# PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

## NIVEAU UNIVERSITAIRE

## 1ÈRE PARTIE

NOUAKCHOTT, MARS 2012

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

*Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits.*
*La solution du problème devra être rédigée de manière rigoureuse.*
*Le jury portera une attention particulière à la qualité de la rédaction.*

**Problème (55 points)**

Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ ($n$ et $m$ sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1). On note $A$ la matrice associée à $f$ relativement aux bases canoniques, $A^T$ la matrice transposée de $A$ (notée aussi ${}^tA$), $\operatorname{Ker} f$ désigne le noyau de $f$ et $\operatorname{Im} f$ son image. Enfin, $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ désigne le produit scalaire usuel et $\|\, .\, \|$ la norme associée.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de la matrice $A^TA$ sont réelles et positives. Elles seront notées $(\sigma_i)_{i=1}^n$ avec la convention

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0.$$

   (b) Dans cette question, on suppose que $m = n$ et que la matrice $A$ est symétrique. Établir un lien entre les $(\sigma_i)_{i=1}^n$ et les valeurs propres de la matrice $A$.

   (c) Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$ tels que $A^TAu_i = \sigma_i u_i$. Montrer que pour tous entiers $i$ et $j$ compris entre 1 et $n$, on a

$$\langle Au_i, Au_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ \sigma_i & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

   (d) Soit $r$ le nombre de valeurs $\sigma_i$ strictement positives.

      i. Commençons par étudier les cas $r = 0$ et $r = n$.
      $r = 0$ signifie que $\sigma_i = 0$ pour tout $i$. Montrer qu'alors $f$ est l'application nulle.
      $r = n$ signifie que $\sigma_n > 0$. Montrer qu'alors $f$ est injective.

      ii. On suppose que $0 < r < n$ :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0.$$

      On définit $r$ vecteurs $(v_i)_{i=1}^r$ par $Au_i = \sqrt{\sigma}_i\, v_i$.

A. Montrer que $A^T v_i = \sqrt{\sigma_i}\, u_i$. Expliquer comment on peut définir $m-r$ vecteurs $(v_i)_{i=r+1}^m$ de sorte que la famille $(v_i)_{i=1}^m$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$.

B. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $v_1, \cdots, v_r$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est engendré par les vecteurs $u_{r+1}, \cdots, u_n$. Quel est le rang de $f$ ?

2. On suppose dans cette partie que $r = n$.

   (a) Expliquer pourquoi $m \geq n$.

   (b) On définit les trois matrices $V$, $U$ et $S$ par
   – Les colonnes de $V$ sont formées des vecteurs $v_i$ : $V = [v_1|v_2|\cdots|v_m]$.
   – Les colonnes de $U$ sont formées des vecteurs $u_i$ : $U = [u_1|u_2|\cdots|u_n]$.
   – La matrice $S \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est diagonale (mais pas carrée si $n \neq m$) :

$$S_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ \sqrt{\sigma_i} & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

   Montrer que $A = VSU^T$.

   (c) On suppose uniquement pour cette question que $m = n$. Déterminer une matrice orthogonale $O$ et une matrice symétrique définie positive $H$ telles que $A = OH$. Cette factorisation est elle unique ?

3. On suppose que $0 < r \leq n$ et on définit la matrice $S \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par :

$$S_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\sigma_i} & \text{si } i = j = 1, \cdots, r, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

A-t-on encore $A = VSU^T$ ? Soit $p$ la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $P$ la matrice associée dans la base canonique. Soit $q$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$ et $Q$ la matrice associée dans la base canonique. On note $B = U\Delta V^T$, où $\Delta \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est la matrice définie par

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} & \text{si } i = j = 1, \cdots, r, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $p = b \circ f$ et que $q = f \circ b$.

   (b) On définit l'application $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de la façon suivante : pour $y \in \mathbb{R}^m$ on prend un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = q(y)$ (justifier l'existence de $x$), puis on pose $g(y) = p(x)$. Montrer que $g$ est bien définie, autrement dit que s'il existe deux vecteurs $x_1$ et $x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = q(y)$, alors $p(x_1) = p(x_2)$. Quelle est la matrice associée à l'application $g$ (dans la base canonique) ?

4. Soit $y \in \mathbb{R}^m$ n'appartenant pas à $\operatorname{Im} f$. Il n'existe donc pas de vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$. On considère le problème suivant : touver $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|f(\bar{x}) - y\| \leq \|f(x) - y\| \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

En supposant que le rang de $f$ est égal à $n$, montrer que ce problème a une solution $\bar{x} = g(y)$. Cette solution est elle unique ? Que peut on dire dans le cas où le rang de $f$ est inférieur strictement à $n$ ?