INDÉTERMINISME QUANTIQUE ET IMPRÉDICTIBILITÉ CLASSIQUE

THIERRY PAUL

Table des matières

1. Introduction

On a souvent fait le reproche à la Mécanique Quantique de manquer la plus belle des propriétés de la Mécanique Classique : le déterminisme.

"... il faut résoudre les équations..." [1] semble être le credo classique, couplé à l'idée que la solution de telles équations donne une description complète des phénomènes. Née justement afin de palier une incomplétude de la Mécanique Classique, celle qui fait que deux "points matériels" attirés l'un vers l'autre par la loi de la gravitation universelle se choquent au bout d'un temps fini et sortent alors du paradigme classique, la Mécanique Quantique a, dès ses débuts, nécessité l'introduction de l'aléa : la dynamique quantique est certes stable, mais vit dans un "espace" qui "nous" est inaccessible dans sa totalité, et l'accès au système quantique se fait une projection sur un bord de cet espace, au moyen du processus de mesure. De plus cette projection est aléatoire, comme nous le préciserons plus bas.

Faire un procès à la Mécanique Quantique, plutôt à son indétermisnime, c'est oublier un peu vite le traumatisme créé par Poincaré à la fin du XIXème siècle lors de son abandon du paradigme laplacien de stabilité [8]. De petites variations des conditions initiales (à l'origine des petites variations des paramètres de l'équation de la dynamique) font apparaître de grands effets. Le joyeux déterminisme laisse la place, en particulier dans la pratique, à une imprédictibilité soucieuse. Pour de très longs temps d'évolution cette imprédictibilité prend le dessus sur le déterminisme et par idéalisation du passage à la limite des temps infinis, l'imprédictibilité se change carrément en indéterminisme.

Ces deux aléatoires sont de nature fort diverse : le classique étant extrinsèque, dù à notre manque d'information totale sur les conditions initiales, alors que l'aléatoire quantique est intrinsèque, la violation des inégalités de Bell en a donné la preuve.

Nous allons tenter dans cet article de présenter de façon informelle des résultats récents qui mettent en jeu un possible recouvrement entre ces deux notions d'aléatoire.

2. La Mécanique Quantique

L'indéterminisme quantique est un indéterminisme d'accès. Il surgit lorsque nous essayons de connaître le système, d'établir certaines de ses propriétés, bref d'effectuer une "mesure". L'évolution *strictement* quantique est tout à fait déterministe : que ce soit dans le cadre de la mécanique des matrices ou de celui de l'équation de Schrödinger, le système évolue en suivant une "équation", aussi belle que celles de la Mécanique Classique. Mais peut-on parler raisonnablement d'évolution strictement quantique, c'est à dire de l'évolution d'un système sans notre désir de le connaître ? Comment même pourrait-on imaginer, dans la science moderne, exempte de tout obscurantisme, une telle chose ? D'autres s'en sont chargés, la science se doit de se confronter à l'observation. C'est un point qu'elle partage, d'ailleurs, avec la philosophie.

Il n'y a donc qu'*une* évolution quantique, et elle contient pleinement le phénomène de la mesure. Et c'est là que l'indéterminisme intervient. Moyen économique d'accès au "monde" quantique, extraordinairement puissant et cohérent.

Nous allons passer en revue les quatre axiomes de la Mécanique Quantique, sans rentrer dans les détails (voir [7] pour un exposé plus précis, quoique non technique).

Un système quantique est décrit par un vecteur, et donc l'ensemble des états d'un système est un espace vectoriel. C'est l'**Axiome I**, qui fixe le cadre cinématique et dont il faut retenir surtout le fameux principe de superposition, l'idée qu'il y a un +, et que l'on peut sommer des états. La juxtaposition, et surtout l'interaction de deux (sous-)systèmes met en jeu la notion mathématique de produit tensoriel ; l'**Axiome II** nous dit comment "fabriquer" l'espace des états : on prend le produit tensoriel des deux espaces d'états des deux (sous-)systèmes. La notion de produit tensoriel n'est pas simple, et représente une extension de la notion habituelle de produit : sachant que l'espace des états doit être un espace vectoriel, il faut considérer non seulement les produits d'états originaux provenant des deux (sous-)systèmes, mais aussi les sommes de tous ceux-ci [1]. Et c'est bien là que la saveur quantique prend toute sa dimension : la somme de deux états produits n'est plus forcément un état produit. C'est dans ce phénomène d'intrication que la nature quantique échappe à la culture classique, et c'est ici que la mesure sera nécessaire. Une première partie de l'évolution est donnée par l'**Axiome III** qui stipule une évolution unitaire, c'est à dire qui présente cette idée tellement chère à la science moderne : la conservation d'une quantité. Ici la quantité conservée sera la norme du vecteur-état, que l'axiome suivant va interpréter en termes de somme (totale) de probabilités.

En effet l'**Axiome IV** permet, entre autres, de palier les effets dévastateurs (dévastateurs de notre culture classique, mais non de notre idée de cohérence) de l'axiome II. Effectuer une mesure c'est projeter l'état du système sur un vecteur particulier, correspondant à un résultat possible de la mesure. Cette valeur particulìrere (par exemple la position), et donc le vecteur correspondant, sont "choisis" au hasard, hasard intrinsèque à la théorie.

Nous renvoyons le lecteur à [7] pour plus de détails et de généralité, mais, pour ce qui va nous intéresser ici, nos allons nous concentrer sur la probabilité de présence associée à la fonction d'onde. Un système quantique qui ne possède que des degrés de liberté classiques, c'est-à-dire position-impulsion, est représenté par une fonction d'onde, définie sur l'espace et à valeur complexe. Lorsque l'on dit que le module au carré de la fonction d'onde représente une probabilité de présence, on entend que, lorsque l'on effectue la mesure correspondant à la position, l'**Axiome IV** stipule que le résultat peut être un point quelconque de l'espace, et que si l'on effectue plusieurs fois la mesure sur un système dans le même état ψ, on obtiendra la valeur x avec une probabilité $|\psi(x)|^2$. Bien que cette formulation fasse référence explicitement à une collection d'évenements, il faut remarquer que les postulats de la Mécanique Quantique envisage des évènements uniques, et que l'aspect probabiliste révèle toute sa saveur dans les cas extrêmes : le cas où la probabilité est nulle et celle où elle prend la valeur maximale, c'est-à-dire 1. Ce dernier cas est obtenu, et se doit de l'être sous peine de manque de continuité, lorsque l'on effectue une seconde mesure "juste après" la première. Cette propriété est validée par la deuxième partie de l'**Axiome IV** qui dit

1. pour être rigoureux toutes les combinaison linéaires

que, lors de la mesure, le vecteur d'état est projeté sur un vecteur particulier associé au résultat de la mesure : celui qui prédit avec probabilité 1 la même valeur du résultat lors d'une mesure postérieure. Ainsi on se trouve amené à une représentation de la Mécanique Quantique dans laquelle une mesure est associée à un opérateur (matrice) dont les valeurs propres sont les résultats possibles et les vecteurs propres associés sont ces fameux vecteurs d'états *post-mesure*. Et il suffit, pour que l'axiomatique soit "cohérente", que la probabilité d'obtenir la valeur x soit le module au carré du produit scalaire de l'état du système avec le vecteur propre correspondant.

Il est d'usage de présenter la Mécanique Quantique comme une modification, une déformation de la Mécanique Classique. Mais la Mécanique Quantique étant, jusqu'à présent, la théorie fondamentale de la physique, il conviendrait plutôt de prendre l'habitude de voir la Mécanique Classique comme une situation limite, un bord de la théorie quantique. Ceci peut être réalisé simplement grâce à l'usage des états cohérents.

Introduits dès la série des articles fondateurs de Schrödinger en 1926, les états cohérents constituent une famille de vecteurs d'états, dépendant de la constante de Planck $\hbar$ et indicés par deux variables : une de position q et une d'impulsiion p. On peut les voir comme la famille d'états minimisant les inégalité de Heisenberg

$$\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{1}$$

mais les deux propriétés fondamentales dont ils jouissent sont, tout d'abord, qu'ils génèrent tout l'espace des états, à la façon d'une base (non-orthonormée) "continue", c'est-à-dire que tout vecteur d'état se décompose sur les états cohérents ; ensuite que la famille des états cohérents reste presque invariante par l'évolution quantique générée par l'équation de Schrödinger. Le "presque" étant guidé par la constante de Planck, et devenant exact lorsque celle-ci s'annule. Ainsi donc, à la limite semi-classique où $\hbar \to 0$, l'évolution quantique, lorsque la condition initiale est un de ces états cohérents, se confond avec un flot sur cette famille, cette sous-variété de l'espace des états. C'est ainsi que "l'espace (de phase) classique", espace des positions-impulsions, se (re)trouve déjà pleinement dans la Mécanique Quantique, comme espace des indices d'une famille de vecteurs particuliers évoluant "entre-eux", si l'on peut dire.

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord faut-il vraiment que $\hbar \to 0$? C'est-à-dire doit-on changer la théorie pour que la Mécanique Classique apparaîsse ? La réponse est non : la Mécanique Classique est vraiment dans la Mécanique Quantique, au bord de celle-ci. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que toutes les propriétés à $\hbar \to 0$ se retrouvent par exemple dans l'atome d'hydrogène lorsque l'on considère les états très excités proche du continuum d'énergie. Ensuite ce résultat d'invariance de la famille d'états cohérents par l'évolution quantique est-il valable à tout temps ? Quid de l'impossibilité d'associer une trajectoire (voir [2] dans ce même volume) ? La réponse à la première question est bien sûr négative est sera le cœur de cet article. En évoluant un état cohérent se déforme et plus le temps augmente plus cette déformation est significative. A la limite des temps longs elle devient même gênante, nous en parlerons plus bas. Retenons seulement pour l'instant que l'espace de phases de la Mécanique Classique apparaît dans la Mécanique Quantique et que l'on peut ainsi définir l'évolution classique en suivant l'évolution quantique des états cohérents.

3. La Mécanique Classique

Une différence fondamentale entre quantique et classique réside dans l'idée d'un espace absolu pour la Mécanique Classique. L'évolution classique se déroule en effet dans un espace fixe, d'accès immédiat pour l'observateur, et qui n'est pour ainsi dire que le réceptacle de la théorie [3]. Nous avons (entre autres) vu dans la section précédente comment cet espace apparaissait, indiçant les états cohérents, famille spéciale de vecteurs d'états. Comment apparaît le coté "absolu" d'un tel espace ? Et comment apparaît-il dans une théorie hautement non-absolue, puisque baignant dans l'aléatoire suite à l'**Axiome IV** ? C'est grâce aux probabilités justement, plus exactement à leurs extrêmes.

Les inégalités de Heisenberg (1) qui sont, rappelons le, un Théorème et non un principe, stipulent que l'on ne peut pas être mieux localisé autour d'un point de l'espace de phases qu'à une échelle $\hbar$. Mais justement, rien n'empeche de considérer des familles d'états, dépendant de $\hbar$, et tels que $\Delta P \Delta Q \sim \frac{\hbar}{2}$. De tels états peuvent avoir la propriété de "tendre" vers un point de l'espace de phases, i.e. lorsque $\Delta P \sim \Delta Q \sim \sqrt{\frac{\hbar}{2}}$. Mais nous verrons plus loin que ce n'est pas la seule possibilité, et que des états satisfaisant $\Delta P \Delta Q \sim \frac{\hbar}{2}$ avec $\Delta P \sim \hbar/2$ et $\Delta Q \sim 1$ (ou même $\Delta Q \sim \frac{1}{\sqrt{\hbar}}$) peuvent être aussi intéressants et apparaissent aussi. Mais revenons au cas $\Delta P \sim \Delta Q \sim \sqrt{\frac{\hbar}{2}}$.

Dans la limite $\hbar \to 0$, l'aspect probabiliste de la théorie quantique ne disparaît pas, mais plutôt se singularise en n'autorisant plus que 0 et 1 comme valeur possible de la loi de probabilité. C'est l'aspect absolu qui entre en jeu. Une fois cette remarque faite, il ne reste plus qu'a montrer que le "support" d'un état cohérent évolue suivant les lois de la dynamique classique pour avoir une image complète.

C'est donc un premier exemple de confrontation entre indétermisnime quantique et, cette fois, prédictibilté classique ; le point matériel. Nous verrons plus loin comment l'hypothèse $\Delta P \sim \hbar/2\ \Delta Q \sim 1$ ruine cette vision, mais nous avons besoin tout de suite de regarder d'un plus près le sacro-saint déterminisme classique.

Finissons cette section en insistant encore sur un malentendu très courant : comment la constante de Planck peut-elle tendre vers zéro ? Comme nous l'avons déjà dit, la limite semi-classique n'est pas en dehors de la théorie quantique, elle en est un bord, rappelons-nous l'exemple de l'hydrogène.

4. La sensibilité aux conditions initiales

La mécanique classique est, quant à elle, parfaitement déterministe. Cependant le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales a changé, à la fin du XIXème siècle et grâce aux travaux de Poincaré, la vison de la notion de stabilité. La sensibilité aux conditions initiales exprime que, quelle que soit la proximité de deux conditions initiales, on peut toujours trouver, pour tout nombre I, un temps T tel que, pour tout temps ultérieur, on trouvera une condition initiale aussi proche de la condition initiale choisie qui, après évolution, se trouvera séparée d'au moins I de la situation finale. En terme mathématiques cela s'exprime ainsi :

$$\exists I \in \mathbb{R}^+, \forall \epsilon > 0,\ \exists t = t(I, \epsilon) \text{ tel que } \exists x, |x - y| \leq \epsilon,\ |\Phi^t(x) - \Phi^t(y)| \geq I,$$

où $\Phi^t(x)$ est le point évolué à partir de x au temps t.

C'est à dire que l'on peut toujours trouver deux conditions initiales aussi proches que l'on veut qui se retrouvent séparées d'une distance donnée après avoir suffisamment attendu.

Une autre façon de dire la même chose consiste à remarquer que la sensibilité aux conditions initiales implique que, si l'on considère pour simplifier un point fixe y invariant par la dynamique (ou un point périodique, cela revient au même), il existe un ensemble Λ_y de points x qui tendent vers y par évolution à temps négatif. On définit ainsi :

$$\Lambda_y := \{x / |\Phi^{-t}(x) - y| \to 0 \text{ quand } t \to \infty\}.$$

La théorie des systèmes dynamiques chaotiques permet de montrer en général que Λ_y, définie de façon ensembliste, comme classe d'équivalence, est en fait un ensemble particulier et “gentil” : c'est une variété différentiable. Dire que $\Phi^{-t}(x) \to y$ quand $t \to \infty$ signifie que $\Phi^{-t}(x)$ a une limite, donc que $\Phi^{-\infty}(x)$ existe pour tout $x \in \Lambda_y$ et que cette limite est y, $\forall x \in \Lambda_y$.

Cela semble suggérer que $\Phi^{-\infty}$ existe comme flot sur l'espace de phase, mais il n'en est rien. En effet, bien que le passage au temps infini soit tout à fait crucial pour les systèmes dynamiques (ergodicité, sensibilité aux conditions initiales, systèmes intégrables), le flot à temps infini n'existe pas. Seules existent des traces "faibles". Par exemple l'ergodicité s'exprime ainsi :

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\circ\Phi^t = \int F d\mu.$$

On intègre d'abord, puis on prend la limite.

Cependant, si l'on garde l'idée d'un flot "infini", on peut formellement "inverser" la phrase $\Phi^{-t}(x)\to y$ quand $t\to\infty$. Et l'on obtient le schéma suivant :

$$\Phi^{-t}(x)\to y,\ \forall x\in\Lambda_y \text{ quand } t\to\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\Phi^{-\infty}(x)=y,\ \forall x\in\Lambda_y$$
$$\Updownarrow$$
$$\Phi^{+\infty}(y)=x,\ \forall x\in\Lambda_y$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{imprédictibilité} \sim \text{indéterminisme}$$

Stricto sensu cette suite d'équivalence n'a pas de sens, puisque $\Phi^{\pm\infty}$ n'existe pas. Elle résume cependant très bien le sens profond de la sensibilité aux conditions initiales : la Mécanique Classique, dans ses aspects chaotique, est imprétictible. Et cet imprédictibilité frôle l'indéterminisme dans le passage, non "autorisé", au temps infini.

Y-a-t-il moyen de donner un sens à tout cela ? La Mécanique Classique est-elle, au fond, indéterminisme ?

Nous allons voir bientôt, et ce sera le résultat principal de cet article, que la Mécanique Classique, vue comme venant de la Mécanique Quantique (c'est-à-dire la "vraie" situation classique), peut se donner elle-même une telle "autorisation" concernant ce phénomène.

5. L'évolution quantique à temps long

La Mécanique Quantique est linéaire, c'est bien là son moindre défaut. On trouve parfois cette phrase dans la bouche de ceux qui la trouvent fade vis-à-vis de la Mécanique Classique chaotique. La linéarité implique, en particulier et dans le cas de spectres discrets, une évolution quasi-périodique. Loin de toute "chaoticité" et autre aléatoire.

Or une telle vision est éronnée pour (au moins) deux raisons : tout d'abord réduire la Mécanique Quantique à une théorie linéaire, c'est oublier la mesure (qui ne l'est pas). De plus l'argument invoquant la quasi-périodicité ne vaut que pour un ensemble finie de fréquences. Ce qui n'est pas généralement le cas, et ce qui, de toute façon, disparaît à la limite semiclassique, puisque le nombre de valeurs propres par intervalle spectral fini augmente quand $\hbar \to 0$.

Ces deux faits sont à la base de la discussion ci-dessous.

Nous allons donc considérer des situations dans lesquelles l'évolution sera donnée à grand temps, typiquement :

$$t \sim T(\hbar),$$

avec $T(\hbar) \to \infty$ quand $\hbar \to 0$, et prendre ensuite la limite $\hbar \to 0$.

On restera donc "quasi-périodique" pour chaque valeur de $\hbar$, mais on perdra cette propriété à la limite semiclassique.

Remarquons que les situations concernées font appel à des hamiltoniens "confinants", c'est-à-dire qu'il ne s'agît absolument pas de théorie de la diffusion, pour laquelle le potentiel s'évanouit à l'infini.

Nous allons de plus nous concentrer sur la situation élémentaire où l'hamiltonien a la forme :

$$H := -\frac{i\hbar}{2}(x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x)$$

Le flot quantique est alors obtenu par une simple dilatation :

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi \Longleftrightarrow \psi^t(x) = e^{-t/2}\psi^0(e^{-t}x). \tag{2}$$

Il se trouve qu'un tel modèle est symptomatique de la situation générale. Il reflète parfaitement l'aspect hyperbolique des situations de chaos classique, et son extension au cas de trajectoires périodiques à dimension quelconque est facile.

Nous discuterons ce point dans la dernière section de cet article, mais voyons tout d'abord l'incidence de la formule (2) sur la limite semiclassique.

6. Le passage à la limite et la confrontation entre indéterminisme quantique et imprédictibilité classique

Si l'on prend pour condition initiale un état cohérent à l'origine, c'est-à-dire

$$\psi^0(x) = (\pi\hbar)^{-1/4}e^{-\frac{x^2}{2\hbar}},$$

on trouve facilement que :

$$\psi^t(x) = (\pi\hbar)^{-1/4} e^{-t/2} e^{-\frac{e^{-2t}x^2}{2\hbar}},$$

c'est-à-dire que l'état commence à se délocaliser.

Lorsque $t \sim \frac{1}{2} log(\frac{1}{\hbar})$ l'état est complètement decolcalisé :

$$\psi^{\frac{1}{2}log(\frac{1}{\hbar})}(x) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

De plus lorsque $t \sim log(\frac{1}{\hbar})$ on obtient :

$$\psi^{log(\frac{1}{\hbar})}(x) = (\frac{\hbar}{\pi})^{1/4} e^{-\hbar\frac{x^2}{2}},$$

c'est-à-dire , quand $\hbar \to 0$,

$$\psi^{log(\frac{1}{\hbar})}(x) \sim (\frac{\hbar}{\pi})^{1/4} \ .$$

L'état est uniformément délocalisé sur la droite réelle, c'est-à-dire sur la variété instable associée au point fixe qui est à l'origine.

Voyons maintenant comment "interpréter" ce résultat à la lumière de l'interprétation de la fonction d'onde. Si l'on effectue une mesure de l'observable position, le résultat sera x avec la probabilité $|\psi(x)|^2$.

Mais maintenant la loi de probabilité donnée par $|\psi(x)|^2$ est totalement délocalisée sur la droite réelle (i.e. variété instable).

On voit donc que, en terme de mesure quantique, on peut "affirmer" :

$$\Phi^{+\infty}(0) = x, \ \forall x \in \Lambda_0 := \text{ droite réelle.}$$

On a donc autorisé la chaîne interdite de la section 2.

Au fond qu'avons-nous fait ?

Nous avons appliqué les stricts postulats de la Mécanique Quantique : mesure et évolution.

Au début l'état est localisé en un point (états cohérents) et la mesure, dans la limite semiclassique, donne ce point comme résultat, avec probabilité 1.

Puis nous avons laissé cet état évoluer jusqu'à un temps de l'ordre de $\log \frac{1}{\hbar}$.

Puis nous avons effectué la mesure de la position à nouveau.

Et là la probabilité est devenue uniformément repartie sur la variété instable, en contradiction apparente avec le paradigme classique, mais en accord avec l'esprit de la sensibilité aux conditions initiales.

7. Invariants et stabilité à l'intérieur du chaos

Nous venons de voir que, pour l'évolution quantique à grand temps, la fonction d'onde peut, alors qu'à l'origine elle était concentrée en un point, se délocaliser sur la variété instable issue de celui-ci. La généralisation de ce phénomène concerne la notion de variété instable associée à une trajectoire quelconque [4]. On définit donc maintenant :

$$\Lambda_y^{\pm} := \{x/|\Phi^{\pm t}(x) - \Phi^{\pm t}y| \to 0 \text{ quand } t \to \infty\}.$$

Les variétés stables et instables sont covariantes par le flot dans le sens que :

$$\Phi^s(\Lambda_y^{\pm}) = \Lambda_{\Phi^{-s}y}^{\pm}.$$

En particulier $\cup_{s\in\mathbb{R}}\Phi^s(\Lambda_y^{\pm})$ est invariant par le flot.

On voit donc que la Mécanique Quantique a la propriété, lors de l'évolution à grand temps et la limite semiclassique, de délocaliser des états cohérents, initialement localisés en un point (élément d'un espace absolu), en des états localisé sur les *in- ou co-variants* de la dynamique classique. Ces nouveaux objets, les invariants de la dynamique, sont en quelque sorte les éléments d'un nouvel espace absolu, l'espace des invariants de la dynamique.

Ces objets ne sont pas nouveaux, ce sont même les outils fondamentaux pour étudier la dynamique chaotique, donc à temps long, mais ils gardent dans la Mécanique Classique un statut d'outil, palliatif au fait que l'on ne sait plus calculer, ou même appréhender, pour de telles échelles de temps, la notion de trajectoire.

La Mécanique Quantique, ayant dès le départ abandonné dans son formalisme la notion de trajectoire au sens de la géométrie du point, leur donne, à ces invariants, un vrai statut ontologique.

Mais il n'y a pas de raison que cela s'arrête là. Puisque la Mécanique Quantique a transformé le point en variété instable, elle doit, pour des échelles de temps encore supérieures, transformer à nouveau ces nouveaux objets en quelque chose d'autre. C'est ce qui se passe dans l'exemple du "8" [5]. L'exemple des dilatations faisait en effet partir tout à l'infini (temporel et spatial). Mais tout en gardant l'infini temporel, il est possible de compactifier l'aspect spatial en considérant l'exemple suivant. Considérons maintenant un hamiltonien de la forme :

$$h(q,p) = p^2 + q^2(q^2 - 1).$$

Cela correspond à une particule dans un potentiel de la forme d'un double puit. Les deux variétés instables sont les deux branches d'un "8" incliné : les trois invariants de la dynamique sont les deux branches du 8 et le point fixe.

On peut dans ce cas calculer le flot, dans la limite semiclassique à temps multiple de $t = \log \frac{1}{\hbar}$. On trouve ainsi un mouvement entre les deux branches du 8 et le point fixe, au milieu. Cette nouvelle dynamique est une dynamique sur les invariants de la dynamique classique, comme la dynamique précédente l'était sur les points de l'espace absolu.

8. Conclusion et lien avec d'autres disciplines

Nous avons essayé dans cet article de montrer comment les notions, en principe tellement différentes, d'indéterminisme quantique et d'imprédictiboilté classique pouvaient se superposer dans la limite des grands temps d'évolution couplée à la limite semiclassique. Il est apparu que l'indéterminisme quantique, et son aspect probabiliste donné par l'interprétation statistique de la fonction d'onde, est non seulement en accord avec la Mécanique Classique, mais qu'il donne une justification à la notion de flot à temps infini en Mécanique Classique : la sensibilité aux conditions initiales peut être en effet vue, dans la limite où le temps d'évolution diverge, soit comme indéterministe (un point donnant lieu à une variété instable), soit comme flot généralisé transformant un point en un ensemble de dimension supérieure. La Mécanique Quantique unifie les deux grâce à l'interprétation probabiliste couplée à la délocalisation de la fonction d'onde.

Il apparaît ainsi, me semble-t-il, une notion ontologique donnée à la notion d'invariant de la dynamique. Les variétés instables, invariants de la dynamique, deviennent ainsi un objet épais, important : le lieu des possibles lorsque l'on effectue une mesure quantique, le support de la loi de probabilité.

Ce couplage, qui détruit la notion d'espace absolu habituelle pour la remplacer par celui des invariants de la théorie classique, fait apparaître le rôle important joué par ces dits invariants.

L'étude des invariants d'une théorie est un grand standard de la science moderne. On le retrouve en permanence en mathématique et physique, mais aussi en biologie etc. Remarquons pour finir que ce jeu qui consiste à emboîter une nouvelle dynamique sur l'espace des invariants de la précédente suggère que le caractère principal de la Mécanique Quantique, qui est la stabilité, en principe incompatible avec l'hypothèse chaotique de la Mécanique Classique, pourrait bien être finalement expliquée, dans des cas simples, par une dynamique stable sur les invariants de la dynamique instable. C'est en tous cas ce que nous a montré l'exemple du “8”.

Références

[1] V.I. Arnol'd, **Équations différentielles ordinaires**. MIR, 1976.

[2] F. Balibar, dans ce volume.

[3] P. Cartier, "La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich", dans **Les relations entre les mathématiques et la physique théorique**, I.H.E.S., 1998.

[4] R. L. Devaney, **An Introduction to chaotic dynamical systems**. Addison-Wesley, 1989.

[5] T. Paul, "Échelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de Planck", "Séminaire X-EDP 2007-2008", Publications de l'cole polytechnique, 2008.

[6] T. Paul, "Semiclassical Analysis and Sensitivity to Initial Conditions" , "Information and Computation", 207, p. 660-669 (2009).

[7] T. Paul, "A propos du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique", "Logique & Interaction : Géomtrie de la cognition" Actes du colloque et école thématique du CNRS "Logique, Sciences, Philosophie" à Cerisy, Hermann, 2009.

[8] H. Poincaré, **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**, Volume 3, Blanchard, Paris, 1987.

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole polytechnique et CNRS
E-mail address: paul@math.polytechnique.fr