Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis

Alena Pirutka

Résumé

En utilisant la construction de Colliot-Thélène et Ojanguren, on donne un exemple d'une variété projective et lisse géométriquement rationnelle X, définie sur un corps fini $\mathbb{F}_p$, telle que d'une part le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ est non nul et, d'autre part, l'application $CH^2(X) \to CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ n'est pas surjective.

Abstract

Using a construction of Colliot-Thélène and Ojanguren, we exhibit an example of a smooth projective geometrically rational variety X defined over a finite field $\mathbb{F}_p$ with an algebraic closure $\bar{\mathbb{F}}_p$, such that the group $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Z}/2)$ is nonzero and the map $CH^2(X) \to CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ is not surjective.

Soit $\mathbb{F}_p$ un corps fini de cardinal p. Soit $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et soit $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ le groupe de Galois absolu. Soit X une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension d et soit $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p$. On dispose d'une application naturelle

$$CH^i(X) \to CH^i(\bar{X})^G$$

entre les groupes de Chow des cycles de codimension i sur X (resp. sur $\bar{X}$) modulo l'équivalence rationnelle. Cette application est surjective pour $i = 0, 1, d$ (cf. remarque 3.1). Suivant Geisser [G], on s'intéresse à savoir s'il en est ainsi pour $2 \leq i < d$.

Dans cet article, on donne un contre-exemple pour $i = 2$. Dans ce cas, des arguments de K-théorie algébrique (cf. [K]) permettent de faire un lien entre le conoyau de l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ et le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. On montre qu'il suffit d'assurer que ce dernier groupe est non nul (cf. section 2). Pour ce faire, les techniques développées par Colliot-Thélène et Ojanguren [CTOj] sont disponibles. En utilisant leur méthode, on construit ainsi (cf. section 3) une variété projective lisse X géométriquement connexe définie sur un corps fini $\mathbb{F}_p$ convenable, telle que

l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ *n'est pas surjective.*

Plus précisément, X est une variété géométriquement rationnelle de dimension 5, admettant un morphisme vers $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ à fibre générique une quadrique lisse «voisine» de Pfister. Notre méthode permet d'obtenir de tels exemples sur des corps finis $\mathbb{F}_p$ pour une infinité de nombres premiers p.

Remerciements : Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Jean-Louis Colliot-Thélène, pour m'avoir suggéré d'utiliser les méthodes de [CTOj] et m'avoir introduite dans le sujet ; sans ses nombreux conseils et réponses cet article n'aurait pas pu voir le jour.

1 Notations et rappels

1.1 Notations

Étant donné un corps k, on note k^* le groupe multiplicatif $k - \{0\}$, $\bar{k}$ une clôture séparable de k et $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini de cardinal p.

Si X est une variété algébrique définie sur un corps k, on note $\bar{X} = X_{\bar{k}} = X \times_k \bar{k}$. Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fractions et si X est géométriquement intègre, on note $\bar{k}(X)$ le corps des fractions de $\bar{X}$. On dit que X est *k-rationnelle* si X est birationnelle à $\mathbb{P}^n_k$ et on dit que X est *géométriquement rationnelle* si $\bar{X}$ est $\bar{k}$-rationnelle.

Pour une k-variété intègre X et i un entier, on note $X^{(i)}$ l'ensemble des points de X de codimension i et on note $CH^i(X)$ le groupe des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle.

Si A est un groupe abélien et n est un entier, on note $A[n]$ le sous-groupe de A formé par les éléments annulés par n. Pour l un nombre premier, on note $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l-primaire.

Pour M un G-module continu discret on note $H^i(k, M) = H^i(G, M)$ le i-ème groupe de cohomologie galoisienne et on note $M^G = H^0(k, M)$ le sous-groupe formé par les éléments invariants par G.

1.2 Rappels de cohomologie étale

Étant donnés un corps k et un entier n inversible sur k, on note μ_n le k-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour j un entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \ldots \otimes \mu_n$ (j fois). On pose $\mu_n^{\otimes j} = Hom_{k-gr}(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$ si j est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$. Ces k-schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore $\mu_n^{\otimes j}$, sur toute k-variété X. On note $H^i(X, \mu_n^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale de X à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. Lorsque $n = 2$, on a un isomorphisme canonique $\mu_2^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$ pour tout j.

Définition 1.1. Pour X une k-variété intègre, un entier naturel $j \geq 1$ et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif, on définit les groupes de cohomologie *non ramifiée*

$$H^j_{\rm nr}(X,\mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\text{déf}}{=} H^j_{\rm nr}(k(X)/k,\mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \mathrm{Ker}[H^j(k(X),\mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\partial_{j,A}}{\to} H^{j-1}(k_A,\mu_n^{\otimes i-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions $k(X)$, contenant le corps k. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application $\partial_{j,A}$ est l'application résidu.

Lorsque X est propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier le groupe $H^j_{\rm nr}(X,\mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie de Zariski $H^0(X,\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U\mapsto H^j(U,\mu_n^{\otimes i})$ (cf. [CT]).

On note $H^i(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, resp. $H^i_{\rm nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (resp. $H^i(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$, resp. $H^i_{\rm nr}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$) la limite inductive des groupes $H^i(X,\mu_n^{\otimes j})$, resp. $H^i_{\rm nr}(X,\mu_n^{\otimes j})$ lorsque n varie parmi les entiers (resp. parmi les puissances d'un nombre premier l, $l\neq \mathrm{car}.k$).

On note $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif sur un schéma X et le faisceau étale ainsi défini. On écrit $\mathrm{Br}\,X = H^2_{ét}(X,\mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Brauer cohomologique de X et $\mathrm{Pic}(X) = H^1_{\rm Zar}(X,\mathcal{O}_X^*) \simeq H^1_{ét}(X,\mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Picard.

1.3 Rappels de K-théorie

Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U\mapsto K_j(H^0(U,\mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen [Q] à l'anneau A.

Lorsque X est une variété lisse sur un corps k, la conjecture de Gersten, établie par Quillen [Q], permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski $H^i(X,\mathcal{K}_j)$ comme les groupes de cohomologie du complexe de Gersten. Lorsque $j=2$, qui est le cas qui nous intéresse dans la suite, ce complexe s'écrit

$$K_2k(X) \stackrel{d_2}{\to} \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^* \stackrel{d_1}{\to} \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z},$$

où l'application d_2 est donnée par le symbole modéré et l'application d_1 est obtenue par la somme des flèches diviseurs après normalisation des variétés considérées. On a ainsi $H^0(X,\mathcal{K}_2) = \mathrm{Ker}\,d_2$ et $H^1(X,\mathcal{K}_2) = \mathrm{Ker}\,d_1/\mathrm{Im}\,d_2$.

Étant donné un corps k, le groupe K_2k coïncide avec le groupe de K-théorie de Milnor K_2^Mk, quotient de $k^*\otimes_{\mathbb{Z}} k^*$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a\otimes b$ avec $a+b=1$.

Cette description permet de voir que pour X une variété lisse sur un corps k on a une flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X)\otimes k^* \to H^1(X,\mathcal{K}_2). \qquad (1)$$

En effet, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
k(X)^* \otimes k^* & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{x \in X^{(1)}} k^* & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \otimes k^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \phi \downarrow & & & & \\
K_2 k(X) & \xrightarrow{d_2} & \bigoplus\limits_{x \in X^{(1)}} k(x)^* & \xrightarrow{d_1} & \bigoplus\limits_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

où la première ligne est obtenue à partir de la suite exacte définissant le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ par tensorisation avec k^*. On vérifie que la composé $d_1 \circ \phi$ vaut zéro, ce qui permet de définir la flèche $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ par chasse au diagramme.

2 Comparaison entre groupes de Chow en codimension deux et cohomologie non ramifiée en degré trois

Dans cette partie on donne la preuve du théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit X une $\mathbb{Q}$-variété projective et lisse, géométriquement rationnelle. Pour presque tout nombre premier p, il existe une réduction X_p de X modulo p qui est une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, telle que*

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}[CH^2(X_p) \to CH^2(\bar{X}_p)^G]\{l\}$$

pour tout nombre premier l, $(l,p) = 1$.

Remarque 2.2. Pour définir X_p on choisit un modèle projectif et lisse $\mathcal{X}$ de X au-dessus d'un ouvert convenable $U \subset \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, $(p) \in U$, et on pose $X_p = \mathcal{X} \otimes \mathbb{F}_p$. Cette construction dépend du modèle choisi.

Pour démontrer le théorème 2.1, on utilise le résultat suivant de B. Kahn :

Théorème 2.3. ([K], Th.1 et corollaire p.397, partie 1)) *Soit k un corps de caractéristique $p \geq 0$, de dimension cohomologique au plus 3. Soit X une k-variété projective et lisse. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) $K_2\bar{k} \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$;
(ii) le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, resp. de torsion p-primaire si car.$k > 0$.

Alors on a une suite exacte naturelle, resp. exacte à la p-torsion près si car.$k > 0$

$$\begin{aligned} H^1(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)) \to \mathrm{Coker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G] \to H^2(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)). \quad (2) \end{aligned}$$

Remarque 2.4. Voir [K] p.398 pour la définition des groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ en caractéristique positive.

Il est ainsi nécessaire de vérifier les hypothèses (i) et (ii) pour une variété géométriquement rationnelle X. Les énoncés suivants, cas particuliers de [CT], 2.1.9 (cf. aussi 4.1.5), sont bien connus.

Proposition 2.5. *Soit k un corps. Soit X une k-variété projective et lisse, k-rationnelle. Alors*
(i) $H^j_{\mathrm{nr}}(X, \mu_n^{\otimes i}) \simeq H^j(k, \mu_n^{\otimes i})$ pour tout $j \geq 1$;
(ii) l'application naturelle $K_2 k \to H^0(X, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme ;
(iii) le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ *est libre de type fini.*

L'énoncé suivant permet de comprendre le module galoisien $H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$.

Proposition 2.6. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Le noyau $K(X)$ et le conoyau $C(X)$ de l'application* $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ *sont des invariants birationnels des k-variétés intègres, projectives et lisses. En particulier, l'application* $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2)$ *est un isomorphisme pour X une variété projective et lisse, k-rationnelle.*

Démonstration. Considérons le complexe de groupes abéliens

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, K_2).$$

Ce complexe est fonctoriel contravariant pour les morphismes dominants de variétés projectives et lisses. Le noyau $K(X)$ et le conoyau $C(X)$ de $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, K_2)$ sont alors des foncteurs contravariants pour de tels morphismes. Soit F l'un de ces foncteurs.

Soient X, Y deux variétés intègres, projectives et lisses. Montrons qu'un morphisme birationnel $X \to Y$ induit un isomorphisme $F(Y) \to F(X)$. D'après Hironaka, il existe deux k-variétés projectives et lisses X' et Y' et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \arrow[dl] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. D'après le lemme ci-dessous, $F(X)$ est isomorphe à $F(X')$, respectivement $F(Y)$ est isomorphe à $F(Y')$. On en déduit par fonctorialité que $F(X)$ est isomorphe à $F(Y)$.

Si maintenant on a une application rationnelle $X \dashrightarrow Y$, on utilise Hironaka pour trouver une variété projective et lisse Z avec $Z \to X$ et $Z \to Y$ deux morphismes birationnels. D'après ce qui précède, $F(X) \simeq F(Z) \simeq F(Y)$. Ainsi $F(X)$ est un invariant birationnel des k-variétés intègres, projectives et lisses.

Le fait que $F(\mathbb{P}^n_k) = 0$ est bien connu. On établit d'abord que $H^1(\mathbb{A}^1_k, \mathcal{K}_2) = 0$ et ensuite que $H^1(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{K}_2) = 0$ par des fibrations successives à fibres $\mathbb{A}^1$. L'énoncé pour $\mathbb{P}^n_k$ s'en suit par récurrence, en se restreignant à l'hyperplan à l'infini. □

Remarque 2.7. On peut montrer plus généralement que pour X lisse sur un corps, $H^i(\mathbb{A}^n_X, \mathcal{K}_j)$ est isomorphe à $H^i(X, \mathcal{K}_j)$, et donner une expression explicite de $H^i(\mathbb{P}^n_X, \mathcal{K}_j)$ en termes de K-cohomologie de X, cf. [Sh].

Lemme 2.8. *Soit k un corps algébriquement clos. Soit X une k-variété intègre, projective et lisse. Soit $Z \subset X$ une sous-variété intègre, projective et lisse, de codimension au moins 2 et soit $\pi : X' \to X$ l'éclatement de X le long de Z. Alors les applications $K(X) \to K(X')$, respectivement $C(X) \to C(X')$, sont des isomorphismes.*

Démonstration. Soit Z' le diviseur exceptionnel de X' et soit $U = X \setminus Z \simeq X' \setminus Z'$. Supposons d'abord que Z est de codimension 2. On a les suites exactes horizontales de complexes verticaux :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & K_2k(X) & \longrightarrow & K_2k(U) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in U^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & K_2k(X') & \longrightarrow & K_2k(U) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & k(Z')^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X'^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in Z'^{(1)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X'^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in U^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

On a ainsi des suites longues induites en cohomologie :

$$0 \to H^0(X, \mathcal{K}_2) \to H^0(U, \mathcal{K}_2) \to 0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to H^1(U, \mathcal{K}_2) \to \mathbb{Z} \to \\ \to CH^2(X) \to CH^2(U) \to 0, \quad (3)$$

$$0 \to H^0(X', \mathcal{K}_2) \to H^0(U, \mathcal{K}_2) \to k^* \to H^1(X', \mathcal{K}_2) \to H^1(U, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Z') \to \\ \to CH^2(X') \to CH^2(U) \to 0. \quad (4)$$

Dans la suite (3), la flèche $\mathbb{Z} \to CH^2(X)$ est donnée par $1 \mapsto [Z]$. En prenant l'intersection avec un hyperplan général, on voit que cette flèche est injective. Ainsi l'application $H^1(X, \mathcal{K}_2) \to H^1(U, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme.

Si Z est de codimension plus grande que 2, on a encore la suite (4) et les groupes $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ et $H^1(U, \mathcal{K}_2)$ sont isomorphes, car ils ne dependent que de points de codimension au plus 2.

Par fonctorialité, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^0(X, \mathcal{K}_2) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^0(U, \mathcal{K}_2) \arrow[d, equal] \\ H^0(X', \mathcal{K}_2) \arrow[r, hook] & H^0(U, \mathcal{K}_2). \end{tikzcd}$$

Ainsi l'application $H^0(X', \mathcal{K}_2) \to H^0(U, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme. En utilisant la suite (4), on obtient le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd} & & H^1(X, \mathcal{K}_2) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^1(U, \mathcal{K}_2) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & H^1(X', \mathcal{K}_2) \arrow[r] & H^1(U, \mathcal{K}_2). \end{tikzcd}$$

On a donc une suite exacte scindée :

$$0 \to k^* \to H^1(X', \mathcal{K}_2) \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to 0.$$

Ainsi $H^1(X', \mathcal{K}_2) \simeq H^1(X, \mathcal{K}_2) \oplus k^*$. Puisque $\mathrm{Pic}(X') = \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \cdot [Z']$, on en déduit l'énoncé du lemme. □

Remarque 2.9. En utilisant l'action des correspondances sur les groupes de Chow supérieurs, on peut établir la proposition 2.6 en toute caractéristique. Cela n'est pas nécessaire pour la démonstration du théorème 2.1.

Preuve du théorème 2.1. Puisque X est une $\mathbb{Q}$-variété géométriquement rationnelle, il existe une extension finie $K/\mathbb{Q}$ et une K-variété projective et lisse Z, deux morphismes K-birationnels $Z \to X_K$ et $Z \to \mathbb{P}^n_K$, et deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \arrow[dl] \\ Z \arrow[r] & X_K \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z'' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[dl] \\ Z \arrow[r] & \mathbb{P}^n_K \end{tikzcd} \tag{5}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. Pour presque toute place v de K, les centres d'éclatements admettent des réductions lisses et les diagrammes (5) induisent des diagrammes analogues sur le corps résiduel $k(v)$. Ainsi, pour presque toute place v de K, on peut définir une réduction X_p de X modulo p, $p = \mathrm{car}.k(v)$, qui est une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, géométriquement rationnelle et des réductions de Z, Z', Z'', X et Y sur $k(v)$, qui sont des variétés lisses et telles qu'on a des diagrammes commutatifs sur $\bar{\mathbb{F}}_p$

$$\begin{tikzcd} \bar{Z}'_{k(v)} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X}'_{k(v)} \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bar{Z}_{k(v)} \arrow[r] & \bar{X}_p \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \bar{Z}''_{k(v)} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{Y}_{k(v)} \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bar{Z}_{k(v)} \arrow[r] & \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{F}}_p} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. En appliquant le lemme 2.8, on déduit que l'application $\mathrm{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^* \to H^1(\bar{X}_p, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme (cf. aussi 2.6).

Montrons que les hypothèses du théorème 2.3 sont satisfaites pour une telle réduction X_p. D'après la proposition 2.5, $K_2\bar{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{X}_p, \mathcal{K}_2) = 0$ car X_p est géométriquement rationnelle. De même, $H^3_{\mathrm{nr}}(\bar{X}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H^3(\bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ car $\bar{\mathbb{F}}_p$ est séparablement clos.

Montrons ensuite que le groupe $H^i(\mathbb{F}_p, H^1(\bar{X}_p, \mathcal{K}_2)) \simeq H^i(\mathbb{F}_p, \mathrm{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*)$ est nul pour tout $i \geq 1$. D'après la proposition 2.5, le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Pic}(\bar{X}_p)$ est libre de type fini. Considérons une extension finie galoisienne $L/\mathbb{F}_p$ qui déploie $\mathrm{Pic}(\bar{X}_p)$. Considérons la suite de restriction-inflation :

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p), \mathrm{Pic} X_{p,L} \otimes L^*) \to H^1(\mathbb{F}_p, \mathrm{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^*) \to H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}_p}/L), \mathrm{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*).$$

On a $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}_p}/L), \mathrm{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*) = 0$ d'après le théorème de Hilbert 90. Puisque la dimension cohomologique de $\mathbb{F}_p$ est 1, $H^1(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_p), \mathrm{Pic} X_{p,L} \otimes L^*) = 0$ (cf. [S], p.170). On a donc $H^i(\mathbb{F}_p, \mathrm{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}_p}^*) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Notons que $H^3(\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ car la dimension cohomologique de $\mathbb{F}_p$ est 1. La suite (2) donne alors un isomorphisme :

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Coker}[CH^2(X_p) \to CH^2(\bar{X}_p)^G]\{l\}.$$

□

Remarque 2.10. Pour établir $H^i(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)) = 0, i = 1, 2$ pour X une variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, définie sur un corps fini k, on aurait pu faire appel à des résultats généraux sur les variétés projectives et lisses ([CTR] 2.12 et 2.14, [GS] 4.1). Ces résultats généraux réposent en particulier sur les conjectures de Weil (démontrées par Deligne). Pour ce dont on a besoin dans la suite, le théorème 2.1 suffit.

3 L'exemple

Dans cette partie, pour une infinité de nombres premiers p, on construit une variété projective et lisse géométriquement rationnelle X, définie sur le corps fini $\mathbb{F}_p$, telle que l'application

$$CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$$

n'est pas surjective.

Remarque 3.1. Si X est une variété projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur le corps fini $\mathbb{F}_p$, l'application $CH^i(X) \to CH^i(\bar{X})^G$ est surjective pour $i = 0, 1, d$. Le cas $i = 0$ est immédiat. Pour $i = 1$, $\mathrm{Pic}(X) \tilde{\to} CH^1(X)$ car X est lisse. Puisque X est projective et géométriquement intègre, $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$ et la suite spectrale $E_2^{pq} = H^p(G, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m)$ donne une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\bar{X})^G \to H^2(G, \bar{k}^*) \to \mathrm{Br}\, X.$$

Puisque le groupe $H^2(G, \bar{k}^*) = \mathrm{Br}\, k$ est nul pour un corps fini, on a la surjectivité pour $i = 1$. Plus généralement, il en est ainsi pour toute variété X projective et lisse, géométriquement intègre, avec un point rationnel, définie sur un corps k quelconque : pour une telle variété l'application $H^2(G, \bar{k}^*) \to \mathrm{Br}\, X$ est injective.

Pour $i = d$, c'est-à-dire dans le cas de zéro-cycles, on sait que X possède un zéro-cycle de degré 1 d'après les estimations de Lang-Weil (cf.[LW]). Il suffit donc de voir que l'application entre les groupes de Chow de zéro-cycles de degré zéro $A_0(X) \to A_0(\bar{X})^G$ est surjective. Ceci résulte de la comparaison de ces derniers groupes avec les points rationnels (resp. les $\bar{\mathbb{F}}_p$-points) de la variété d'Albanese Alb_X de X. En effet, l'application $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{F}_p)$ est surjective (cf. [KS], Prop. 9, p.274), et l'application $A_0(\bar{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\bar{\mathbb{F}}_p)$ est un isomorphisme (cf.[R] et [M]).

D'après le théorème 2.1, si X est géométriquement rationnelle, il suffit d'assurer que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est non nul pour un certain nombre premier l, $l \neq p$. Dans l'article [CTOj], Colliot-Thélène et Ojanguren construisent de tels exemples sur le corps des complexes pour $l = 2$. Les variétés qu'ils construisent sont unirationnelles (c'est-à-dire, dominées par un ouvert de l'espace projectif). Via la proposition 2.5, ils obtiennent ainsi des exemples de variétés unirationnelles non rationnelles. Dans la suite, on utilise la méthode de [CTOj] pour produire des exemples sur les corps finis.

La stratégie est la suivante :

1. On considère une quadrique projective et lisse Q sur le corps $F = \mathbb{F}_p(x, y)$, $p \neq 2$, définie dans $\mathbb{P}^4_F$ par une équation homogène
$$x_0^2 - a x_1^2 - f x_2^2 + a f x_3^2 - g_1 g_2 x_4^2 = 0 \qquad (6)$$
où $a \in \mathbb{F}_p$ est une constante et $f, g_1, g_2 \in F$. La quadrique Q admet un point rationnel sur $\bar{\mathbb{F}}_p(x, y)$, elle est donc $\bar{\mathbb{F}}_p(x, y)$-rationnelle.
2. On donne des conditions nécessaires sur les coefficients dans (6) pour que le cup-produit (a, f, g_1) soit non nul dans $H^3_{\mathrm{nr}}(Q, \mathbb{Z}/2)$.
3. On vérifie que l'on peut trouver $a \in \mathbb{Z}$ et $f, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}(x, y)$ tels que leurs réductions modulo p vérifient les conditions de l'étape précédente pour le corps $\mathbb{F}_p$ pour une infinité de nombres premiers p. Par Hironaka, on trouve une variété projective et lisse X définie sur $\mathbb{Q}$, admettant une fibration sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ de fibre générique la quadrique définie par (6). Pour presque tout p, X admet une réduction X_p modulo p qui est lisse sur $\mathbb{F}_p$ et pour une infinité de premiers p le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Z}/2)$ est ainsi non nul.

3.1 Cohomologie des quadriques

On commence par citer un résultat d'Arason [A] sur la cohomologie des quadriques.

Soit k un corps, car.$k \neq 2$. Soit ϕ une forme quadratique non dégénérée de dimension m définie sur k. On note X_ϕ la quadrique projective et lisse dans $\mathbb{P}_k^{m-1}$ définie par ϕ. On appelle *n-forme de Pfister* sur k une forme quadratique de type $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, -a_n\rangle$, $a_i \in k^*$. Une forme quadratique non dégénérée ϕ est dite *«voisine de Pfister»* s'il existe une forme de Pfister ϕ' sur k et $a \in k^*$ tels que ϕ soit une sous-forme de $a\phi'$ et que la dimension de ϕ soit strictement supérieure à la moitié de la dimension de ϕ'.

Théorème 3.2. (cf. [A]) *Soit k un corps,* car.$k \neq 2$. *Soit ϕ une forme quadratique définie sur k, voisine d'une* 3*-forme de Pfister $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \langle 1, -a_2\rangle \otimes \langle 1, -a_3\rangle$. Alors*

$$\ker[H^3(k, \mathbb{Z}/2) \to H^3(k(X_\phi), \mathbb{Z}/2)] = \mathbb{Z}/2(a_1, a_2, a_3), \tag{7}$$

chaque a_i étant identifié à sa classe dans $H^1(k, \mathbb{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$.

Soit Q la quadrique définie sur le corps $F = \mathbb{F}_p(x, y)$, $p \neq 2$, par l'équation homogène (6). D'après le théorème d'Arason,

$$\ker[H^3(F, \mathbb{Z}/2) \to H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)] = \mathbb{Z}/2(a, f, g_1g_2).$$

Pour trouver un élément non nul dans $H^3_{\text{nr}}(Q, \mathbb{Z}/2)$, on peut ainsi essayer de chercher un élément de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$, différent de (a, f, g_1g_2) et qui devient non ramifié dans $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$. On va choisir les éléments a, f, g_1 et g_2 pour que l'élément (a, f, g_1) convienne.

Faisons d'abord quelques rappels sur les calculs de résidus.

Proposition 3.3. ([CTOj], 1.3 et 1.4) *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit $j \geq 1$ un entier.*

1. *Soit $\alpha \in H^j(A, \mathbb{Z}/2)$ et soit $\alpha_0 \in H^j(k, \mathbb{Z}/2)$ son image par l'application de réduction. Soit $b \in K^*$ de valuation m dans A et soit β la classe de b dans $H^1(K, \mathbb{Z}/2)$. Alors $\partial_A(\alpha \cup \beta) = m\alpha_0$.*
2. *Soit $\alpha \in H^j(K, \mathbb{Z}/2)$ et soit $b \in A^*$ dont la classe est un carré dans k. Soit β la classe de b dans $H^1(K, \mathbb{Z}/2)$. Alors $\partial_A(\alpha \cup \beta) = 0$.*

On décrit ensuite les conditions qu'on va imposer sur les coefficients de la quadrique Q :

Proposition 3.4. *Soit $F = \mathbb{F}_p(x, y)$ le corps des fractions rationnelles à deux variables sur le corps fini $\mathbb{F}_p$. Soit $a \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$ et soient $f, g_1, g_2 \in F$ non nuls. Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbb{P}^4_F$ d'équation homogène*

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0.$$

Supposons

1. *pour tout $i = 1, 2$, il existe un anneau de valuation discrète B_i de corps des fractions F, tel que $\partial_{B_i}(a, f, g_i) \neq 0$;*
2. *pour tout anneau de valuation discrète B de corps des fractions F, associé à un point de codimension 1 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$, soit $\partial_B(a, f, g_1) = 0$, soit $\partial_B(a, f, g_2) = 0$.*
3. *pour tout anneau de valuation discrète B de corps des fractions F, centré en un point fermé M de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$, quitte à la multiplier par un carré dans F^*, l'une au moins des fonctions f, g_1, g_2 est inversible en M.*

Alors l'image $\xi_{F(Q)}$ du cup-produit $\xi = (a, f, g_1)$ dans $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ est un élément non nul de $H^3_{\mathrm{nr}}(Q, \mathbb{Z}/2)$.

Démonstration. Notons d'abord que (a, f, g_1) est non nul dans $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$. Sinon, d'après le théorème 3.2, on a soit $(a, f, g_1) = 0$, soit $(a, f, g_1) = (a, f, g_1 g_2)$. Ainsi soit $(a, f, g_1) = 0$, soit $(a, f, g_2) = 0$, contradiction avec la condition 1.

Montrons que

$$\begin{aligned}&\text{pour tout anneau de valuation discrète } B \text{ de } F,\\ &\qquad\qquad\text{soit } \partial_B(a, f, g_1) = 0, \text{ soit } \partial_B(a, f, g_2) = 0. \quad (*)\end{aligned}$$

Pour un tel anneau B on dispose d'un morphisme $\operatorname{Spec} B \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ et les cas 2 et 3 correspondent à deux possibilités pour l'image du point fermé de B. La condition 2 assure $(*)$ si cette image est un point de codimention 1 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$. Sinon l'image du point $\operatorname{Spec} k_B$ est un point fermé M de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$. Soit $\mathcal{O}_M$ l'anneau local de M, son corps des fractions est F. On dispose d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_M \to B$.

On peut supposer, sans perte de généralité, que la fonction g_1 est inversible dans $\mathcal{O}_M$, quitte à la multiplier par un carré. Ainsi la fonction g_1 est inversible dans B. Soit m la valuation de f dans B. D'après 3.3.1, $\partial_B(a, f, g_1) = \partial_B(g_1, a, f) = m(\bar{g}_1, \bar{a})$, où l'on note $\bar{g}_1$ (resp. $\bar{a}$) la classe de g_1 (resp. a) dans $H^1(k_B, \mathbb{Z}/2)$. Comme g_1 et a sont inversibles dans $\mathcal{O}_M$, ces dernières classes proviennent de classes dans $H^1(k_M, \mathbb{Z}/2)$. Ainsi $(\bar{g}_1, \bar{a})$ provient d'un élément de $H^2(k_M, \mathbb{Z}/2)$. Ce dernier groupe est nul, car k_M, étant un corps fini, est de dimension cohomologique 1. Ainsi $\partial_B(a, f, g_1) = 0$.

Montrons maintenent que $\xi_{F(Q)}$ est non ramifié. Soit A un anneau de valuation discrète de $F(Q)$ de corps résiduel k_A. Si A contient F, alors $\xi_{F(Q)}$ provient d'un élément de $H^3(A, \mathbb{Z}/2)$ et son résidu est donc nul. Supposons que A ne contient pas F. Alors $B = A \cap F$ est un anneau de valuation discrète de F. Soit k_B son corps résiduel. On a le diagramme commutatif suivant (cf. [CTOj], §1) :

$$\begin{tikzcd} H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\partial_A"] & H^2(k_A, \mathbb{Z}/2) \\ H^3(F, \mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\partial_B"] \arrow[u, "\mathrm{res}_{F/F(Q)}"] & H^2(k_B, \mathbb{Z}/2). \arrow[u, "e_{B/A}\mathrm{res}_{k_B/k_A}"'] \end{tikzcd}$$

D'après ce qui précède, $\partial_B(a, f, g_i) = 0$ pour $i = 1$ ou pour $i = 2$. Si $\partial_B(a, f, g_1) = 0$, alors $\partial_A(a, f, g_1) = 0$ d'après le diagramme ci-dessus. Supposons que $\partial_B(a, f, g_2) =$

0. Ainsi $\partial_A(a,f,g_2)=0$. Comme (a,f,g_1g_2) est nul dans $H^3(F(Q),\mathbb{Z}/2)$, son résidu l'est aussi dans $H^2(k_A,\mathbb{Z}/2)$. On a donc $\partial_A(a,f,g_1)=\partial_A(a,f,g_1g_2)-\partial_A(a,f,g_2)=0$. Ainsi $\xi_{F(Q)}$ est non ramifié. $\square$

3.2 Construction explicite

On procède maintenant à la construction des exemples.

Soit k un corps. Dans la suite, on va prendre $k=\mathbb{F}_p$ ou $k=\mathbb{Q}$. On fixe x,y,z des coordonnées homogènes pour $\mathbb{P}^2_k$. Soit $a\in k^*\setminus k^{*2}$. Soient $b_i,c_i,d_i\in k^*\setminus\{-1\}$, $i=1,2$, et soit $l_i=b_ix+c_iy+d_iz$. Soient h_j, $j=1,\ldots,8$, les formes linéaires $e_xx+e_yy+e_zz$, $e_x,e_y,e_z\in\{0,1\}$.

On choisit b_i,c_i,d_i de sorte que :

(i) Les droites dans $\mathbb{P}^2_k$ données par les équations $x=0$, $y=0$, $z=0$, $l_i+h_j=0$, $i=1,2$, $j=1,\ldots,8$, soient deux à deux distinctes.

(ii) Pour tous $1\leq j,j'\leq 8$ les trois droites $x=0$, $l_1+h_j=0$, $l_2+h_{j'}=0$ dans $\mathbb{P}^2_k$ sont d'intersection vide.

(iii) Pour tous $1\leq j,j'\leq 8$ les trois droites $y=0$, $l_1+h_j=0$, $l_2+h_{j'}=0$ dans $\mathbb{P}^2_k$ sont d'intersection vide.

On prend pour $f,g_1,g_2\in k(\mathbb{P}^2_k)$ les éléments suivants :

$$f=\frac{x}{y},\quad g_1=\frac{\prod_j(l_1+h_j)}{y^8},\quad g_2=\frac{\prod_j(l_2+h_j)}{z^8}. \tag{8}$$

Remarque 3.5. Soit $h_j=e_xx+e_yy+e_zz$. Les droites $x=0$, $l_1+h_j=0$ s'intersectent en un seul point $[0:(d_1+e_z):-(c_1+e_y)]$. Ainsi les conditions (ii) et (iii) ci-dessus sont équivalentes aux conditions suivantes :

(ii') les ensembles

$$\{[(d_1+e_z):-(c_1+e_y)],e_y,e_z\in\{0,1\}\}\text{ et }\{[(d_2+e_z):-(c_2+e_y)],e_y,e_z\in\{0,1\}\}$$

sont d'intersection vide ;

(iii') de même,

$$\{[(d_1+e_z):-(b_1+e_x)],e_x,e_z\in\{0,1\}\}\cap\{[(d_2+e_z):-(b_2+e_x)],e_x,e_z\in\{0,1\}\}=\emptyset.$$

Par exemple, pour

$$l_1=x+y+2z,\ l_2=3x+3y+z$$

il s'agit de vérifier que les ensembles $\{[2:-1],[2:-2],[3:-1],[3:-2]\}$ et $\{[1:-3],[1:-4],[2:-3],[2:-4]\}$ sont d'intersection vide. Cette condition est satisfaite pour $k=\mathbb{Q}$ ou $k=\mathbb{F}_p$ un corps fini avec $p\geq 13$.

Proposition 3.6. *Soit $F = \mathbb{F}_p(x, y)$ le corps des fractions rationnelles à deux variables sur le corps fini $\mathbb{F}_p$. Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbb{P}^4_F$ d'équation homogène*

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0$$

avec $a \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$ et f, g_1, g_2 définis comme dans (8) pour $k = \mathbb{F}_p$. Alors le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(Q, \mathbb{Z}/2)$ est non nul.

Démonstration. Notons A_x, resp. A_y, resp. A_z, resp. $B_{i,j}$, l'anneau de valuation discrète associé au point générique de la droite $x = 0$, resp. $y = 0$ resp. $z = 0$, resp. $l_i + h_j = 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 8$.

Il s'agit de vérifier les conditions 1, 2 et 3 de la proposition 3.4. Soit B un anneau de valuation discrète de F. On a les cas suivants à considérer :

1. B correspond à un point de codimension 1 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$.
   (a) Si B est différent de $A_x, A_y, A_z, B_{i,j}$, le résidu $\partial_B(a, f, g_i)$, $i = 1, 2$, est nul, puisque les fonctions a, f, g_1, g_2 sont inversibles dans un tel anneau B.
   (b) $B = B_{i,j}$. Si $r \neq i$, $r = 1, 2$, alors $\partial_{B_{r,j}}(a, f, g_i) = 0$ comme le cas précédent. Fixons $i \in \{1, 2\}$. Montrons que $\partial_{B_{i,j}}(a, f, g_i) \neq 0$. Supposons $h_j = 0$, les autres cas sont identiques. Soit k le corps résiduel de $B_{i,0}$, i.e. le corps des fonctions de la droite $b_ix + c_iy + d_iz = 0$, $b_i, c_i, d_i \in k^*$ (pour h_j différent de zéro on utilise ainsi l'hypothèse que b_i, c_i, d_i sont différents de -1). D'après le lemme 3.3.1, $\partial_{B_{i,0}}(a, f, g_i) = (a, \frac{x}{y}) \in H^2(k, \mathbb{Z}/2)$. Après passage à des coordonnées affines, on est réduit à établir que le cup-produit (a, x) n'est pas nul dans $H^2(\mathbb{F}_p(x), \mathbb{Z}/2)$. On le voit par exemple en appliquant le lemme 3.3.1 à l'anneau de valuation discrète associé à $x = 0$: $a \in \mathbb{F}_p$ est non carré.
   (c) $B = A_x$. Montrons que $\partial_{A_x}(a, f, g_i) = 0$, $i = 1, 2$. Soit k_x le corps résiduel de A_x, i.e. le corps des fonctions de la droite $x = 0$. D'après le lemme 3.3.1, $\partial_{A_x}(a, f, g_i) = -\partial_{A_x}(a, g_i, f) = -(a, g_{i,x}) \in H^2(k_x, \mathbb{Z}/2))$, où $g_{i,x}$ désigne la fonction induite par g_i sur la droite $x = 0$. Mais $g_{i,x}$ est un carré dans k_x, d'où $\partial_{A_x}(a, f, g_i) = 0$ d'après 3.3.2.
   (d) $B = A_y$. Comme dans le cas précédent, $\partial_{A_y}(a, f, g_2) = (a, g_{2,y}) = 0$.
   (e) $B = A_z$. Alors $\partial_{A_z}(a, f, g_1) = 0$, car les fonctions a, f, g_1 sont inversibles dans A_z.
2. B correspond à un point fermé M de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$.
   (a) Si M n'est pas situé sur une des deux droites $x = 0$, $y = 0$, alors f est inversible dans B.
   (b) Si M est situé sur une des deux droites $x = 0$, $y = 0$, alors l'une au moins des fonctions $g_1\frac{y^8}{z^8}$, g_2 est inversible dans B d'après les hypothèses (ii)-(iii), car le système $xy = 0, \prod_j(l_1 + h_j) = 0, \prod_j(l_2 + h_j) = 0$ n'a pas de solutions.

$\square$

On finit par décrire explicitement les exemples énoncés.

Théorème 3.7. *Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}(x,y)}$ d'équation homogène*

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0$$

avec $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}^{*2}$ et f, g_1, g_2 définis comme dans (8) pour $k = \mathbb{Q}$. Soit X un modèle projectif et lisse de Q sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$: X est une k-variété projective et lisse et admet une fibration sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ à fibre générique Q. Pour une infinité de nombres premiers p, la réduction X_p de X modulo p est bien définie et est une $\mathbb{F}_p$-variété projective et lisse, telle que :

(i) $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Z}/2) \neq 0$;

(ii) l'application $CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^G$ n'est pas surjective.

Démonstration. D'après Hironaka, un modèle projectif et lisse X de Q comme dans l'énoncé existe. De plus, pour une infinité de nombres premiers p, l'image de a dans $\mathbb{F}_p$ n'est pas un carré (par Chebotarev, ou par application de la loi de réciprocité quadratique) et la variété X a bonne réduction en p : X_p est lisse. D'après la proposition 3.6, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X_p, \mathbb{Z}/2)$ est non nul. Le théorème 2.1 permet de conclure. $\square$

Références

[A] J.Kr. Arason, *Cohomologische invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), no. 3, 448–491.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[CTOj] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, *K_2-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.

[CTV] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, prépublication disponible sur arXiv.

[G] T. Geisser, *Bass's conjectures and Tate's conjecture over finite fields*, en préparation.

[GS] M. Gros et N. Suwa, *Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques*, Duke Math. J.**57** (1988), no. 2, 579–613.

[K] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395–416.

[KS] K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 241–275.

[LW] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76**, (1954). 819–827.

[M] J.S. Milne, *Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Rojtman's theorem*, Compositio Math. **47** (1982), no. 3, 271–287.

[Q] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. **341**, Springer, Berlin 1973.

[R] A. A. Rojtman, *The torsion of the group of* 0*-cycles modulo rational equivalence*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 553–569.

[S] J-P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968.

[Sh] C. Sherman, *K-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), no. 10, 999–1027.

Alena Pirutka
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05
France
alena.pirutka@ens.fr