PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

NIVEAU UNIVERSITAIRE

1ÈRE PARTIE

NOUAKCHOTT, MARS 2012

Correction du problème

1. (a) La matrice $A^T A$ étant hermitienne, ses valeurs propres sont réelles. De plus, de la relation $A^T Ax = \sigma x$, on déduit

$$\sigma\|x\|^2 = \sigma\langle x, x\rangle = \langle \sigma x, x\rangle = \langle A^T Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2,$$

qui montre, puisque $x \neq 0$, que $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

(b) Il est clair que si λ est une valeur propre de A, $\sigma = \lambda^2$ est une valeur propre de A^2. Réciproquement, si x est un vecteur propre de A^2 asssocié à la valeur propre σ, on a $A^2x = \sigma x$, soit en notant $A = PDP^{-1}$ une décomposition spectrale de la matrice hermitienne A, $PD^2P^{-1}x = \sigma x$ ou encore $D^2P^{-1}x = \sigma P^{-1}x$. Notant $(\lambda_i)_{i=1}^n$ les valeurs propres de A, on a $\lambda_i^2(P^{-1}x)_i = \sigma(P^{-1}x)_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme le vecteur $P^{-1}x$ n'est pas nul, il a au moins une composante i qui n'est pas nulle et $\lambda_i^2 = \sigma$. Conclusion : les σ sont les carrés des valeurs propres de A.

(c) Les vecteurs propres u_i de la matrice hermitienne $A^T A$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. On a

$$\langle Au_i, Au_j\rangle = \langle A^T Au_i, u_j\rangle = \sigma_i\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ \sigma_i & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

(d) i. $r = 0$. Le spectre de la matrice hermitienne $A^T A$ est réduit à $\{0\}$, c'est la matrice nulle (en écrire une décomposition spectrale). Et si $A^T A$ est nulle, A l'est aussi puisque

$$A^T Ax = 0 \Longrightarrow \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^T Ax, x\rangle = 0 \Longrightarrow Ax = 0.$$

$r = n$. Si $x \in \operatorname{Ker} A$, on a $Ax = 0$. Multipliant cette égalité à gauche par A^T et notant que la matrice $A^T A$ est inversible, on obtient $x = 0$. (ou par le théorème du rang)

ii. A. $A^T v_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} A^T A u_i = \sqrt{\sigma_i}\, u_i$.
Les vecteurs $(v_i)_{i=1}^r$ sont normés :

$$\|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i\rangle = \frac{1}{\sigma_i}\langle Au_i, Au_i\rangle = \frac{1}{\sigma_i}\langle A^T Au_i, u_i\rangle = 1.$$

Le théorème de la base incomplète assure l'existence de $m-r$ vecteurs $(v_i')_{i=r+1}^m$ de sorte que la famille $(v_i)_{i=1}^r \cup (v_i')_{i=r+1}^m$ forme une base de $\mathbb{R}^m$. Le procédé de Gram-Schmidt produit une base orthormée.

B. On munit $\mathbb{R}^n$ de la base $(u_i)_{i=1}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de la base $(v_i)_{i=1}^m$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, on a

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i Au_i = \sum_{i=1}^r \sqrt{\sigma_i} x_i v_i,$$

puisque $Au_i = 0$ pour $i = r+1, \cdots, n$. On en déduit que l'image de f est engendrée par les vecteurs $v_1, \cdots, v_r$ et que $Ax = 0$ si et seulement si $x_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, r$ et donc $x = \sum_{i=r+1}^n x_i u_i$.
Par définition le rang de f est égal à r.

2. <u>On suppose dans cette partie que $r = n$.</u>
   (a) Le rang r est inférieur ou égal à $\min(m, n)$.
   (b) La i-ème colonne de la matrice $AU \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est $Au_i = \sqrt{\sigma_i} v_i$. La i-ème colonne de la matrice $VS \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est $\sqrt{\sigma_i} v_i$, puisque S est diagonale.
   (c) On écrit $A = (VU^T)(USU^T)$.
   Noter que puisque $n = m = r$, la matrice A est inversible.
   Unicité de la décomposition polaire d'une matrice inversible. Soit $A = O_1H_1 = O_2H_2$ où les matrices O_i sont orthogonales et les matrices H_i symétriques définies positives. On note que la matrice symétrique $A^T A = H_i^T 0_i^T O_1 H_1 = H_i^2$. On en déduit que H_i est la racin carré de la matrice $A^T A$, d'où l'unicité de H, puis de $O = AH^{-1}$

3. <u>On suppose que $0 < r \leq n$.</u>
   On a toujours la factorisation $A = VSU^T$.
   (a) Il s'agit de montrer que $P = BA$ et $Q = AB$
   – Montrons que $\operatorname{Im} AB = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ que et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x - BAx \in \operatorname{Ker} f$.
   Soit donc $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in \mathbb{R}^n$. On sait que $Ax = \sum_{i=1}^r \sqrt{\sigma_i} x_i v_i$ et puisque $Bv_i = U\Delta V^T v_i = U\Delta e_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} u_i$ pour $i = 1, \cdots, r$, on a

$$BAx = \sum_{i=1}^r \sqrt{\sigma_i} x_i Bv_i = \sum_{i=1}^r x_i u_i.$$

   Comme les $(u_i)_{i=1}^r$ forment une base de $(\operatorname{Ker} f)^\perp$, on a bien $\operatorname{Im} AB = (\operatorname{Ker} f)^\perp$. De plus $x - BAx = \sum_{i=r+1}^n x_i u_i \in \operatorname{Ker} f$.
   On peut aussi montrer que BA est une matrice de projection orthogonale, c'est donc la matrice de projection orthogonale sur $\operatorname{Im} AB = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

– De même, pour $y = \sum_{i=1}^m y_i v_i \in \mathbb{R}^m$, on a

$$ABy = A\sum_{i=1}^{m} y_i B v_i = A\sum_{i=1}^{r} y_i \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} u_i = \sum_{i=1}^{r} y_i v_i \in \operatorname{Im} f,$$

et $y - ABy = \sum_{i=r+1}^m y_i v_i \in (\operatorname{Im} f)^\perp$.

(b) Par définition $q(y) \in \operatorname{Im} f$, d'où l'existence d'un vecteur x tel que $q(y) = f(x)$. D'autre part, $g(y_i) = p(x_i) = b \circ f(x_i) = b \circ q(y)$ est indépendant de x_i.
Notons G la matrice associée à l'application g :

$$G = BQ = BAB = U\Delta S \Delta V^T = B$$

car $\Delta S \Delta = \Delta$.

Cas $r = n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit

$$f(x) - y = [f(x - \bar{x})] + [f(\bar{x}) - y].$$

Le premier terme appartenant à $\operatorname{Im} f$ et le second

$$f(\bar{x}) - y = f \circ g(y) - y = f \circ b(y) - y = q(y) - y$$

appartenant à $(\operatorname{Im} f)^\perp$, ces deux vecteurs sont orthogonaux et donc

$$\|f(x) - y\|^2 = \|f(x - \bar{x})\|^2 + \|f(\bar{x}) - y\|^2 \geq \|f(\bar{x}) - y\|^2.$$

$\boxed{\text{Unicité.}}$

$\boxed{\text{Cas } 0 < r \leq n.}$