bigoplus_{r=1, \dots, R} V(0, t'_r) \boxtimes R[a_r] \right) \oplus \left(\bigoplus_{m=1, \dots, M} W(0, \epsilon_m) \boxtimes R[a_m] \right)$$

et la condition de régularité (4.4.1). D'après le paragraphe précédent, les problème de classification et de multiplicité un sont résolus pour $\pi^A(\psi_G^{reg}, G)$. La formule pour $\pi^A(\psi_G, G)$ est obtenue en appliquant les techniques usuelles de translation du caractère infinitésimal (foncteur de translation de Zuckerman). Malheureusement, il apparaît des réductibilités difficiles à contrôler, ce qui nous empêche pour le moment de conclure sur les problèmes de décomposition en irréductibles et de multiplicité un.

5. Quelques résultats généraux

5.1. Donnée de Whittaker et paires de Borel fondamentales. — Si \mathbf{G} est quasi-déployé, on fixe un épinglage $\mathbf{spl}_{\mathbf{G}} = (\mathbf{B}_d, \mathbf{T}_d, \{X_\alpha\})$ stable par σ_G . On note \mathbf{N}_d le radical unipotent de \mathbf{B}_d , $N_d = \mathbf{N}_d(\mathbb{R}) = \mathbf{N}_d^{\sigma_G}$ le groupe de ses points réels, et l'on fixe un caractère χ de N_d de sorte que (N_d, χ) est une donnée de Whittaker de G . Le rôle d'une telle donnée dans la théorie d'Arthur-Langlands-Shelstad est de distinguer certaines représentations, celle qui admettent un modèle de Whittaker, et de normaliser les facteurs de transfert endoscopiques de [LS87] et [KS99a].

Nous allons plutôt utiliser une donnée équivalente, celle d'une *paire de Borel fondamentale de type Whittaker* (cf. [She15], §2.2, 2.3, 2.4). Rappelons qu'une paire de Borel (\mathbf{B}, \mathbf{T}) de \mathbf{G} est un couple constitué d'un tore maximal \mathbf{T} de \mathbf{G} et d'un sous-groupe de Borel \mathbf{B} .

Définition 5.1. — Une paire de Borel $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{G} est dite fondamentale si les conditions suivantes sont réalisées :

(i) \mathbf{T}_* est stable sous σ_G et $T_* = \mathbf{T}_*(\mathbb{R}) = \mathbf{T}_*^{\sigma_G}$ est un sous-groupe de Cartan fondamental (i.e. maximalement compact) de G ,

(ii) \mathbf{B}_* est un sous-groupe de Borel contenant \mathbf{T}_* tel que l'ensemble des racines de \mathbf{T}_* dans \mathbf{B}_* soit stable par $-\sigma$ (cette condition est automatique lorsque \mathbf{T}_* est anisotrope car toute les racines sont imaginaires. Comme \mathbf{T}_* est fondamental, il n'y a pas de racines réelles, et c'est donc une condition sur les racines complexes).

Une paire de Borel fondamentale $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{G} est dite de type Whittaker si de plus la condition suivante est réalisée :

(iii) les racines simples imaginaires de \mathbf{T}_* dans \mathbf{B}_* sont imaginaires non compactes.

Dans [AV92], les auteurs utilisent la terminologie « large » pour la propriété (iii). Le fait que \mathbf{G} possède une paire de Borel fondamentale de type Whittaker est équivalent au fait que \mathbf{G} soit quasi-déployé (cf. [AV92], Prop. 6.24). Le choix d'une telle paire fondamentale est équivalent au choix d'une donnée de Whittaker (N_d, χ) , la correspondance entre les deux étant réalisée de la manière suivante : une paire de Borel fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{G} détermine, en se fixant un caractère infinitésimal entier, une représentation générique de la série fondamentale. Cette représentation admet donc un modèle de Whittaker, et détermine donc à conjugaison près une donnée de Whittaker (N_d, χ) . Cette construction induit une bijection entre classes de conjugaison sous G de données de Whittaker et classes de conjugaison de paire de Borel fondamentales de type Whittaker.

On fixe donc dans la suite une paire de Borel fondamentale $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{G} , et si \mathbf{G} est quasi-déployé, on suppose que cette paire est de type Whittaker et est compatible avec le modèle de Whittaker choisi. On peut supposer, ce que l'on fera, que \mathbf{T}_* est τ -stable. La condition (ii) est alors équivalente au fait que \mathbf{B}_* est aussi τ -stable.

5.2. c -Levi. — Soit ${}^dQ = {}^dL{}^dV$ un sous-groupe parabolique standard de \widehat{G} . Ceci signifie que $\mathcal{B} \subset {}^dQ$ et $\mathcal{T} \subset {}^dL$. Les racines simples de \mathcal{T} dans \mathcal{B} sont soit dans dL , soit dans dV , et l'on fait l'hypothèse que l'action de $\sigma_{\widehat{G}}$ sur les racines simples préserve cette partition.

Soit (\mathbf{B}, \mathbf{T}) une paire de Borel fondamentale dans \mathbf{G} . L'identification entre racines simples de \mathbf{T} dans \mathbf{B} et coracines simples de \mathcal{T} dans \mathcal{B} permet de définir un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{V}$ de \mathbf{G} contenant \mathbf{B} .

Lemme 5.2. — *Le groupe \mathbf{L} est stable sous σ_G , autrement dit, c'est un sous-groupe de \mathbf{G} défini sur \mathbb{R} . Si de plus, \mathbf{T} est τ -stable, il en est de même de \mathbf{Q} et \mathbf{L} .*

Démonstration. Le sous-groupe \mathbf{T} est stable par σ_G par définition, il suffit donc de démontrer que l'ensemble des racines de \mathbf{T} dans \mathbf{L} est stable sous l'action de σ_G . Soit n_0 un représentant de l'élément le plus long du groupe de Weyl. Alors $\text{Ad}(n_0) \circ \sigma_G$ préserve (\mathbf{B}, \mathbf{T}) , et quitte à modifier n_0 en le multipliant à gauche par un élément de T , on peut trouver un épinglage $\mathbf{spl} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{X_\alpha\})$, préservé par $\text{Ad}(n_0) \circ \sigma_G$. On a alors par hypothèse \mathbf{L} préservé par $\text{Ad}(n_0) \circ \sigma_G$, et donc \mathbf{L} préservé par σ_G . Si \mathbf{T} est τ -stable, l'action de τ sur les racines coïncide avec celle de $-\sigma_G$, et la seconde assertion s'en déduit. \square

Suivant Shelstad [She15], nous appelons un sous-groupe \mathbf{L} de \mathbf{G} défini sur \mathbb{R} obtenu de la sorte un c -Levi de \mathbf{G} .

Considérons l'ensemble Σ_{dQ}^G des classes de conjugaison sous $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ de paires (\mathbf{Q}, \mathbf{L}) ainsi obtenues. Pour deux paires (\mathbf{Q}, \mathbf{L}) et $(\mathbf{Q}', \mathbf{L}')$, on voit, puisque leur L -groupes sont les mêmes, que \mathbf{L} et \mathbf{L}' sont des formes intérieures.

Pour chaque élément dans Σ_{dQ}^G , on peut trouver un représentant (\mathbf{Q}, \mathbf{L}) où \mathbf{Q} et \mathbf{L} sont τ_G -stables, ce que l'on supposera toujours. Si \mathbf{G} est quasi-déployé, on trouve facilement un représentant quasi-déployé. En effet, partons de la paire fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{G} . On construit le sous-groupe parabolique $\mathbf{L}_* = \mathbf{L}_*\mathbf{V}_*$ contenant \mathbf{B}_* comme ci-dessus. Alors nous avons vu que \mathbf{L}_* est σ_G -stable et $(\mathbf{B}_{*,L} = \mathbf{B}_* \cap \mathbf{L}_*, \mathbf{T}_*)$ est une paire fondamentale de type Whittaker de \mathbf{L}_* . Le groupe \mathbf{L}_* possédant une paire fondamentale de type Whittaker, il est quasi-déployé, et nous avons vu que ceci détermine aussi une classe de conjugaison de donnée de Whittaker pour \mathbf{L}_* .

Dans tous les cas, on a choisi une paire fondamentale $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$, et l'on obtient grâce à ce choix une bijection entre Σ_{dQ}^G et

$$W(\mathbf{T}_*, G) \backslash W(\mathbf{T}_*, \mathbf{G})^\tau / W(\mathbf{T}_*, \mathbf{L}_*)$$

([AJ87], Section 10). Lorsque \mathbf{T}_* est compact, c'est-à-dire lorsque le rang de \mathbf{G} est celui de \mathbf{K}_G , on a $W(\mathbf{T}_*, \mathbf{G})^\tau = W(\mathbf{T}_*, \mathbf{G})$.

Construisons un L -groupe en constatant que $\mathbf{spl}_{dL} = (\mathcal{B}_L := \mathcal{B} \cap {}^dL, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_\alpha\})$ est un épinglage de dL préservé par $\sigma_{\widehat{G}}$. On construit alors ${}^L L = {}^dL \times W_{\mathbb{R}}$ en étendant l'action de Γ sur dL via la projection de $W_{\mathbb{R}}$ sur Γ .

Définissons le plongement de L -groupes suivant

$$(5.2.1) \quad \iota_{L,G} : {}^L L \longrightarrow {}^L G$$

qui prolonge l'inclusion de ${}^dL = \widehat{L}$ dans \widehat{G} . Il suffit donc de donner la valeur de $\iota_{L,G}$ sur $1 \times W_{\mathbb{R}} \in {}^L L$. Pour $z \in \mathbb{C}^\times$, on pose

$$\iota_{L,G} \prod_{\alpha \in R(\mathcal{T}, {}^dV)} \check{\alpha} \left(\frac{z}{|z|} \right) \times z = \frac{\check{\rho}_{dV}(z)}{\check{\rho}_{dV}(\bar{z})} \times z.$$

Ici $\check{\rho}_{dV}$ est la demi-somme des racines de \mathcal{T} dans dV . On note w_G l'élément le plus long de W_G et w_L celui de W_L . On note

$$n : W_G = W(\widehat{G}, \mathcal{T}) \times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow N({}^L G, \mathcal{T}) = N(\widehat{G}, \mathcal{T}) \times W_{\mathbb{R}}$$

la section ensembliste définie dans [LS87], §2.1. Il est démontré dans [Tai] que

$$n(w_G w_L \times j)^2 = 2\check{\rho}_{dV}(-1).$$

On pose $\iota_{L,G}(j) = n(w_L w_G \rtimes j)$, et on obtient un morphisme bien défini. On a aussi $n(w \rtimes j) = n(w) \rtimes j$ pour tout $w \in W_G$.

Lemme 5.3. — *Supposons que nous soyons dans la situation ci-dessus, et que l'on fixe pour \mathbf{L} et \mathcal{L} les paires de Borel $(\mathbf{B}_L = \mathbf{B} \cap \mathbf{L}, \mathbf{T})$ et $(\mathcal{B}_L = \mathcal{B} \cap \mathcal{L}, \mathcal{T})$. Supposons que $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{L}_1 \mathcal{V}_1$ et $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{V}_1$ soient des sous-groupes paraboliques de \mathcal{L} et \mathbf{L} obtenus comme ci-dessus, mais relativement à \mathcal{L} et \mathbf{L} . On a alors des plongements de L -groupes*

$$\iota_{L,G} : {}^L L \longrightarrow {}^L G \quad \text{et} \quad \iota_{L_1,L} : {}^L L_1 \longrightarrow {}^L L.$$

On a aussi des sous-groupes paraboliques $\mathcal{Q}' = \mathcal{L}_1 \mathcal{V}_1 \mathcal{V}$ et $\mathbf{Q}' = \mathbf{L}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}$ de \widehat{G} et \mathbf{G} respectivement, et un plongement de L -groupes

$$\iota_{L_1,G} : {}^L L_1 \longrightarrow {}^L G$$

On a alors $\iota_{L_1,G} = \iota_{L,G} \circ \iota_{L_1,L}$.

Démonstration. Tout se joue sur l'élément $j \in W_{\mathbb{R}}$. Or

$$n(w_{L_1} w_L) n(w_L w_G) = t(w_{L_1} w_L, w_L w_G) n(w_{L_1} w_G)$$

où $w \mapsto t(w)$ est un certain cocycle, donné par la formule de [LS87], Lemma 2.2. On vérifie facilement que $t(w_{L_1} w_L, w_L w_G) = 1$. \square

5.3. Séries discrètes. — Supposons maintenant que le sous-groupe de Cartan \mathbf{T}_* de la paire fondamentale fixée $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ soit anisotrope. Alors le groupe G admet des séries discrètes qui sont des représentations de carré intégrable.

On applique les constructions de la section 5.2 au cas où ${}^d Q = {}^d L {}^d V = \mathcal{B}$, ${}^d L = \mathcal{T}$. Dans ce cas le sous-groupe parabolique $\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{V}$ de \mathbf{G} associé à une paire de Borel fondamentale (\mathbf{B}, \mathbf{T}) est le sous-groupe de Borel \mathbf{B} lui-même (et donc $\mathbf{L} = \mathbf{T}$). À conjugaison près dans G , on peut supposer que $\mathbf{T} = \mathbf{T}_*$, et bien sûr la paire fondamentale $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ fixée au départ nous donne un élément distingué d'un système de représentant de $\Sigma_{\mathcal{B}}^G$. Le choix de ce représentant distingué fournit une bijection

$$\Sigma_{\mathcal{B}}^G \simeq W(G, T_*) \backslash W(\mathbf{G}, \mathbf{T}_*).$$

Soit $\phi_G : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L G$ un paramètre de Langlands discret. Il se factorise par le L -plongement

$$\iota_{T_*,G} : {}^L T_* \longrightarrow {}^L G$$

défini en (5.2.1), c'est-à-dire que $\phi_G = \iota_{T_*,G} \circ \phi_{T_*}$, pour certains paramètres de Langlands $\phi_{T_*} : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L T_*$. La classification de Langlands pour les tores ([Bor79], [Lan97]) associe à un tel ϕ_{T_*} un caractère $\xi = \xi_{\phi_{T_*}}$ de T_* .

Si $(\mathbf{B}, \mathbf{T}_*)$ est une paire de Borel fondamentale comme ci-dessus, il existe un paramètre de Langlands $\phi_{T_*}(\mathbf{B})$ comme ci-dessus telle que la différentielle du caractère $\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B})}$ soit dominante relativement à \mathbf{B} . Notons $\mathcal{R}_{\mathbf{b}, T_*, G}^d$ le foncteur d'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman, en degré

$$(5.3.1) \quad d = d(G, T) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T}_*) - (q(G) - q(T_*))$$

Alors $\mathcal{R}_{\mathbf{b}, T_*, G}^d(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B})})$ est une série discrète du paquet $\Pi(\phi_G, G)$, et cette construction fournit une bijection entre $\Sigma_{\mathcal{B}}$ et $\Pi(\phi_G, G)$. La condition de dominance de $\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B})}$ relativement à \mathbf{B} entraîne que l'on est dans le « good range » pour l'induction cohomologique ([KV95], Définition 0.49). Faisons maintenant le lien avec une autre paramétrisation des séries discrètes. Nous suivons les idées de [Ada11].

Si $\phi_G : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L G$ est un paramètre de Langlands, grâce aux travaux de Shelstad [She82], [She08], les éléments du pseudo-paquet $\Pi^{\sharp}(\phi_G, G)$ vont être paramétrés par certains caractères de $A(\phi_G)$, le groupe des composantes connexes du groupe $\text{Centr}(\widehat{G}, \phi_G)$, le centralisateur dans

\widehat{G} de ϕ_G . Expliquons ceci pour un paramètre discret. Dans ce cas, $\Pi^\sharp(\phi_G, G) = \Pi(\phi_G, G)$ est un paquet de séries discrètes et $A(\phi_G) = \text{Centr}(\widehat{G}, \phi_G)$ est un 2-groupe fini.

Dans la suite, nous supposons de plus \mathbf{G} quasi-déployé et une paire fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ fixée.

Notons $T_*[2]$ désigne le sous-groupe des éléments d'ordre 2 de T_* . Nous allons expliquer comment paramétrer les éléments de $\Pi(\phi_G, G)$ par certains éléments de $T_*[2]$. Le lien avec les caractères du groupe $A(\phi_G)$ provient d'un pairing parfait canonique (cf. [Ada11])

$$(5.3.2) \quad T_*[2] \times A(\phi_G) \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

qui identifie $T_*[2]$ à $\widehat{A(\phi_G)}$.

Pour tout $t \in T_*[2]$, $\text{Ad}(t)$ définit un automorphisme intérieur involutif de \mathbf{G} , qui commute avec σ_G . Posons $\sigma_t = \sigma_G \circ \text{Ad}(t)$: c'est un automorphisme antiholomorphe involutif de \mathbf{G} , c'est-à-dire une forme réelle intérieure de \mathbf{G} . C'est même une forme intérieure « pure » au sens de Kottwitz (cf. [Kal16]) (les formes intérieures « non pures » étant obtenues de la même manière en partant d'éléments $t \in T$ d'ordre fini et dont le carré est dans le centre de \mathbf{G}). Notons \mathbf{G}_t le groupe défini sur \mathbb{R} dont le groupe des points complexes est \mathbf{G} et dont la conjugaison complexe est σ_t . Remarquons que T_* est un sous-groupe de Cartan commun à tous les G_t .

Notons $\mathcal{R}_{\mathbf{b}_*, T_*, G_t}^{dt}$ le foncteur d'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman, de la catégorie des représentations du tore T_* vers la catégorie des représentations de G_t , en degré

$$(5.3.3) \quad d_t = d(G_t, T_*) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{T}_*) - (q(G_t) - q(T_*)).$$

On obtient donc pour chaque $t \in T_*[2]$ une représentation $\pi(\phi_G, t) := \mathcal{R}_{\mathbf{b}_*, T_*, G_t}^{dt}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)})$ de la série discrète de G_t . L'ensemble $\{\pi(\phi_G, t) = \mathcal{R}_{\mathbf{b}_*, T_*, G_t}^{dt}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)}), t \in T_*[2]\}$ constitue le « super-paquet » associé à ϕ_G , selon la terminologie de [ABV92]. Remarquons la différence avec ce que l'on a fait ci-dessus, où l'on restait dans le groupe G mais on faisait varier le sous-groupe de Borel \mathbf{B} . Ici, on fixe le sous-groupe de Borel \mathbf{B}_* , et l'on fait varier les formes réelles G_t .

On peut regrouper les formes réelles \mathbf{G}_t par classe d'équivalence. Deux formes réelles G_t et $G_{t'}$ sont équivalentes s'il existe $g \in \mathbf{G}$ tel que $\sigma_t = \text{Ad}(g) \circ \sigma_{t'} \circ \text{Ad}(g)^{-1}$. Ceci définit une relation d'équivalence $t \sim_G t'$ sur $T_*[2]$, et l'on note $[t]_G$ la classe d'équivalence d'un élément $t \in T_*[2]$. La classe d'équivalence de $1 \in T_*[2]$ est donc constitué des éléments t tels que \mathbf{G}_t est équivalente à \mathbf{G} . On peut donc par conjugaison intérieure identifier les représentations d'un tel G_t avec les représentations de G . On a alors

$$(5.3.4) \quad \Pi(\phi_G, G) = \{\pi(\phi_G, t) = \mathcal{R}_{\mathbf{b}_*, T_*, G_t}^{dt}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)}), t \in T_*[2], [t]_G = [1]_G\}.$$

On peut faire la même chose en fixant un système de représentants des classes d'équivalence de formes réelles, et en se ramenant aux représentations de ces représentants. On obtient ainsi les paquets de séries discrètes des formes intérieures pures de \mathbf{G} . Soit $t_0 \in T_*[2]$, les représentations d'un groupe G_t avec $[t]_G = [t_0]_G$ s'identifient par conjugaison intérieure aux représentations de G_{t_0} , et

$$(5.3.5) \quad \Pi(\phi_G, G_{t_0}) = \{\pi(\phi_G, t) = \mathcal{R}_{\mathbf{b}_*, T_*, G_t}^{dt}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)}), t \in T_*[2], [t]_G = [t_0]_G\}.$$

Remarque 5.4 (Limites de séries discrètes). — Ce que l'on a fait ci-dessus pour un paramètre ϕ_G discret s'adapte facilement au cas d'un paramètre de limites de séries discrètes. Les inductions cohomologiques sont alors dans le weakly good range, et la différence avec le cas discret est que certaines des représentations $\pi(\phi_G, t) := \mathcal{R}_{\mathbf{b}_*, T_*, G_t}^{dt}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)})$ peuvent être nulle. La paramétrisation des paquets est alors comme en (5.3.4) et (5.3.5), à ceci près qu'il faut rajouter la condition $\pi(\phi_G, t) \neq 0$. Le groupe $A(\phi_G)$ est un quotient du groupe $A(\phi_G^{reg})$ où ϕ_G^{reg} est un paramètre discret, et $\widehat{A(\phi_G^{reg})} \simeq T_*[2]$ par le pairing (5.3.2), et donc $\widehat{A(\phi_G)}$ s'identifie bien à un sous-groupe de $T_*[2]$, dont les éléments sont les t tels que $\pi(\phi_G, t) \neq 0$.

5.4. Stabilité et induction cohomologique. — Revenons au contexte de la section 5.2. On suppose donc que l'on a un sous-groupe parabolique standard ${}^dQ = {}^dL^dV$ de \widehat{G} , compatible avec l'action de $\sigma_{\widehat{G}}$.

On suppose que \mathbf{G} quasi-déployé et que l'on a fixé une paire fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$. Elle nous fournit un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q}_* = \mathbf{L}_* \mathbf{V}_*$, et \mathbf{L}_* est stable par σ_G et τ_G .

Supposons aussi que \mathbf{T}_* soit anisotrope. Soit $\phi_G : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L G$ un paramètre de Langlands discret, que nous factorisons en $\phi_G = \iota_{T_*, G} \circ \phi_{T_*}$ avec ϕ_{T_*} choisi de sorte que le caractère $\xi_{\phi_{T_*}}$ qui lui correspond soit dominant pour \mathbf{B}_* . Notons $\phi_L = \iota_{T_*, L_*} \circ \phi_{T_*}$, où ι_{T_*, L_*} est le L -plongement défini par $(\mathcal{B}_L, \mathcal{T})$. C'est un paramètre de Langlands discret pour \mathbf{L}_* .

Nous avons vu dans la section précédente une paramétrisation des séries discrètes de paramètre ϕ_G par les éléments de $T_*[2]$. Remarquons que cette paramétrisation s'applique à \mathbf{G} , mais aussi à \mathbf{L}_* . En particulier, pour tout $t \in T_*[2]$, \mathbf{L}_* est stable sous σ_t , et l'on a donc une forme intérieure \mathbf{L}_t de \mathbf{L}_* .

Notons $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_1, L_t, G_t}^{d(G_t, L_t)}$ le foncteur d'induction cohomologique de Vogan-Zuckerman, de la catégorie des représentations de L_t vers la catégorie des représentations de G_t , en degré

$$(5.4.1) \quad d(G_t, L_t) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{L}_*) - (q(G_t) - q(L_t)).$$

Remarquons que par le lemme 5.3 de transitivité des L -plongements, on a aussi $\phi_L = \iota_{T_*, L} \circ \phi_{T_*}$. Par transitivité de l'induction cohomologique (cf. [Vog81], Cor. 6.3.10), on a

$$(5.4.2) \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_*, L_t, G_t}^{d(G_t, L_t)}(\pi(\phi_L, t)) = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_*, L_t, G_t}^{d(G_t, L_t)}(\mathcal{R}_{\mathfrak{b}_{L_*}, T_*, L_t}^{d(L_t, T_*)}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)})) = \mathcal{R}_{\mathfrak{b}_*, T_*, G_t}^{d(G_t, T_*)}(\xi_{\phi_{T_*}(\mathbf{B}_*)}) = \pi(\phi_G, t)$$

où

$$(5.4.3) \quad d(L_t, T_*) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{L}_* - \dim \mathbf{T}_*) - (q(L_t) - q(T_*)).$$

Remarquons que ces inductions cohomologiques sont dans le good range.

Fixons un élément t_0 de $T_*[2]$ et un système de représentants $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i)$ de $\Sigma_{dQ}^{G_{t_0}}$ que l'on suppose $\tau_{G_{t_0}}$ -stables. On a pour tout i , un foncteur d'induction cohomologique

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}$$

en degré

$$(5.4.4) \quad d_i = d(G, L_i) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{L}_*) - (q(G_{t_0}) - q(L_i))$$

de la catégorie des représentations de L_i vers la catégorie des représentations de G_{t_0} .

Pour chaque L_i , on a un paquet de séries discrètes $\Pi(\phi_L, L_i)$ et la représentation virtuelle stable associée $[\pi(\phi_L, L_i)]$ (la somme des éléments du paquet).

Proposition 5.5. — *On a*

$$\sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{dQ}^{G_{t_0}}} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G_{t_0}}^{d_i}([\pi(\phi_L, L_i)]) = [\pi(\phi_G, G_{t_0})]$$

en particulier cette représentation virtuelle est stable.

Démonstration. On a introduit la relation d'équivalence $t \sim_G t'$ sur $T_*[2]$ ci-dessus, et l'on peut définir la relation d'équivalence analogue, mais relativement au groupe \mathbf{L}_* et que l'on note \sim_L . C'est une relation d'équivalence plus faible que \sim_G . Le membre de droite de l'égalité à démontrer est

$$[\pi(\phi_G, G_{t_0})] = \sum_{t \in T_*[2], t \sim_G t_0} [\pi(\phi_G, t)]$$

Fixons un système de représentants $(t_i)_i$ pour la relation \sim_L dans l'ensemble $\{t \in T_*[2] \mid t \sim_G t_0\}$. On a donc en utilisant (5.4.2)

$$\begin{aligned} [\pi(\phi_G, G_{t_0})] &= \sum_i \sum_{t \in T_*[2], t \sim_L t_i} [\pi(\phi_G, t)] = \sum_i \sum_{t \in T_*[2], t \sim_L t_i} \left[\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_*, L_t, G_t}^{d(G_t, L_t)}(\pi(\phi_L, t)) \right] \\ &= \sum_i \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_*, L_{t_i}, G_{t_i}}^{d(G_{t_i}, L_{t_i})}([\pi(\phi_L, L_{t_i})]). \end{aligned}$$

Par conjugaison intérieure des \mathbf{G}_{t_i} avec \mathbf{G}_{t_0} les L_{t_i} s'identifient aux L_i de $\Sigma_{d_Q}^{G_{t_0}}$ et l'on retrouve bien le membre de gauche dans l'égalité de la proposition. \square

Revenons maintenant au cas d'un groupe \mathbf{G} quelconque, et à la donnée d'un sous-groupe parabolique standard ${}^dQ = {}^dL^dV$ de \widehat{G} , compatible avec l'action de $\sigma_{\widehat{G}}$, et d'un système de représentants $(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i)$ de $\Sigma_{d_Q}^G$ que l'on suppose τ_G -stables. Soit $\phi_L : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L L$ un paramètre de Langlands, et posons toujours $\phi_G = \nu_{L, G} \circ \phi_L$. On suppose qu'on est dans le good range. On a les représentations virtuelles stables $[\pi(\phi_L, L_i)]$.

Proposition 5.6. — *Il existe un paramètre de Langlands ϕ'_G pour G de même caractère infinitésimal que ϕ_G tel que*

$$\sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^G} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}([\pi(\phi_L, L_i)]) = [\pi(\phi'_G, G)]$$

en particulier cette représentation virtuelle est stable.

Attention, ϕ'_G n'est pas égal à ϕ_G , il y a une torsion, due au fait que l'induction cohomologique ne commute pas à l'induction parabolique, voir l'appendice. Evidemment, ici nous n'avons pas précisé ce qu'est ϕ'_G , mais nous n'en avons pas besoin pour le moment car nous ne visons que l'énoncé de stabilité.

La démonstration dans le cas général demandant un formalisme un peu lourd, nous allons nous contenter d'une démonstration dans les cas qui nous servent dans cet article, c'est-à-dire les groupes classiques. Nous repoussons la démonstration à la section 6.4, lorsque nous aurons introduits quelques objets et notations spécifiques à ces cas. Pour ceux-ci, le calcul de la torsion pour passer du paramètre ϕ_G au paramètre ϕ'_G est explicite.

On peut appliquer ceci au cas des formes intérieures pures \mathbf{G}_t d'un groupe quasi-déployé \mathbf{G} , situation qui a été considérée ci-dessus. On a alors un c -sous-groupe de Levi \mathbf{L}_* de \mathbf{G} . Comme toute représentation virtuelle stable sur L_* est une combinaison linéaire de $[\pi(\phi_L, L_*)]$, et qu'une représentation virtuelle stable de L_* détermine par transfert endoscopique une représentation virtuelle stable de toute forme intérieure L_* , on obtient ainsi que $\sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^{G_t}} e(L_i) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G_t}^{d_i}$ envoie les « représentations virtuelles super-stables de \mathbf{L}_* » dans le good range sur les représentations virtuelles stables de G_t .

Corollaire 5.7. — *Dans le contexte décrit ci-dessus, soit $[X_{L_*}^{st}]$ une représentation virtuelle stable de L_* , et soit $[X_{L_i}^{st}]$ la représentation stable obtenue par transfert endoscopique de L_* vers sa forme intérieure L_i . Alors*

$$\sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^{G_t}} e(L_i) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}([X_{L_i}^{st}])$$

est stable. De plus, lorsqu'on considère toutes les formes intérieures pures \mathbf{G}_t simultanément, ceci définit une représentation virtuelle superstable, dans le sens où

$$\mathrm{Trans}_G^{G_t} \left(\sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^G} e(L_i) \mathcal{R}_{\mathbf{q}_i, L_i, G}^{d_i} ([X_{L_i}^{st}]) \right) = \sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^{G_t}} e(L_i) \mathcal{R}_{\mathbf{q}_i, L_i, G}^{d_i} ([X_{L_i}^{st}]).$$

Ceci est aussi établi pour les groupes classiques dans la section 6.4.

6. Formes intérieures pures, c -Levi et données endoscopiques elliptiques des groupes classiques

6.1. Paramétrisation des séries discrètes et formes intérieures pures. — Les groupes classiques quasi-déployés de la section 3.1 admettent tous des séries discrètes, à l'exception de \mathbf{SO}_{2n}^d pour n impair, et de \mathbf{SO}_{2n}^{qd} pour n pair, que nous excluons donc de la discussion jusqu'à la section suivante. Nous allons spécialiser la discussion de la section 5.3 au cas où \mathbf{G} est l'un de ces groupes classiques. Rappelons que nous avons fixé une paire fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{T}_*, \mathbf{B}_*)$, et qu'ici, \mathbf{T}_* est anisotrope.

Fixons $\phi_G : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L G$, un paramètre de Langlands discret. Alors $\Pi^{\sharp}(\phi_G, G) = \Pi(\phi_G, G)$ est un paquet de séries discrètes.

On identifie le sous-groupe de Cartan \mathbf{T}_* à $\mathbf{U}(1)^n$ grâce aux racines simples de \mathbf{T}_* dans \mathbf{B}_* qui fournissent une base $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ de $X^*(\mathbf{T}_*)$. Les éléments d'ordre 2 de T_* seront alors noté $t = (\pm 1, \dots, \pm 1)$ et il y en a 2^n . Les éléments d'un super-paquet de séries discrètes $\Pi(\phi_G)$ sont donc paramétrés par les éléments $t = (\pm 1, \dots, \pm 1)$ de $T_*[2]$. Rappelons que nous les avons notées $\pi(\phi_G, t)$. La série discrète $\pi(\phi_G, 1)$ est générique et admet le modèle de Whittaker fixé au départ.

Pour tout $t = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in T_*[2]$, on obtient via le pairing (5.3.2) un caractère η_t de $A(\phi_G)$. Le caractère trivial de $A(\phi_G)$ est le paramètre de la série discrète $X(\phi_G, 1)$ admettant le modèle de Whittaker.

Il reste à identifier dans chaque cas quelles sont les formes intérieures qui interviennent, et comment les 2^n séries discrètes se répartissent entre ces formes intérieures. Pour cela, posons

$$(6.1.1) \quad t_* = ((-1)^n \dots, 1, \dots, -1) \in T_*[2].$$

Pour tout $t \in T_*[2]$, notons $n_1(t)$ (resp. $n_{-1}(t)$) le nombre de coordonnées égales à 1 (resp. -1) dans tt_* .

Cas A : $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$. Toute les formes intérieures \mathbf{G}_t sont équivalentes à \mathbf{G} . On obtient ainsi un paquet $\Pi(\phi_G, G)$ avec 2^n éléments.

Cas B : $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n+1}$. Deux formes G_t et $G_{t'}$ sont équivalentes si et seulement si $n_1(t) = n_1(t')$. Nous allons noter $\mathbf{SO}(p, q)$ la classe d'équivalence déterminée par la formule $p = 2n_1(t) + 1$ (et donc $q = 2n_{-1}(t)$).

Cas C et D : $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n}^{\alpha}$, avec $\alpha = d$ si n est pair et $\alpha = qd$ si n est impair. Deux formes G_t et $G_{t'}$ sont équivalentes si et seulement si $n_1(t) = n_1(t')$. Nous allons noter $\mathbf{SO}(p, q)$ la classe d'équivalence déterminée par la formule $p = 2n_1(t)$ (et donc $q = 2n_{-1}(t)$).

Cas U : $\mathbf{G} = \mathbf{U}_n$. Deux formes intérieures pures G_t et $G_{t'}$ sont équivalentes si et seulement si $n_1(t) = n_1(t')$. Nous allons noter $\mathbf{U}(p, q)$ la classe d'équivalence donnée par $n_1(t) = p$ (et donc $q = n_{-1}(t)$).

Remarques 6.1. — Pour les groupes orthogonaux, on remarque que la classe du groupe quasi-déployé de départ \mathbf{G} est celle obtenue pour $t = 1$, et le choix de t_* en (6.1.1) nous donne dans le cas \mathbf{B} , $\mathbf{SO}(n+1, n)$ si n est pair, et $\mathbf{SO}(n, n+1)$ si n est impair, et dans les cas \mathbf{C} et \mathbf{D} , $\mathbf{SO}(n, n)$ si n est pair et $\mathbf{SO}(n-1, n+1)$ si n est impair. On peut interpréter cette construction de la manière suivante : on fixe une suite de n plans réels muni d'une forme quadratique de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$, alternativement, *en finissant* par un plan de signature $(0, 2)$. Dans le cas \mathbf{B} , on complète par une droite muni d'une forme quadratique définie positive, pour former par somme directe un espace quadratique V dont \mathbf{G} est le groupe de symétries. Le tore compact T_* est le stabilisateur de cette décomposition de V . Pour tout élément $t \in T_*[2]$, le groupe \mathbf{G}_t est le groupe de symétrie de l'espace obtenu en changeant la forme du i -ième plan en son opposée à chaque fois que la i -ème coordonnée de t est -1 .

Dans les cas \mathbf{C} et \mathbf{D} , remarquons que les classes de formes intérieures pures $\mathbf{SO}(p, q)$ et $\mathbf{SO}(q, p)$ sont distinguées si $p \neq q$, alors que les groupes sous-jacents sont isomorphes. On distingue aussi les formes intérieures $\mathbf{U}(p, q)$ et $\mathbf{U}(q, p)$ si $p \neq q$. Par exemple, pour $n = 1$, un super-paquet de séries discrètes contient 2 éléments, l'un est une représentation de la forme $\mathbf{U}(1, 0)$, l'autre est une représentation de la forme $\mathbf{U}(0, 1)$. La classe du groupe quasi-déployé G de départ est donc $\mathbf{U}(n/2, n/2)$ si n est pair, et $\mathbf{U}(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ si n est impair. On a une interprétation similaire de \mathbf{G} et de ses formes intérieures pures \mathbf{G}_t en termes d'un espace hermitien formé par somme directe de droites complexes hermitiennes.

Remarque 6.2. — Cette classification fait apparaître de manière naturelle les classes d'équivalence de formes intérieures pures de notre groupe de départ. Rappelons qu'en général celle-ci sont classifiées par le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathbf{G})$ et que dans les cas des groupes orthogonaux ou unitaires, l'identification de ce groupe avec les classes d'équivalence de formes bilinéaires ou hermitiennes est bien connue.

Remarque 6.3. — La formulation d'une partie des résultats qui suivent va dépendre, de manière évidemment inessentielle, du choix de t_* en (6.1.1). Nous avons choisi une des quatre possibilités pour alterner des ± 1 : commencer par la gauche ou par la droite, avec un $+1$ ou bien avec un -1 , en commençant avec -1 par la droite. Par exemple, si l'on fait un autre choix, pour \mathbf{G} groupe orthogonal ou unitaire, la classe d'équivalence de formes intérieures de \mathbf{G} peut être donnée par un $\mathbf{SO}(p, q)$ ou $\mathbf{U}(p, q)$ différent (mais toujours quasi-déployé, *i.e.* $|p - q| \leq 1$). Voir aussi la remarque 6.4 pour un énoncé qui dépend de ce choix.

6.2. Séries fondamentales et formes intérieures pures des groupes orthogonaux sans séries discrètes. — Il est utile de faire apparaître les formes intérieures pures des groupes manquants, à savoir \mathbf{SO}_{2n}^d , n impair, et \mathbf{SO}_{2n}^{qd} , n pair. Plaçons nous dans le premier cas. Réalisons ce groupe comme groupe d'isotropie pour un espace quadratique réel (V, q) de dimension $2n$ et de signature (n, n) . Fixons un plan hyperbolique P dans V , et notons W son orthogonal. Alors $\mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$ est naturellement réalisé comme groupe d'isotropie de W , et le stabilisateur de $P \oplus W$ dans \mathbf{SO}_{2n}^d est isomorphe à $\mathbb{R}^\times \times \mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$, qui apparaît comme sous-groupe de Levi de \mathbf{SO}_{2n}^d . Fixons une paire fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{SO}_{2n}^d de sorte que l'intersection avec $\mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$ soit une paire fondamentale $(\mathbf{B}'_*, \mathbf{T}'_*)$ de $\mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$. Alors $\mathbf{T}_* = \mathbb{R}^\times \times \mathbf{T}'_*$ et \mathbf{T}'_* est anisotrope et $\mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$ admet des séries discrètes, on peut donc lui appliquer les considérations de la section précédente. Chaque $t \in \mathbf{T}'_*[2]$ donne une forme intérieure \mathbf{G}'_t de $\mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$ et une forme intérieure \mathbf{G}_t de \mathbf{SO}_{2n}^d . La classe d'équivalence de la forme intérieure \mathbf{G}'_t est $\mathbf{SO}(p-1, q-1)$, où p et q sont déterminés dans le paragraphe précédent, avec ici q impair, et l'on note $\mathbf{SO}(p, q)$ la classe d'équivalence de \mathbf{G}_t .

Les séries fondamentales de \mathbf{SO}_{2n}^d et de ses formes intérieures pures \mathbf{G}_t sont obtenues par induction parabolique à partir des séries discrètes de $\mathbf{SO}_{2(n-1)}^d$ et de ses formes intérieures \mathbf{G}'_t et d'un caractère du facteur \mathbb{R}^\times , et ceci préserve les paquets de Langlands. Ainsi, les paquets

de séries fondamentales de \mathbf{SO}_{2n}^d et de ses formes intérieures pures \mathbf{G}_t sont paramétrés par les éléments de $T_*[2]$.

Le cas \mathbf{SO}_{2n}^{qd} , n pair se traite de la même manière à partir un espace quadratique réel (V, q) de dimension $2n$ et de signature $(n-1, n+1)$.

Pour avoir des notations uniformes qui s'appliquent aussi à ces groupes, on pose $T_*[2] := T'[2]$ pour les groupes de cette section. Donc $T_*[2]$ n'est pas ici l'ensemble des élément d'ordre 2 de T_* , mais l'ensemble des éléments d'ordre 2 de son facteur anisotrope T'_* . Dans ce contexte, si ϕ_G est un paramètre de Langlands de séries fondamentales, on a aussi un pairing parfait $T_*[2] \times A(\phi_G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ qui identifie $T_*[2]$ et $\widehat{A(\phi_G)}$ et une paramétrisation des éléments du superpaquet correspondant par $T_*[2]$ ou $\widehat{A(\phi_G)}$.

6.3. c -sous-groupes de Levi des groupes classiques. — Soit \mathbf{G} un groupe classique quasi-déployé de la section 3.1

Soit ${}^dQ = {}^dL^dV$ un sous-groupe parabolique standard de \widehat{G} , compatible avec l'action de $\sigma_{\widehat{G}}$. On va supposer de plus que dQ est un sous-groupe parabolique maximal de \widehat{G} , c'est-à-dire qu'il est associé au choix d'une racine simple. Considérons le sous-groupe parabolique $\mathbf{Q}_* = \mathbf{L}_*\mathbf{V}_*$ obtenu à partir de la paire de Borel fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$. Nous avons vu que \mathbf{L}_* est quasi-déployé. Il est isomorphe à un produit

$$\mathbf{U}_c \times \mathbf{G}_{n-c}$$

où \mathbf{U}_c est un groupe unitaire quasi-déployé de rang c , et \mathbf{G}_{n-c} est un groupe classique quasi-déployé de même type que \mathbf{G} (sauf dans le cas c impair ou les types \mathbf{C} et \mathbf{D} sont échangés). L'entier c se détermine facilement selon la place de la racine simple α mentionnée ci-dessus dans le diagramme de Dynkin.

Rappelons qu'à tout $t \in T_*[2]$, on a associé une conjugaison complexe σ_t et des groupes \mathbf{G}_t et \mathbf{L}_t . Nous avons vu que les formes intérieures G_t et $G_{t'}$ sont équivalentes si et seulement si $n_1(t) = n_1(t')$, en dehors du cas \mathbf{A} où elles sont toutes équivalentes. En particulier, les formes équivalentes à \mathbf{G} sont celles telles que $n_1(t) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (en dehors du cas \mathbf{A}). L'équivalence des formes intérieures \mathbf{L}_t de \mathbf{L}_* , est-elle donnée par un invariant de même type, mais où l'on sépare les coordonnées de t en deux, les c premières, qui vont correspondre au facteur \mathbf{U}_c , et les $n-c$ dernières, qui correspondent au facteur \mathbf{G}_{n-c} . La recette est donc la suivante : on note $n_{1,L}(t) = (n_{1,U}(t), n'_{1,L}(t))$ le couple dont la première coordonnée est le nombre de 1 dans les c premières coordonnées de tt_* et la seconde le nombre de 1 dans les $n-c$ dernières coordonnées de tt_* . On définit de même de manière évidente $n_{-1,L} = (n_{-1,U}, n'_{-1,L})$. Deux formes \mathbf{L}_t et $\mathbf{L}_{t'}$ sont alors équivalentes si et seulement si $n_{1,L}(t) = n_{1,L}(t')$, sauf dans le cas \mathbf{A} où elles sont équivalentes si et seulement si $n_{1,U}(t) = n_{1,U}(t')$.

Remarquons aussi que les c premières coordonnées de t_* sont $((-1)^n, \dots, (-1)^{n-c+1})$ et que ceci ne coïncide avec le choix du t_* pour les groupes unitaires que si $n-c$ est pair. La forme du groupe unitaire qui apparaît est donc $\mathbf{U}(n_{1,U}(t), n_{-1,U}(t))$ si $n-c$ est pair, mais c'est $\mathbf{U}(n_{-1,U}(t), n_{1,U}(t))$ si $n-c$ est impair.

On obtient des systèmes de représentants $(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i\mathbf{V}_i)_{i=0, \dots, c}$ de Σ_{dQ}^G explicites, avec de plus :

$$(6.3.1) \quad L_i \simeq \mathbf{U}(i, c-i) \times G'_i$$

où G'_i est une forme intérieure d'un groupe \mathbf{G}' de même type que G (les cas \mathbf{C} et \mathbf{D} sont échangés si c est impair). C'est-à-dire que pour chaque $i = 1, \dots, c$, on fixe un $t_i \in \mathbf{T}_*[2]$ tel que \mathbf{L}_{t_i} est isomorphe à L_i . Les isomorphismes (6.3.1) peuvent être rendu explicites, nous ne le faisons pas, mais nous nous en servons pour identifier leurs deux membres.

Remarque 6.4. — Le représentant distingué $\mathbf{Q}_* = \mathbf{L}_*\mathbf{V}_*$ est obtenu pour la valeur suivante de i :

- si c est pair, $i = c/2$

- si c est impair, et $n - c$ est pair, $i = \frac{c-1}{2}$,
 - si c est impair, et $n - c$ est impair, $i = \frac{c+1}{2}$
- Le t_i correspondant est alors égal à 1.

Fixons maintenant, pour les groupes orthogonaux, une classe d'équivalence $\mathbf{SO}(p, q)$ de formes intérieures pures \mathbf{G}_i . On obtient aussi facilement un système de représentants ($\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i$) de $\Sigma_{d_Q}^{\mathbf{SO}(p, q)}$ explicite, avec de plus :

$$(6.3.2) \quad L_i \simeq \mathbf{U}(i, c - i) \times G'_i$$

où là encore G'_i est une forme intérieure d'un groupe \mathbf{G}' de même type que G (les cas \mathbf{C} et \mathbf{D} sont échangés si c est impair). Les indices i qui apparaissent sont ceux vérifiant $2i \leq p$, $2(c - i) \leq q$, et la classe de G'_i est alors $\mathbf{SO}(p', q')$ avec $p = p' + 2i$, $q = q' + 2(c - i)$.

6.4. Démonstration de la proposition 5.6 et du corollaire 5.7 pour les groupes classiques. — On se place dans le même contexte que la section précédente. On considère un paramètre de Langlands ϕ_L pour le groupe \mathbf{L}_* et ses formes intérieures \mathbf{L}_i , où $(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i)_i$ décrit un système de représentants de $\Sigma_{d_Q}^G$ de la forme (6.3.1). On pose $\phi_G = \iota_{L, G} \circ \phi_L$. On suppose que l'on se trouve dans le good range pour l'induction cohomologique. Les paquets $\Pi(\phi_L, L_i)$ sont associés à une classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan dans le groupe L_i , ou bien le paquet est vide. Dans le premier cas fixons un représentant D_i pour chaque i , le sous-groupe de Cartan D_i est alors isomorphe comme tore réel à un produit de facteurs de la forme $\mathbf{U}(1)$, \mathbb{R}^\times ou \mathbb{C}^\times :

$$D_i \simeq \mathbf{U}(1)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1} \times \mathbf{U}(1)^{r_2} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2},$$

le facteur $\mathbf{U}(1)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1}$ correspondant à un sous-groupe de Cartan du facteur unitaire $\mathbf{U}(i, c - i)$ dans la décomposition (6.3.1), et le facteur $\mathbf{U}(1)^{r_2} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2}$ à un sous-groupe de Cartan du facteur G'_i . On a donc $r_1 + 2m_1 = c$, $r_2 + 2m_2 + s_2 = n - c$, ces entiers ne dépendant que de ϕ_L et pas de l'indice i (le cas où L_i ne possède pas de sous-groupe de Cartan de cette forme est celui où le paramètre ϕ_L n'est pas « relevant » pour L_i , c'est-à-dire que le paquet $\Pi(\phi_L, L_i)$ est vide). Le centralisateur de la partie déployée de D_i définit un sous-groupe de Levi cuspidal \mathbf{M}_{L_i} de \mathbf{L}_i et l'on a

$$(6.4.1) \quad M_{L_i} \simeq \mathbf{U}(i - m_1, c - i - m_1) \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1} \times G'_{r_2} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2},$$

où G'_{r_2} est un groupe classique de même type que \mathbf{G} et de rang r_2 . Les paquets $\Pi(\phi_L, L_i)$ sont obtenus à partir des paquets de séries discrètes $\Pi(\phi_{M_{L_i}}, M_{L_i})$ attaché à un paramètre discret $\phi_{M_{L_i}}$ et les représentations virtuelles stables associées s'écrivent comme en (2.1.8) :

$$[\pi(\phi_L, L_i)] = \sum_{\pi_{M_{L_i}} \in \Pi(\phi_{M_{L_i}}, M_{L_i})} [\mathrm{Ind}_{M_{L_i}}^{L_i}(\pi_{M_{L_i}})]$$

D'autre part, le groupe G admet une classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan isomorphes à

$$\mathbf{U}(1)^{r_1+r_2} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1+m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2}.$$

Fixons un représentant D de cette classe de conjugaison, et soit \mathbf{M} le sous-groupe de Levi cuspidal de \mathbf{G} obtenu en prenant le centralisateur de la partie déployée de D . On a

$$M \simeq G'_{r_1+r_2} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_1+m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2},$$

où $G'_{r_1+r_2}$ est un groupe classique de même type que \mathbf{G} et de rang $r_1 + r_2$.

On applique les considérations des sections 5.2 et 6.3 aux groupes \mathbf{M} et $G'_{r_1+r_2}$: il existe un système de représentants de classes de conjugaison de c -paraboliques

$$(\mathbf{Q}_k^\#, \mathbf{L}_k^\#)_k$$

de \mathbf{M} , avec

$$(6.4.2) \quad L_k^\sharp \simeq \mathbf{U}(k, c - k) \times G'_k \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2},$$

où les G'_k sont des formes intérieures pures d'un groupe classique de même type que \mathbf{G} et de rang $r_1 + r_2 - c$. De même, et de manière compatible (dans un sens évident), il existe un système de représentants de classes de conjugaison de c -paraboliqes

$$(\mathbf{Q}_k, \mathbf{L}_k)_k$$

de $\mathbf{G}_{r_1+r_2}$, avec

$$L_k \simeq \mathbf{U}(k, c - k) \times G'_k.$$

Pour tout indice i , le sous-groupe M_{L_i} de (6.4.1) est conjugué dans G à un sous-groupe L_k^\sharp de (6.4.2), pour un unique indice k , ce qui donne une bijection entre l'ensemble des indices i et l'ensemble des indices k .

Dans ce contexte, le membre de gauche dans l'égalité de la proposition 5.6 est donc

$$\sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^G} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}([\pi(\phi_L, L_i)]) = \sum_{(\mathbf{Q}_i, \mathbf{L}_i) \in \Sigma_{d_Q}^G} \sum_{\pi_{M_{L_i}} \in \Pi(\phi_{M_L}, M_{L_i})} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}([\text{Ind}_{M_{L_i}}^{L_i}(\pi_{M_{L_i}})]).$$

En utilisant la proposition 10.4 de l'appendice, la représentation $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}([\text{Ind}_{M_{L_i}}^{L_i}(\pi_{M_{L_i}})])$ est de la forme $\text{Ind}_P^G(\pi_M)$ pour une certaine série discrète π_M de M , et lorsque $\pi_{M_{L_i}}$ décrit le paquet $\Pi(\phi_{M_L}, M_{L_i})$, π_M décrit un ensemble de la forme

$$\left\{ \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, L_k^\sharp, M}^{d_k}(\pi_{L_k^\sharp}), \pi_{L_k^\sharp} \in \Pi(\phi_{L^\sharp}, L_k^\sharp) \right\}$$

où ϕ_{L^\sharp} est un paramètre discret qui s'obtient à partir de ϕ_{M_L} par une torsion très simple sur le facteur $(\mathbb{R}^\times)^{s_2}$ (voir section 10.3 dans l'appendice). On peut donc continuer le calcul du membre de gauche dans l'égalité de la proposition 5.6, que l'on écrit sous la forme

$$\sum_k \sum_{\pi_{L_k^\sharp} \in \Pi(\phi_{L^\sharp}, L_k^\sharp)} \left[\text{Ind}_M^G \left(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, L_k^\sharp, M}^{d_k}(\pi_{L_k^\sharp}) \right) \right] = \text{Ind}_M^G \left(\sum_k \sum_{\pi_{L_k^\sharp} \in \Pi(\phi_{L^\sharp}, L_k^\sharp)} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, L_k^\sharp, M}^{d_k}(\pi_{L_k^\sharp}) \right).$$

On déduit facilement du cas des séries discrètes établi dans la proposition 5.5, que l'on applique au groupe $\mathbf{G}_{r_1+r_2}$ et aux $(\mathbf{Q}_k, \mathbf{L}_k)_k$, un énoncé analogue pour le groupe \mathbf{M} et les $(\mathbf{Q}_k^\sharp, \mathbf{L}_k^\sharp)_k$, à savoir

$$\sum_k \sum_{\pi_{L_k^\sharp} \in \Pi(\phi_{L^\sharp}, L_k^\sharp)} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, L_k^\sharp, M}^{d_k}(\pi_{L_k^\sharp}) = \sum_k \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, L_k^\sharp, M}^{d_k}([\pi(\phi_{L^\sharp}, L_k^\sharp)]) = [\pi(\phi'_M, M)]$$

pour le paramètre discret ϕ'_M obtenu à partir de ϕ_{L^\sharp} par composition avec le plongement de L -groupe défini comme en (5.2.1) mais pour L^\sharp et M .

Ainsi, on peut conclure, le membre de gauche dans l'égalité de la proposition 5.6 est bien

$$\text{Ind}_M^G([\pi(\phi'_M, M)]) = [\pi(\phi'_G, G)]$$

avec $\phi'_G = \iota_{M, G} \circ \phi'_M$.

La démonstration est la même, à quelques adaptations évidentes près, si on remplace le groupe classique quasi-déployé \mathbf{G} par une forme intérieure pure $\mathbf{SO}(p, q)$ d'un groupe orthogonal et le corollaire 5.7 en découle immédiatement.

6.5. Données endoscopiques elliptiques. — Soit \mathbf{G} l'un des groupes classiques de la section 3.1. Nous renvoyons à [KS99b, §2.1] pour la définition d'une donnée endoscopique $\underline{H} = (\mathbf{H}, \mathcal{H}, x, \xi)$ de \mathbf{G} . En particulier, \mathcal{H} est une extension scindable de $W_{\mathbb{R}}$ par \widehat{H} , et $\xi : \mathcal{H} \rightarrow {}^L G$ est un L -plongement. Nous suivons maintenant [Wal10, §1.8] pour inclure dans la donnée endoscopique un L -isomorphisme ${}^L \xi : {}^L H \rightarrow \mathcal{H}$, qui a le bon goût de toujours exister pour les données endoscopiques des groupes de la section 3.1. Ceci nous dispense d'introduire les z -extensions de \mathbf{H} de [KS99b]. En composant ξ avec cet L -isomorphisme, on obtient un plongement $\iota_{H,G} : {}^L H \rightarrow {}^L G$.

Voici, pour les groupes de la section 3.1, une liste de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques. On donne ici seulement le groupe endoscopique \mathbf{H} , et l'on renvoie à [Wal10] pour les autres éléments de la donnée.

Cas A : $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^\alpha$ où $a + b = n$, $\alpha \in \{d, qd\}$ et $(b, \alpha) \neq (1, d)$ et si $b = 0$, alors $\alpha = d$.

Cas B : $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n+1}$, $\mathbf{H} = \mathbf{SO}_{2a+1} \times \mathbf{SO}_{2b+1}$ où $a + b = n$. On obtient une donnée endoscopique équivalente en échangeant a et b .

Cas C, D : $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n}^\alpha$, $\mathbf{H} = \mathbf{SO}_{2a}^\beta \times \mathbf{SO}_{2b}^\gamma$ où $a + b = n$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{d, qd\}$, $\beta = d$ si $a = 0$, $\gamma = d$ si $b = 0$, $(a, \beta) \neq (1, d)$, $(b, \gamma) \neq (1, d)$ et $\alpha = \beta\gamma$ où l'on met sur $\{d, qd\}$ la structure de groupe à deux éléments avec d comme élément neutre. Les couples $((a, \beta), (b, \gamma))$ et $((b, \gamma), (a, \beta))$ définissent des données endoscopiques équivalentes.

Remarque 6.5. — Le groupe endoscopique \mathbf{H} est écrit ci-dessus sous la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2.$$

On peut supposer que le x de la donnée endoscopique soit un élément d'ordre 2 de \widehat{G} . Les groupes \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 ci-dessus correspondent alors aux valeurs propres ± 1 de l'action adjointe de x , mais on ne suppose pas que \mathbf{H}_1 corresponde à la valeur propre 1.

Remarque 6.6. — La relation entre les plongements $\iota_{H,G}$ définis par Waldspurger et les représentations standard des L -groupes est la suivante. Dans tous les cas, sauf le cas **A** ci-dessus avec $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^{qd}$, la représentation $\mathbf{Std}_G \circ \iota_{H,G}$ de ${}^L H$ est conjuguée à $(\mathbf{Std}_{H_1} \oplus \mathbf{Std}_{H_2}) \circ \iota_{H, H_1 \times H_2}$, où $\iota_{H, H_1 \times H_2}$ est l'inclusion de ${}^L H$ dans ${}^L H_1 \times {}^L H_2$. Dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^{qd}$, $\mathbf{Std}_G \circ \iota_{H,G}$ est conjuguée à $\left((\mathbf{Std}_{\mathbf{Sp}_{2a}} \otimes \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}) \oplus \mathbf{Std}_{\mathbf{SO}_{2b}^{qd}} \right) \circ \iota_{H, H_1 \times H_2}$ où $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$ est le caractère quadratique non trivial de $W_{\mathbb{R}}$.

6.6. c -sous-groupes de Levi maximaux des groupes endoscopiques des groupes classiques. — Soit \mathbf{G} un groupe classique quasi-déployé de la section 3.1 et $\underline{H} = (\mathbf{H}, \mathcal{H}, x, \xi_{L,H})$ une donnée endoscopique elliptique de \mathbf{G} comme dans la section 6.5.

Soit $\mathbf{spl}_{\widehat{H}} = (\mathcal{B}_H = \mathcal{B} \cap \widehat{H}, \mathcal{T}, \{X_\alpha\})$ l'épinglage de \widehat{H} obtenu à partir de l'épinglage $\mathbf{spl}_{\widehat{G}}$ déjà fixé (On suppose le x de la donnée endoscopique dans \mathcal{T}).

On fait pour \mathbf{H} la construction de la section 5.2 : On fixe ${}^d Q_H = {}^d L_H {}^d V_H$ un sous-groupe parabolique standard de \widehat{H} , compatible avec l'action de $\sigma_{\widehat{H}}$ sur les racines simples.

Toute paire de Borel fondamentale $(\mathbf{B}_H, \mathbf{T}_H)$ dans \mathbf{H} permet de définir un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q}_H = \mathbf{L}_H \mathbf{V}_H$ de \mathbf{H} , avec \mathbf{L}_H défini sur \mathbb{R} .

On fixe une paire de Borel fondamentale et de type Whittaker $(\mathbf{B}_{*,H}, \mathbf{T}_{*,H})$ de \mathbf{H} ce qui nous fournit $\mathbf{Q}_{*,H} = \mathbf{L}_{*,H} \mathbf{V}_{*,H}$, avec $\mathbf{L}_{*,H}$ quasi-déployé.

On suppose que ${}^d Q_H$ est maximal. Voyons les différents cas possibles. On note $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ la permutation non triviale de $\{d, qd\}$ et si $\alpha \in \{d, qd\}$, on note $\alpha_c = \alpha$ si c est pair et $\alpha_c = \bar{\alpha}$ si c est impair. Notons que c'est la remarque 6.5 qui impose de distinguer les cas **A1** et **A2**.

- A1. $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^\alpha = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_{*,H} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{Sp}_{2(a-c)} \times \mathbf{SO}_{2b}^\alpha = \mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{L}_{*,H_1} \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_* = \mathbf{U}_c \times \mathbf{Sp}_{2(n-c)} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{G}'$.
- A2. $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, $\mathbf{H} = \mathbf{SO}_{2b}^\alpha \times \mathbf{Sp}_{2a} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_{*,H} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{SO}_{2(b-c)}^{\alpha_c} \times \mathbf{Sp}_{2a} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{L}_{*,H_1} \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_* = \mathbf{U}_c \times \mathbf{Sp}_{2(n-c)} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{G}'$.
- B. $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n+1}$, $\mathbf{H} = \mathbf{SO}_{2a+1} \times \mathbf{SO}_{2b+1} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$
 $\mathbf{L}_{*,H} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{SO}_{2(a-c)+1} \times \mathbf{SO}_{2b+1} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{L}_{*,H_1} \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_* = \mathbf{U}_c \times \mathbf{SO}_{2(n-c)+1} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{G}'$.
- C,D. $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n}^\alpha$, $\mathbf{H} = \mathbf{SO}_{2a}^\beta \times \mathbf{SO}_{2b}^\gamma = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_{1,H} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{SO}_{2(a-c)}^{\beta_c} \times \mathbf{SO}_{2b}^\gamma = \mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{L}_{*,H_1} \times \mathbf{H}_2$,
 $\mathbf{L}_1 = \mathbf{U}_c \times \mathbf{SO}_{2(n-c)}^{\alpha_c} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{G}'$.

Dans chaque cas, on considère un c -sous-groupe de Levi \mathbf{L}_* de \mathbf{G} correspondant, produit du même groupe unitaire que $\mathbf{L}_{*,H}$ de rang c et du groupe classique quasi-déployé \mathbf{G}' de même type que \mathbf{G} et de rang $n - c$. Le groupe $\mathbf{L}_{*,H}$ est un c -sous-groupe de Levi de \mathbf{H} , car \mathbf{L}_{*,H_1} est un c -sous-groupe de Levi de \mathbf{H}_1 .

Ce groupe \mathbf{L}_* se retrouve plus canoniquement de la manière suivante. On a ${}^dQ_H = {}^dL_H {}^dV_H \subset \widehat{H} \subset \widehat{G}$, et comme dQ est maximal, ce sous-groupe parabolique standard correspond au choix d'une racine simple de \mathcal{T} dans $\mathcal{B}_{\widehat{H}}$. Le groupe \widehat{H} est lui le centralisateur de s dans \widehat{G} , il est obtenu en cassant en deux le diagramme de Dynkin étendu de \widehat{G} . Les racines simples de \mathcal{T} dans $\mathcal{B}_{\widehat{H}}$ sont donc obtenues à partir des racines simples de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ en en ajoutant une (le sommet supplémentaire du diagramme de Dynkin étendu), et en en enlevant une, ce qui casse le diagramme de Dynkin étendu en deux.

La construction de la section 5.2 donne donc pour toute paire fondamentale (\mathbf{B}, \mathbf{T}) de \mathbf{G} un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{V}$, etc... En particulier, on a la paire fondamentale de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ qui donne $\mathbf{Q}_* = \mathbf{L}_* \mathbf{V}_*$ avec \mathbf{L}_* quasi-déployé.

Le groupe $\mathbf{L}_{*,H}$ est un groupe endoscopique pour \mathbf{L}_* (et ses formes intérieures pures \mathbf{L}_t , $t \in T_*[2]$), et ceci car $\mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2$ est un groupe endoscopique pour \mathbf{G}' et ses formes intérieures. Ces groupes endoscopiques se complètent de manière évidente en une donnée endoscopique.

7. Le transfert endoscopique ne commute pas à l'induction cohomologique, mais presque

7.1. Considérations préliminaires. — On se place dans le contexte de la section 6.6 : \mathbf{G} est un groupe classique quasi-déployé de la section 3.1 et $\underline{H} = (\mathbf{H}, \mathcal{H}, x, \xi_{L,H})$ une donnée endoscopique elliptique de \mathbf{G} comme dans la section 6.5. On fixe ${}^dQ_H = {}^dL_H {}^dV_H$ un sous-groupe parabolique standard maximal de \widehat{H} , compatible avec l'action de $\sigma_{\widehat{H}}$ sur les racines simples. On fixe une paire de Borel fondamentale et de type Whittaker $(\mathbf{B}_{*,H}, \mathbf{T}_{*,H})$ de \mathbf{H} ce qui nous fournit $\mathbf{Q}_{*,H} = \mathbf{L}_{*,H} \mathbf{V}_{*,H}$, avec $\mathbf{L}_{*,H}$ quasi-déployé, ainsi qu'une paire de Borel fondamentale et de type Whittaker $(\mathbf{B}_{L_{*,H}}, \mathbf{T}_{*,H})$ de $\mathbf{L}_{*,H}$.

On obtient aussi à partir de la paire de Borel fondamentale et de type Whittaker $(\mathbf{B}_*, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{G} un c -sous-groupe de Levi quasi-déployé \mathbf{L}_* de \mathbf{G} , ainsi qu'une paire de Borel fondamentale et de type Whittaker $(\mathbf{B}_{*,L}, \mathbf{T}_*)$ de \mathbf{L}_* .

Notons $\{\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i\}_{i=0,\dots,c}$ un système de représentants de Σ_{dQ}^G comme en (6.3.1) et $\{\mathbf{Q}_{k,H} = \mathbf{L}_{k,H} \mathbf{V}_{k,H}\}_{k=0,\dots,c}$ un système de représentants de $\Sigma_{dQ_H}^H$ avec la même propriété, c'est-à-dire :

$$(7.1.1) \quad L_{k,H} \simeq \mathbf{U}(k, c-k) \times H'_k \times H_2.$$

On a aussi les applications de transfert spectraux Trans_H^G , et pour tout $i = 0, \dots, c$, $\text{Trans}_{L_{*,H}}^{L_i}$. Les transferts sont normalisés par le choix de données de Whittaker, c'est-à-dire comme nous l'avons vu, par les paires fondamentales de type Whittaker fixées. Le transfert $\text{Trans}_{L_{*,H}}^{L_i}$, via les identifications (6.3.1), et (7.1.1) est égal à un signe près à $\text{Trans}_{\mathbf{U}_c}^{\mathbf{U}(i,c-i)} \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}$. Expliquons comment déterminer ce signe. Définissons tout d'abord un élément x_d de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$ en posant $x_d = 1$ si le facteur \mathbf{H}_1 du groupe endoscopique et qui contient \mathbf{U}_c correspond à la valeur propre 1 du x de la donnée endoscopique, et $x_d = -1$ s'il correspond à la valeur -1 (voir la remarque 6.5). Définissons ensuite un élément S_i de $\widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. Note \mathbf{sgn} le caractère non-trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et posons

$$(7.1.2) \quad S_i = \begin{cases} \mathbf{sgn}^{i + \frac{c(c-1)}{2}} & \text{si } n - c \text{ est pair} \\ \mathbf{sgn}^{i + \frac{c(c+1)}{2}} & \text{si } n - c \text{ est impair} \end{cases} = \mathbf{sgn}^{i + \frac{c(c-1)}{2} + (n-c)c}.$$

Remarquons que S_i va alterner selon la parité de i et que la définition est faite de sorte que pour le représentant distingué \mathbf{L}_* , on ait le caractère trivial, voir la remarque 6.4. Avec cette définition, on obtient

$$(7.1.3) \quad \text{Trans}_{L_{*,H}}^{L_i} = S_i(x_d) \text{Trans}_{\mathbf{U}_c}^{\mathbf{U}(i,c-i)} \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}.$$

Soit $[X_{L_{*,H}}^{st}]$ une représentation virtuelle stable de $L_{*,H}$, admettant un caractère infinitésimal dans le good range pour $\mathbf{Q}_{*,H}$. Par linéarité, on peut la supposer de la forme

$$[X_{L_{*,H}}^{st}] = [X_{\mathbf{U}_c}^{st}] \boxtimes [X_{H'_1}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}]$$

Elle détermine par transfert endoscopique une représentation virtuelle stable $[X_{L_{k,H}}^{st}]$ de tous les $L_{k,H}$, que l'on écrit aussi

$$[X_{L_{k,H}}^{st}] = [X_{\mathbf{U}(k,c-k)}^{st}] \boxtimes [X_{H'_k}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}].$$

On peut donc former :

$$\sum_k e(L_{k,H}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}([X_{L_{k,H}}^{st}]) = \left(\sum_k e(L_{k,H_1}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H_1}, L_{k,H_1}, H_1}^{d_k}([X_{\mathbf{U}(k,c-k)}^{st}] \boxtimes [X_{H'_k}^{st}]) \right) \boxtimes [X_{H_2}^{st}],$$

qui d'après le corollaire 5.7 est une représentation stable de H . On a utilisé $e(L_{k,H}) = e(L_{k,H_1}) \times e(H_2) = e(L_{k,H_1})$ car H_2 est quasi-déployé. On peut donc la transférer à G , pour obtenir,

$$(7.1.4) \quad \begin{aligned} & \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k,H}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}([X_{L_{k,H}}^{st}]) \right) \\ &= \text{Trans}_H^G \left(\left(\sum_k e(L_{k,H_1}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H_1}, L_{k,H_1}, H_1}^{d_k}([X_{\mathbf{U}(k,c-k)}^{st}] \boxtimes [X_{H'_k}^{st}]) \right) \boxtimes [X_{H_2}^{st}] \right) \end{aligned}$$

D'autre part, on peut aussi transférer de $L_{*,H}$ à tous les L_i la représentation virtuelle stable $[X_{L_{*,H}}^{st}]$, pour obtenir en vertu de (7.1.3) :

$$\begin{aligned} \text{Trans}_{L_{*,H}}^{L_i}([X_{L_{*,H}}^{st}]) &= S_i(x_d) \text{Trans}_{\mathbf{U}_c}^{\mathbf{U}(i,c-i)}([X_{\mathbf{U}_c}^{st}]) \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}([X_{H'_1}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}]) \\ &= S_i(x_d) [X_{\mathbf{U}(c,c-i)}^{st}] \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}([X_{H'_1}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}]) \end{aligned}$$

On applique alors à ceci les foncteurs d'induction cohomologique de L_i à G , et l'on suppose que l'on est là aussi dans le good range :

$$(7.1.5) \quad \sum_i e(L_i) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\text{Trans}_{L_*, H}^{L_i} \left([X_{L_*, H}^{st}] \right) \right) \\ = \sum_i e(L_i) S_i(x_d) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left([X_{\mathbf{U}(i, c-i)}^{st}] \boxtimes \text{Trans}_{H_1' \times H_2}^{G_i'} \left([X_{H_1'}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}] \right) \right).$$

Or (7.1.4) et (7.1.5) ne sont pas égaux, comme on s'en aperçoit aisément par le fait que le caractère infinitésimal n'est pas préservé. En effet les foncteurs $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, H}^{d_k}$ de L_H à H traduisent le caractère infinitésimal de $\rho_{V_H} = \rho_H - \rho_{L_H}$ et les foncteurs $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i}^{d_i}$ de L à G le traduisent de $\rho_V = \rho_G - \rho_L$. Mais ce n'est pas la seule obstruction à l'égalité de ces deux termes, comme nous allons le voir. On va donc introduire une torsion ε sur les représentations virtuelles stables de $L_{*, H}$ et de ses formes intérieures $L_{k, H}$, et on va remplacer (7.1.4) par l'expression obtenue de la même façon à partir de $\varepsilon([X_{L_*, H}^{st}])$, à savoir

$$(7.1.6) \quad \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k, H}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, H, L_{k, H}, H}^{d_k} \left(\varepsilon \left([X_{L_{k, H}}^{st}] \right) \right) \right).$$

On aura alors

Proposition 7.1. — *Avec les notations qui précèdent*

$$\sum_i e(L_i) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\text{Trans}_{L_*, H}^{L_i} \left([X_{L_*, H}^{st}] \right) \right) = \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k, H}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_k, H, L_{k, H}, H}^{d_k} \left(\varepsilon \left([X_{L_{k, H}}^{st}] \right) \right) \right).$$

Cette torsion ε est définie de la manière suivante. Tout d'abord, il suffit par linéarité de la définir sur les représentations virtuelles stables (2.1.8). Considérons donc un paramètre de Langlands ϕ_{L_H} du groupe $L_{*, H}$. Une représentation standard X pour ce paquet s'écrit

$$X = X_u \boxtimes X_1 \boxtimes X_2$$

où X_u , X_1 et X_2 sont des représentations standards bien déterminés de U_c , H_1' et H_2 respectivement.

Définissons la représentation standard

$$\varepsilon(X) = (X_u \otimes \varepsilon_U) \boxtimes X_1 \boxtimes \varepsilon_2(X_2)$$

de la manière suivante. Sur le facteur unitaire, ε_U est un caractère, qui va corriger le caractère infinitésimal de la manière voulue. Comme les groupes unitaires ont leurs sous-groupes de Cartan connexes, le caractère ε_U est déterminé par sa différentielle $d\varepsilon_U$, et celle-ci vaut $(\rho_G - \rho_L) - (\rho_H - \rho_{L_H})$. Selon les cas, on obtient :

Cas **A**, **C**, **D** : $d\varepsilon_U = (b, b, \dots, b)$. Cas **B** : $d\varepsilon_U = (a + 1, \dots, a + 1)$.

La description de $\varepsilon_2(X_2)$ est plus subtile. Lorsque c est pair, $\varepsilon_2(X_2) = X_2$. Supposons maintenant que c soit impair. La représentation standard X_2 est une induite parabolique, obtenue à partir d'une série discrète X_M d'un sous-groupe de Levi cuspidal de H_2 , disons M_{H_2} , isomorphe à un produit de la forme

$$M_{H_2} \simeq (\mathbb{R}^\times)^s \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^m \times H_2''$$

où H_2'' est un groupe classique quasi-déployé de même type que H_2 . La représentation $\varepsilon_2(X_2)$ est alors la représentation standard obtenue par induction parabolique à partir du même sous-groupe de Levi cuspidal M_{H_2} , et de la représentation X_M , mais où sur les facteurs \mathbb{R}^\times , on a tensorisé par le caractère $\mathbf{sgn}_{\mathbb{R}^\times}$.

Cette opération sur les représentations standard du facteur H_2 s'interprète facilement lorsque H_2 est un groupe spécial orthogonal. Si G est un groupe spécial orthogonal non compact, il admet deux composantes connexes. Notons \mathbf{sgn}_G le caractère quadratique de G valant -1 sur

la composante connexe non neutre. Si G est un groupe orthogonal compact, \mathbf{sgn}_G est le caractère trivial par convention. On a alors $\varepsilon(X_2) = X_2 \otimes \mathbf{sgn}_{H_2}$. Il est alors clair que lorsque X_2 décrit un pseudo-paquet pour H_2 , il en est de même pour $\varepsilon_2(X_2)$. De même, lorsque X décrit un pseudo-paquet pour $L_{*,H}$, il en est de même pour $\varepsilon(X)$. Cette propriété est encore vraie si H_2 est un groupe symplectique, bien que l'opération effectuée sur les représentations standard n'ait pas d'interprétation aussi simple que la tensorisation par un caractère quadratique. On obtient un autre paquet avec même caractère infinitésimal.

On adapte facilement cette construction aux autres formes réelles $\mathbf{L}_{k,H}$. Le facteur H_2 est commun à tous les $\mathbf{L}_{k,H}$ et la torsion sur ce facteur reste la même. Le facteur groupe unitaire varie parmi les formes intérieures pures $\mathbf{U}(k, c-k)$ de \mathbf{U}_c et le caractère de torsion ε_U admet la même description dans tous les cas. On a alors

$$(7.1.7) \quad \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k,H}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k} \left(\varepsilon \left([X_{L_{k,H}}^{st}] \right) \right) \right) \\ = \text{Trans}_H^G \left(\left(\sum_k e(L_{k,H_1}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H_1}, L_{k,H_1}, H_1}^{d_k} \left(([X_{\mathbf{U}(k,c-k)}^{st}] \otimes \varepsilon_U) \boxtimes [X_{H'_k}^{st}] \right) \right) \boxtimes \varepsilon_2[X_{H_2}^{st}] \right).$$

Ceci termine la description de ε , et nous pouvons maintenant commencer la démonstration de la proposition 7.1.

Démonstration de la proposition 7.1. Par linéarité, il suffit de considérer le cas où $[X_{L_{*,H}}^{st}] = [\pi(\phi_L, L_{*,H})]$ pour un paramètre de Langlands ϕ_{L_H} . Plaçons nous tout d'abord dans le cas où ϕ_{L_H} est un paramètre discret.

On a alors

$$[X_{L_{*,H}}^{st}] = [\pi(\phi_{L_H}, L_{*,H})] = \sum_{\pi \in \Pi(\phi_{L_H}, L_{*,H})} \pi,$$

et

$$[X_{L_{k,H}}^{st}] = e(L_{k,H}) [\pi(\phi_{L_H}, L_{k,H})] = e(L_{k,H}) \sum_{\pi \in \Pi(\phi_{L_H}, L_{k,H})} \pi.$$

Occupons nous d'abord du membre de droite dans l'égalité de la proposition 7.1 :

$$\text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k,H}) \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k} \left(\varepsilon([X_{L_{k,H}}^{st}]) \right) \right) = \text{Trans}_H^G \left(\sum_k \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k} \left(\sum_{\pi \in \Pi(\phi_L, L_{k,H})} \varepsilon(\pi) \right) \right).$$

La paramétrisation des séries discrètes de la section 5.3, et les considérations de la section 5.4, appliquées ici à $L_{*,H}$ et ses formes intérieures pures $L_{t,H}$ (voir la fin de la section 6.3, adaptée au groupe endoscopique H , et plus précisément, à sa composante H_1), montrent que l'on a

$$\sum_k \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k} \left(\sum_{\pi \in \Pi(\phi_L, L_{k,H})} \varepsilon(X) \right) = \sum_{t \in T_*[2]} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{*,H}, L_{t,H}, H}^{d_t} \left(\varepsilon(\pi(\phi_{L_H}, t)) \right).$$

Le groupe $L_{t,H}$ est un produit d'un facteur unitaire et de deux facteurs groupes classiques, H'_1 et H_2 comme précédemment. Une série discrète $\pi = \pi(\phi_{L_H}, t)$ de $L_{t,H}$ se décompose en un produit tensoriel extérieur $\pi = \pi_u \boxtimes \pi_1 \boxtimes \pi_2$ où π_u est une série discrète du groupe unitaire et π_1 (resp. π_2) une série discrète de H'_1 (resp. H_2). Or, pour une série discrète π_2 du facteur classique H_2 , on a $\varepsilon_2(\pi_2) = \pi_2$. Ainsi $\varepsilon(\pi) = (\pi_u \otimes \varepsilon_U) \boxtimes \pi_1 \boxtimes \pi_2$. Le produit tensoriel par un caractère unitaire ε_U préserve les paquets de séries discrètes pour le groupe unitaire. Lorsque t décrit $T_*[2]$, les $\varepsilon(\pi(\phi_{L_H}, t))$ décrivent donc un autre super-paquet dont le paramètre est obtenu par torsion avec un 1-cocycle \mathbf{a} de $W_{\mathbb{R}}$ dans le centre du groupe dual de $L_{*,H}$, notons ce nouveau paramètre $\mathbf{a}\phi_{L_H}$ (et remarquons que la torsion est uniquement sur le facteur dual du groupe

unitaire). D'autre part, ceci n'affecte pas la paramétrisation interne des paquets, dans le sens où

$$\pi(\mathbf{a}\phi_{L_H}, t) = \varepsilon(\pi(\phi_{L_H}, t)).$$

On obtient donc, en utilisant (5.4.2),

$$\begin{aligned} & \sum_k \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k} \left(\sum_{\pi \in \Pi(\phi_L, L_{k,H})} \varepsilon(\pi) \right) = \sum_{t \in T_*[2]} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{*,H}, L_{t,H}, H}^{d_k} (\pi(\mathbf{a}\phi_{L_H}, t)) \\ & = \sum_{t \in T_*[2]} \pi(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}), t) = [\pi(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}), H)]. \end{aligned}$$

Le transfert endoscopique d'un paquet de séries discrètes est bien connu d'après Shelstad [She82], [She08] et [Ada11]. Supposons tout d'abord que l'on se trouve dans le cas G -régulier, c'est-à-dire que $\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}))$ est un paramètre discret pour G . Ainsi, le membre de droite dans l'égalité de la proposition 7.1 devient,

$$(7.1.8) \quad \text{Trans}_H^G([\pi(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}), H)]) = \sum_{t \in T_*[2], [t] \sim_G [1]} \langle x, t \rangle_G \pi(\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H})), t).$$

Le pairing est celui de (5.3.2), entre $T_*[2]$ et $A(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}))$ où x désigne aussi l'image de l'élément x de la donnée endoscopique dans $A(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}))$.

Examinons maintenant le membre de gauche dans l'égalité de la proposition 7.1. On a

$$(7.1.9) \quad \text{Trans}_{L^*, H}^{L_i}([X_{L^*, H}^{st}]) = e(L_i) \sum_{t \in T_*[2], [t] \sim_L [t_i]} \langle x, t \rangle_L \pi(\iota_{L_H, L}(\phi_{L_H}), t).$$

Le pairing est celui de (5.3.2), entre $T_*[2]$ et $A(\iota_{L_H, L}(\phi_{L_H}))$. Si on applique à ceci le foncteur $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}$, on obtient d'après (5.4.2),

$$e(L_i) \sum_{t \in T_*[2], [t] \sim_L [t_i]} \langle x, t \rangle_L \pi(\iota_{L, G}(\iota_{L_H, L}(\phi_{L_H})), t).$$

En sommant sur les formes intérieures L_i , on obtient finalement l'expression suivante pour le membre de gauche dans l'égalité de la proposition 7.1 :

$$(7.1.10) \quad \sum_i \sum_{t \in T_*[2], [t] \sim_L [t_i]} \langle x, t \rangle_L \pi(\iota_{L, G}(\iota_{L_H, L}(\mathbf{a}\phi_{L_H})), t) = \sum_{t \in T_*[2] \sim_G [1]} \langle x, t \rangle_L \pi(\iota_{L, G}(\iota_{L_H, L}(\phi_{L_H})), t).$$

La comparaison avec (7.1.8) est alors aisée car $\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H})) = \iota_{L,G}(\iota_{L_H, L}(\phi_{L_H}))$ (ce sont des paramètres discrets de même caractère infinitésimal), et $A(\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H})))$ est égal à $A(\iota_{L_H, L}(\phi_{L_H}))$ (pour les paramètres discrets ϕ des groupes que nous considérons ci-dessus, le groupe $A(\phi)$ est de manière explicite isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, où n est le rang du groupe, comme on le voit en (5.3.2)). On obtient donc l'égalité entre (7.1.5) et (7.1.6) dans le cas d'un paramètre discret et G régulier.

Remarque 7.2. — On a supposé que l'on était dans le good range pour les inductions cohomologiques, en particulier si ϕ_{L_H} est un paramètre discret, il en est de même de $\iota_{L_H, H}(\phi_{L_H})$.

Passons maintenant au cas d'un paramètre discret ϕ_{L_H} , mais sans l'hypothèse de G -régularité : $\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H}))$ est un paramètre de limites de séries discrètes pour G et d'après la remarque 5.4, le membre de droite de (7.1.8) a toujours un sens, mais certaines représentations $\pi(\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H})), t)$ peuvent maintenant être nulles, et le pairing $\langle x, t \rangle_G$ à un sens exactement lorsque $\pi(\iota_{H,G}(\iota_{L_H, H}(\mathbf{a}\phi_{L_H})), t) \neq 0$. La formule de transfert (7.1.8) est toujours valable et se démontre par des arguments de continuation cohérente (cf. [She82],

[She08]). Il en est de même pour le terme de droite dans (7.1.10), et la comparaison entre (7.1.10) est (7.1.8) toujours valide.

Passons maintenant au cas d'un paramètre ϕ_{L_H} quelconque. On se place dans le cas **A1** de la liste, mais les autres cas se traitent de la même manière, il s'agit juste d'éviter d'introduire des notations trop lourdes. On a donc $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^\alpha = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$,

$$\mathbf{L}_{*,H} \simeq \mathbf{U}_c \times \mathbf{Sp}_{2(a-c)} \times \mathbf{SO}_{2b}^\alpha = \mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2.$$

Comme H_2 est un groupe orthogonal, la torsion ε est dans ce cas donnée par tensorisation par le caractère $\varepsilon_U \boxtimes \mathbf{Triv}_{G'} \boxtimes \mathbf{sgn}_{H_2}^c$, où ε_U est le caractère de \mathbf{U}_c de caractère infinitésimal (b, b, \dots, b) .

On part donc dans ce cas d'un paquet de $L_{*,H}$ associé à un sous-groupe de Cartan $D = TA \simeq \mathbf{U}(1)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1} \times \mathbf{U}(1)^{r_2} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2} \times \mathbf{U}(1)^{r_3} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_3} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_3}$. Ici le facteur $\mathbf{U}(1)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1}$ est un sous-groupe de Cartan du facteur groupe unitaire (donc $r_1 + 2m_1 = c$), le facteur $\mathbf{U}(1)^{r_2} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2}$ est un sous-groupe de Cartan du facteur H'_1 (donc $r_2 + 2m_2 + s_2 = a - c$) et le facteur $\mathbf{U}(1)^{r_3} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_3} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_3}$ est un sous-groupe de Cartan du facteur H_2 (donc $r_3 + 2m_3 + s_3 = b$). Le pseudo-paquet $\Pi^\sharp(\phi_{L_H}, L_{*,H})$ est constitué d'induites paraboliques à partir du sous-groupe :

$$M_{L_{*,H}} \simeq (\mathbf{U}_{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1}) \times (H'_{r_2} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2}) \times (H''_{r_3} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_3} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_3}),$$

où on induit des séries discrètes relatives. Ici $\mathbf{H}'_{r_2} = \mathbf{Sp}_{2r_2}$ et $\mathbf{H}''_{r_3} = \mathbf{SO}_{2r_3}^\alpha$. Le paquet correspondant $\Pi^\sharp(\phi_H, H)$ de H est lui constitué d'induites paraboliques à partir du sous-groupe :

$$M_H \simeq (H'_{r_1+r_2} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_1+m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2}) \times (H''_{r_3} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_3} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_3}),$$

avec $\mathbf{H}'_{r_1+r_2} = \mathbf{Sp}_{2(r_1+r_2)}$. Le paquet correspondant $\Pi^\sharp(\phi_L, L_1)$ de L_1 est constitué d'induites paraboliques à partir du sous-groupe :

$$M_L \simeq (\mathbf{U}_{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1}) \times (G'_{r_2+r_3} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_2+m_3} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2+s_3})$$

avec $\mathbf{G}'_{r_2+r_3} = \mathbf{Sp}_{2(r_2+r_3)}$. Le paquet correspondant $\Pi^\sharp(\phi_G, G)$ de G est lui constitué d'induites paraboliques à partir du sous-groupe :

$$M \simeq G_{r_1+r_2+r_3} \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^{m_1+m_2+m_3} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2+s_3}$$

avec $\mathbf{G}_{r_1+r_2+r_3} = \mathbf{Sp}_{2(r_1+r_2+r_3)}$. Résumons la situation dans le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc}
M_{L_H} & \xrightarrow{IC} & M_H \\
\swarrow IP & & \swarrow IP \\
L_H & \xrightarrow{IC} & H \\
\downarrow Tr & & \downarrow Tr \\
M_L & \xrightarrow{IC} & M \\
\swarrow IP & & \swarrow IP \\
L & \xrightarrow{IC} & G
\end{array}$$

où IP indique une induction parabolique, IC une induction cohomologique, Tr un transfert endoscopique. La face de devant est celle qui nous intéresse. La face du fond est celle traitée dans le cas des séries discrètes, à des facteurs \mathbb{R}^\times et $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ près, qui ne jouent aucun rôle. Les faces du haut et du bas ne commutent pas, il faut introduire dans chaque cas une torsion pour que ça commute (défaut de commutation entre induction parabolique et cohomologique, étudiée dans l'appendice). Par contre, les faces de gauche et de droite commutent (le transfert

et l'induction parabolique commutent). On va vérifier que le défaut de commutation des faces du haut et du bas induit bien le défaut de commutation de la face avant annoncée.

D'après l'appendice, le défaut de commutation de la face du bas est $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$. Cette torsion est triviale lorsque c est pair et consiste à tensoriser par le caractère $\mathbf{sgn}_{\mathbb{R}^\times}$ sur chaque facteur \mathbb{R}^\times de D lorsque c est impair. Pour la face du haut, le défaut de commutation est analogue, en appliquant le calcul de la torsion aux facteurs H_1 et H_2 du groupe endoscopique H . Pour rendre la face avant commutative, on voit donc qu'il faut composer sur la flèche entre L_H et H par la torsion ε_2 du facteur H_2 . Sur le facteur H_1 , les torsions des faces du bas et du haut sont les mêmes et se compensent. \square

7.2. Normalisation de l'induction cohomologique. — Nous avons calculé dans la section précédente le défaut de commutativité entre transfert et induction cohomologique, où les foncteurs d'induction cohomologique sont ceux définis par Vogan et Zuckerman. D'autres normalisations des foncteurs d'induction cohomologique sont possibles, par exemple dans [KV95], Chapter 11, une normalisation des foncteurs d'induction cohomologique est proposée, qui a l'avantage de respecter le caractère infinitésimal, mais a l'inconvénient de faire intervenir des revêtements à deux feuillets des groupes réels. Pour nous, il n'est pas avantageux de faire intervenir de tels groupes, qui ne sont plus des groupes classiques. Ce que nous aimerions dans l'idéal, c'est avoir une version de l'induction cohomologique qui commute au transfert endoscopique et préserve le caractère infinitésimal. Les résultats de la section précédente et les considérations ci-dessus montrent que ce n'est pas possible en général, mais nous allons néanmoins renormaliser nos foncteurs d'induction cohomologique pour nous rapprocher le plus possible de cet idéal.

Les foncteurs d'induction cohomologique qui apparaissent dans la section précédente sont, avec les notations de cette section, les $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}$ et les $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{1,H}, L_k, H, H}^{d_k}$. Commençons par les $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}$.

Ils translatent le caractère infinitésimal de $\rho_G - \rho_L$. Calculons ceci dans les coordonnées usuelles :

cas **A** : $\rho_G = (n, n-1, \dots, 1)$ et $\rho_L = (\frac{c-1}{2}, \frac{c-3}{2}, \dots, -\frac{c-1}{2}, n-c, n-c-1, \dots, 1)$, d'où $\rho_G - \rho_L = (n - \frac{c-1}{2}, \dots, n - \frac{c-1}{2}, 0, \dots, 0)$.

cas **B** : $\rho_G = (\frac{2n-1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ et $\rho_L = (\frac{c-1}{2}, \frac{c-3}{2}, \dots, -\frac{c-1}{2}, n-c, n-c-1, \dots, 1)$, d'où $\rho_G - \rho_L = (n-1 - \frac{c}{2}, \dots, n-1 - \frac{c}{2}, 0, \dots, 0)$.

cas **C** et **D** : $\rho_G = (n-1, \dots, 1)$ et $\rho_L = (\frac{c-1}{2}, \frac{c-3}{2}, \dots, -\frac{c-1}{2}, n-c, n-c-1, \dots, 1)$, d'où $\rho_G - \rho_L = (n-1 - \frac{c-1}{2}, \dots, n-1 - \frac{c-1}{2}, 0, \dots, 0)$.

Rappelons comment sont normalisés les foncteurs de Vogan-Zuckerman. On a une version non normalisée des foncteurs d'induction cohomologique, que nous allons noter ${}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}$, et qui sont obtenus comme foncteurs dérivés d'un foncteur ${}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^0$, lui-même obtenu comme adjoint d'un foncteur d'oubli (des représentations de G vers les représentations de L_i). Si Z est une représentation de L_i ,

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}(Z) = {}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}(Z \otimes \bigwedge^{\text{top}} \mathfrak{v}_i)$$

où \mathfrak{v}_i est le radical nilpotent de \mathfrak{q}_i , et $\bigwedge^{\text{top}} \mathfrak{v}_i$ son algèbre extérieure en degré maximal $\dim \mathfrak{v}_i$ est une représentation de dimension 1 de L_i de caractère infinitésimal $2(\rho_G - \rho_L)$.

Pour avoir un foncteur qui préserve le caractère infinitésimal, il faudrait remplacer $\bigwedge^{\text{top}} \mathfrak{v}_i$ par une représentation de dimension 1 de L_i de caractère infinitésimal $\rho_G - \rho_L$. Or comme nous le voyons sur les formules ci-dessus, $\rho_G - \rho_L$ ne vit que sur le facteur unitaire de L_i (et l'on remarque que c'est dans le centre), et pour un groupe unitaire de rang c , pour que (e, e, \dots, e) soit le caractère infinitésimal d'une représentation de dimension 1, il faut que e soit entier.

Définition 7.3. — Sur le facteur unitaire du groupe L_i , définissons le caractère ξ_u , dont la différentielle est

cas **A** : $(n - \lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor, \dots, n - \lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor)$. Ceci est égal à $\rho_G - \rho_L$ si c est impair, et $\rho_G - \rho_L + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ si c est pair.

cas **B** : $(n - 1 - \lfloor \frac{c}{2} \rfloor, \dots, n - 1 - \lfloor \frac{c}{2} \rfloor)$. Ceci vaut $\rho_G - \rho_L$ si c est pair, et $\rho_G - \rho_L + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ si c est impair.

cas **C** et **D** : $(n - 1 - \lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor, \dots, n - 1 - \lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor)$. Ceci vaut $\rho_G - \rho_L$ si c est impair, et $\rho_G - \rho_L + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ si c est pair.

L'autre facteur de L_i est une forme intérieure pure G'_i d'un groupe \mathbf{G}' de même type que \mathbf{G} . Si c'est un groupe orthogonal, tordons par le caractère quadratique $\xi' = \mathbf{sgn}_{G'_i}^c$ introduit dans la section précédente. Pour les groupes symplectiques, on ne peut rien faire de plus, et l'on définit alors ξ' comme le caractère trivial.

Nous définissons les foncteurs d'induction cohomologiques normalisés de la manière suivante.

Définition 7.4. — Si $Z = Z_u \boxtimes Z'$, où Z_u est une représentation du facteur unitaire de L_i et Z' une représentation du facteur G'_i , posons

$$(7.2.1) \quad \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}(Z) = {}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}((Z_u \otimes \xi_u) \boxtimes (Z' \otimes \xi')).$$

Remarque 7.5. — La translation sur le caractère infinitésimal est donc soit nulle, soit $(1/2, \dots, 1/2)$ sur le facteur unitaire. Le choix de la normalisation sur le facteur unitaire est dicté par le fait que la translation sur le caractère infinitésimal qui reste correspond à celle des changements de base principal et antiprincipal ${}^L \mathbf{U}_c \rightarrow {}^L \mathbf{GL}_c(\mathbb{C})$.

On renormalise aussi de la même façon les foncteurs $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{1,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}$. Pour les groupes orthogonaux $L_{k,H}$ est un produit de trois facteurs, un groupe unitaire, et deux groupes orthogonaux H'_k et H_2 . Pour une représentation $Z = Z_u \boxtimes Z_1 \boxtimes Z_2$ de $L_{k,H}$, on définit

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_{1,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}(Z) = \left({}^n \mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{1,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}(Z_u \otimes \xi_u) \boxtimes (Z_1 \otimes \xi_1) \right) \boxtimes Z_2.$$

Dans le cas des groupes symplectiques, on prend la même formule si H_1 est orthogonal, et si H_1 est symplectique, on ne met pas de torsion sur Z_1 . On peut donc reformuler les résultats de la section précédentes, avec les foncteurs d'induction cohomologique normalisés.

Théorème 7.6. — Avec les notations de la section précédente, pour les groupes symplectiques,

$$(7.2.2) \quad \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k,H}) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}(\tilde{\varepsilon}([X_{L_{k,H}}^{st}]]) \right) = \sum_i e(L_i) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\text{Trans}_{L_{*,H}}^{L_i}([X_{L_{*,H}}^{st}]) \right).$$

et pour les groupes orthogonaux

$$(7.2.3) \quad \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_{k,H}) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_{k,H}, L_{k,H}, H}^{d_k}([X_{L_{k,H}}^{st}]) \right) = \sum_i e(L_i) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\text{Trans}_{L_{*,H}}^{L_i}([X_{L_{*,H}}^{st}]) \right).$$

Ici, la correction $\tilde{\varepsilon}$ est analogue à la correction ε de la section précédente. On la détermine en donnant son effet sur une représentation standard de $L_{k,H}$ de la forme

$$X = X_u \boxtimes X_1 \boxtimes X_2.$$

Il n'y a plus d'effet sur X_u . Il n'y a pas d'effet sur X_1 si H_1 est symplectique, et si H_1 est orthogonal et on tensorise par $\mathbf{sgn}_{H'_1}^c$. On applique à X_2 la même opération ε_2 que celle que l'on avait définie pour ε . On écrit :

$$\tilde{\varepsilon}(X) = X_u \boxtimes \tilde{\varepsilon}_1(X_1) \boxtimes \tilde{\varepsilon}_2(X_2).$$

Remarque 7.7. — Dans les cas **B**, **C** et **D** (groupes orthogonaux) nous avons un énoncé du type : le transfert commute à l'induction cohomologique (normalisée).

Reformulons encore le théorème. On écrit :

$$[X_{L_k, H}^{st}] = [X_{\mathbf{U}(k, a-k)}^{st}] \boxtimes [X_{H'_{1,k}}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}],$$

et dans le cas des groupes symplectiques

$$\tilde{\varepsilon} \left([X_{L_k, H}^{st}] \right) = [X_{\mathbf{U}(k, a-k)}^{st}] \boxtimes \tilde{\varepsilon}_1([X_{H'_{1,k}}^{st}]) \boxtimes \tilde{\varepsilon}_2([X_{H_2}^{st}]).$$

On a alors

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_k, H, L_k, H, H}^{d_k} \left(\tilde{\varepsilon} \left([X_{L_k, H}^{st}] \right) \right) = \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_k, H_1, L_k, H_1, H_1}^{d_1, k} \left([X_{\mathbf{U}(k, a-k)}^{st}] \boxtimes \tilde{\varepsilon}_1([X_{H'_{1,k}}^{st}]) \right) \boxtimes \varepsilon_2([X_{H_2}^{st}]),$$

$$\text{Trans}_{L_{1, H}}^{L_i} \left([X_{L_{1, H}}^{st}] \right) = S_i(x_d) [X_{\mathbf{U}(i, a-i)}^{st}] \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i} \left([X_{H'_{1,k}}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}] \right)$$

La formule du théorème est dans le cas des groupes symplectiques :

$$(7.2.4) \quad \text{Trans}_H^G \left(\sum_k e(L_k, H_1) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_k, H_1, L_k, H_1, H_1}^{d_1, k} \left([X_{\mathbf{U}(k, a-k)}^{st}] \boxtimes \tilde{\varepsilon}_1([X_{H'_{1,k}}^{st}]) \right) \boxtimes \tilde{\varepsilon}_2([X_{H_2}^{st}]) \right) \\ = \sum_i e(L_i) S_i(x_d) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left([X_{\mathbf{U}(i, a-i)}^{st}] \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i} \left([X_{H'_{1,k}}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}] \right) \right).$$

Pour les groupes orthogonaux, c'est la même formule sans les $\tilde{\varepsilon}$.

7.3. Transfert et induction cohomologique pour les formes intérieures pures $\mathbf{SO}(p, q)$. — Voyons ce qui change lorsqu'on remplace le groupe \mathbf{G} par une forme intérieure pure $\mathbf{SO}(p, q)$ d'un groupe orthogonal. On a maintenant un système de représentants $\{\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i\}$ de $\Sigma_{dQ}^{\mathbf{SO}(p, q)}$ comme en (6.3.2) et un transfert spectral $\text{Trans}_H^{\mathbf{SO}(p, q)}$. On a aussi les transferts spectraux (7.1.3) de $L_{*, H}$ vers les L_i . Dans la proposition 7.1 ce qui change est donc : dans le terme de droite, Trans_H^G qui est remplacé par $\text{Trans}_H^{\mathbf{SO}(p, q)}$, et dans le terme de gauche les L_i de (6.3.1) sont remplacés par ceux de (6.3.2). On va toujours avoir l'égalité entre les deux termes dans la proposition 7.1, à condition de multiplier un des membres par le signe de Kottwitz $e(G)$, et la démonstration est identique.

On en déduit l'analogie de la formule (7.2.3) pour les formes intérieures des groupes orthogonaux :

$$(7.3.1) \quad e(\mathbf{SO}(p, q)) \text{Trans}_H^{\mathbf{SO}(p, q)} \left(\sum_k e(L_k, H) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_k, H, L_k, H, H}^{d_k} \left([X_{L_k, H}^{st}] \right) \right) \\ = \sum_{(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i) \in \Sigma_{dQ}^{\mathbf{SO}(p, q)}} e(L_i) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\text{Trans}_{L_{*, H}}^{L_i} \left([X_{L_{*, H}}^{st}] \right) \right),$$

et sa variante, analogue de (7.2.4) :

$$(7.3.2) \quad e(\mathbf{SO}(p, q)) \text{Trans}_H^{\mathbf{SO}(p, q)} \left(\sum_k e(L_k, H_1) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_k, H_1, L_k, H_1, H_1}^{d_1, k} \left([X_{\mathbf{U}(k, a-k)}^{st}] \boxtimes [X_{H'_{1,k}}^{st}] \right) \boxtimes [X_{H_2}^{st}] \right) \\ = \sum_{(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i) \in \Sigma_{dQ}^{\mathbf{SO}(p, q)}} e(L_i) S_i(x_d) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left([X_{\mathbf{U}(i, a-i)}^{st}] \boxtimes \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i} \left([X_{H'_{1,k}}^{st}] \boxtimes [X_{H_2}^{st}] \right) \right).$$

8. Ajout d'un bloc discret de bonne parité de paramètre suffisamment grand

8.1. Enoncé. — Soient \mathbf{G} l'un des groupes classiques quasi-déployés de la section 3.1 et $\mathbf{St}_G : {}^L G \rightarrow \mathbf{GL}_{N'}(\mathbb{C})$ la représentation standard de son L -groupe. Soit $\psi_G : W_{\mathbb{R}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$ un paramètre d'Arthur pour G . Notons $\psi = \mathbf{St}_G \circ \psi_G : c$ 'est un paramètre d'Arthur de $\mathbf{GL}_N(\mathbb{R})$, auquel est associée une représentation $\Pi_{\psi}^{\mathbf{GL}} = \Pi_{\phi_{\psi}}^{\mathbf{GL}}$ de ce groupe.

On suppose que ψ se décompose en

$$(8.1.1) \quad \psi = \psi_d \oplus \psi' = (V(0, t) \boxtimes R[c]) \oplus \psi'$$

où $\psi_d = V(0, t) \boxtimes R[c]$ est le paramètre d'Arthur pour G_{N_d} , associé à la représentation $\Pi_{\psi_d}^{\mathbf{GL}} = \mathbf{Speh}(\delta(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}), c)$, $t > c - 1$, et ψ' est un paramètre d'Arthur pour $G_{N'}$ de caractère infinitésimal $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N'})$. On a ici $N_d = 2c$ et $N = N_d + N'$.

On suppose que l'on a

$$(8.1.2) \quad \frac{t - (c - 1)}{2} > |\lambda'_i|, \quad (1 \leq i \leq N')$$

ce qui permettra d'appliquer les résultats de [AMR].

Si G est symplectique, et si t est pair, (et alors c est nécessairement impair) alors $V(0, t) \boxtimes R[c]$ est à valeurs dans un groupe orthogonal et non spécial orthogonal, et il doit en être de même de ψ' . Posons alors $\epsilon_{\psi} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$ et $\psi'_{\epsilon} = \psi' \otimes \epsilon_{\psi} = \psi' \otimes \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$. Alors ψ'_{ϵ} se factorise en $\psi'_{\epsilon} = \mathbf{Std}_{G'} \circ \psi_{G'}$, où G' est un groupe symplectique de rang $n - c$.

Dans tous les autres cas, on prend ϵ_{ψ} égal au caractère trivial de $W_{\mathbb{R}}$ et $\psi'_{\epsilon} = \psi'$, et l'on a une factorisation $\psi'_{\epsilon} = \mathbf{Std}_{G'} \circ \psi_{G'}$, où G' est un groupe de même type que \mathbf{G} (sauf les types \mathbf{C} et \mathbf{D} qui sont échangés si c est impair) et de rang $n' := n - c$.

Notre but dans cette section est de décrire explicitement le paquet d'Arthur pour G et ses formes intérieures pures associées au paramètre ψ_G , à partir du paquet d'Arthur pour G' (et ses formes intérieures pures) associées au paramètre $\psi_{G'}$.

Si G'_i est une forme intérieure pure de G' , soit $\pi^A(\psi'_{G'}, G'_i)$ la représentation associée au paramètre $\psi_{G'}$. On suppose que c'est une représentation unitaire de $G'_i \times A(\psi_{G'})$ (ceci est établi par Arthur si G'_i est quasi-déployé, et un de nos buts ici est de voir que cette propriété passe des G'_i à \mathbf{G} et ses formes intérieures pures). On écrit donc $\pi^A(\psi'_{G'}, G'_i) = \sum_{\eta' \in \widehat{A(\psi_{G'})}} \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i) \boxtimes \eta'$

et soit $\Pi(\psi_{G'}, G'_i)$ le paquet d'Arthur associé à $\psi_{G'}$, c'est-à-dire la réunion des représentations irréductibles apparaissant dans les $\pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)$ pour $\eta' \in \widehat{A(\psi_{G'})}$. On note $\Pi_{\psi'_{\epsilon}}^{\mathbf{GL}}$ la représentation unitaire irréductible de $\mathbf{GL}_{N'}(\mathbb{R})$ dont ψ'_{ϵ} est le paramètre d'Arthur. Comme $\psi'_{\epsilon} = \epsilon_{\psi} \otimes \psi'$, on a $\Pi_{\psi'_{\epsilon}}^{\mathbf{GL}} = \varepsilon_{\psi'} \otimes \Pi_{\psi'}^{\mathbf{GL}}$, où $\varepsilon_{\psi'}$ est le caractère $\mathbf{Triv}_{N'}$ ou $\mathbf{sgn}_{N'}$ de $\mathbf{GL}_{N'}(\mathbb{R})$ selon que $\epsilon_{\psi} = \mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}}$ ou $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$.

Considérons le sous-groupe parabolique standard maximal ${}^d Q = {}^d L {}^d V$ de \widehat{G} tel que le c -Levi associé \mathbf{L}_* comme dans la section 6.3 vérifie $\mathbf{L}_* \simeq \mathbf{U}_c \times \mathbf{G}'$; et rappelons que \mathbf{U}_c est un groupe unitaire quasi-déployé de rang c .

Rappelons que nous avons fixé en (6.3.1) un système de représentants $(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i)_{i=0, \dots, c}$ de $\Sigma_{{}^d Q}^G$ avec

$$L_i \simeq \mathbf{U}(i, c - i) \times G'_i$$

où G'_i est une forme intérieure pure de G' , et de même en (6.3.2) pour les formes intérieures pures $\mathbf{SO}(p, q)$ des groupes orthogonaux, avec un système de représentants $(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i)_i$ de $\Sigma_{{}^d Q}^{\mathbf{SO}(p, q)}$.

On définit le caractère $\xi_{i, t}$ de $\mathbf{U}(i, c - i)$ par le fait que sa différentielle est $(\lfloor \frac{t}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{t}{2} \rfloor)$. On peut aussi le décrire à partir de $\psi_d = V(0, t) \boxtimes R[c] : c$ 'est restreint ψ_d à $W_{\mathbb{C}} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times} \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, ce qui nous donne un paramètre d'Arthur pour $\mathbf{GL}_c(\mathbb{C})$. Ce paramètre est obtenu par

changement de base à partir d'un paramètre pour \mathbf{U}_c , le changement de base ${}^L\mathbf{U}_c \rightarrow {}^L\mathbf{GL}_c(\mathbb{C})$ étant principal si t est pair, et anti-principal si t est impair (cf. remarque 7.5).

Rappelons le caractère S_i de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ défini en (7.1.2).

Lemme 8.1. — *On a*

$$(8.1.3) \quad A(\psi_G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times A(\psi_{G'}),$$

d'où

$$(8.1.4) \quad \widehat{A(\psi_G)} = \widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \times \widehat{A(\psi_{G'})},$$

Si $x \in A(\psi_G)$, écrivons $x = (x_d, x')$ via (8.1.3) et si $\eta \in \widehat{A(\psi_G)}$, écrivons $\eta = (\eta_d, \eta')$ via (8.1.4)

L'élément $s_{\psi_G} \in A(\psi_G)$ s'écrit

$$(8.1.5) \quad s_{\psi_G} = (s_d, s_{\psi_{G'}}), \text{ avec } s_d = (-1)^{c+1}.$$

On a alors

$$(8.1.6) \quad \eta(s_{\psi_G}) = \eta_d(s_d)\eta'(s_{\psi_{G'}})$$

$$(8.1.7) \quad S_i(s_d) = \begin{cases} (-1)^{i(c-i)}(-1)^{\frac{c(c-1)}{2}(c+1)} & \text{si } n-c \text{ est pair} \\ (-1)^{i(c-i)}(-1)^{\frac{c(c+1)}{2}(c+1)} & \text{si } n-c \text{ est impair} \end{cases}.$$

Démonstration. Donnons juste quelques indications et pour fixer les idées, plaçons nous dans le cas **A**, où $\widehat{G} = \mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ plongé dans $\mathbf{GL}_{2n+1}(\mathbb{C})$ par la représentation standard. On a de manière évidente des inclusions de groupes :

$$\mathbf{S}(\mathbf{O}_{2c}(\mathbb{C}) \times \mathbf{O}_{2(n-c)+1}(\mathbb{C})) \subset \widehat{G} = \mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C}) \subset \mathbf{GL}_{2n+1}(\mathbb{C}).$$

De la décomposition $\psi = \psi_d \oplus \psi'$ de ψ , on déduit une décomposition du centralisateur S_{ψ_G} de l'image de ψ_G dans \widehat{G} en $S_{\psi_d} \times S_{\psi'}$, où S_{ψ_d} est le centralisateur de ψ_d dans $\mathbf{O}_{2c}(\mathbb{C})$, et $S_{\psi'}$ le centralisateur de ψ' dans $\mathbf{O}_{2(n-c)+1}(\mathbb{C})$. On détermine facilement S_{ψ_d} : c'est le centre de $\mathbf{O}_{2c}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire un groupe à deux éléments, que l'on a identifié à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans l'énoncé du lemme, et il est inclus dans $\mathbf{SO}_{2c}(\mathbb{C})$. On en déduit que $S_{\psi'}$ est dans $\mathbf{SO}_{2(n-c)+1}(\mathbb{C}) = \widehat{G}'$. La décomposition (8.1.3) en découle, avec rappelons-le, le facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui désigne en fait le centre de $\mathbf{O}_{2c}(\mathbb{C})$ (dans le cas **B**, on obtient le centre de $\mathbf{Sp}_{2c}(\mathbb{C})$). Le reste de la démonstration est élémentaire, on en laisse les détails au lecteur. \square

Définition 8.2. — On pose, pour tout $\eta = (\eta_d, \eta') \in \widehat{A(\psi_G)} = \widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \times \widehat{A(\psi_{G'})}$,

$$(8.1.8) \quad \pi^b(\psi_G, \eta, G) := \bigoplus_{i \in \{0, \dots, a\} | S_i = \eta_d} \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)),$$

où $\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}}^{d_i}$ est le foncteur d'induction cohomologique normalisé de la section 7.2.1 (cf. Eq. (7.2.1)) en degré

$$d_i = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{L}) - (q(G) - q(L_i)).$$

Pour les formes intérieures pures des groupes orthogonaux, on pose

$$(8.1.9) \quad \pi^b(\psi_G, \eta, \mathbf{SO}(p, q)) := \bigoplus_{(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i) \in \Sigma_{d_Q}^{\mathbf{SO}(p, q)} | S_i = \eta_d} \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, \mathbf{SO}(p, q)}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i))$$

avec

$$d_i = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{L}) - (q(\mathbf{SO}(p, q)) - q(L_i)).$$

Enonçons maintenant le résultat principal de cette section

Théorème 8.3. — Les représentations $\pi^b(\psi_G, \eta, G)$ construites ci-dessus sont bien celles construites par Arthur, autrement dit

$$\pi(\psi_G, \eta, G) = \pi^b(\psi_G, \eta, G) = \bigoplus_{i \in \{0, \dots, c\} | S_i = \eta_d} \tilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)).$$

De même, pour les formes intérieures pures $\mathbf{SO}(p, q)$ des groupes orthogonaux, on a

$$\begin{aligned} \pi(\psi_G, \eta, \mathbf{SO}(p, q)) &= \pi^b(\psi_G, \eta, \mathbf{SO}(p, q)) \\ &= \bigoplus_{(\mathbf{Q}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{V}_i) \in \Sigma_d^{\mathbf{SO}(p, q)} | S_i = \eta_d} \tilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, \mathbf{SO}(p, q)}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)). \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème sera l'objet des prochains paragraphes. Nous la donnons dans le cas des groupes quasi-déployés, elle est identique pour les formes intérieures pures $\mathbf{SO}(p, q)$. Elle s'appuie en grande partie sur les résultats de [AMR] auquel nous renvoyons le lecteur. L'autre ingrédient de la démonstration est le théorème 7.6.

Commençons par vérifier que l'on obtient bien une représentation virtuelle stable en remplaçant les $\pi(\psi_G, \eta, G)$ par les $\pi^b(\psi_G, \eta, G)$ dans (2.3.3).

Lemme 8.4. — La représentation virtuelle

$$(8.1.10) \quad [\pi^b(\psi_G, G)] := \sum_{\eta \in \widehat{A(\psi_G)}} \eta(s_{\psi_G}) [\pi^b(\psi_G, \eta, G)]$$

est stable.

Démonstration. On a avec les notations du Lemme 8.1, $\eta(s_{\psi_G}) = \eta_d(s_d) \eta'(s_{\psi_{G'}})$, d'où

$$\begin{aligned} (8.1.11) \quad [\pi^b(\psi_G, G)] &= \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \sum_{\eta' \in \widehat{A(\psi_{G'})}} S_i(s_d) \eta'(s_{\psi_{G'}}) \tilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)) \\ &= \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} S_i(s_d) \tilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i} \left(\xi_{i,t} \boxtimes \left(\sum_{\eta' \in \widehat{A(\psi_{G'})}} \eta'(s_{\psi_{G'}}) \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i) \right) \right) \\ &= \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} S_i(s_d) \tilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes [\pi(\psi_{G'}, G'_i)]). \end{aligned}$$

Le caractère $\xi_{i,t}$ de $\mathbf{U}(i, c-i)$ admet une résolution de Johnson par des caractères standard. Nous renvoyons le lecteur à [AMR], §10.3 pour les notations et assertions non expliquées qui suivent. Ces caractères standard sont paramétrés par $\bar{s} \in \mathfrak{I}_c^{i, c-i, \pm}$ et sont notés $X_i(\bar{s})$. Ces paramètres ont une θ -longueur, notée $\ell_\theta(s)$ qui ne dépend que de l'image s de \bar{s} dans \mathfrak{I}_c et la formule des caractères s'écrit :

$$(8.1.12) \quad [\xi_i] = \sum_{\bar{s} \in \mathfrak{I}_c^{i, c-i, \pm}} (-1)^{q(\mathbf{U}(i, c-i))} (-1)^{\ell_\theta(w_0) + \ell_\theta(s)} X_i(\bar{s}).$$

Or d'après (8.1.7) et la remarque 2.1 $(-1)^{q(\mathbf{U}(i, c-i))} S_i(s_d) = (-1)^{\frac{c(c \pm 1)}{2}(c+1)}$. D'autre part $\ell_\theta(w_0) = q(\mathbf{U}_c)$. Comme $q(\mathbf{U}_c) = (c/2)^2$ si c est pair et $q(\mathbf{U}_c)$ est pair si c est impair, on obtient $q(\mathbf{U}_c) = \frac{c(c \pm 1)}{2}(c+1) \pmod{2}$. On continue alors le calcul de (8.1.11) :

$$(8.1.13) \quad [\pi^b(\psi_G, G)] = \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \sum_{\bar{s} \in \mathfrak{I}_c^{i, c-i, \pm}} (-1)^{\ell_\theta(s)} \tilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i}(X_i(\bar{s}) \boxtimes [\pi(\psi_{G'}, G'_i)])$$

Les paramètres de Langlands de $\mathbf{U}(i, c-i)$ ayant caractère infinitésimal voulu sont en bijection avec \mathfrak{I}_c , et le pseudo-paquet paramétré par un $s \in \mathfrak{I}_c$ est l'ensemble des représentations standard

$X_i(\bar{s})$ où \bar{s} est dans $\mathcal{J}_c^{i,c-i,\pm}$ de permutation sous-jacente s . On peut donc continuer le calcul, en posant :

$$(8.1.14) \quad [X_i(s)^{st}] = \sum_{\substack{\bar{s} \in \mathcal{J}_c^{i,c-i,\pm} \\ p(\bar{s})=s}} X_i(\bar{s}),$$

et l'on obtient :

$$(8.1.15) \quad [\pi^b(\psi_G, G)] = \sum_{s \in \mathcal{J}_c} (-1)^{\ell_\theta(s)} \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \widetilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i} ([X_i(\bar{s})^{st}] \boxtimes [\pi(\psi_{G'}, G'_i)]).$$

Le résultat est alors conséquence du corollaire 5.7. \square

Pour démontrer le théorème 8.3, on va vérifier les identités endoscopiques qui caractérisent les $\pi(\psi_G, \eta, G)$.

8.2. Transfert endoscopique tordu. — Notre but est de démontrer l'égalité de distributions sur \widetilde{G}_N :

$$(8.2.1) \quad \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_{\psi}^{\mathbf{GL}}) = \mathrm{Trans}_{\widetilde{G}_N}([\pi^b(\psi_G, G)]).$$

Pour démontrer ceci, nous partons d'une part de la formule suivante démontrée dans [AMR]

$$(8.2.2) \quad \mathrm{Tr}_{\theta_{N_d}}(\Pi_{\psi_d}^{\mathbf{GL}}) = \sum_{s \in \mathcal{J}_c} (-1)^{\ell_\theta(s)} \mathrm{Tr}_{\theta_{N_d}}(X_{\mathbf{GL}}(s)).$$

Nous renvoyons à [AMR] pour la définition de $X_{\mathbf{GL}}(s)$. C'est une représentation standard entrant dans la résolution de Johnson de la représentation de Speh $\Pi_{\psi_d}^{\mathbf{GL}}$.

D'autre part nous écrivons la représentation virtuelle $[\pi^b(\psi_G, G)]$ sous la forme :

$$(8.2.3) \quad [\pi^b(\psi_G, G)] = \sum_{\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}} a^b(\phi_G) [\pi(\phi_G, G)].$$

Ici $\Phi(G)_{\psi_G}$ désigne le sous-ensemble de $\Phi(G)$ des paramètres de Langlands ayant le même caractère infinitésimal que celui de ψ_G (c'est donc un ensemble fini). Les $[\pi(\phi_G, G)]$, lorsque ϕ_G décrit $\Phi(G)_{\psi_G}$, forment une base de l'espace des représentations virtuelles stables de caractères infinitésimal égal à celui de ψ_G , ce qui justifie l'existence et l'unicité d'une telle écriture.

De même, écrivons la représentation virtuelle $[\pi(\psi_{G'}, G')]$ sous la forme :

$$(8.2.4) \quad [\pi(\psi_{G'}, G')] = \sum_{\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} a(\phi_{G'}) [\pi(\phi_{G'}, G')].$$

Par transfert entre formes intérieures, pour toutes les formes intérieures G'_i , on a

$$(8.2.5) \quad [\pi(\psi_{G'}, G'_i)] = \sum_{\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} a(\phi_{G'}) [\pi(\phi_{G'}, G'_i)].$$

La définition du paquet d'Arthur $\Pi(\psi_{G'}, G')$ entraîne en particulier l'identité de transfert

$$(8.2.6) \quad \mathrm{Tr}_{\theta_{N'}}(\Pi_{\psi'_\epsilon}^{\mathbf{GL}}) = \mathrm{Trans}_{\widetilde{G}_{N'}}([\pi(\psi_{G'}, G')]).$$

On en déduit par (8.2.4) et linéarité du transfert que

$$(8.2.7) \quad \begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\theta_{N'}}(\Pi_{\psi'_\epsilon}^{\mathbf{GL}}) &= \sum_{\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} a(\phi_{G'}) \mathrm{Trans}_{\widetilde{G}_{N'}}([\pi(\phi_{G'}, G')]) \\ &= \sum_{\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} a(\phi_{G'}) \mathrm{Tr}_{\theta_{N'}}(\Pi_{\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}}^{\mathbf{GL}}). \end{aligned}$$

On tensorise par le caractère quadratique ϵ_ψ introduit plus haut pour récupérer

$$(8.2.8) \quad \mathrm{Tr}_{\theta_{N'}}(\Pi_{\psi'}^{\mathbf{GL}}) = \sum_{\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} a(\phi_{G'}) \mathrm{Tr}_{\theta_{N'}}(\Pi_{(\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}) \otimes \epsilon_{\psi'}}^{\mathbf{GL}}).$$

Les résultats de [AMR] impliquent que

$$(8.2.9) \quad \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_{\psi}^{\mathbf{GL}}) = \sum_{s \in \mathcal{I}_a, \phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} (-1)^{\ell_{\theta}(s)} a(\phi_{G'}) \mathrm{Tr}_{\theta_N} \left(\Pi_{\phi_d(s) + (\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}) \otimes \epsilon_{\psi'}}^{\mathbf{GL}} \right).$$

Dans cette équation, $\phi_d(s)$ est le paramètre de Langlands de la représentation standard $X_{\mathbf{GL}}(w_0 s)$ de \mathbf{GL}_{N_d} , et $\phi_d(s) + (\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}) \otimes \epsilon_{\psi'}$ est un paramètre de Langlands pour G_N .

En appliquant le transfert à (8.2.3), on obtient :

$$(8.2.10) \quad \begin{aligned} \mathrm{Trans}_{\tilde{G}^N}([\pi^b(\psi_G, G)]) &= \sum_{\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}} a^b(\phi_G) \mathrm{Trans}_{\tilde{G}^N}([\pi(\phi_G, G)]) \\ &= \sum_{\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}} a^b(\phi_G) \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_{\mathbf{Std}_G \circ \phi_G}^{\mathbf{GL}}). \end{aligned}$$

En comparant ces deux dernières formules, on voit donc que l'on s'est ramené à montrer

$$(8.2.11) \quad \sum_{s \in \mathcal{I}_c, \phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} (-1)^{\ell_{\theta}(s)} a(\phi_{G'}) \mathrm{Tr}_{\theta_N} \left(\Pi_{\phi_d(s) + (\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}) \otimes \epsilon_{\psi'}}^{\mathbf{GL}} \right) = \sum_{\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}} a^b(\phi_G) \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_{\mathbf{Std}_G \circ \phi_G}^{\mathbf{GL}}).$$

Nous allons définir une application injective :

$$(8.2.12) \quad \iota : \mathcal{I}_c \times \Phi(G')_{\psi_{G'}} \rightarrow \Phi(G)_{\psi_G}$$

et il s'agit donc de montrer que si $a^b(\phi_G) \neq 0$, alors ϕ_G est dans l'image de cette application, disons d'un élément $(s, \phi_{G'})$ et que l'on a alors

$$(8.2.13) \quad a^b(\phi_G) = (-1)^{\ell_{\theta}(s)} a(\phi_{G'})$$

$$(8.2.14) \quad \mathbf{Std}_G \circ \phi_G = \phi_d(s) + (\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}) \otimes \epsilon_{\psi}.$$

On reprend (8.1.15) qui donne, en utilisant aussi (8.2.5)

$$(8.2.15) \quad \begin{aligned} [\pi^b(\psi_G, G)] &= \sum_{\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}} a^b(\phi_G) [\pi(\phi_G, G)] \\ &= \sum_{s \in \mathcal{I}_c} (-1)^{\ell_{\theta}(s)} \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} ([X_i(s)^{st}] \boxtimes [\pi(\psi_{G'}, G'_i)]) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{I}_c} (-1)^{\ell_{\theta}(s)} \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \sum_{\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}} a(\phi_{G'}) \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} ([X_i(s)^{st}] \boxtimes [\pi(\phi_{G'}, G'_i)]). \end{aligned}$$

Lemme 8.5. — *Pour tout $s \in \mathcal{I}_c$ et pour tout $\phi_{G'} \in \Phi(G')_{\psi_{G'}}$, il existe un unique paramètre $\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}$ tel que*

$$\sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \tilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} ([X_i(s)^{st}] \boxtimes [\pi(\phi_{G'}, G'_i)]) = [\pi(\phi_G, G)].$$

Ceci définit l'application ι en (8.2.12). On a de plus

$$\mathbf{Std}_G \circ \phi_G = \phi_d(s) + (\mathbf{Std}_{G'} \circ \phi_{G'}) \otimes \epsilon_{\psi}.$$

Démonstration. On a vu dans la démonstration de la proposition 5.6 que le terme de gauche est de la forme $[\pi(\phi_G, G)]$ pour un certain paramètre $\phi_G \in \Phi(G)_{\psi_G}$. Il faut bien sûr tenir compte de la renormalisation des foncteurs d'induction cohomologique, mais celle-ci n'affecte pas la conclusion. Il reste à voir que ϕ_G vérifie (8.2.14). Soit $X_u \boxtimes X'$ une représentation standard intervenant dans $[X_i(s)^{st}] \boxtimes [\pi(\phi_{G'}, G'_i)]$. Les calculs fait dans l'appendice, sections 10.2 et 10.3 expriment les paramètres de Langlands de la représentation standard $\widetilde{\mathcal{R}}_{q_i, L_i, G}^{d_i}(X_u \boxtimes X')$ en fonction de ceux de X_u et X' . Sur le facteur groupe unitaire, celui-ci ayant ses sous-groupes de Cartan connexes, tout est déterminé par le caractère infinitésimal. Sur le facteur groupe classique, il faut voir que la torsion $(\mathbb{C}_{\gamma_{n_L}})^* \otimes \mathbb{C}_{\gamma_n}$ calculé en 10.3 se compense dans le cas des groupes orthogonaux avec la façon dont on a normalisé les foncteurs d'induction cohomologiques (le caractère de torsion ξ' de (7.2.1)). Pour les groupes symplectiques, nous n'avons pas pu inclure cette torsion dans la renormalisation des foncteurs d'induction cohomologique, et ceci se traduit par la torsion par ϵ_ψ dans (8.2.14). \square

La formule (8.2.15) montre alors que l'on a $a^b(\phi_G) = (-1)^{l_\theta(s)} a(\phi_{G'})$. Ceci termine la démonstration de (8.2.1). \square

8.3. Transfert endoscopique ordinaire. — Soit $(H, x, \mathcal{H}, \iota_{H,G} : {}^L H \rightarrow {}^L G)$ une donnée endoscopique elliptique de G comme dans la section 6.5. Ici, x est un élément de \widehat{G} et l'on suppose que $x^2 = 1$, H est un produit de groupes classiques, disons $H = H_1 \times H_2$, et une inclusion de $\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2$ dans \widehat{G} correspondant aux valeurs propres ± 1 de x (mais on ne suppose pas que H_1 correspond à la valeur propre 1). On écrit

$$(8.3.1) \quad \psi_G = \xi_{H,G} \circ \psi_H, \quad \psi_H = \psi_{H_1} \times \psi_{H_2}, \quad \psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G,$$

$$(8.3.2) \quad \psi = \psi_d + \psi' = \psi_1 + \psi_2 = \psi_d + \psi'_1 + \psi_2, \quad \psi' = \psi'_1 + \psi_2.$$

Les indices 1 et 2 sont déterminés par le fait que

$$(8.3.3) \quad \mathbf{Std}_{H_1} \circ \psi_{H_1} = \psi_1^\epsilon, \quad \mathbf{Std}_{H_2} \circ \psi_{H_2} = \psi_2^\epsilon.$$

Ici, $\psi_1^\epsilon = \psi_1$ sauf dans le cas où $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^{qd}$ où $\psi_1^\epsilon = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_1$, et $\psi_2^\epsilon = \psi_2$ sauf dans le cas où $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{SO}_{2b}^{qd} \times \mathbf{Sp}_{2a}$ où $\psi_2^\epsilon = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_2$ et $\psi_1^\epsilon = \psi_1$. Ces derniers cas sont ceux où les paramètres ψ_1 et ψ_2 ne sont pas à valeurs dans $\mathbf{SO}(2a+1, \mathbb{C})$ mais seulement dans $\mathbf{O}(2a+1, \mathbb{C})$. On corrige donc en tensorisant par $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$ pour obtenir un paramètre ψ_1^ϵ ou ψ_2^ϵ à valeurs dans $\mathbf{SO}(2a+1, \mathbb{C})$. Cette correction apparaît aussi dans le dernier cas de la remarque 6.6.

Autrement dit, on se retrouve dans la situation de la section 6.6, avec $\mathbf{L}_* = \mathbf{U}_c \times \mathbf{G}'$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$, $\mathbf{L}_{*,H} = \mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2$, et $\mathbf{L}_{*,H}$ est un groupe endoscopique pour \mathbf{L}_* (via le fait que $\mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2$ est un groupe endoscopique pour \mathbf{G}' , et c'est aussi un c -sous-groupe de Levi de \mathbf{H} (via le fait que $\mathbf{U}_c \times \mathbf{H}'_1$ est un c -sous-groupe de Levi de \mathbf{H}_1)).

Si G est symplectique et c est impair, on a introduit le paramètre $\psi'_\epsilon = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi'$, pour pouvoir factoriser

$$(8.3.4) \quad \psi'_\epsilon = \mathbf{Std}_{G'} \circ \psi_{G'}.$$

On a alors

$$(8.3.5) \quad \psi'_\epsilon = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi'_1 + \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_2 = \psi'_{1,\epsilon} + \psi_{2,\epsilon}.$$

On applique la discussion ci-dessus avec $(\mathbf{G}', \mathbf{H}'_1 \times \mathbf{H}_2, \psi_{G'})$ plutôt que $(\mathbf{G}, \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2, \psi_G)$. Dans (8.3.3), à la place de ψ_{H_1} et ψ_{H_2} , on récupère des paramètres pour \mathbf{H}'_1 et \mathbf{H}_2 que l'on va noter

$$(8.3.6) \quad \psi'_{H'_1} \quad \text{et} \quad \psi'_{H_2}.$$

On peut aussi appliquer la discussion ci-dessus avec $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}'_1, \psi_{H_1})$ plutôt que $(\mathbf{G}, \mathbf{G}', \psi_G)$, et l'on récupère un paramètre pour \mathbf{H}'_1 que l'on va noter

$$(8.3.7) \quad \psi_{H'_1}.$$

Dans le cas des groupes orthogonaux, on a

$$(8.3.8) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_1 = \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H'_1} = \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \psi_{H_2}.$$

Dans le cas des groupes symplectiques, le mieux est de voir ce qui se passe dans tous les cas. Remarquons que l'on a $\mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_d \simeq \psi_d$.

c pair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^d$, ou $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{SO}_{2b}^d \times \mathbf{Sp}_{2a}$. Dans ce cas, aucune torsion n'apparaît sur les paramètres, et comme pour les groupes orthogonaux on a

$$(8.3.9) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_1 = \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H'_1} = \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \psi_{H_2}.$$

c pair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^{qd}$, il apparaît la torsion ψ_1^ϵ pour définir ψ_{H_1} , et la même torsion $\psi_{1,\epsilon}^\epsilon$ pour définir $\psi'_{H'_1}$ avec $\psi_1^\epsilon = \psi_d + \psi_{1,\epsilon}^\epsilon$. On a donc

$$(8.3.10) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi_{1,\epsilon}^\epsilon = \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H'_1} = \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \psi_{H_2}.$$

c pair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{SO}_{2b}^d \times \mathbf{Sp}_{2a}$. Il apparaît la torsion ψ_2^ϵ pour définir ψ_{H_2} , et la même torsion ψ_2^ϵ pour définir ψ'_{H_2} . On a donc

$$(8.3.11) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_1 = \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H'_1} = \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \psi_{H_2}.$$

c impair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^d$. On a la torsion ψ'_ϵ qui définit $\psi_{G'}$ et la même torsion sur $\psi'_{1,\epsilon}$ pour définir $\psi'_{H'_1}$ et $\psi_{H'_1}$. On a donc

$$(8.3.12) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_{1,\epsilon} = \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H'_1} = \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_{H_2}.$$

c impair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{SO}_{2b}^d \times \mathbf{Sp}_{2a}$. On a la torsion ψ'_ϵ qui définit $\psi_{G'}$, et la même torsion sur $\psi'_{1,\epsilon}$ pour définir $\psi'_{H'_1}$, mais que l'on ne retrouve pas pour définir $\psi_{H'_1}$ car \mathbf{H}_1 est orthogonal. On a donc

$$(8.3.13) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_{1,\epsilon}, \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1} = \psi'_1, \quad \psi'_{H'_1} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_{H_2}.$$

c impair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{Sp}_{2a} \times \mathbf{SO}_{2b}^{qd}$. Il apparaît la torsion ψ'_ϵ qui définit $\psi_{G'}$ et la torsion ψ_1^ϵ pour définir ψ_{H_1} . La torsion qui définit $\psi'_{H'_1}$ et $\psi_{H'_1}$ est la même. On a donc

$$(8.3.14) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_{1,\epsilon} = \psi'_1 = \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H'_1} = \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_{H_2}.$$

c impair, $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{SO}_{2b}^{qd} \times \mathbf{Sp}_{2a}$. Il apparaît la torsion ψ'_ϵ qui définit $\psi_{G'}$ et la même torsion sur $\psi'_{1,\epsilon}$ pour définir $\psi'_{H'_1}$, mais que l'on ne retrouve pas pour définir $\psi_{H'_1}$ car \mathbf{H}_1 est orthogonal. Il y a aussi la torsion ψ_2^ϵ qui définit ψ_{H_2} . On a donc

$$(8.3.15) \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi'_{H'_1} = \psi'_{1,\epsilon}, \quad \mathbf{Std}_{H'_1} \circ \psi_{H'_1} = \psi'_1, \quad \psi'_{H'_1} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_{H'_1}, \quad \psi'_{H_2} = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}} \otimes \psi_{H_2}.$$

Reprenons la démonstration de l'identité de transfert endoscopique. Il s'agit ici de montrer

$$(8.3.16) \quad \mathrm{Trans}_H^G([\pi^b(\psi_H, H)]) = \sum_{\eta \in \widehat{A}(\psi_G)} \eta(s_{\psi_G} x) [\pi^b(\psi_G, \eta, G)].$$

On remarque qu'il n'y a pas de signe de Kottwitz ici car H et G sont quasi-déployé. Commençons par le membre de droite :

$$\begin{aligned}
(8.3.17) \quad & \sum_{\eta \in \widehat{A(\psi_G)}} \eta(s_{\psi_G} x) [\pi^b(\psi_G, \eta, G)] \\
&= \sum_{(\eta_d, \eta') \in \widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \times \widehat{A(\psi_{G'})}} \sum_{i \in \{0, \dots, c\} | S_i = \eta_d} \eta_d(s_d x_d) \eta'(s_{\psi_{G'}} x') \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i}(\xi_{i,t} \boxtimes \pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)) \\
&= \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} S_i(s_d x_d) \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\xi_{i,t} \boxtimes \left(\sum_{\eta' \in A(\psi_{G'})} \eta'(s_{\psi_{G'}} x') [\pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)] \right) \right)
\end{aligned}$$

Comme $(H'_1 \times H_2, \dots)$ est une donnée endoscopique pour G'_i , on a une identité de transfert

$$(8.3.18) \quad e(G'_i) \sum_{\eta' \in \widehat{A(\psi_{G'})}} \eta'(s_{\psi_{G'}} x') [\pi(\psi_{G'}, \eta', G'_i)] = \text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}([\pi(\psi'_{H'_1} \times \psi'_{H_2}, H'_1 \times H_2)])$$

et ainsi, en utilisant aussi (8.1.12) et (8.1.14) :

$$\begin{aligned}
(8.3.19) \quad & \sum_{\eta \in \widehat{A(\psi_G)}} \eta(s_{\psi_G} x) [\pi^b(\psi_G, \eta, G)] \\
&= \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} S_i(s_d x_d) e(G'_i) \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left(\xi_{i,t} \boxtimes \left(\text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}([\pi(\psi'_{H'_1} \times \psi'_{H_2}, H'_1 \times H_2)]) \right) \right) \\
&= \sum_{i \in \{0, \dots, c\}} \sum_{\bar{s} \in \mathcal{J}_c} (-1)^{l_{\theta}(\bar{s})} S_i(x_d) \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_i, L_i, G}^{d_i} \left([X_i(\bar{s})^{st}] \boxtimes \left(\text{Trans}_{H'_1 \times H_2}^{G'_i}([\pi(\psi'_{H'_1}, H'_1)] \boxtimes [\pi(\psi'_{H_2}, H_2)]) \right) \right)
\end{aligned}$$

D'autre part, pour réécrire le membre de gauche, on écrit en utilisant (8.1.15) avec H_1 à la place de G :

$$\begin{aligned}
(8.3.20) \quad & [\pi(\psi_H, H)] = [\pi(\psi_{H_1}, H_1)] \boxtimes [\pi(\psi_{H_2}, H_2)] \\
&= \left(\sum_{\bar{s} \in \mathcal{J}_c} (-1)^{l_{\theta}(\bar{s})} \sum_{k \in \{0, \dots, c\}} \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_k, H_1, L_k, H_1, H_1}^{d_{1,k}} \left([X_k(\bar{s})^{st}] \boxtimes [\pi(\psi_{H'_1}, H'_k)] \right) \right) \boxtimes [\pi(\psi_{H_2}, H_2)]
\end{aligned}$$

On obtient la conclusion voulue grâce à la relation (7.2.4).

Pour les groupes symplectiques, on vérifie que les torsions sur les paramètres pour passer de $\psi'_{H'_1}$ et ψ'_{H_2} à $\psi_{H'_1}$ et ψ_{H_2} données ci-dessus coïncident bien avec les torsions $\tilde{\varepsilon}_1$ et $\tilde{\varepsilon}_2$ de la formule (7.2.4). \square

9. Paquets d'Arthur pour les paramètres de bonne parité

9.1. Enoncé du théorème principal. — Soit G un groupe classique, et soit ψ_G un paramètre d'Arthur pour G . Supposons que ψ_G soit de bonne parité, on décompose donc $\psi = \mathbf{Std}_G \circ \psi_G$ en

$$\psi = \left(\bigoplus_{r=1, \dots, R} V(0, t_r) \boxtimes R[a_r] \right) \oplus \left(\bigoplus_{m=1, \dots, M} W(0, \epsilon_m) \boxtimes R[a_m] \right) = \psi_d \oplus \psi_{u, bp}$$

où $\psi_{u, bp} := \bigoplus_{m=1, \dots, M} W(0, \epsilon_m)$ est unipotent de bonne parité et $\psi_d = \bigoplus_{r=1, \dots, R} V(0, t_r) \boxtimes R[a_r]$ est la partie discrète de bonne parité. On note n le rang de \mathbf{G} , et l'on pose $c = \sum_{r=1}^R a_r$, $n' = n - c$.

Quitte à remplacer π_G par un paramètre dans la même classe de conjugaison, on peut supposer, et c'est ce que l'on fait, que

$$(9.1.1) \quad \forall r \in \{1, \dots, R-1\}, \quad t_r \geq t_{r+1}, \quad \text{et si } t_t = t_{r+1} \text{ alors } a_r \geq a_{r+1}.$$

Dans le cas **A** (groupes symplectiques), soit f le nombre de $r \in \{1, \dots, R\}$ tel que t_r est pair. Si f est impair, on pose $\epsilon_\psi = \mathbf{sgn}_{W_{\mathbb{R}}}$, et dans tous les autres cas (donc en particulier pour les groupes orthogonaux), on pose $\epsilon_\psi = \mathbf{Triv}_{W_{\mathbb{R}}}$, le caractère trivial de $W_{\mathbb{R}}$. On pose aussi $\psi_{u,bp,\epsilon} = \psi_{u,bp} \otimes \epsilon_\psi$. Alors $\psi_{u,bp,\epsilon}$ se factorise en $\mathbf{Std}_{G'} \circ \psi_{G'}$ pour un groupe classique quasi-déployé \mathbf{G}' de même type que \mathbf{G} . Le paramètre $\psi_{G'}$ est unipotent de bonne parité pour \mathbf{G}' et ses formes intérieures. Pour une forme intérieure pure \mathbf{G}'_{int} de \mathbf{G}' , on a d'après les résultats rappelés dans la section 4.3, la représentation $\pi^A(\psi_{G'}, \mathbf{G}'_{int})$ de $\mathbf{G}'_{int} \times A(\psi_{G'})$. Notre but est ici de donner une formule pour la représentation $\pi^A(\psi_G, G)$ en fonction des $\pi^A(\psi_{G'}, \mathbf{G}'_i)$ lorsque \mathbf{G}'_{int} décrit l'ensemble des formes intérieures pures de \mathbf{G}' et des couples (t_r, a_r) , $r = 1, \dots, R$.

Considérons un sous-groupe de parabolique standard ${}^dQ = {}^dL^dV$ de \widehat{G} comme dans la section 6.3, à ceci près que ce n'est plus un sous-groupe parabolique maximal, le c -Levi associé \mathbf{L}_* est ici de la forme

$$\mathbf{L}_* = \mathbf{U}_{a_1} \times \dots \times \mathbf{U}_{a_R} \times \mathbf{G}'.$$

On fixe comme en (6.3.2) un système de représentants $(\mathbf{Q}_{\underline{i}} = \mathbf{L}_{\underline{i}}\mathbf{V}_{\underline{i}})_{\underline{i}}$ de Σ_{dQ}^G avec

$$L_{\underline{i}} \simeq \mathbf{U}(i_1, a_1 - i_1) \times \dots \times \mathbf{U}(i_R, a_R - i_R) \times G'_{\underline{i}}$$

où $G'_{\underline{i}}$ est une forme intérieure pure de G' , et \underline{i} parcourt l'ensemble I défini comme suit :

Définition 9.1. — Notons I l'ensemble des $(i_1, \dots, i_R) \in \mathbb{N}^R$ vérifiant :

- dans le cas **A** (groupes symplectiques) : pour tout $r \in \{1, \dots, R\}$, $i_r \in \{0, a - r\}$.
- dans le cas des groupes $\mathbf{SO}(p, q)$: pour tout $r \in \{1, \dots, R\}$, $i_r \in \{0, a - r\}$ et $\sum_{r=1, \dots, R} i_r \leq p$,

$$\sum_{r=1, \dots, R} a_r - i_r \leq q.$$

Dans le cas des groupes $\mathbf{SO}(p, q)$, on a alors $\mathbf{G}'_{\underline{i}} = \mathbf{SO}(p', q')$ avec

$$p' = p - \sum_{r=1, \dots, R} i_r, \quad q' = q - \sum_{r=1, \dots, R} a_r - i_r.$$

On définit le caractère ξ_{i_r, t_r} de $\mathbf{U}(i_r, a_r - i_r)$ par le fait que sa différentielle est $(\lfloor \frac{t_r}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{t_r}{2} \rfloor)$. Définissons maintenant les foncteurs d'induction normalisés dans le cadre présent, généralisant ce que l'on a fait dans la section 7.2. On part du foncteur d'induction cohomologique non normalisé ${}^n\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{\underline{i}}, L_{\underline{i}}, G}^{d_{\underline{i}}}$, en degré

$$d_{\underline{i}} = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{L}_*) - (q(G) - q(L_{\underline{i}})).$$

Si $Z = Z_{u,1} \boxtimes \dots \boxtimes Z_{u,R} \boxtimes Z'$ est une représentation de $L_{\underline{i}}$, on pose

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_{\underline{i}}, L_{\underline{i}}, G}^{d_{\underline{i}}}(Z) = {}^n\mathcal{R}_{\mathfrak{q}_{\underline{i}}, L_{\underline{i}}, G}^{d_{\underline{i}}}\left(\boxtimes_{r=1, \dots, R}(Z_{u,r} \otimes \xi_{u,r}) \boxtimes (Z' \otimes \xi')\right),$$

où le caractère de torsion $\xi_{u,r}$ du facteur $\mathbf{U}(i_r, a_r - i_r)$ est défini comme dans la définition 7.3, en remplaçant c par a_r et n par $n - \sum_{j=1}^{r-1} a_j$. On remarque que la condition de bonne parité du paramètre fait que l'on peut enlever les parties entières dans la formule exactement lorsque t_r est pair. De même, le caractère ξ' de G'_i est trivial dans le cas **A** des groupes symplectique, et vaut $\mathbf{sgn}_{G'_i}^c$ dans le cas des groupes orthogonaux.

La condition (9.1.1) entraîne que les inductions cohomologiques que nous considérons sont dans le weakly fair range ([KV95], Definition 0.49).

Si $\pi = \tau \boxtimes \rho$ est une représentation de $L_{\underline{i}} \times A(\psi_{G'})$, on note

$$(9.1.2) \quad \widetilde{\mathcal{R}}_{\underline{i}}(\tau \boxtimes \rho) = \widetilde{\mathcal{R}}_{\mathfrak{q}_{\underline{i}}, L_{\underline{i}}, G}^{d_{\underline{i}}}(\tau) \boxtimes \rho.$$

On obtient une représentation de $G \times A(\psi_{G'})$

Comme dans le lemme 8.1, on a une décomposition $S_{\psi_G} = S_{\psi_d} \times S_{\psi_{u, bp}}$, où S_{ψ_d} est le centralisateur de ψ_d dans $\mathbf{O}_{2c}(\mathbb{C})$ et $S_{\psi_{u, bp}}$ est le centralisateur de $\psi_{u, bp}$ dans $\mathbf{O}_{2n'}(\mathbb{C})$, et cette décomposition induit un isomorphisme (avec les notations évidentes) $A(\psi_G) \simeq A(\psi_d) \times A(\psi_{u, bp})$ avec $A(\psi_{u, bp}) \simeq A(\psi_{G'})$. Notons Z_r le centre de $\mathbf{O}_{2a_r}(\mathbb{C})$, un groupe à deux éléments dont on note z_r l'élément non trivial. On a alors une surjection

$$(9.1.3) \quad \prod_{r=1, \dots, R} Z_r \rightarrow A(\psi_d).$$

qui induit une surjection

$$(9.1.4) \quad \prod_{r=1, \dots, R} Z_r \times A(\psi_{G'}) \rightarrow A(\psi_G).$$

Le noyau de la surjection (9.1.3) est engendré par les éléments $z_r z_{r+1}$ où r est tel que $t_r = t_{r+1}$ et $a_r = a_{r+1}$.

Soient p, q, p', q' des entiers. Le groupe $\mathbf{U}(p + p', q + q')$ admet un c -sous groupe de Levi de la forme $\mathbf{U}(p, q) \times \mathbf{U}(p', q')$, et l'on a donc un foncteur d'induction cohomologique $\mathcal{R}_{\mathbf{U}(p, q) \times \mathbf{U}(p', q'), \mathbf{U}(p+p', q+q')}^{d_{p, q, p', q'}}$. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer le c -sous parabolique absent de la notation et le « bon » degré $d_{p, q, p', q'}$. Nous renormalisons ce foncteur comme dans la partie 7.2, pour obtenir un foncteur $\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{U}(p, q) \times \mathbf{U}(p', q'), \mathbf{U}(p+p', q+q')}^{d_{p, q, p', q'}}$

Lemme 9.2 ([Tra01], Lemma 8.7, 9.3). — *Soit $r \in \{1, \dots, R\}$ tel que $t_r = t_{r+1}$ et $a_r = a_{r+1}$. Alors*

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{U}(i_r, a_r - i_r) \times \mathbf{U}(i_{r+1}, a_{r+1} - i_{r+1}), \mathbf{U}(i_r + i_{r+1}, a_r + a_{r+1} - i_r - i_{r+1})}^{d_{i_r, a_r - i_r, i_{r+1}, a_{r+1} - i_{r+1}}}(\xi_{i_r, t_r} \boxtimes \xi_{i_{r+1}, t_{r+1}}) = 0$$

sauf si $i_r = a_{r+1} - i_{r+1}$ et $i_{r+1} = a_r - i_r$.

Il faut remarquer que ce résultat est valable dans tout le « mediocre range », donc en particulier dans le weakly fair range où nous l'appliquons ici.

Notons $S_{\underline{i}}$ le caractère de $\prod_{r=1, \dots, R} Z_r$, donné sur le r -ième facteur $Z_r = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le caractère

S_{i_r} analogue au caractère défini en (7.1.2), avec c remplacé par a_r et n remplacé par $n - \sum_{j=1}^{r-1} a_j$.

Nous avons introduit toutes les notations nécessaires pour énoncer notre résultat principal.

Théorème 9.3. — *Avec les notations qui précèdent*

$$(9.1.5) \quad \pi^A(\psi_G, G) = \bigoplus_{\underline{i} \in I} S_{\underline{i}} \boxtimes \widetilde{\mathcal{R}}_{\underline{i}}((\boxtimes_{r=1, \dots, R} \xi_{i_r, t_r}) \boxtimes \pi^A(\psi_{G'}, G'_{\underline{i}})).$$

La somme est sur l'ensemble I de la définition 9.1. Expliquons le terme de droite : $\pi^A(\psi_{G'}, G'_{\underline{i}})$ est une représentation de $G'_{\underline{i}} \times A(\psi_{G'})$, et $(\boxtimes_{r=1, \dots, R} \xi_{i_r, t_r}) \boxtimes \pi^A(\psi_{G'}, G'_{\underline{i}})$ est une représentation de $L_{\underline{i}} \times A(\psi_{G'})$, donc $\widetilde{\mathcal{R}}_{\underline{i}}((\boxtimes_{r=1, \dots, R} \xi_{i_r, t_r}) \boxtimes \pi^A(\psi_{G'}, G'_{\underline{i}}))$ est une représentation de $G \times A(\psi_{G'})$. D'après le lemme ci-dessus, et par transitivité de l'induction cohomologique, si $\widetilde{\mathcal{R}}_{\underline{i}}((\boxtimes_{r=1, \dots, R} \xi_{i_r, t_r}) \boxtimes \pi^A(\psi_{G'}, G'_{\underline{i}})) \neq 0$, alors on calcule facilement que $S_{\underline{i}}$ est trivial sur le

noyau de (9.1.3) et l'on utilise (9.1.4) pour voir les termes de la somme du membre de droite de (9.1.5) comme des représentations de $G \times A(\psi_G)$.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que ψ_G vérifie la condition de régularité suivante :

$$(9.1.6) \quad \forall r = 1, \dots, R-1, t_r - a_r + 1 > t_{r+1} + a_{r+1} - 1 \quad \text{et} \quad t_R - a_R + 1 > \max_{m=1, \dots, M} \{a_m - 1\}$$

Le résultat s'obtient alors immédiatement à partir de la section précédente par une récurrence sur R . La condition de régularité (9.1.6) assure qu'à chaque étape, la condition (8.1.2) est satisfaite et que les inductions cohomologiques se font à chaque fois dans le good range. On utilise aussi la transitivité de l'induction cohomologique. De plus, dans ce cas, notons que (9.1.4) est un isomorphisme.

Pour passer du cas régulier au cas général, on utilise les résultats de [MRb], Théorèmes 4.1.1 et 4.5.1. \square

9.2. Au sujet des choix. — Comme il est bien connu, le choix de la normalisation locale des facteurs de transfert est un point délicat même si ici, cela a pu se faire grâce aux travaux de Kottwitz et Shestak de façon assez simple. La vox populi dit que la normalisation se fait à l'aide d'un modèle de Whittaker, c'est un peu abusif car il faut aussi le choix d'une forme intérieure quasi-déployée de référence. Par exemple, dans le cas du groupe très simple \mathbf{SO}_{2n+1} , il n'y a qu'un seul modèle de Whittaker mais il y a deux choix de formes bilinéaires symétriques non dégénérées de dimension $2n+1$ ayant un espace isotrope de dimension n . Pour ce groupe c'est là qu'est le choix. Donc pour tous les groupes considérés ici, il y a deux choix possibles, soit il y a deux choix de modèles de Whittaker, c'est le cas des groupes symplectiques et des groupes orthogonaux pairs dont la forme intérieure quasi-déployée est en fait déployée et dans les cas restant il y a deux choix de formes bilinéaires symétriques non dégénérées maximales isotropes.

Les choix faits ont été explicités dans le paragraphe 6.1 voir en particulier la remarque 6.3, et on peut les justifier par leur compatibilité à l'induction cohomologique. Par exemple pour le groupe \mathbf{SO}_{2n+1} les formes bilinéaires considérées pour déterminer la forme intérieure sont celles qui ont un nombre impair de plus. Ces choix ont en revanche le défaut de ne pas être compatibles à l'induction parabolique. Pour éviter ce problème, on peut considérer comme forme quasi-déployée de référence, celle qui correspond à la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i=n+1}^{2n+1} x_i^2$. Ce qui change alors est le calcul du caractère $S_{\underline{i}}$ du théorème principal. Exprimons sans démonstration quel caractère on trouve avec cet autre choix. Pour cela on a besoin de la notation pour tout $r \in [1, R]$, $a_{<r} = \sum_{j < r} a_j$ avec $a_{<1} = 0$. Alors $S_{\underline{i}}$ vaut sur Z_r le caractère $\mathbf{sgn}^{\epsilon_r}$ où

$$\epsilon_r = i_r(a_{<r} + 1) + (a_r - i_r)a_{<r} + a_r(a_r + 1)/2.$$

10. Appendice

Dans cet appendice, nous regroupons des résultats sur l'induction cohomologique et les représentations standard dont nous avons besoin dans le corps de l'article. Nous suivons principalement [AV92].

10.1. Représentations standard. — Soient \mathbf{G} un groupe algébrique connexe réductif défini sur \mathbb{R} et τ l'involution de Cartan de \mathbf{G} . Soit \mathbf{T} un sous-groupe de Cartan de \mathbf{G} défini sur \mathbb{R} et τ -stable, $T = \mathbf{T}(\mathbb{R})$. Soit \mathbf{B} un sous-groupe de Borel de \mathbf{G} (seulement défini sur \mathbb{C}), contenant \mathbf{T} , soit $R^+ = R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$ le système de racines positives défini par \mathbf{B} , et soit ρ la demi-somme des racines de R^+ . Notons E_ρ la représentation spécifique de dimension 1 de T^ρ définie par ρ .

Comme dans [AV92], Définition 8.11, on introduit le revêtement à deux feuilletts T^ρ (qui contrairement à ce que suggère la notation, ne dépend pas du choix d'un système de racines positives, cf. [AV92], Lemma 8.15).

Définition 10.1 ([AV92], Définition 8.18). — Considérons une paire de Borel (\mathbf{B}, \mathbf{T}) comme ci-dessus, et soit Λ un caractère spécifique de T^ρ dont on note λ la différentielle. On dit que \mathbf{B} et Λ sont en bonne position relative si pour toute racine $\alpha \in R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b}) = R^+$, entière pour λ (c'est-à-dire $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$), l'une des conditions suivantes est réalisée :

- (i) α est imaginaire (c'est-à-dire $\tau\alpha = \alpha$) et $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \geq 0$,
- (ii) α est complexe (c'est-à-dire $\tau\alpha \neq \pm\alpha$), $\tau\alpha \in R^+$, $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \geq 0$ ou $\langle \lambda, \tau\check{\alpha} \rangle \geq 0$,
- (iii) α est complexe, $-\tau\alpha \in R^+$, $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \leq 0$ ou $\langle \lambda, -\tau\check{\alpha} \rangle \leq 0$,
- (iv) α est réelle (c'est-à-dire $\tau\alpha = -\alpha$) et $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \leq 0$.

Si tel est le cas, on pose alors

$$(10.1.1) \quad I(\mathbf{B}, \Lambda) = \# \mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^d(\mathbb{C}_\Lambda).$$

Ici, $d = d(G, T) = \dim \mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}$ où \mathfrak{n} est le radical nilpotent de \mathfrak{b} et le foncteur $\# \mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^d$ est le foncteur d'induction cohomologique de Zuckerman en degré d , normalisé comme dans [AV92] ou [KV95], c'est-à-dire que l'on tensorise \mathbb{C}_Λ par le caractère E_ρ de T^ρ avant d'induire. Le caractère infinitésimal est préservé.

On appelle $I(\mathbf{B}, \Lambda)$ une limite de représentation standard de G . Si de plus $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \neq 0$, pour toute racine imaginaire α , on dit que Λ est M -régulier et que $I(\mathbf{B}, \Lambda)$ une représentation standard de G .

Lemme 10.2 ([AV92], Lemma 8.20). — Si (\mathbf{B}, Λ) et (\mathbf{B}', Λ) sont en bonne position relative, et que les systèmes de racines positives imaginaires et réelles définis par \mathbf{B} et \mathbf{B}' sont les mêmes, alors $I(\mathbf{B}, \Lambda) = I(\mathbf{B}', \Lambda)$.

Remarques 10.3. — 1. Etant donné un système de racines imaginaires positives R_{Im}^+ et un système de racines réelles positives R_{Re}^+ vérifiant $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \geq 0$ pour toute racine $\alpha \in R_{Im}^+$ entière et $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \leq 0$ pour toute racine $\alpha \in R_{Re}^+$ entière, il existe un sous-groupe de Borel \mathbf{B} en bonne position relativement à Λ tel que $R^+ = R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$ contienne R_{Im}^+ et R_{Re}^+ .

— 2. Etant donné R_{Im}^+ et R_{Re}^+ , le lemme montre que $I(\mathbf{B}, \Lambda)$ ne dépend pas du choix de \mathbf{B} pourvu qu'il soit en bonne position relativement à Λ et que R_{Im}^+ et R_{Re}^+ soient inclus dans $R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$. On peut donc noter

$$I(\mathbf{B}, \Lambda) = I(R_{Im}^+, R_{Re}^+, \Lambda).$$

Si de plus Λ est M -régulier, c'est-à-dire si $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \neq 0$ pour toute racine imaginaire α , alors R_{Im}^+ est déterminé par Λ , et l'on peut simplement noter

$$I(\mathbf{B}, \Lambda) = I(R_{Re}^+, \Lambda).$$

Nous allons maintenant rappeler le lien avec la classification de Langlands.

Séries discrètes relatives. Commençons par le cas des séries discrètes relatives. On suppose donc que T est compact modulo le centre. On fixe un système de racines positives $\Sigma^+ = \Sigma_{Im}^+$ de \mathfrak{t} dans \mathfrak{g} . Soit ρ la demi-somme des racines positives. Harish-Chandra a montré que les séries discrètes relatives de G sont paramétrées par les couples (λ, χ) où $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ et χ est un caractère de $Z(G)$ vérifiant deux conditions :

$$(10.1.2) \quad \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \neq 0, \quad (\alpha \in \Sigma^+),$$

$$(10.1.3) \quad \text{Il existe un caractère } \Gamma \text{ de } T \text{ tel que } \Gamma|_{Z(G)} = \chi \text{ et } d\Gamma = \lambda - \rho.$$

Le caractère

$$\Lambda = \Gamma \otimes \mathbb{C}_\rho$$

est alors un caractère spécifique de T^ρ dont la différentielle est λ . Soit \mathbf{B} le sous-groupe de Borel contenant \mathbf{T} tel que λ est dominant pour le système de racines positives défini par \mathbf{B} (le système Σ^+ choisi au départ n'a finalement pas d'importance).

Remarquons que Λ détermine (λ, χ) et que \mathbb{C}^ρ étant une représentation spécifique de T^ρ , Λ est spécifique si et seulement si Γ est un caractère de T . La série discrète relative de paramètre d'Harish-Chandra Λ est alors $I(\mathbf{B}, \Lambda) = \# \mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^S(\Lambda)$.

De même, les limites de séries discrètes relatives $\# \mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^S(\Lambda)$ sont obtenues en abandonnant la condition (10.1.2). Le sous-groupe de Borel \mathbf{B} n'est alors plus déterminé par λ . Il se peut que $I(\mathbf{B}, \Lambda) = \# \mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^S(\Lambda)$ soit nul. Ceci arrive si et seulement si l'une des racines simples α de \mathbf{T} dans \mathbf{B} telle que $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = 0$ est imaginaire compacte.

Pour obtenir une paramétrisation des limites de séries discrètes relatives, on peut mettre la condition $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \neq 0$ pour toute racine simple imaginaire compacte α de \mathbf{T} dans \mathbf{B} , ou bien considérer par abus de langage que la représentation nulle est une limite de séries discrètes relative.

Cas général. On revient à T, Λ comme au-début de la section. On fixe aussi un système de racines imaginaires positives R_{Im}^+ et un système de racines réelles positives R_{Re}^+ comme dans la remarque 10.3. On note ρ_{Im} la demi-somme des racines dans R_{Im}^+ , et $T^{\rho_{Im}}$ le revêtement à deux feuilletts de T construit avec ρ_{Im} . Soit M le sous-groupe de Levi de G défini par T et les racines imaginaires ($M = G^A$ si $T = T_c A$ est la décomposition de T selon τ). Choisissons un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G vérifiant les trois conditions suivantes. Premièrement, \mathfrak{n} est défini sur \mathbb{R} (il est donc stable par σ_G , ou de manière équivalente, stable par $-\tau$). Deuxièmement, $R_{Re}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{n})$. Troisièmement, pour toute racine $\alpha \in R(\mathfrak{t}, \mathfrak{n})$ telle que $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$, on a $\Re(\langle \check{\alpha}, \tau\lambda - \lambda \rangle) \geq 0$. Remarquons que cette condition pour les racines réelles est $\Re(\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle) \leq 0$, qui est déjà supposée satisfaite, et pour les racines complexes, on est dans le cas (iii) de la définition 10.1. Or si $\Re(\langle \check{\alpha}, \tau\lambda - \lambda \rangle) \geq 0$, au moins l'un des entiers $\langle \check{\alpha}, \tau\lambda \rangle$ ou $-\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle$ est positif ou nul, ce qui montre que la condition (iii) est vérifiée. Un tel sous-groupe parabolique existe. Soit alors \mathbf{B} le sous-groupe de Borel contenu dans \mathbf{P} et tel que $R_{Im}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$. Il est alors clair que \mathbf{B} et Λ sont en bonne position relative. On peut obtenir $I(\mathbf{B}, \Lambda)$ par induction par étapes en passant par P . Soit $\rho_{\mathfrak{n}}$ la demi-somme des racines de \mathfrak{t} dans \mathfrak{n} , et $T^{\rho_{\mathfrak{n}}}$ le revêtement à deux feuilletts de T construit avec $\rho_{\mathfrak{n}}$. Le caractère $2\rho_{\mathfrak{n}}$ de T est à valeurs réelles, et donc sa valeur absolue admet une unique racine carrée positive, que nous allons noter $|\rho_{\mathfrak{n}}|$. Son relèvement à $T^{\rho_{\mathfrak{n}}}$ coïncide sur la composante neutre avec le caractère $\rho_{\mathfrak{n}}$. Notons $\gamma_{\mathfrak{n}}$ le caractère quotient $\frac{\rho_{\mathfrak{n}}}{|\rho_{\mathfrak{n}}|}$ de $T^{\rho_{\mathfrak{n}}}$ (c'est un caractère à valeurs dans les racines quatrième de l'unité). On pose

$$\Lambda_M = \Lambda \otimes \mathbb{C}_{\gamma_{\mathfrak{n}}}.$$

On vérifie que c'est un caractère du revêtement $T^{\rho_{Im}}$ dont la différentielle est λ . Soit X_M la limite de série discrète relative de M de paramètre $(\Lambda_M, \mathbf{B}_M = \mathbf{B} \cap \mathbf{M})$ (ou encore de paramètre (λ_M, R_{Im}^+)). On a alors (cf. [AV92], Eq. (8.22))

$$(10.1.4) \quad I(\mathbf{B}, \Lambda) = \text{Ind}_P^G(X_M).$$

Autre réalisation des représentations standard. On repart de $T, \Lambda, R_{Im}^+, R_{Re}^+$ comme ci-dessus. Soit \mathbf{L} le sous-groupe de Levi défini par \mathbf{T} et les racines réelles. Il est défini sur \mathbb{R} , c'est un c -Levi au sens de la section 5.2, et l'on note L le groupe de ses points réels. Choisissons un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{V}$ vérifiant les conditions suivantes. Premièrement, \mathbf{Q} est τ -stable. Deuxièmement, $R_{Im}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$. Troisièmement, pour chaque racine complexe $\alpha \in R(\mathfrak{t}, \mathfrak{v})$ telle que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$, $\Re(\langle \check{\alpha}, \tau\lambda + \lambda \rangle) \geq 0$. Soit \mathbf{B} le sous-groupe de Borel contenant \mathbf{T} , contenu dans \mathbf{Q} et tel que $R_{Re}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$. Alors Λ et \mathbf{B} sont en bonne position relative. Posons $\mathfrak{b}_L = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}$; c'est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{l} . Notons \mathfrak{n}_L son radical unipotent et $\rho_{\mathfrak{n}_L}$ la demi-somme des racines de \mathfrak{t} dans \mathfrak{n}_L . On un un revêtement à deux feuilletts $T^{\rho_{\mathfrak{n}_L}}$ et des caractères $\rho_{\mathfrak{n}_L}, |\rho_{\mathfrak{n}_L}|$ et

$\gamma_{\mathfrak{n}_L} = \frac{\rho_{\mathfrak{n}_L}}{|\rho_{\mathfrak{n}_L}|}$ de ce revêtement. Le caractère

$$\Lambda_L = \Lambda \otimes (\mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}}})^* \otimes \gamma_{\mathfrak{n}_L}$$

se factorise par T . Formons la série principale

$$X_L = \text{Ind}_{B_L}^L(\Lambda_L).$$

On a alors (cf. [AV92], Eq. (8.23))

$$I(\mathbf{B}, \Lambda) = \mathcal{R}_q^d(X_L)$$

où le foncteur d'induction cohomologique est ici celui normalisé comme dans [Vog81], et $d = d(G, L) = \dim(\mathfrak{v} \cap \mathfrak{k})$.

10.2. Induites cohomologiques de représentations standards. — On se place maintenant dans la situation suivante. Soit $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{V}$ un sous-groupe parabolique τ -stable de \mathbf{G} , avec \mathbf{L} défini sur \mathbb{R} . Soit $I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)$ une représentation standard de L . Ici Λ_L est un caractère spécifique d'un revêtement à deux feuilletts T^{ρ_L} d'un sous-groupe de Cartan T de L et \mathbf{B}_L est un sous-groupe de Borel de \mathbf{L} en bonne position relativement à Λ_L . Posons $d = d(G, L) = \dim(\mathfrak{v} \cap \mathfrak{k})$. On suppose que la différentielle λ_L de Λ_L est dans le good range, et l'on forme

$$(10.2.1) \quad \mathcal{R}_q^d(I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)).$$

D'après la section précédente, on peut écrire $I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)$ sous la forme

$$(10.2.2) \quad I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L) = \mathcal{R}_{q_1}^{d_1}(\text{Ind}_{B_{L_1}}^{L_1}(\Lambda_{L_1}))$$

où L_1 est le sous-groupe de Levi de L défini par T et les racines réelles de \mathfrak{t} dans \mathfrak{l} , $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{V}_1$ est un sous-groupe parabolique τ -stable de \mathbf{L} vérifiant $R_{L, Im}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{v}_1)$ et pour chaque racine complexe $\alpha \in R(\mathfrak{t}, \mathfrak{v}_1)$ telle que $\langle \check{\alpha}, \lambda_L \rangle \in \mathbb{Z}$, $\Re(\langle \check{\alpha}, \tau\lambda_L + \lambda_L \rangle) \geq 0$. D'autre part $d = d(L, L_1) = \dim(\mathfrak{v}_1 \cap \mathfrak{k})$. Le sous-groupe de Borel \mathbf{B}_L de \mathbf{L} est celui contenant \mathbf{T} , contenu dans \mathbf{Q}_1 et tel que $R_{L, Re}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b}_L)$. Posons $\mathfrak{b}_{L_1} = \mathfrak{b}_L \cap \mathfrak{l}_1$; c'est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{l}_1 . Notons \mathfrak{n}_1 son radical unipotent et $\rho_{\mathfrak{n}_1}$ la demi-somme des racines de \mathfrak{t} dans \mathfrak{n}_1 . On a un revêtement à deux feuilletts $T^{\rho_{\mathfrak{n}_1}}$ et des caractères $\rho_{\mathfrak{n}_1}$, $|\rho_{\mathfrak{n}_1}|$ et $\gamma_{\mathfrak{n}_1} = \frac{\rho_{\mathfrak{n}_1}}{|\rho_{\mathfrak{n}_1}|}$ de ce revêtement. On a alors

$$(10.2.3) \quad \Lambda_{L_1} = \Lambda_L \otimes (\mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}_1}})^* \otimes \gamma_{\mathfrak{n}_1}.$$

Compte tenu de (10.2.1) et (10.2.2), on a

$$(10.2.4) \quad \mathcal{R}_q^d(I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)) = \mathcal{R}_q^d\left(\mathcal{R}_{q_1}^{d_1}\left(\text{Ind}_{B_{L_1}}^{L_1}(\Lambda_L \otimes (\mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}_1}})^* \otimes \gamma_{\mathfrak{n}_1})\right)\right).$$

Posons $\mathbf{Q}' = \mathbf{L}_*\mathbf{V}_*\mathbf{V} = \mathbf{L}_*\mathbf{V}'$. C'est un sous-groupe parabolique τ -stable de \mathbf{G} et par transitivité de l'induction cohomologique (cf. [Vog81], Cor. 6.3.10), on obtient

$$(10.2.5) \quad \mathcal{R}_q^d(I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)) = \mathcal{R}_{q'}^{d+d_1}\left(\text{Ind}_{B_{L_1}}^{L_1}(\Lambda_L \otimes (\mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}_1}})^* \otimes \gamma_{\mathfrak{n}_1})\right).$$

Posons

$$(10.2.6) \quad \Lambda = \Lambda_L \otimes \mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}}}$$

C'est un caractère du revêtement T^ρ de T . On a $\Lambda_L = \Lambda \otimes (\mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}}})^*$, et donc

$$(10.2.7) \quad \mathcal{R}_q^d(I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)) = \mathcal{R}_{q'}^{d+d_1}\left(\text{Ind}_{B_{L_1}}^{L_1}(\Lambda \otimes (\mathbb{C}_{\rho_{\mathfrak{v}'}})^* \otimes \gamma_{\mathfrak{n}_1})\right).$$

Soit \mathbf{B} le sous-groupe de Borel de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} , contenu dans \mathbf{Q}' et tel que $R_{L, Re}^+ = R_{Re}^+ \subset R(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$ (c'est-à-dire $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L\mathbf{V}$). On vérifie facilement que \mathbf{B} et Λ sont en bonne position relative, et l'on a finalement

$$(10.2.8) \quad \mathcal{R}_q^d(I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)) = I(\mathbf{B}, \Lambda).$$

Réécrivons maintenant ceci en termes de représentations standard de Langlands. On commence par $I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L)$ que l'on écrit de manière analogue à (10.1.4)

$$I(\mathbf{B}_L, \Lambda_L) = \text{Ind}_{P_L=M_L N_L}^L(X_{M_L}).$$

Ici, M_L est le sous-groupe de Levi de L défini par T et les racines imaginaires de \mathfrak{t} dans \mathfrak{l} , $P_L = M_L N_L$ est un sous-groupe parabolique vérifiant les conditions voulues de positivité, X_{M_L} est la série discrète relative de M_L de paramètre d'Harish-Chandra

$$\Lambda_{M_L} = \Lambda_L \otimes \mathbb{C}_{\gamma_{n_L}}.$$

On obtient alors, avec (10.1.4) :

Proposition 10.4. — *Avec les notations ci-dessus :*

$$(10.2.9) \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^S(\text{Ind}_{P_L=M_L N_L}^L(X_{M_L})) = \text{Ind}_{P=M_N}^G(X_M).$$

où X_M est la série discrète relative de M de paramètre d'Harish-Chandra

$$(10.2.10) \quad \Lambda_M = \Lambda \otimes \mathbb{C}_{\gamma_n} = \Lambda_L \otimes \mathbb{C}_{\rho_v} \otimes \mathbb{C}_{\gamma_n} = \Lambda_{M_L} \otimes (\mathbb{C}_{\gamma_{n_L}})^* \otimes \mathbb{C}_{\rho_v} \otimes \mathbb{C}_{\gamma_n}.$$

Ainsi, dans le « good range », l'induction cohomologique envoie une limite de représentation standard sur une limite de représentation standard, et la formule 10.2.10 donne le paramètre d'Harish-Chandra de la représentation induite en fonction de celui de la représentation induisante.

10.3. Calcul du terme $(\mathbb{C}_{\gamma_{n_L}})^* \otimes \mathbb{C}_{\rho_u} \otimes \mathbb{C}_{\gamma_n}$ pour les groupes classiques. — Nous nous replaçons dans le contexte de la section précédente, en particulier de la proposition 10.4, que nous particularisons au cas des groupes classiques de la section 3.1, avec pour sous-groupe parabolique \mathbf{Q} l'un de ceux de la section 6.3. En particulier, \mathbf{L} est un c -Levi maximal de \mathbf{G} , et l'on a

$$L = \mathbf{U}(i, c-i) \times G'_i$$

où G'_i est une forme intérieure pure d'un groupe \mathbf{G}' de même type que \mathbf{G} .

Le caractère \mathbb{C}_{ρ_V} est sans mystère. Tout d'abord $\rho_V = \rho_G - \rho_L$, et l'on calcule en coordonnées usuelles, dans chacun des cas :

$$\text{cas A : } \rho_V = \rho_G - \rho_L = (n, n-1, \dots, 1) - \left(\frac{c-1}{2}, \frac{c-3}{2}, \dots, -\frac{c-1}{2}, n-c, \dots, 1\right) = \left(n - \frac{c-1}{2}, \dots, n - \frac{c-1}{2}, 0, \dots, 0\right).$$

$$\text{cas B : } \rho_V = \rho_G - \rho_L = \left(\frac{2n_1}{2}, \frac{2n-3}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{c-1}{2}, \frac{c-3}{2}, \dots, -\frac{c-1}{2}, \frac{2(n-c)1}{2}, n-c, \dots, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2n-c-2}{2}, \dots, \frac{2n-c-2}{2}, 0, \dots, 0\right).$$

$$\text{cas C et D : } \rho_V = \rho_G - \rho_L = (n-1, n-2, \dots, 0) - \left(\frac{c-1}{2}, \frac{c-3}{2}, \dots, -\frac{c-1}{2}, n-c-1, \dots, 0\right) = \left(n-1 - \frac{c-1}{2}, \dots, n-1 - \frac{c-1}{2}, 0, \dots, 0\right).$$

On constate que ρ_v ne s'intègre pas nécessairement en un caractère de L (il y a une condition sur la parité de c dans chaque cas pour que les coordonnées de ρ_V soit des entiers), mais qu'il définit bien un caractère central d'un revêtement double de L , trivial sur le facteur G'_i . Comme les sous-groupes de Cartan des groupes unitaires sont connexes, ρ_V détermine \mathbb{C}_{ρ_V} .

Le terme $(\mathbb{C}_{\gamma_{n_L}})^* \otimes \mathbb{C}_{\gamma_n}$ est plus difficile à calculer. Traitons d'abord le cas des groupes symplectiques. Rappelons que nous sommes parti d'un sous-groupe de Cartan de \mathbf{G} que nous appelons ici \mathbf{D} plutôt que \mathbf{T} comme dans la section précédente. A conjugaison près, on peut supposer D de la forme

$$D \simeq \mathbf{U}(1)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_1} \times \mathbf{U}(1)^{r_2} \times (\mathbb{C}^\times)^{m_2} \times (\mathbb{R}^\times)^{s_2},$$

avec $c = r_1 + 2m_1$ et $r_1 + 2m_1 + r_2 + 2m_2 + s_2 = n$.

La sous-algèbre parabolique \mathfrak{n} est la somme d'espaces radiciels $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^\alpha$, avec α racine réelle, et d'espaces $(\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\sigma(\alpha)})^\sigma$, où $(\alpha, \sigma(\alpha))$ sont des couples de racines complexes. Comme toutes les

racines réelles de \mathbf{D} dans \mathbf{G} sont aussi dans \mathbf{L} , un supplémentaire de \mathfrak{n}_L dans \mathfrak{n} est constitué de la somme d'espaces $(\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\sigma(\alpha)})^\sigma$, où $\alpha, \sigma(\alpha)$ est un couple de racines complexes qui n'est pas dans L . Les racines de \mathbf{D} dans \mathbf{G} qui ne sont pas dans \mathbf{L} sont les $\pm(e_i + e_j)$, $1 \leq i < j \leq c$, $\pm(e_i \pm e_j)$, $1 \leq i \leq c < j \leq n$, $\pm 2e_i$, $c < i \leq n$.

On a

$$\begin{aligned}\sigma(e_i) &= -e_i \text{ si } 1 \leq i \leq r_1, c+1 \leq i \leq c+r_2, \\ \sigma(e_i) &= e_i \text{ si } c+r_2+2m_2+1 \leq i \leq n,\end{aligned}$$

et on peut supposer, quitte à conjuguer, que

$$\begin{aligned}\sigma(e_{r_1+2i-1}) &= -e_{r_1+2i} \text{ si } 1 \leq i \leq m_1, \\ \sigma(e_{c+r_2+2i-1}) &= -e_{c+r_2+2i} \text{ si } 1 \leq i \leq m_2.\end{aligned}$$

Fixons $i \leq r_1$. On regarde les couples de racines complexes $(\alpha, \sigma(\alpha))$ dans \mathfrak{n} qui ne sont pas dans \mathfrak{n}_L pour calculer leur contribution à $\gamma_{\mathfrak{n}}\gamma_{\mathfrak{n}_L}^*$, au besoin en groupant plusieurs couples.

$$\begin{aligned}(e_i + e_{r_1+2j-1}, -e_i - e_{r_1+2j}), 1 \leq j \leq m_1, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} &= \frac{e_{r_1+2j-1} - e_{r_1+2j}}{2}, \\ (e_i + e_{r_1+2j}, -e_i - e_{r_1+2j-1}), 1 \leq j \leq m_1, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} &= \frac{-e_{r_1+2j-1} + e_{r_1+2j}}{2},\end{aligned}$$

La contribution de ces deux couples va donc être triviale.

$$\begin{aligned}(e_i + e_{c+r_2+2j-1}, -e_i - e_{c+r_2+2j}), 1 \leq j \leq m_2, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} &= \frac{e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}}{2}, \\ (e_i - e_{c+r_2+2j-1}, -e_i + e_{c+r_2+2j}), 1 \leq j \leq m_2, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} &= \frac{-e_{c+r_2+2j-1} + e_{c+r_2+2j}}{2},\end{aligned}$$

ou bien

$$(-e_i + e_{c+r_2+2j-1}, e_i - e_{c+r_2+2j}), 1 \leq j \leq m_2, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}}{2},$$

La contribution de ces deux couples va donc être triviale, ou bien $\frac{e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}}{|e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}|}$. Mais comme la racine réelle $e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}$ vit sur un facteur \mathbb{C}^\times qui est connexe, c'est de toutes façon trivial.

$$(e_i + e_j, -e_i + e_j), c+r_2+2m_2+1 \leq j \leq n, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = e_j,$$

La contribution d'un tel couple à $\gamma_{\mathfrak{n}}\gamma_{\mathfrak{n}_L}^*$ est donc $\frac{e_j}{|e_j|}$.

Fixons $1 \leq i \leq m_1$. Les indices $r_1 + 2i - 1$ et $r_1 + 2i$ vont contribuer de la manière suivante à $\rho_{\mathfrak{n}} - \rho_{\mathfrak{n}_L}$ (sans recompter les contributions étant déjà apparues ci-dessus) :

$$(2e_{r_1+2i-1}, -2e_{r_1+2i}), 1 \leq i \leq m_1, \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i},$$

La contribution est donc $\frac{e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}}{|e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}|}$. Mais comme la racine réelle $e_{c+r_2+2j-1} - e_{c+r_2+2j}$ vit sur un facteur \mathbb{C}^\times qui est connexe, c'est trivial.

$$\begin{aligned}(e_{r_1+2i-1} + e_{r_1+2i'-1}, -e_{r_1+2i} - e_{r_1+2i'}), 1 \leq i < i' \leq m_1, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} &= \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i} + e_{r_1+2i'-1} - e_{r_1+2i'}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e_{r_1+2i-1} + e_{r_1+2i'}, -e_{r_1+2i} - e_{r_1+2i'-1}), 1 \leq i < i' \leq m_1, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} &= \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i} - e_{r_1+2i'-1} + e_{r_1+2i'}}{2},\end{aligned}$$

La contribution de ces deux couples à $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$ est donc $\frac{e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}}{|e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}|}$. Mais comme la racine réelle $e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}$ vit sur un facteur \mathbb{C}^\times qui est connexe, c'est trivial. D'autre choix de racines positives peuvent conduire à une contribution $\frac{e_{r_1+2i'-1}-e_{r_1+2i'}}{|e_{r_1+2i'-1}-e_{r_1+2i'}|}$, mais on a la même conclusion.

$$(e_{r_1+2i-1} + e_j, -e_{r_1+2i} - e_j, c+1 \leq j \leq c+r_2, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}}{2},$$

$$(e_{r_1+2i-1} - e_j, -e_{r_1+2i} + e_j, c+1 \leq j \leq c+r_2, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}}{2},$$

La contribution de ces deux couples à $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$ est donc $\frac{e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}}{|e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}|}$. Mais comme la racine réelle $e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}$ vit sur un facteur \mathbb{C}^\times qui est connexe, c'est trivial.

$$(e_{r_1+2i-1} + e_{c+r_2+2i'-1}, -e_{r_1+2i} - e_{c+r_2+2i'}), 1 \leq i < i' \leq m_2, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i} + e_{r_1+2i'-1} - e_{r_1+2i'}}{2},$$

$$(e_{r_1+2i-1} + e_{c+r_2+2i'}, -e_{r_1+2i} - e_{c+r_2+2i'-1}), 1 \leq i < i' \leq m_2, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i} - e_{c+r_2+2i'-1} + e_{c+r_2+2i'}}{2},$$

La contribution de ces deux couples à $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$ est donc $\frac{e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}}{|e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}|}$. Mais comme la racine réelle $e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}$ vit sur un facteur \mathbb{C}^\times qui est connexe, c'est trivial. D'autre choix de racines positives peuvent conduire à une contribution $\frac{e_{c+r_2+2i'-1}-e_{c+r_2+2i'}}{|e_{c+r_2+2i'-1}-e_{c+r_2+2i'}|}$, mais on a la même conclusion.

$$(e_{r_1+2i-1} + e_j, -e_{r_1+2i} + e_j, c+r_2+2m_2+1 \leq j \leq n, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}}{2} + e_j,$$

$$(e_{r_1+2i-1} - e_j, -e_{r_1+2i} - e_j, c+r_2+2m_2+1 \leq j \leq n, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}}{2} - e_j,$$

ou bien

$$(-e_{r_1+2i-1} + e_j, e_{r_1+2i} + e_j, c+r_2+2m_2+1 \leq j \leq n, \\ \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} = \frac{-e_{r_1+2i-1} + e_{r_1+2i}}{2} + e_j,$$

La contribution de ces deux couples à $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$ est donc $\frac{e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}}{|e_{r_1+2i-1}-e_{r_1+2i}|}$. Mais comme la racine réelle $e_{r_1+2i-1} - e_{r_1+2i}$ vit sur un facteur \mathbb{C}^\times qui est connexe, c'est trivial. ou bien $\frac{2e_j}{|2e_j|}$. Mais là encore, la contribution est triviale à cause du 2.

Finalement, en regardant toute ces contributions, on voit que $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$ est le caractère quadratique de D qui met sur le j -ième facteur \mathbb{R}^\times le signe $\left(\frac{e_j}{|e_j|}\right)^{r_1} = \left(\frac{e_j}{|e_j|}\right)^{r_1+2m_1} = \left(\frac{e_j}{|e_j|}\right)^c$.

Si c est pair, la torsion $\gamma_n \gamma_{n_L}^*$ est donc triviale. Si c est impair, notons \mathbf{sgn}_D ce caractère quadratique non trivial de D qui met le caractère \mathbf{sgn} sur chacun des facteurs \mathbb{R}^\times .

Le calcul pour les groupes orthogonaux est similaire. Pour le cas \mathbf{B} des groupes orthogonaux impairs, on remplace les racines longues $2e_i$ dans le calculs ci-dessus par les racines courtes e_i ,

et dans les cas **C** et **D** des groupes orthogonaux impairs, on enlève ces racines longues du calcul. Comme elles ne contribuaient pas et que dans le cas **B**, les racines courtes e_i ne vont pas contribuer non plus, on obtient exactement le même résultat.

Références

- [ABV92] J. ADAMS, D. BARBASCH & D. A. VOGAN, JR. – *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics, vol. 104, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [Ada11] J. ADAMS – « Discrete series and characters of the component group », On the stabilization of the trace formula, *Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl.*, vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, p. 369–387.
- [AJ87] J. ADAMS & J. F. JOHNSON – « Endoscopic groups and packets of nontempered representations », *Compositio Math.* **64** (1987), no. 3, p. 271–309.
- [AMR] N. ARANCIBIA, C. MOEGLIN & D. RENARD – « Paquets d’Arthur des groupes classiques et unitaires, cas cohomologique », prépublication, <https://arxiv.org/abs/1507.01432>, à paraître aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
- [Art84] J. ARTHUR – « On some problems suggested by the trace formula », Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, p. 1–49.
- [Art89] ———, « Unipotent automorphic representations : conjectures », *Astérisque* (1989), no. 171–172, p. 13–71, Orbites unipotentes et représentations, II.
- [Art13] ———, *The endoscopic classification of representations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, Orthogonal and symplectic groups.
- [AV92] J. ADAMS & D. A. VOGAN, JR. – « L -groups, projective representations, and the Langlands classification », *Amer. J. Math.* **114** (1992), no. 1, p. 45–138.
- [Bor79] A. BOREL – « Automorphic L -functions », Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 27–61.
- [Bou04] A. BOUAZIZ – « Quelques remarques sur les distributions invariantes dans les algèbres de Lie réductives », Noncommutative harmonic analysis, *Progr. Math.*, vol. 220, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, p. 119–130.
- [Kal16] T. KALETHA – « Rigid inner forms of real and p -adic groups », *Ann. of Math. (2)* **184** (2016), no. 2, p. 559–632.
- [KS99a] R. E. KOTTWITZ & D. SHELSTAD – « Foundations of twisted endoscopy », *Astérisque* (1999), no. 255, p. vi+190.
- [KS99b] ———, « Foundations of twisted endoscopy », *Astérisque* (1999), no. 255, p. vi+190.
- [KV95] A. W. KNAPP & D. A. VOGAN, JR. – *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [Lan97] R. P. LANGLANDS – « Representations of abelian algebraic groups », *Pacific J. Math.* (1997), no. Special Issue, p. 231–250, Olga Taussky-Todd : in memoriam.
- [LS87] R. P. LANGLANDS & D. SHELSTAD – « On the definition of transfer factors », *Math. Ann.* **278** (1987), no. 1-4, p. 219–271.
- [LW13] J.-P. LABESSE & J.-L. WALDSPURGER – *La formule des traces tordue d’après le Friday Morning Seminar*, CRM Monograph Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, With a foreword by Robert Langlands [dual English/French text].
- [Mez] P. MEZO – « Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups », prépublication disponible à <http://people.math.carleton.ca/~mezo/research.html>.

- [Moe] C. MOEGLIN – « Paquets d’arthur spéciaux unipotents aux places archimédiennes et correspondance de Howe », *Progress in Math*, Proceedings of the conference in honor of R. Howe; Cogdell J., Kim J., Zhu C. editors, A paraître.
- [MRa] C. MOEGLIN & D. RENARD – « Paquets d’arthur des groupes classiques complexes », *Contemporary Math.*, à paraître.
- [MRb] ———, « Sur les paquets d’arthur aux places réelles », à compléter.
- [MRc] ———, « Sur les paquets d’arthur dans le cas des groupes classiques non quasi-déployés », version provisoire disponible, <http://math.jussieu.fr/moeglin>.
- [She79] D. SHELSTAD – « Characters and inner forms of a quasi-split group over \mathbf{R} », *Compositio Math.* **39** (1979), no. 1, p. 11–45.
- [She82] ———, « L -indistinguishability for real groups », *Math. Ann.* **259** (1982), no. 3, p. 385–430.
- [She08] ———, « Tempered endoscopy for real groups. III. Inversion of transfer and L -packet structure », *Represent. Theory* **12** (2008), p. 369–402.
- [She10] ———, « Tempered endoscopy for real groups. II. Spectral transfer factors », *Automorphic forms and the Langlands program*, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 9, Int. Press, Somerville, MA, 2010, p. 236–276.
- [She12] ———, « On geometric transfer in real twisted endoscopy », *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), no. 3, p. 1919–1985.
- [She15] D. SHELSTAD – « On elliptic factors in real endoscopic transfer I », *Representations of reductive groups*, Prog. Math. Phys., vol. 312, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015, p. 455–504.
- [Taï] O. TAÏBI – « Dimensions of spaces of level one automorphic forms for split classical groups using the trace formula », prépublication, <http://arxiv.org/abs/1406.4247>.
- [Tra01] P. E. TRAPA – « Annihilators and associated varieties of $A_q(\lambda)$ modules for $U(p, q)$ », *Compositio Math.* **129** (2001), no. 1, p. 1–45.
- [Vog81] D. A. VOGAN, JR. – *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Mathematics, vol. 15, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.
- [Wal10] J.-L. WALDSPURGER – « Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire », *Manuscripta Math.* **133** (2010), no. 1-2, p. 41–82.

21 mars 2017

COLETTE MOEGLIN, CNRS, Institut Mathématique de Jussieu • *E-mail* : colette.moeglin@imj-prg.fr
 DAVID RENARD, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique
E-mail : david.renard@polytechnique.edu