PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE

Correction de l'épreuve

Niveau scolaire

Nouakchott, 2 mars 2013

Sommaire

L'épreuve était constituée de quatre exercices.

Exercice 1

Soit f une application de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels. On suppose que f est minorée (c'est-à-dire que f n'est jamais inférieure à un certain réel A) et vérifie, pour tout entier relatif n,

$$f(n) \geq \frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}. \tag{1}$$

1) Soit Δ la fonction d'accroissement définie par $\Delta(n) = f(n) - f(n-1)$. Montrer que pour tous entiers relatifs m et n, $m \geq n$, on a

$$(m-n)\Delta(m) \leq f(m) - f(n) \leq (m-n)\Delta(n+1).$$

On peut récrire l'hypothèse (1) sous la forme

$$f(n) - f(n-1) \geq f(n+1) - f(n)$$

c'est-à-dire $\Delta(n) \geq \Delta(n+1)$. La fonction Δ est donc décroissante.

Exercice 1

Soit f une application de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombre réels. On suppose que f est minorée (c'est-à-dire que f n'est jamais inférieure à un certain réel A) et vérifie, pour tout entier relatif n,

$$f(n) \geq \frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}. \tag{1}$$

1) Soit Δ la fonction d'accroissement définie par $\Delta(n) = f(n) - f(n-1)$. Montrer que pour tous entiers relatifs m et n, $m \geq n$, on a

$$(m-n)\Delta(m) \leq f(m) - f(n) \leq (m-n)\Delta(n+1).$$

On peut récrire l'hypothèse (1) sous la forme

$$f(n) - f(n-1) \geq f(n+1) - f(n)$$

c'est-à-dire $\Delta(n) \geq \Delta(n+1)$. La fonction Δ est donc décroissante.

Exercice 1 (suite)

Si $m > n$ (le cas d'égalité est immédiat), on décompose

$$f(m) - f(n) = \sum_{i=n+1}^{m} (f(i) - f(i-1)) = \sum_{i=n+1}^{m} \Delta(i).$$

Par décroissance de Δ, le membre de droite est

$$\geq (m-n)\Delta(m)$$

et

$$\leq (m-n)\Delta(n+1).$$

Exercice 1 (suite)

Si $m > n$ (le cas d'égalité est immédiat), on décompose

$$f(m) - f(n) = \sum_{i=n+1}^{m} (f(i) - f(i-1)) = \sum_{i=n+1}^{m} \Delta(i).$$

Par décroissance de Δ, le membre de droite est

$$\geq (m-n)\Delta(m)$$

et

$$\leq (m-n)\Delta(n+1).$$

Exercice 1 (suite)

2) En déduire que l'application f est constante.

Si f n'est pas constante, Δ n'est pas la fonction identiquement nulle, disons $\Delta(k) \neq 0$.
Si $\Delta(k) > 0$, alors pour tout $n < k$, $\Delta(n) \geq \Delta(k) > 0$ et on a en utilisant la première question (première inégalité avec $m = k$)

$$f(k) - f(n) \geq (k - n)\Delta(k)$$

soit

$$f(n) \leq f(k) + (n - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $-\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Si $\Delta(k) < 0$, alors de façon analogue, pour $m \geq k$ (deuxième inégalité avec $n = k$)

$$f(m) \leq f(k) + (m - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Exercice 1 (suite)

2) En déduire que l'application f est constante.

Si f n'est pas constante, Δ n'est pas la fonction identiquement nulle, disons $\Delta(k) \neq 0$.

Si $\Delta(k) > 0$, alors pour tout $n < k$, $\Delta(n) \geq \Delta(k) > 0$ et on a en utilisant la première question (première inégalité avec $m = k$)

$$f(k) - f(n) \geq (k - n)\Delta(k)$$

soit

$$f(n) \leq f(k) + (n - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $-\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Si $\Delta(k) < 0$, alors de façon analogue, pour $m \geq k$ (deuxième inégalité avec $n = k$)

$$f(m) \leq f(k) + (m - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Exercice 1 (suite)

2) En déduire que l'application f est constante.

Si f n'est pas constante, Δ n'est pas la fonction identiquement nulle, disons $\Delta(k) \neq 0$.
Si $\Delta(k) > 0$, alors pour tout $n < k$, $\Delta(n) \geq \Delta(k) > 0$ et on a en utilisant la première question (première inégalité avec $m = k$)

$$f(k) - f(n) \geq (k - n)\Delta(k)$$

soit

$$f(n) \leq f(k) + (n - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $-\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Si $\Delta(k) < 0$, alors de façon analogue, pour $m \geq k$ (deuxième inégalité avec $n = k$)

$$f(m) \leq f(k) + (m - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Exercice 1 (suite)

2) En déduire que l'application f est constante.

Si f n'est pas constante, Δ n'est pas la fonction identiquement nulle, disons $\Delta(k) \neq 0$.
Si $\Delta(k) > 0$, alors pour tout $n < k$, $\Delta(n) \geq \Delta(k) > 0$ et on a en utilisant la première question (première inégalité avec $m = k$)

$$f(k) - f(n) \geq (k - n)\Delta(k)$$

soit

$$f(n) \leq f(k) + (n - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $-\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Si $\Delta(k) < 0$, alors de façon analogue, pour $m \geq k$ (deuxième inégalité avec $n = k$)

$$f(m) \leq f(k) + (m - k)\Delta(k)$$

et le majorant tend vers $-\infty$ lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui fournit une contradiction.

Exercice 2

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1) Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal 72.

Exercice 2 (suite)

Si tel n'est pas le cas, comme 71 est premier, ce ne peut pas être le produit des éléments d'une ligne (qui sont des produits de trois entiers distincts valant au plus 9), donc tous les produits (d'éléments d'une ligne ou d'une colonne) sont ≤ 70 et on obtient alors que le produit des produits des trois lignes qui vaut 9! (chaque élément entre 1 et 9 y est exactement une fois) est $\leq 70^3$. Il vient

$$9! \leq 70^3.$$

Ce qui se récrit

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \leq (2 \times 5 \times 7)^3$$

ou encore

$$2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \leq (2 \times 5 \times 7)^3$$

c'est-à- dire

$$2^4 \times 3^4 \leq 5^2 \times 7^2 = 35^2.$$

ce qui n'est pas car $2^4 \times 3^4 = 36^2$. Contradiction !

Exercice 2 (suite)

Si tel n'est pas le cas, comme 71 est premier, ce ne peut pas être le produit des éléments d'une ligne (qui sont des produits de trois entiers distincts valant au plus 9), donc tous les produits (d'éléments d'une ligne ou d'une colonne) sont ≤ 70 et on obtient alors que le produit des produits des trois lignes qui vaut $9!$ (chaque élément entre 1 et 9 y est exactement une fois) est $\leq 70^3$.Il vient

$$9! \leq 70^3.$$

Ce qui se récrit

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \leq (2 \times 5 \times 7)^3$$

ou encore

$$2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \leq (2 \times 5 \times 7)^3$$

c'est-à- dire

$$2^4 \times 3^4 \leq 5^2 \times 7^2 = 35^2.$$

ce qui n'est pas car $2^4 \times 3^4 = 36^2$. Contradiction !

Exercice 2 (suite)

2) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal 72.

En regardant de près la preuve précédente, on voit qu'il va falloir que les trois lignes aient un produit de leurs éléments très proche de 72. Et si l'on regarde un peu les différentes façon d'écrire 72 comme un produit d'entiers distincts inférieurs à 9, on arrive vite à l'exemple suivant. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (suite)

2) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal 72.

En regardant de près la preuve précédente, on voit qu'il va falloir que les trois lignes aient un produit de leurs éléments très proche de 72. Et si l'on regarde un peu les différentes façon d'écrire 72 comme un produit d'entiers distincts inférieurs à 9, on arrive vite à l'exemple suivant. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (suite)

3) Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal 90.

Si tel n'est pas le cas, toute ligne et toute colonne a une valeur inférieure pour le produit de ses éléments. Mais un entier divisible par un nombre premier > 9 ne peut pas être un produit de trois nombres ≤ 9. Or : 89 est premier, 88 divisible par 11, 87 par 29, 86 par 43, 85 par 17.
L'entier **84** peut lui être "atteint" comme $2 \times 6 \times 7$ ou $3 \times 4 \times 7$ (donc deux fois).
L'entier 83 est premier, 82 divisible par 41, 81 vaut 9 fois 9 mais ne peut pas être atteint (un seul 9 et un seul 3).
L'entier **80** est atteignable, mais une seule fois sous la forme :

$$80 = 2 \times 5 \times 8.$$

Exercice 2 (suite)

3) Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal 90.

Si tel n'est pas le cas, toute ligne et toute colonne a une valeur inférieure pour le produit de ses éléments. Mais un entier divisible par un nombre premier > 9 ne peut pas être un produit de trois nombres ≤ 9. Or : 89 est premier, 88 divisible par 11, 87 par 29, 86 par 43, 85 par 17.

L'entier **84** peut lui être "atteint" comme $2 \times 6 \times 7$ ou $3 \times 4 \times 7$ (donc deux fois).

L'entier 83 est premier, 82 divisible par 41, 81 vaut 9 fois 9 mais ne peut pas être atteint (un seul 9 et un seul 3).

L'entier **80** est atteignable, mais une seule fois sous la forme :

$$80 = 2 \times 5 \times 8.$$

Exercice 2 (suite)

3) Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal 90.

Si tel n'est pas le cas, toute ligne et toute colonne a une valeur inférieure pour le produit de ses éléments. Mais un entier divisible par un nombre premier > 9 ne peut pas être un produit de trois nombres ≤ 9. Or : 89 est premier, 88 divisible par 11, 87 par 29, 86 par 43, 85 par 17.
L'entier **84** peut lui être "atteint" comme $2 \times 6 \times 7$ ou $3 \times 4 \times 7$ (donc deux fois).
L'entier 83 est premier, 82 divisible par 41, 81 vaut 9 fois 9 mais ne peut pas être atteint (un seul 9 et un seul 3).
L'entier **80** est atteignable, mais une seule fois sous la forme :

$$80 = 2 \times 5 \times 8.$$

Exercice 2 (suite)

Ensuite, 79 est premier, 78 divisible par 13, 77 par 11, 76 par 19, 75 par 25 et nécessite donc deux 5 (qui ne sont pas présents), 74 est divisible par 37, 73 est premier.
On arrive enfin à **72** qui est atteignable (il peut d'ailleurs s'écrire que deux façons $72 = 3 \times 4 \times 6 = 2 \times 4 \times 9$.)
Bref, les 4 plus grandes valeurs possibles de produit pour une ligne ou une colonne sont : 84 (deux fois), 80 et 72.
Maintenant l'entier 1 est dans exactement une ligne et une colonne. En multipliant les termes de la colonne et de la ligne contenant 1 (et qui sont donc distincts), on obtient au plus $9 \times 8 \times 7 \times 6$.
Le produit des 6 lignes/colonnes vaut donc au plus :

$$N' = (9 \times 8 \times 7 \times 6) \times 84^2 \times 80 \times 72.$$

Exercice 2 (suite)

Ensuite, 79 est premier, 78 divisible par 13, 77 par 11, 76 par 19, 75 par 25 et nécessite donc deux 5 (qui ne sont pas présents), 74 est divisible par 37, 73 est premier.

On arrive enfin à **72** qui est atteignable (il peut d'ailleurs s'écrire que deux façons $72 = 3 \times 4 \times 6 = 2 \times 4 \times 9$.)

Bref, les 4 plus grandes valeurs possibles de produit pour une ligne ou une colonne sont : 84 (deux fois), 80 et 72.

Maintenant l'entier 1 est dans exactement une ligne et une colonne. En multipliant les termes de la colonne et de la ligne contenant 1 (et qui sont donc distincts), on obtient au plus $9 \times 8 \times 7 \times 6$.

Le produit des 6 lignes/colonnes vaut donc au plus :

$$N' = (9 \times 8 \times 7 \times 6) \times 84^2 \times 80 \times 72.$$

Exercice 2 (suite)

Ensuite, 79 est premier, 78 divisible par 13, 77 par 11, 76 par 19, 75 par 25 et nécessite donc deux 5 (qui ne sont pas présents), 74 est divisible par 37, 73 est premier.
On arrive enfin à **72** qui est atteignable (il peut d'ailleurs s'écrire que deux façons $72 = 3 \times 4 \times 6 = 2 \times 4 \times 9$.)
Bref, les 4 plus grandes valeurs possibles de produit pour une ligne ou une colonne sont : 84 (deux fois), 80 et 72.
Maintenant l'entier 1 est dans exactement une ligne et une colonne. En multipliant les termes de la colonne et de la ligne contenant 1 (et qui sont donc distincts), on obtient au plus $9 \times 8 \times 7 \times 6$.
Le produit des 6 lignes/colonnes vaut donc au plus :

$$N' = (9 \times 8 \times 7 \times 6) \times 84^2 \times 80 \times 72.$$

Exercice 2 (suite)

Mais ce produit vaut aussi exactement $(9!)^2$ (chaque entier entre 1 et 9 apparait exactement une fois sur une ligne et une fois sur une colonne) ce qui implique que l'on doit avoir

$$(9!)^2 \leq N',$$

c'est-à-dire

$$2^{14} \times 3^8 \times 5^2 \times 7^2 \leq 2^{15} \times 3^7 \times 5 \times 7^3$$

ce qui donne après simplification :

$$3 \times 5 \leq 2 \times 7,$$

une contradiction qui prouve l'assertion demandée.

Exercice 2 (suite)

Mais ce produit vaut aussi exactement $(9!)^2$ (chaque entier entre 1 et 9 apparait exactement une fois sur une ligne et une fois sur une colonne) ce qui implique que l'on doit avoir

$$(9!)^2 \leq N',$$

c'est-à-dire

$$2^{14} \times 3^8 \times 5^2 \times 7^2 \leq 2^{15} \times 3^7 \times 5 \times 7^3$$

ce qui donne après simplification :

$$3 \times 5 \leq 2 \times 7,$$

une contradiction qui prouve l'assertion demandée.

Exercice 2 (suite)

4) Peut-on améliorer la valeur 90 ?

Non, lire l'énoncé dans lequel on donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (suite)

4) Peut-on améliorer la valeur 90 ?

Non, lire l'énoncé dans lequel on donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit n un entier positif qui, lorsqu'il est écrit en base 10, possède les propriétés suivantes :
(i) son dernier chiffre est un 6,
(ii) le nombre m obtenu à partir de n en effaçant ce dernier chiffre (6, donc) et en le plaçant au début du nombre (m a donc le même nombre de chiffres que n) vaut $4n$ (bien lire : 4 fois n).

1) Montrer que m finit par un 4.

L'entier n finit par un 6. Donc $m = 4n$ finit par un 4 (multiplier $4 \times 6 = 24$ et regarder le chiffre des unités).
Soit $k+1$ le nombre de chiffres en base 10 d'un tel entier n. On écrira

$$n = 10^k a_1 + 10^{k-1} a_2 + \cdots + 10 a_k + 6 = (a_1 a_2 \dots a_k 6)_{10}$$

(c'est l'écriture de n en base 10 : les a_i sont des entiers entre 0 et 9 et a_1 est non nul).
On a montré

$$a_k = 4.$$

Exercice 3

Soit n un entier positif qui, lorsqu'il est écrit en base 10, possède les propriétés suivantes :
(i) son dernier chiffre est un 6,
(ii) le nombre m obtenu à partir de n en effaçant ce dernier chiffre (6, donc) et en le plaçant au début du nombre (m a donc le même nombre de chiffres que n) vaut $4n$ (bien lire : 4 fois n).

1) Montrer que m finit par un 4.

L'entier n finit par un 6. Donc $m = 4n$ finit par un 4 (multiplier $4 \times 6 = 24$ et regarder le chiffre des unités).
Soit $k+1$ le nombre de chiffres en base 10 d'un tel entier n. On écrira

$$n = 10^k a_1 + 10^{k-1} a_2 + \cdots + 10 a_k + 6 = (a_1 a_2 \ldots a_k 6)_{10}$$

(c'est l'écriture de n en base 10 : les a_i sont des entiers entre 0 et 9 et a_1 est non nul).
On a montré

$$a_k = 4.$$

Exercice 3

Soit n un entier positif qui, lorsqu'il est écrit en base 10, possède les propriétés suivantes :
(i) son dernier chiffre est un 6,
(ii) le nombre m obtenu à partir de n en effaçant ce dernier chiffre (6, donc) et en le plaçant au début du nombre (m a donc le même nombre de chiffres que n) vaut $4n$ (bien lire : 4 fois n).

1) Montrer que m finit par un 4.

L'entier n finit par un 6. Donc $m = 4n$ finit par un 4 (multiplier $4 \times 6 = 24$ et regarder le chiffre des unités).
Soit $k + 1$ le nombre de chiffres en base 10 d'un tel entier n. On écrira

$$n = 10^k a_1 + 10^{k-1} a_2 + \cdots + 10 a_k + 6 = (a_1 a_2 \ldots a_k 6)_{10}$$

(c'est l'écriture de n en base 10 : les a_i sont des entiers entre 0 et 9 et a_1 est non nul).
On a montré

$$a_k = 4.$$

Exercice 3 (suite)

2) Montrer que n commence par un 1.

On a

$$4n = 10^k(4a_1) + 10^{k-1}(4a_2) + \cdots + 10(4a_k) + 24 > (4a_1)10^k.$$

Or ceci vaut

$$m = 6 \cdot 10^k + 10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k < 7 \cdot 10^k.$$

D'où $4a_1 \leq 6$, puis comme a_1 est un entier strictement positif,

$$a_1 = 1.$$

Exercice 3 (suite)

2) Montrer que n commence par un 1.

On a

$$4n = 10^k(4a_1) + 10^{k-1}(4a_2) + \cdots + 10(4a_k) + 24 > (4a_1)10^k.$$

Or ceci vaut

$$m = 6 \cdot 10^k + 10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k < 7 \cdot 10^k.$$

D'où $4a_1 \leq 6$, puis comme a_1 est un entier strictement positif,

$$a_1 = 1.$$

Exercice 3 (suite)

3) Que vaut le plus petit entier n ayant les propriétés (i) et (ii) ?

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Le dernier chiffre du résultat est un 4 donc l'avant-dernier de n est aussi un 4. Et on trouve :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Mais on peut donc calculer l'avant dernier chiffre de m :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & 8 & 4 \end{array}$$

Et ainsi de suite...

Exercice 3 (suite)

3) Que vaut le plus petit entier n ayant les propriétés (i) et (ii) ?

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Le dernier chiffre du résultat est un 4 donc l'avant-dernier de n est aussi un 4. Et on trouve :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Mais on peut donc calculer l'avant dernier chiffre de m :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & 8 & 4 \end{array}$$

Et ainsi de suite...

Exercice 3 (suite)

3) Que vaut le plus petit entier n ayant les propriétés (i) et (ii) ?

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Le dernier chiffre du résultat est un 4 donc l'avant-dernier de n est aussi un 4. Et on trouve :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Mais on peut donc calculer l'avant dernier chiffre de m :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & 8 & 4 \end{array}$$

Et ainsi de suite...

Exercice 3 (suite)

3) Que vaut le plus petit entier n ayant les propriétés (i) et (ii) ?

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & & & 4
\end{array}$$

Le dernier chiffre du résultat est un 4 donc l'avant-dernier de n est aussi un 4. Et on trouve :

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & & & 4
\end{array}$$

Mais on peut donc calculer l'avant dernier chiffre de m :

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & & 8 & 4
\end{array}$$

Et ainsi de suite. . .

Exercice 3 (suite)

3) Que vaut le plus petit entier n ayant les propriétés (i) et (ii) ?

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Le dernier chiffre du résultat est un 4 donc l'avant-dernier de n est aussi un 4. Et on trouve :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & & 4 \end{array}$$

Mais on peut donc calculer l'avant dernier chiffre de m :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & 8 & 4 \end{array}$$

Et ainsi de suite. . .

Exercice 3 (suite)

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & & 8 & 4
\end{array}
$$

puis

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & 3 & 8 & 4
\end{array}
$$

puis

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & 3 & 8 & 4
\end{array}
$$

Exercice 3 (suite)

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & & 8 & 4
\end{array}$$

puis

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

puis

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

Exercice 3 (suite)

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & & 8 & 4 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

Exercice 3 (suite)

puis

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & 5 & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

puis

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

et donc

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

On essaie alors et on constate qu'en effet $4 \times 153846 = 615384$.
Par construction, c'est le plus petit n avec les propriétés requises.

Exercice 3 (suite)

puis

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

et donc

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

On essaie alors et on constate qu'en effet $4 \times 153846 = 615384$.
Par construction, c'est le plus petit n avec les propriétés requises.

Exercice 3 (suite)

puis

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & & 5 & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

puis

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

et donc

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
\times & & & & & & & 4 \\
\hline
= & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4
\end{array}$$

On essaie alors et on constate qu'en effet $4 \times 153846 = 615384$.

Par construction, c'est le plus petit n avec les propriétés requises.

Exercice 3 (suite)

puis

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

et donc

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

On essaie alors et on constate qu'en effet $4 \times 153846 = 615384$.
Par construction, c'est le plus petit n avec les propriétés requises.

Exercice 3 (suite)

4) Y en a-t-il d'autres ?

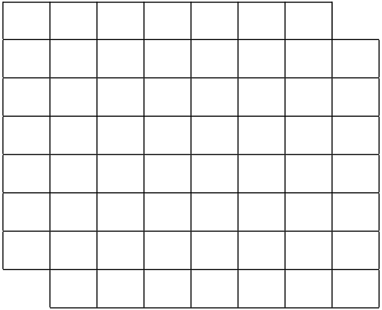
Oui. Observons notamment que

$$4 \times 153846153846 = 615384615384.$$

Je vous laisse deviner la suite...

Exercice 4

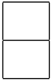
On considère un plateau de taille 8 sur 8 dont on enlève deux coins opposés de sorte qu'on obtient le plateau à 62 cases suivant :



Exercice 4

On souhaite recouvrir ce plateau avec des dominos élémentaires de taille 1 sur 2, qu'on peut tourner d'un quart de tour, donc avec des pièces de forme

ou



Par recouvrir, on veut dire que chaque case doit être couverte par un domino (un demi-domino, pour être précis) exactement une fois. Chaque domino doit recouvrir exactement deux cases du plateau.

Exercice 4

1) Montrer que ce n'est pas possible.

Imaginons que les cases sont colorées comme sur un échiquier, alternativement noires et blanches. À chaque fois qu'on pose un domino, n'importe où et dans n'importe quel sens, il recouvre exactement une case noire et une case blanche. Or ici les deux cases retirées sont de la même couleur (car sur la même diagonale)! Il s'agit en fait d'un argument de parité.

2) Caractériser les plateaux à deux cases manquantes qui ne sont pas recouvrable par des dominos.

Exercice 4

1) Montrer que ce n'est pas possible.

Imaginons que les cases sont colorées comme sur un échiquier, alternativement noires et blanches. À chaque fois qu'on pose un domino, n'importe où et dans n'importe quel sens, il recouvre exactement une case noire et une case blanche. Or ici les deux cases retirées sont de la même couleur (car sur la même diagonale)! Il s'agit en fait d'un argument de parité.

2) Caractériser les plateaux à deux cases manquantes qui ne sont pas recouvrable par des dominos.

Exercice 4

1) Montrer que ce n'est pas possible.

Imaginons que les cases sont colorées comme sur un échiquier, alternativement noires et blanches. À chaque fois qu'on pose un domino, n'importe où et dans n'importe quel sens, il recouvre exactement une case noire et une case blanche. Or ici les deux cases retirées sont de la même couleur (car sur la même diagonale)! Il s'agit en fait d'un argument de parité.

2) Caractériser les plateaux à deux cases manquantes qui ne sont pas recouvrable par des dominos.