LES CONSTANTES DE DAVENPORT ET GAO DANS LE PROBLÈME DES SOMMES NULLES PONDÉRÉES PAR DES POIDS QUADRATIQUES NON NULS DANS $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

FRANÇOIS HENNECART
INSTITUT CAMILLE JORDAN
UMR-CNRS 5208 LYON-ST-ETIENNE
UNIVERSITÉ JEAN MONNET, SAINT-ETIENNE

Résumé. Soit n un entier naturel non nul. On note Q_n* l'ensemble des résidus quadratiques non nuls de $A_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On définit $D_R(A_n)$ et $E_R(A_n)$ les constantes de Davenport et de Gao dans le problème des sous-suites à somme pondérée nulle avec poids dans $R \subset (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$. Ainsi $D_R(A_n)$ est le plus petit entier $m \geq 1$ tel que pour toute suite $S = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il existe une sous-suite $S' = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$ de S et des éléments $r_1, \ldots, r_k$ de R tels que

$$r_1 s_{i_1} + r_2 s_{i_2} + \cdots + r_k s_{i_k} = 0.$$

La constante de Gao $E_R(A_n)$ est définie de façon analogue en exigeant de plus que la longueur de la sous-suite k soit égale à n, à savoir l'ordre de A_n. Notons qu'elle coïncide avec la constante d'Erdős-Ginzburg-Ziv, qui elle, relève des sommes nulles de taille l'exposant du groupe.

Le cas classique correspond à $R = \{1\}$, c'est-à-dire lorsque les sommes sont trivialement pondérées. Pour un anneau Γ abélien fini donné, les constantes $D_1(\Gamma)$ et $E_1(\Gamma)$ ont été largement étudiées ces 20 dernières années, notamment par Gao, Hamidoune, Geroldinger, Grynkiewicz pour ne citer qu'eux.

Le lien fort entre $D_1(\Gamma)$ et $E_1(\Gamma)$ a été découvert à la fin du dernier millénaire par Gao et se formule par la simple identité

$$E_1(\Gamma) = D_1(\Gamma) + |\Gamma| - 1.$$

Ce résultat a été étendu en 2012 par Grynkiewicz, Marchan et Ordaz de la façon suivante :

$$E_R(\Gamma) = D_R(\Gamma) + |\Gamma| - 1,$$

ce qui correspond à l'exacte généralisation du résultat de Gao, rendant effective une intuition de Thangadurai.

En effet, en Inde, la théorie des suites à somme pondérée nulle s'est développée en produisant de nombreux résultats ciblés sur des situations bien particulières. Le cas $R = Q_n* \subset \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournit un terrain de jeu passionnant du fait de la mixité du problème : à la fois additif naturellement

---

issu d'un travail en commun avec David Grynkiewicz (Memphis).

mais également multiplicatif de par la nature des poids considérés. Thangadurai, Adhikari et d'autres se sont consacrés significativement à ce type de questions, souvent avec bonheur.

En 2012, Chintamani et Moriya ont établi la valeur exacte de $D_{Q_n*}(A_n)$, donc de $E_{Q_n*}(A_n)$ par le résultat précédemment cité dû à Grynkiewicz, Marchan et Ordaz, lorsque $\gcd(n, 30) = 1$:

$$D_{Q_n*}(A_n) = 2\Omega(n) + 1,$$

où $\Omega(n)$ possède la signification usuelle. Ce résultat découle de propriétés additives portant sur des combinaisons linéaires d'éléments de Q_n*. Lorsque $\gcd(n, 30) > 1$, ces propriétés ne sont plus suffisamment effectives. Dans cet exposé nous verrons comment il est possible d'obtenir la même identité si $\gcd(n, 6) = 1$ ou $\gcd(n, 10) = 1$. On fournira également un résultat valable pour tout n impair, mais avec l'inconvénient d'être un peu moins précis.

Bien que pouvant apparaître comme des extensions mineures du résultat de Chintamani et Moriya, leurs preuves requièrent des techniques combinatoires déroutantes et pouvant paraître assez inhabituelles dans ce type de problèmes : pour seule illustration de mon propos, je fais part ici de l'utilisation d'un résultat issu de la théorie des designs.

Ce travail a bénéficié du soutien de l'ANR CAESAR ANR-12-BS01-0011.