PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

NIVEAU UNIVERSITAIRE

2ÈME PARTIE

NOUAKCHOTT, MARS 2012
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits. Les candidats doivent résoudre trois exercices de leur choix parmi les cinq exercices proposés. Ces exercices sont indépendants. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Le jury portera une attention particulière à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (15 points)
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Dans ce qui suit le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire (euclidien) dans $\mathbb{R}^n$.

- On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n et à coefficients réels est σ*-angle bornée* avec $\sigma > 0$ si pour tous vecteurs x, y et z dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Ax - Az, z - y \rangle \leq \sigma \langle Ax - Ay, x - y \rangle.$$

Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La matrice carrée A est σ-angle bornée avec $\sigma > 0$.

(b) $\langle Ax, y \rangle \leq \sigma \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$.

(c) $\langle Ax, y \rangle \leq \alpha \langle Ax, x \rangle + \beta \langle Ay, y \rangle$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $\alpha\beta = \sigma$.

(d) $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\Big| \langle Ax, y \rangle - \langle Ay, x \rangle \Big| \leq 2\delta \sqrt{\langle Ax, x \rangle} \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$$

pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ avec $\sigma = \frac{1}{4}(\delta^2 + 1)$.

Exercice 2 (15 points)
Trouvez tous les polynômes P et Q à coefficients réels tels que

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

Exercice 3 (15 points)
Soit $F_0(x) = \ln x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel $x > 0$, on définit

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t)dt.$$

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!F_n(1)}{\ln n}.$$

Exercice 4 (15 points)
Trouver un nombre réel α et un nombre réel $L > 0$ tels que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r^\alpha \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \sin x dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r \cos x dx} = L.$$

Exercice 5 (15 points)
Soient $a_i, b_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ des nombres réels. Montrer que

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq [(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)]^{1/n}.$$
