LE VIERGE, LE VIVACE ET LE BEL AUJOURD'HUI : TROIS MOUVEMENTS DE LA STRUCTURE ESPACE VU DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

THIERRY PAUL

RÉSUMÉ. Nous considérons l'incidence sur la notion d'espace sous-jacent de trois types de dynamiques : la théorie KAM, la dynamique donnée par des potentiels peu réguliers et la limite classique de la dynamique à temps long. Dans les trois cas nous montrons qu'une notion naturelle d'espace est associée, que nous présentons comme la notion d'espace sous-jacente, et qui chacune convoque un des trois labels : le Cantor, le presque et le non commutatif.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

La notion si structurante d'espace est en général vue, lorsqu'on l'exporte hors des mathématiques, sous son aspect géométrique, et ses mouvements historiques suivent en principe la succession : euclidien, riemannien, topoï et plus récemment non commutatif. Lorsqu'il s'agit de la physique le pendant à cette suite (presque) exacte est donné par : galiléen, einsteinien et, souvent, une notion d'absence d'espace en Mécanique Quantique.

Il nous semble pourtant que la notion d'espace qui a eu le plus d'incidence sur la philosophie moderne trouve sa source dans l'avènement de la Mécanique Classique, la dynamique newtonienne. Or qu'est ce qu'un espace

Date: 12 juin 2012. Texte à paraître dans le volume "Le formalisme en action : aspects mathématiques et philosophiques", édité par J. Benoist et T. Paul, Hermann, 2012.

vis-à-vis de la dynamique newtonienne, et de toute dynamique d'ailleurs, sinon le lieu, le réceptacle de trajectoires, de mouvements - bref le lieu où vit une équation différentielle.

Cependant, c'est dans ce cadre là que l'on a pris l'habitude lorsque une singularité apparaît, ou lorsque l'on se pose une question trop ambitieuse dont la réponse laisse à désirer - et de telles question sont légion - de charger la dynamique de tout le poids, de toute la responsabilité d'un tel échec. L'espace, lui, serait exempt de tout reproche, trônant majestueusement sur son rôle de lieu privilégié d'une dynamique souffrant, elle, de tous les maux. Or, à y regarder de plus près, on s'aperçoit facilement que bien souvent ces dynamiques ne sont singulières que parce que plongées dans un espace trop régulier, trop lisse. Trop fade en quelque sorte. Et que si l'on adapte l'espace à la dynamique, au lieu d'essayer d'adapter cette dernière à l'espace habituel, la situation non seulement se désingularise, mais devient plus simple, et surtout beaucoup plus riche. Ces mutations de l'espace, perdant son caractère absolu et se laissant modeler par la dynamique qui l'habite et qu'il va bientôt habiter, peuvent être de natures fort différentes. Nous allons en considérer ici trois exemples : **le Cantor, le presque et le non commutatif**, qui seront pour nous **le Vierge, le vivace et le bel aujourd'hui**.

Nous allons donc essayer dans cet article de suivre trois mutations de l'espace vu comme lieu de la dynamique solution d'une équation (ou un système d'équations) différentielle ordinaire (EDO), c'est-à-dire lieu de l'ensemble des courbes tangentes à un champ de vecteurs donné. Après avoir rappelé quelques idées sur la mécanique newtonienne, nous présenterons comment apparait l'espace dans la théorie KAM, puis dans la théorie de diPerna/Lions-Bouchut-Ambrosio et enfin dans la limite classique de la Mécanique Quantique.

Il est bien connu que les équation de la dynamique, sous la forme de Newton ou de Hamilton, sont résolubles de façon unique pour des potentiels suffisamment réguliers (leur dérivée doit être lipschitzienne). Cependant, on sait aussi que même si le système à deux corps est intégrable, c'est-à-dire que l'on peut décrire précisément le mouvement de deux corps interagissant par la loi de Newton et que les mouvements correspondants s'enroulent sur un continuum de tores dans l'espace de phases, il n'en est rien dès que l'on perturbe un tel système, aussi petite que soit la perturbation. Ce qui subsiste de ce "feuilletage en tores" que nous décrirons plus bas est un ensemble de Cantor de tores, ensemble de grande mesure certes, mais dont la structure cantorienne est inévitable. C'est là, selon nous, une première mutation de la notion d'espace lisse bien familier.

On sait aussi que lorsque le potentiel, le champ de vecteur fournissant la dynamique, n'est plus lipchitzien (voir plus bas), la dynamique n'est plus obligatoirement uniquement définie. Cette obstruction à l'unicité des solutions de la dynamique a été levée dans une série de travaux à partir de 1985, tout d'abord par diPerna et Lions, puis Bouchut et enfin Ambroio en 2004. Pour être laconique disons que, pour toute une classe de potentiels peu réguliers n'assurant pas une dynamique bien posée, le manque d'unicité, et tous les problèmes conceptuels qu'il implique et que nous décrirons dans la section 4, disparait lorsque l'on regarde le flot "presque partout". Ainsi le nouvel espace, "dans" lequel la dynamique est aussi belle que celle régulière, est un espace de type presquepartoutesque que nous décrirons plus loin.

Enfin on sait bien aussi que la dynamique classique régulière, bien que définie pour tout temps, n'a pas de limite "en tant que flot" pour les temps divergeant, et ce bien que toute la saveur des systèmes chaotiques apparaissent, mais indirectement, dans cette limite. Or il est une façon de définir le flot à temps infini comme limite de la dynamique générée par la Mécanique Quantique que nous décrirons dans la dernière section. Un tel flot se situe dans un nouveau type d'espace, imbibé de non commutativité héritée de la Mécanique Quantique. Nous allons voir dans cette troisième partie des structures d'espaces se transformer, se trouer, se vaporiser, s'évaporer même, et se retrouver dans ce qui est une véritable déconstruction du point temporel à l'infini.

Ainsi, dans ces trois exemples, la structure de l'espace évoluera-t-elle au cours du temps qui l'habite aussi bien que du temps historique, dans un mélange dynamico-historique tout benjaminien.

Pour terminer cette introduction, nous devons remarquer que dans ces trois cas, la solution au problème posé à la dynamique classique est obtenue par un détour de la théorie des équations différentielles ordinaires par la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP). C'est là un couplage spatiotemporel qui semble nécessaire et que nous tenterons d'examiner dans la dernière section de cet article.

2. La mécanique newtonienne

L'idée moderne de la théorie des systèmes dynamiques peut se formuler ainsi : en chaque point de l'espace (des phases) est donné un vecteur (élément de l'espace tangent), ce vecteur donne, par sa direction, la direction tangente à la trajectoire en chaque point, et la longueur du vecteur la vitesse avec laquelle la particule va se propager le long de sa trajectoire. Autrement dit la dynamique est donnée par un *champ de vecteurs*, et les trajectoires sont les courbes de l'espace qui sont tangentes en chaque point au champ de vecteurs évalué en ce même point. C'est l'idée même de la dynamique infinitésimale : la position à tout instant définit la position à l'instant infiniment après.

$$x(t+\delta t) = x(t) + \delta t \times (\text{quelquechose donné en } x(t)).$$

Autrement dit

$$\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} = \text{quelquechose donné en } x(t),$$

que l'on note après passage à la limite $\delta t \to 0$,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{quelquechose donné en } x(t).$$

Ainsi donc chaque point détermine son futur immédiat, et ainsi de suite.

On peut donc voir ainsi une construction des trajectoires à partir des points de l'espace, via le champ de vecteur. Plus précisément au lieu de tracer, depuis une courbe donnée, le vecteur tangent à cette courbe en tout point de la courbe, on se donne a priori en chaque point un vecteur tangent et l'on essaie de trouver une courbe tangente en chaque point à ce vecteur, c'est un problème inverse en quelque sorte. On voit donc que si l'on part du problème mathématique dans un espace a priori, on construit la courbe dans l'espace.

Mais on peut se demander si cette vision n'est pas une simple construction intellectuelle, trop éloignée de la réalité : en fait on peut voir aussi l'espace comme formé des points des trajectoires, et c'est bien là la vision naturelle de l'espace, habité par des points en mouvement (peut-on imaginer la conception de l'espace (transcendant) sans le mouvement des planètes ?). En effet, dans le cas où ces trajectoires sont régulières, nous y reviendrons, une trajectoire définit en chacun de ses points le champ de vecteur, et donc l'espace tout entier. Cette façon de voir l'espace comme la réunion des trajectoires :

$$\cup \text{ trajectoires} = \text{espace}.$$

est assez conforme à ce que l'on voit autour de nous : des mouvements.

En revanche, un énoncé comme

$$\text{trajectoire} = \cup \ (\{\textit{un point}\} \subset \text{espace})$$

est au fond plus difficile à entrevoir. Dans le cas d'une dynamique dont toutes les trajectoires sont régulières, les deux descriptions sont bien-sûr équivalentes. Continuons cependant comme si de rien n'était.

Ainsi prenons pour acquis que le mouvement crée l'espace, et non pas : le mouvement se loge dans l'espace.

Cette hypothèse fait immédiatement apparaitre une intrication entre mouvement et espace, un peu transverse à la vision transcendantale de ce dernier, mais qui nous semble plus en phase avec ce que nous percevons et qui, au fond, va nous guider jusqu'à la relativité générale, point extrême de cette trajectoire historique dans lequel l'intrication mouvement-espace se trouvera formalisée par une interaction entre matière et espace : la matière modifiant l'espace ambiant, la trajectoire devenant une banale géodésique dans un espace courbe se modifiant pour être en accord avec le mouvement. Pour le coup l'espace se loge ainsi dans le mouvement.

Cette comparaison avec la relativité va nous faire entrevoir un point crucial de notre discussion : le cas de trajectoires singulières.

Il est en effet bien admis de nos jours que les équations d'Einstein développent des singularités, singularités qui, en vertu du couplage (solution du mouvement)-(espace), se répercutent sur l'espace. L'espace est singulier parce que le mouvement sur lui-même l'est. Ainsi accepte-t-on aisément l'idée que l'espace n'est pas, fût-il courbe, aussi simple ; il est singulier, par la dynamique qu'il génère.

Cette remarque va nous permettre de terminer cette section par une introduction aux deux sections suivantes. Nous avons dit plus haut que le champ de vecteur définissait la trajectoire puisque donnant en chaque point le vecteur vitesse et par là même l'équation de la dynamique que nous avons présentée. Mais qui dit équation dit solution, et théorème mathématique portant les fonds baptismaux de cette dernière. Or il ne suffit pas, nous le verrons à la section 4, qu'un champ de vecteurs soit gentiment donné pour que la trajectoire ait la même gentillesse. Il faut qu'il le soit avec une certaine régularité, sinon la solution a des problèmes comme par exemple un manque d'unicité. Nous évoquerons ces problèmes plus bas et verrons leur incidence sur la structure de l'espace à qui l'on demanderait d'admettre de les résoudre.

Mais il est un autre problème qui nous occupera avant cela, dans la section 3. Les premiers succès de la théorie de Newton furent édifiants, puisqu'une simple équation comme celle vue plus haut permettait de comprendre le mouvement des planètes autour du soleil. En effet, ladite équation génère des courbes très simples, qui on la faculté, pour certains systèmes, d'être circulaires ou ellipsoïdales, ou plus généralement de s'enrouler sur des tores de dimension plus grande. D'où l'idée de stabilité laplacienne : si les systèmes simples, par exemple le système des deux corps, "s'enroulent bien", il y a fort à parier que le système des trois corps avec le troisième très léger, simple perturbation du système précédent, va encore "bien s'enrouler". Un peu différemment certes, mais s'enrouler quand-même. Autrement dit, les tores seraient perturbés mais ils resteraient tous des tores. Poincaré montra qu'il n'en était rien, et Kolmogorov montra soixante ans plus tard comment certains de ces tores étaient préservés, mais seulement certains, formant à eux seuls un espace de stabilité singulier, Cantor que nous allons étudier maintenant.

3. La théorie KAM

Le point tournant que constitue la découverte par Poincaré de la non-intégrabilité du système des trois corps peut se résumer ainsi : un système dynamique intégrable à N degrés de liberté est donné par un ensemble de tores à N dimensions dont l'union remplit l'espace de phases du système et qui sont indicés par des quantités positives $A_1, A_2, \ldots, A_N$, les actions, et invariants par la dynamique. Autrement dit il existe un système de co-ordonnées $(A_1, A_2, \ldots, A_N; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ tel que, lors de l'évolution dans le temps chaque $A_i(t) = A_i(t = 0)$ et les angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ évoluent linéairement dans le temps :

$$\varphi_i(t) = \varphi_1(t = 0) + \omega_N(A_1, A_2, \ldots, A_N)t.$$

Ainsi donc un flot intégrable s'enroule sur tes tores suivant des droites. Que l'on s'imagine à tracer une ligne droite sur un pneu ou une bouée qui s'enroule, en faisant d'ailleurs obligatoirement souffrir notre poignet.

Vu depuis cette dynamique, l'espace est donc très simple : une espèce de matroïskaia de tores, et la dynamique est réalisée par des fourmis marchant tout droit sur chaque poupée, mais ne passant jamais d'une poupée à l'autre. On a là un système de coordonnées, différent du système cartésien habituel, mais aussi régulier que celui de nos bonnes abscisses et autres ordonnées et généralisant en dimension supérieure les coordonnées angulaires du plan (privé de l'origine).

Comment peut-on déformer une matroïskaïa ? La première idée, toute laplacienne, consiste à dire que chaque poupée va un peu se déformer, se dilater, prendre des bosses, mais rester “poupée”. C'est ce que l'on a pensé pendant longtemps, et que Poincaré pensait avoir démontré pour le roi de Suède. Mais si l'on suppose que chaque poupée est en quelque sorte extrémale, c'est-à-dire optimisant quelque structure, on a bien l'intuition que toute déformation est impossible : la poupée risque de se casser. Cependant la dynamique étant locale en espace, on a bien le sentiment aussi que la poupée ne peut pas se casser en mille morceau, comme une vieille poupée en porcelaine de nos grand-mères. Lors d'une déformation de la dynamique, chaque poupée va avoir tendance à se trouer, à concevoir en son sein des lieux où la dynamique va pouvoir s'échapper et commencer à naviguer d'une poupée à l'autre.

Le génie de Nicolaï Kolmogorov fût de remarquer que toutes les poupées de la matroískaïa ne vont pas se trouer en même temps, mais plutôt qu'à mesure que l'on fait grossir la perturbation, de plus en plus de poupées vont se trouer, laissant, pour chaque taille de perturbation plus petite qu'un certain “rayon de convergence”, un nombre infini de tores invariants, les tores KAM,poupées que la dynamique laisse intactes in eternam.

Cet ensemble de poupées restées intactes sera donc le lieu d'une dynamique absolument aussi régulière que la dynamique intégrable non perturbée. En effet non seulement les tores KAM sont invariants par la dynamique, mais le mouvement, *sur chacun d'eux*, y est tout à fait semblable au cas non perturbé.

Dit comme cela, nous avons l'impression que, localement, il reste des régions de l'espace où la dynamique perturbée est inoffensive du point de vue qualitatif : des régions entières de l'espace seraient donc préservées dans leur intégrabilité, dans leur stabilité. Laplace aurait donc eu raison finalement, qui disait que “bien sûr” il y aura toujours des lieux singuliers de l'espace où la dynamique “débloque”, en quelque sorte mais il y aurait donc aussi un espace de stabilité, tout comme le mouvement sur une montagne est toujours stable, sauf si l'on part de points exceptionnels tels que les sommets, points d'équilibre instables d'où une perturbation infinitésimale de la dynamique peut faire chuter dans diverses directions.

Mais c'est à ce point qu'arrive la nouveauté : cet espace de stabilité défini par la construction de Kolmogorov n'est pas un lieu ordinaire. Ce n'est pas un ouvert topologique semblable à un intervalle de la droite réelle : c'est un ensemble de Cantor, obtenu par une séquence infinie d'ablations de domaines de plus en plus petits de l'espace ordinaire (domaines responsables de la divergence des séries perturbatives comme l'avait montré Poincaré), un procédé typique de la construction d'espaces de Cantor. Ainsi il reste bien un lieu laplacien de stabilité, mais ce n'est pas un espace ordinaire.

Depuis l'article de Kolmogorov, et les articles d'Arnold' et Moser, les tores KAM occupent un espace de choix dans l'activité non seulement relevant des systèmes dynamiques, mais aussi de la physique des plasmas par exemple. On “voit” les tores KAM, comme on voit les trajectoires des planètes. L'ensemble des tores KAM est donc bien un **espace**, structure obtenue à partir de l'espace ordinaire par une théorie de l'évolution guidée par l'exigence de stabilité. Nous reviendrons sur ce point dans notre conclusion.

4. La théorie de diPerna/Lions-Bouchut-Ambrosio

Nous avons vu dans la section 2 que la dynamique newtonienne était bien définie, c'est-à-dire existait et donnait une solution unique (trajectoire) sous la condition d'une certaine régularité du potentiel.

A première vue il semblerait suffisant pour qu'une trajectoire existe que la vecteur tangent existe. C'est l'intuition que l'on a lorsque l'on trace une courbe. Or il n'en est rien. L'unicité de la solution de la dynamique nécessite plus que cela. Et cela n'est pas seulement une condition pour que l'on puisse démontrer le résultat, c'est vraiment une condition nécessaire comme le montre l'exemple suivant, que tout lecteur familier avec un minimum de calcul différentiel pourra vérifier de lui-même.

Remplaçons le potentiel newtonien par celui-ci, à une dimension,

$$V(x) = -|x|^{1+\theta},\ x \in \mathbb{R},$$

avec $0 < \theta < 1$.

Considérons l'équation de Newton associée à ce potentiel, c'est-à-dire

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -(1+\theta)|x|^\theta.$$

On trouve immédiatement deux solutions partant de $x = 0$ à vitesse nulle :

$$x_\pm(t) = \pm c_0 t^\nu$$

où $\nu = \frac{2}{1-\theta}$ et $c_0 = \left(\frac{(1-\theta)^2}{2}\right)^{1-\theta}$.

En fait on a beaucoup plus de solutions. En effet la "courbe" $x(t) = 0\ \forall t$, réduite à un point, est une solution de la dynamique. Tout comme la position d'équilibre instable en haut de la montagne évoquée à la section précédente. Mais dans le cas qui nous intéresse ici nul besoin d'une "perturbation infinitésimale" de la dynamique pour partir de ce point. Il suffit de décider du moment du départ, à n'importe quel instant. On peut donc construire une solution en restant immobile à l'origine jusqu'à n'importe quel temps t_0, puis commencer à bouger le long d'une des trajectoires x_+ ou x_- définies plus haut. Cette nouvelle solution, quel que soit l'instant de départ t_0, est encore solution de la dynamique.

On a donc un continuum de solutions différentes, avec pourtant un potentiel aussi simple que $V(x) = -|x|^{1+\theta}$ dont la dérivée est parfaitement définie en tout point.

Il est juste de remarquer que si nous partons de $x = 0$ mais avec une vitesse non-nulle cette fois, l'ambiguïté précédente disparait et l'on a à nouveau unicité de la trajectoire. Le lieu singulier, celui à partir duquel la dynamique n'est pas "bien" définie car possédant le don d'ubiquité, est donc un simple point dans l'espace de phase, espace des positions-vitesses. C'est un tout petit lieu, impossible à dessiner car n'ayant, selon Euclide, pas d'intérieur. En langage moderne on dit que c'est un ensemble de mesure nulle. Partout ailleurs, c'est-à-dire "presque" partout, la dynamique est bien définie, les trajectoires sont uniques, sans ambigüité.

Cet exemple est caractéristique d'une famille de dynamiques qui sont définies "presque partout" et que nous allons décrire maintenant. Cette théorie va donner un sens à la dynamique sous la seule condition que le champ de vecteur, c'est-à-dire la donnée du vecteur tangent à la trajectoire, soit *à variation bornée*, c'est-à-dire que l'on s'autorise que le champ de vecteur ne soit pas continu dans la variable d'espace, mais, essentiellement, puisse avoir des sauts de hauteur finie entre deux points infinitésimalement proches, par exemple la célèbre fonction de Heaviside (mais pas sa dérivée !). Passons sur les détails techniques : il se passe pour cette classe de potentiels ce que nous avons décrit plus haut dans le cas particulier du potentiel $-|x|^{1+\theta}$: la dynamique est bien définie "presque partout".

Nous voilà donc au cœur du presque : si l'on tire au hasard une position et vitesse initiales, alors avec probabilité 1 la dynamique sera bien définie. Si l'on songe maintenant à incarner l'espace à partir des trajectoires dynamiques, on voit que l'espace, union des trajectoires, est un espace non plus de points bien rangés les uns à côté des autres, mais véritablement un espace habité par la dynamique singulière, ou plutôt : l'espace est la partie régulière de cette dynamique qui serait singulière si on la voyait dans l'espace banal tout entier. Nous sommes maintenant face à un tournant épistémologique, paradigmatique même : l'espace dépend de la dynamique qu'il engendre. Non pas seulement du type de dynamique, comme l'était l'espace ordinaire, mais de la dynamique elle-même, deux potentiels différents générant a priori deux "presque partout" différents. Car, si cette dynamique est bien engendrée par l'espace ordinaire, en ce sens que l'équation (au sens large) la définissant (la donnée de l'équation de Newton où bien du champ de vecteurs tangents en chaque point) est bien définie partout, dans TOUT l'espace "ordinaire", les solutions elles-seules sélectionnent la partie régulière de l'espace.

Au fond on pourrait arguer que la situation n'est pas tellement différente de la situation "KAM" dans la section précédente : les tores KAM aussi définissent, selon nous, un espace généré par la dynamique.

Mais deux différences séparent les deux constructions (ainsi d'ailleurs que 35 ans de l'histoire des mathématiques).

Tout d'abord la structure de l'ensemble des tores KAM est bien connue géométriquement ; c'est celle d'un ensemble de Cantor, limite d'espaces ouverts. L'espace dont nous venons de parler pour les dynamiques singulières ne peut être appréhendé que par la théorie de la mesure, du presque partout.

Deuxièmement, et de façon plus importante à nos yeux, les tores KAM sont définis et fixés pour la dynamique à tout temps ; si l'on compose les flots ainsi obtenus, si l'on s'arrête puis repart à partir du nouveau point du tore KAM où l'on s'était arrêté, alors tout repart de plus belle. On a donc une transitivité locale, en chaque point. Pour la dynamique singulière, elle, s'il est vrai que pour presque tous les points de départ la dynamique existe pour tout temps, la fait de s'arrêter et de repartir donne bien lieu à une dynamique totale, composée des dynamiques avant et après l'arrêt, qui existe aussi presque partout, ce nouveau "presque partout" n'a rien à voir avec ceux des deux dynamiques précédentes. Non seulement l'espace est défini d'après sa dynamique, mais le label de "bons points" attribué aux points initiaux donnant lieu à une dynamique bien définie est redistribué dès que l'on s'arrête. Si ce fait nous semble difficile à comprendre, c'est qu'il est contrintuitif vu depuis notre conception classique de l'idée d'espace. Cette construction donne une idée d'un espace défini par un survol, là mais vu de loin, un espace lointain en quelque sorte, ressemblant aux accords pianissimo du début du deuxième concerto de Rachmaninov joués par Sviatoslav Richter, sons cuivrés qui sonnent comme des cloches tonitruantes et lointaines.

Un espace que l'on ne peut plus véritablement définir comme espace de points, sous-espace de l'espace usuel : **la dynamique est définie presque partout, un point c'est tout**.

Nous avons donc vu dans les deux sections précédentes deux types de ce que nous voudrions quand même appeler espace : l'espace des tores KAM, sous-espace de type Cantor de l'espace ordinaire, et un espace régularisé, défini "intrinsèquement presque partout" et ne pouvant donc pas se détacher de la théorie de la mesure. Au fond, cet espace est défini par des espaces de fonctions de type Lebesgue là où un espace géométrique ordinaire est défini par une algèbre de fonctions continues. Nous allons voir dans la section suivante comment la définition de la dynamique à temps infini va nécessiter un espace de fonctions muni d'une loi de multiplication abandonnant l'a priori bien naturelle propriété de commutativité.

5. Limite classique et temps infini

Nous avons vu dans les deux sections précédentes comment certaines con traintes imposées à la dynamique pouvaient influencer la qualité, et même la nature de l'espace sous-jacent. Nous avons aussi vu comment de telles dynamiques arrivaient à être définies, bien définies même, pour tout temps, de l'origine à l'infini. Mais l'infini **exclu**. Le point à l'infini temporel a, jusque là, toujours été soigneusement évité et nous allons discuter dans cette section la raison de cette exclusion et la difficulté à l'éviter, ainsi que le changement de paradigme nécessaire pour y remédier. Nous allons nous placer dans un cadre différentié par rapport aux deux exemples précédents : la dynamique ne sera pas proche de l'intégrable et elle sera définie par des équations tout à fait régulières. Point de dynamique singulière ici, la dynamique existera gentiment, sur l'espace habituel qui nous est familier pour tout temps, pour **toutes** les conditions initiales, c'est-à-dire pour tous les points. La structure de l'espace restera pour tout temps $< \infty$ celle que nous connaissons bien.

Mais nous allons "pousser" la dynamique jusqu'à ses derniers retranchements classiques, jusqu'au temps infini. Nous allons alors apercevoir ce que nous allons appeler une **évaporation** de la structure : chaque trajectoire va commencer à s'épaissir jusqu'à malmener tellement l'idée de point qu'il nous faudra l'abandonner. Cette vaporisation du point nous entrainera vers de nouveaux paradigmes que nous allons décrire, mais surtout elle fera apparaître plusieurs strates dans le point à l'infini du temps ainsi étudié, et ainsi **déconstruit**, cette déconstruction spatiale créant par là-même une **reconstruction** de l'espace.

Nous expliquerons cette *évaporation-déconstruction-reconstruction* du spatiotemporel dans le cas des systèmes chaotiques par la description desquels nous allons commencer.

La grande découverte par Poincaré, à la fin du XIXième siècle, de la nécessité d'abandonner la notion d'intégrabilité lors de perturbations de celle-ci, dont nous avons déjà parlé, a libéré du carcan laplacien toute une branche de la science moderne : puisqu'intégrabilité il n'y a plus alors tout serait permis, même le meilleur. Et le meilleur va se trouver être à l'opposé de l'intégrable, dans le chaos.

Qu'est-ce qu'un système chaotique ?

Nous n'allons pas donner ici de définition précise exhaustive, trop technique. Disons simplement que la définition contient la notion, assez familière maintenant sous son aspect "papillon", de **sensibilité aux conditions initiales**.

Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales n'est au fond que l'adage

petites cause, grandes conséquences

avec une quantification précisée du petit et du grand. Elle s'exprime mathématiquement, pour une dynamique donnée par un flot $x \to \Phi^t(x)$, par la formule

$$\exists I \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall \epsilon > 0,\ \exists t = t(I,\epsilon) \text{ tel que } \exists x, |x-y| \leq \epsilon, \text{ tel que } |\Phi^t(x) - \Phi^t(y)| \geq I.$$

que l'on peut "lire" comme suit :

pour toute grandeur et tout condition initiale données à l'avance, il existe une autre condition initiale aussi proche que l'on veut de la première qui va en être séparée au bout d'un certain temps de la grandeur donnée à l'avance.

On voit donc ici apparaître l'idée d'un "petit" devenant "grand". L'articulation est en fait la suivante :

$\exists I$	un effet "grand"
$\forall \epsilon > 0$	une cause aussi petite que l'on veut
$\exists t$	à condition d'attendre suffisamment longtemps
$\exists x, \lvert x-y\rvert \leq \epsilon$	il y a une cause petite qui ...
$\lvert\Phi^t(x)-\Phi^t(y)\rvert \geq I$	... cause le grand effet.

Ainsi le petit point paradigmatique mais idéalisé de l'espace usuel risque-t-il, à peine grossi c'est-à-dire redevenu réel en fait, de devenir un grand objet après avoir évolué assez longtemps. Et si l'on attend infiniment le grossissement pourra être infinitésimal lui aussi. C'est ce passage à la limite que nous allons expliquer maintenant.

La théorie moderne des systèmes dynamiques (Anosov) va nous fournir une information supérieure quand à la nature de grand objet. Associée à un point y on définit la variété instable Λ_y définie comme l'ensemble des points qui sont en quelque sorte issus de y au bout d'un temps $+\infty$, et que l'on formalise en disant que ce sont les points qui, si l'on remonte le temps jusqu'à $-\infty$, s'identifient avec l'évolution de y. Plus précisément, voyons comment cela fonctionne pour une dynamique encore une fois donnée par un flot $x \to \Phi^t(x)$. Par définition

$$\Lambda_z := \{x / |\Phi^{-t}(x) - \Phi^{-t}(y)| \to 0 \ \text{ quand } t \to \infty\}.$$

Mais si l'on garde l'idée d'un flot "infini", on peut (très) formellement "inverser" la phrase $\Phi^{-t}(x) - \Phi^{-t}(y) \to 0$ quand $t \to \infty$. Et l'on obtient le schéma suivant :

$$\Phi^{-t}(x) - \Phi^{-t}(y) \to 0 \ \forall x \in \Lambda_y \text{ quand } t \to \infty$$

$$\Updownarrow \text{ (passage à la limite)}$$

$$\Phi^{-\infty}(x) = \Phi^{-\infty}(y), \ \forall x \in \Lambda_y$$

$$\Updownarrow \text{ (composition par } \Phi^{+\infty} \text{ comme s'il existait)}$$

$$\Phi^{+\infty} \circ \Phi^{-\infty}(y) = \Phi^{+\infty} \circ \Phi^{-\infty}(x),\ \forall x \in \Lambda_y$$

$$\Updownarrow \text{ (considérant } \Phi^{+\infty} \text{ comme l'inverse de } \Phi^{-\infty}\text{)}$$

$$y = x,\ \forall x \in \Lambda_y$$

$$\Updownarrow \text{ (notation ensembliste)}$$

$$y = \Lambda_y$$

Le point y est devenu Λ_y.

Bien sûr ce raisonnement est fantaisiste puisqu'il utilise le fait que le flot à temps infini puisse être traité comme si c'était un flot ordinaire. Mais il suggère le fait que, si tel était le cas, alors un point devrait devenir un objet plus gros. La Mécanique Quantique va nous fournir un scénario réalisant cela : il consiste à tout d'abord grossir le point y pour en faire une petite boule $\mathcal{B}_y$ de volume de l'ordre de la constante de Planck $\hbar$ (inégalités de Heisenberg), puis à déformer cette boule jusqu'à obtenir un objet étendu et très fin Ω_y, et à faire alors tendre à nouveau $\hbar$ vers zéro en supprimant l'épaisseur de Ω_y tout en gardant son étendue et obtenir ainsi Λ_y. L'art de la pâtisserie napolitaine fait cela admirablement dans les “sfoliatine” dont chacune des mille feuilles est si légère qu'elle semble provenir d'une boule infinitésimale de pâte.

On démontre dans la théorie des systèmes dynamiques que Λ_y a une structure, pour chaque point y : ce n'est pas seulement un ensemble défini par sa définition, c'est aussi une variété (lagrangienne, tout comme sont lagrangiens les tores KAM), c'est-à-dire un lieu géométrique. Un lieu géométrique s'identifiant à un point grâce à l'évolution longue, puisque les deux se confondent lors de ladite évolution. C'est donc une classe d'équivalence. Deux points sur une même variété Λ_y ne peuvent pas être distingués si on les regarde après une évolution longue, infinie.

Voilà donc ce que doit être notre nouvel espace, celui qui survit à l'évolution à temps infini : ce doit être l'ensemble de ces variétés Λ_y, l'ensemble des feuilles de ce feuilletage. Tout comme les tores d'un système intégrable forment un feuilletage lagrangien, une matroïskaia. Mais il y a une différence essentielle avec le cas intégrable : les feuilles maintenant ne sont plus compactes, elles sont même denses dans l'espace de phase (en fait sur la surface d'énergie) et le feuilletage n'est plus une fibration. D'où le manque de topologie de cet ensemble de feuilles. Le lecteur pourra se faire une idée gourmande sur la différence entre feuilletage et fibration en comparant la susmentionnée sfoliatine napolitaine avec un mauvais (et malheureusement générique) millefeuilles parisien.

La géométrie non commutative donne le bon formalisme pour comprendre un tel ensemble de feuilles d'un feuilletage. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Le point de départ est au fond assez proche des considérations de la section 4 : il consiste à appréhender l'ensemble que l'on veut étudier par l'ensemble des fonctions définie sur un tel ensemble. On sait depuis Gelfand que l'algèbre des fonctions continues sur une variété détermine celle-ci : si l'on connait assez d'observables, de regards sur une variété on la connait totalement. Cette vision a le bonheur de bien "passer" au quotient, situation qui nous intéresse dans le cas du feuilletage instable que nous avons juste défini. Qu'est ce qu'une fonction sur un ensemble quotient ? C'est une fonction sur l'espace original qui est invariante par la relation d'équivalence, autrement dit en ce qui nous concerne, une fonction constante le long des feuilles du feuilletage. Or on s'aperçoit aisément qu'une fonction à la fois continue et constante le long de sous-variétés denses n'a plus que le choix d'être constante partout. Ainsi donc l'algèbre des fonctions continues sur cet espace que nous cherchons et qui est l'ensemble de feuilles du feuilletage instable est réduite aux fonctions constantes, elle ne donne aucune information. C'est là le manque de topologie dont nous parlions plus haut.

Ainsi l'idée naïve que nous avons suivie nous mène à une impasse : l'ensemble des points devenus variétés instables, appréhendé par les méthodes de la topologie classique, puisque tout est classique ici, est inexistant, trivial.

Ce que nous dit la géométrie non commutative, en dehors de toute considéd ration de la théorie des systèmes dynamiques, est que l'on doit changer cet espace benêt des prétendues fonctions continues en une autre algèbre, non commutative cette fois. Dans ce nouveau paradigme une nouvelle topologie se met en route, et l'on retrouve la plupart des outils indispensable à l'analyse. C'est le bon point de vue.

C'est le bon point de vue, mais comment le dériver à partir du paradigme de la mécanique classique, des EDO, de l'espace classique ?

On s'aperçoit d'ailleurs facilement que la dynamique classique elle-même nous conduit à cette impasse : en effet on peut très bien étudier la dynamique classique par son action sur les fonctions. La dynamique classique agit sur les fonctions par composition par le flot. On associe à une observable $\mathcal{O}$, fonction sur l'espace de phases, son "évoluée" à temps t, $\mathcal{O}^t$, sous la forme

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^t := \mathcal{O} \circ \Phi(t).$$

Et l'on voit bien que si $y' \in \Lambda_y$ alors, pour t grand, $\Phi^{-t}(y') \sim \Phi^{-t}(y)$ et donc, à la limite,

$$\mathcal{O}^{-\infty}(y') = \mathcal{O}^{-\infty}(y)$$

c'est-à-dire que $\mathcal{O}^{-\infty}$ est bien constant sur Λ_y.

Comment obtenir une démarche non commutative à partir d'une théorie fondamentalement commutative ? Une réponse viendra, bien sûr, de la Méca nique Quantique, et du souvenir que la Mécanique Classique n'est qu'un bord de la théorie quantique.

La Mécanique Quantique utilise des opérateurs là où la Mécanique Classique utilise des fonctions : la quantification associe naturellement des opéra teurs à des fonctions sur l'espace de phase, et la limite classique "retrouve" ces fonctions comme symboles de ces opérateurs (on aurait tort de ne voir là que de la physique, on a compris depuis longtemps que cette dynamique de quantification est très riche pour les mathématiques pures, qui a généré des objets tels que les groupes quantiques et la théorie des nœuds). La dynamique classique agit sur les fonctions par composition par le flot alors que la dynamique quantique conjugue des opérateurs par des opérateurs unitaires. Le principe de correspondance et son pendant mathématique nous disent maintenant que le symbole d'un opérateur qui a évolué quantiquement n'est rien d'autre, lorsque $\hbar \to 0$, que le symbole initial évolué par le flot classique, c'est-à-dire composé par lui. On a donc un diagramme commutatif

évolution à temps t

$$\begin{array}{ccccc} O & \longrightarrow & O^t & = & U(t)^{-1}OU(t) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}^t & = & \mathcal{O} \circ \Phi^t \end{array}$$

mais ce digramme se déchire lorsque le temps devient grand, infini. On a ainsi

évolution à temps t grand

$$\begin{array}{ccccc} O & \longrightarrow & O^t & = & U(t)^{-1}OU(t) \\ \updownarrow & & \circlearrowleft & & \\ \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}^t & = & \mathcal{O} \circ \Phi^t \end{array}$$

Plus exactement on a :

$$\textit{évolution à temps } t \sim \infty$$

$$\begin{array}{ccccl} O & \longrightarrow & O^t & = & U(t)^{-1}OU(t) \\ \updownarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O} & \not\twoheadrightarrow & ? & \neq & \mathcal{O} \circ \Phi^t \end{array}$$

Et ce qui est à la place du point d'interrogation dans le diagramme précé dent est justement un objet non commutatif, obtenu par limite classique de la non commutativité quantique, que l'on ne peut obtenir depuis la Mécanique Classique seule et qui est précisément un objet dans la géométrie non commutative du feuilletage instable que nous cherchions tout à l'heure.

Ainsi donc l'espace devient non commutatif lors de l'évolution à temps infini par le détour quantique. Il s'évapore et se recristallise en un espace non commutatif par le passage quantique.

Il est difficile d'aller plus loin en quelques lignes dans la technique nécessaire à la description de cet espace des feuilles du feuilletage instable fourni par la dynamique, mais remarquons simplement que les variétés stables et instables sont des variétés invariantes par le flot (cela résulte simplement de la transitivité du flot). L'espace du flot à temps infini, ainsi obtenu à travers le détour quantique, est donc aussi un espace hérité de la dynamique classique à tout temps. Mais c'est un espace qui n'hérite pas de la structure naturelle de l'espace absolu habituel, celui de Newton et de Kant. Ce n'est pas un espace de points au sens traditionnel du terme, mais un espace qui ne retient, ne mémorise sur un temps infini que ce qui reste identique lors de l'évolution, comme si tout autre structure était instable par la dynamique à temps infini, en raison des propriétés chaotique, propriétés qui rendent l'ensemble des structures stables très compliqué.

L'espace du point temporel à l'infini n'est plus l'espace habituel des trajectoires de la dynamique. L'espace habituel lors de son évolution longue s'est tout d'abord évaporé, déconstruit puis s'est recristallisé, reconstruit en un nouvel espace. L'espace habituel longtemps mu se reconstruit finalement en l'espace non commutatif de ses **invariants.**

6. Conclusion : EDOs contre EDPs ou l'espace des mouvements de la structure "espace"

Qu'est-ce qu'un espace ?

Nous avons tenté dans cet article de présenter trois éléments structurants de la notion d'espace. Au centre était, section 4, la notion d'espace comme lieu de la solution non ambigüe de la dynamique dans le cas où celle-ci n'est pas bien définie. C'était le cœur en quelque sorte de notre discussion : dis-moi si tu te meus bien et je te dirai où tu es. Avant cela, nous avons présenté le lieu des mouvements stables. Cette construction, dans notre vision moderne, semble n'être qu'une partie du lieu de la dynamique habituelle, régulière cette fois, mais non intégrable bien que proche de l'intégrable. À l'opposé de cette dernière est la situation de la dynamique chaotique à temps infini. Ces trois situations s'articulent autour de la situation habituelle certes, mais rare, d'une dynamique régulière partout et toujours définie, comme relevant du "presque partout" pour la dynamique irrégulière, du "Cantor" pour la dynamique presque intégrable, et du "non commutatif" pour la dynamique chaotique à temps infini. Nous allons développer ici l'idée que ce sont là trois façons de voir l'espace premier, trois regards différents sur un espace habité par une dynamique (équation différentielle ordinaire, EDO) soit irrégulière, soit à qui on demanderait l'impossible (intégrabilité), soit encore à qui on demanderait de conserver un sens lors d'un asymptotisme temporel infini (chaos). Ces trois regards correspondront à une régularisation de ces pathologies, régularisation par une équations aux dérivées partielles (EDP) : équation de Hamilton-Jacobi pour les tores KAM, équation de Liouville pour le presque partout et équation de Schrödinger pour le temps infini.

Quelle est la différence entre une EDO et une EDP ? La différence réside justement dans le lieu où porte l'aspect différentiel. Pour une EDO on ne différentie que le temps : le mouvement juste après est déterminé par la position juste avant, de façon strictement locale. Dans une EDP on différentie aussi dans l'espace. Nous y voilà : le mouvement (généré par une équation) dans le temps est aussi un mouvement (généré par une équation) dans l'espace. Et il se trouve que vouloir que la solution reste régulière dans le paramètre temps a nécessité de malmener l'espace.

D'où ces trois fausses "dégénérescence" mais vrais mouvements de la notion d'espace : presque partout, Cantor et non commutatif.

C'est notre besoin de préserver le temps, de rendre en particulier unique l'évolution temporelle, de la garder stable, de la comprendre jusqu'au temps infini *inclus* qui nous force à reconsidérer notre vision de l'espace : non plus habitat traditionnel de la dynamique en général, mais lieu d'une dynamique caractérisée, ayant des propriétés définies à l'avance, bref le lieu d'une dynamique mesurée par nos propres fantasmes.

Appendice

Le vierge, le vivace et le bel aujourd'hui ...

Le vierge, le vivace et le bel aujourd'hui
Va-t-il nous déchirer avec un coup d'aile ivre
Ce lac dur oublié que hante sous le givre
Le transparent glacier des vols qui n'ont pas fui !

Un cygne d'autrefois se souvient que c'est lui
Magnifique mais qui sans espoir se délivre
Pour n'avoir pas chanté la région où vivre
Quand du stérile hiver a resplendi l'ennui.

Tout son col secouera cette blanche agonie
Par l'espace infligée à l'oiseau qui le nie,
Mais non l'horreur du sol où le plumage est pris.

Fantôme qu'à ce lieu son pur éclat assigne,
Il s'immobilise au songe froid de mépris
Que vêt parmi l'exil inutile le Cygne.

Stéphane MALLARME (1842-1898)

Références

[1] L.Ambrosio : *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields.* Invent. Math., **158** (2004), 227–260.

[2] V.I. Arnold' : *Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on teh preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Russian math. Surveys **18** (1963), 9-36.

[3] V.I. Arnold', A. Avez : *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Dunod, Paris, 1965.

[4] A.Athanassoulis, T.Paul : *Strong and weak semiclassical limits for some rough Hamiltonians* arXiv :1011.1651v2

[5] F.Bouchut : *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation.* Arch. Ration. Mech. Anal., **157** (2001), 75–90.

[6] P. Cartier : *La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich*, dans "Les relations entre les mathématiques et la physique théorique", I.H.E.S., 1998.

[7] A. Connes : *Noncommutative geometry*, Academic Press, Inc, (1994).

[8] R.J.DiPerna, P.L.Lions : *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math., **98** (1989), 511–547.

[9] N. Kolmogoronv : *The general theory of dynamical systems and classical mechanics*, Proceedings of the international Congress of mathematicians, Amsterdam 1954, North-Holland.

[10] P.L.Lions, T.Paul : *Sur les mesures de Wigner.* Rev. Mat. Iberoamericana, **9** (1993), 553–618.

[11] J. Moser : *On invariant curves of area preserving of an annlus*, Nach. Akad. Wiss. Góttingen, math. phys. Kl IIa, (1962), 1-20.

[12] T. Paul, Semiclassical approximation and noncommutative geometry, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1177-1182.

CNRS et CMLS, École polytechnique
E-mail address: paul@math.polytechnique.fr