

À PROPOS DU FORMALISME MATHÉMATIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

THIERRY PAUL

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Axiomes	3
3. Intrication-Aléatoire-Décohérence	10
L'intrication et le feu rouge	10
L'algorithme de la téléportation	11
Intrication et algorithmie quantique	13
Conclusion	15
L'aléatoire et l'intrinsèque	15
Aléatoire-précision contre déterminisme-imprécision	16
Mesure et perte d'information	16
Le temps	16
La décohérence et l'extrinsèque	17
Matrices densité	17
4. Retour et non-retour vers le classique	19
La limite semi-classique	19
Retour vers le classique	21
Non-retour vers le classique	23
Conclusion	23
5. Conclusion	24
6. Appendice	25
Références	27

L'ordinateur a cela de supérieur à l'homme qu'il peut tout oublier.

Georges Perec

1. INTRODUCTION

Bernard Teissier nous a montré comment notre façon de percevoir l'espace ambiant pouvait influencer la création de concepts mathématiques, pourtant par définition abstraits, et comment par exemple la notion si “mathématique” de droite puisait ses racines dans le phénomène (biologique) de la vision et du déplacement dans l'espace. Le formalisme de la mécanique quantique a la réputation d'être abstrait, et est même parfois présenté comme contrintuitif.

Nous voudrions dans cet article présenter le formalisme *mathématique* de la mécanique quantique dans sa prétendue abstraction, et montrer, en particulier, que ses notions caractéristiques telles que superposition, intrication, trouvent aussi un écho dans notre vécu quotidien. Ces exemples ne seront pas des analogies au sens où tout se passerait comme si, mais bien des situations, réelles, où nous nous trouvons confrontés à de tels phénomènes, à de telles notions abstraites. Le but sera avant tout de nous familiariser avec le formalisme en relation avec des situations connues.

Mais attention, si le formalisme quantique se laisse “apprivoiser” de la sorte, il ne se laisse absolument pas dominer par la situation classique : la mécanique quantique nous présente un changement ontologique profond, irréversible, et on ne trouvera rien dans les lignes qui suivent qui pourraient ni réduire le monde quantique au monde classique, ni ramener des considérations philosophiques issues des idées quantiques à un cadre de pensée traditionnel. Il nous semble que, lorsque l'on dit que la mécanique quantique est contrintuitive, ce n'est pas que l'on ne peut la formuler en termes (prétendus d'ailleurs) intuitifs, mais qu'on ne va pas chercher assez loin dans son intuition, y compris son intuition de tous les jours. Ce n'est en aucun cas la faute à la mécanique quantique, c'est la faute à notre intuition.

AVERTISSEMENT

Cet exposé se propose de présenter le formalisme mathématique de la Mécanique Quantique. On y trouvera donc peu de physique. De plus on trouvera dans les lignes qui suivent un mélange entre texte et formules mathématiques de façon à ce que les objets mathématiques soient définis dans leur langage propre (d'une manière élémentaire, espérons-nous) et présentés dans la langue vernaculaire.

2. AXIOMES

Nous allons passer en revue les 4 axiomes de la formulation dite "de Copenhague" (en fait dus à von Neuman [1]) de la mécanique quantique.

- Axiome 1 : *un système physique est décrit par un vecteur (état) appartenant à un espace de Hilbert \mathcal{H} .*

Un espace de Hilbert de dimension finie est avant tout un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En dimension infinie c'est un espace de Banach, espace normé complet, dont la norme est donnée par un produit scalaire, $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$, c'est-à-dire que l'on peut associer à un vecteur sa longueur, et à deux vecteurs un angle. En particulier deux vecteurs peuvent être orthogonaux, ce qui donne à l'espace une notion de dimension.

L'aspect vectoriel est tout à fait fondamental ici, et le + qu'il contient s'exprime dans le célèbre principe de superposition : la somme de deux états (possibles) est un état (possible).

On associe très souvent au principe de superposition (dans le cadre des systèmes *matériels* c'est-à-dire en dehors des phénomènes ondulatoires) un aspect caractéristique de la mécanique quantique. Il n'y aurait que les situations quantiques qui présenteraient ce principe. En fait on peut trouver bien des situations où la superposition de deux informations crée la surprise. Un tel exemple est le phénomène de la vision. La troisième dimension nous est accessible, en dehors du sens tactile, par superposition de deux informations planaires reçues dans chaque œil (notons le lien entre ces considérations et l'exposé de Bernard Teissier à ce même colloque). Bien sûr nous voyons aussi en 3 dimensions avec un seul œil, grâce à la mémoire, mais pour bien comprendre, en dehors de tout aspect psychologique inhérent à notre pensée, l'effet stéréoscopique, prenons l'exemple du cinéma 3D, cinéma *en relief* comme on disait dans les années 50 ¹.

¹il est amusant de noter la grande diversité de l'usage des lunettes polarisantes dans la création artistique récente, telle qu'elle a été présentée à ce colloque.



Nous illustrerons au cours de cet article bien des concepts de la mécanique quantique à l'aide de cet exemple. Formalisons.

Un système de cinéma 3D consiste en un écran (2D), une paire de lunettes polarisantes et un appareil de projection qui projette deux films (sur l'écran 2D), chaque film étant projeté dans une lumière polarisée qui ne traverse un et un seulement verre des lunettes. Lors de la projection, chaque œil reçoit donc une image différente (effet stéréo). C'est donc bien la superposition des ces deux images qui crée la troisième dimension.

On pourra d'ailleurs noter que ce phénomène de création de la troisième dimension par superposition est un fait qui prend ses racines pratiquement dès la création de la photographie : voir à ce propos le beau catalogue de l'exposition "Paris en 3D" du musée Carnavalet ([2]). On trouve aussi dans ([2]) des lunettes qui permettent de voir à 3D des images du XIX^{ème} siècle. L'expérience est intéressante : lorsque l'on regarde en "stéréoscopie" on commence par voir deux images bi-dimensionnelles, qui convergent au bout de quelques secondes en une image 3D : on voit donc en temps réel opérer la magie, et le principe de superposition agir.

La Mécanique Quantique opère de même : la pratique technique fait apparaître une "ontologie" de la superposition, et le formalisme nous donne les moyens de manipuler de tels objets quantiques, superposition de deux objets classiques.

• Axiome 2 : l'évolution au cours du temps d'un système physique (hors mesure, c'est-à-dire sans intervention d'un observateur) est donnée par un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires $U(t)$, généralement dérivé d'une équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H U(t)$$

où H est un opérateur symétrique (auto-adjoint) sur \mathcal{H} .

Explicitons un peu. Tout vecteur v d'un espace vectoriel de dimension n se décompose sur une base, s'identifiant par là même à un vecteur $\{v_i\}_{i=1\dots n}$ de \mathbb{C}^n . Un opérateur linéaire agit alors comme une *matrice*, c'est-à-dire une collection de n^2 nombres $\{u_{ij}\}_{i,j=1\dots n}$ par la formule

$$\{v_i\} \rightarrow \{v'_i\} \quad : \quad v'_i := \sum_{j=1\dots n} u_{ij} v_j.$$

Un opérateur auto-adjoint est tel que

$$u_{ij}^* := \overline{u_{ji}} = u_{ij}$$

et un opérateur *unitaire* est tel que son adjoint est son inverse, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1\dots n} \overline{u_{ji}} v_{jk} = \delta_{ik}$$

où δ_{ik} est la matrice identité ($\delta_{ik} = 0, i \neq k, \delta_{ii} = 1$)².

Les mathématiques nous donnent un moyen graphique de représenter cette multiplication. On “range” les nombres u_{ij} dans un tableau $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Un vecteur est représenté par la “matrice” $1 \times n$:

²le lecteur qui aurait du mal avec ces notations mathématiques doit se souvenir qu'elles n'ont rien d'évident. Lorsque Heisenberg a eu l'intuition de l'usage de la multiplication matricielle dans la physique (quantique), il ne savait pas ce qu'était une matrice et il a fallu l'expérience de Max Born pour “reconnaître” une théorie déjà ancienne.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

et le lecteur peut vérifier que la multiplication précédente devient alors la multiplication *ligne-colonne* :

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Le fait que l'équation de Schrödinger soit linéaire est surprenant, et, bien sûr, surprend les contemporains de Schrödinger.

En fait un théorème célèbre de Wigner donne lui aussi une justification à l'aspect linéaire et unitaire. Il concerne les symétries et peut être formulé comme suit [7], [9], [10] :

Théorème 2.1. *soit une application surjective \mathcal{A} d'un espace de Hilbert dans lui-même $v \rightarrow v' := \mathcal{A}(v)$ tel que*

$$|\langle v', u' \rangle|^2 = |\langle v, u \rangle|^2$$

En particulier on ne suppose pas \mathcal{A} linéaire, ni unitaire.

Alors $v' = \varphi(v)Uv$ avec $|\varphi(v)| = 1$ et

- soit U est linéaire et unitaire ($U(au + bv) = aU(u) + bU(v)$ et

$\langle U(v_1), U(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$)

- soit U est antilinéaire et antiunitaire ($U(au + bv) = \bar{a}U(u) + \bar{b}U(v)$ et

$\langle U(v_1), U(v_2) \rangle = -\langle v_1, v_2 \rangle$).

Démonstration. la preuve du théorème de Wigner (en dimension finie) n'est pas difficile, mais est un peu fastidieuse. Donnons-en une idée.

On commence par choisir une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\{v_i\}_{i=1\dots}$. On en déduit que $|\langle v'_i, v'_j \rangle|^2 = \delta_{ij}$. Mais, puisque $\langle v'_i, v'_i \rangle = 1$, on a donc que $\langle v'_i, v'_j \rangle = \delta_{ij}$. Il est immédiat de voir que les v'_i forment une base de l'espace.

Soit maintenant $V_k := \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_k)$. Alors $V'_k = \sum_i c_{ki}v'_i$. On voit facilement que $|c_{kk}| = |c_{11}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $c_{kl} = 0$ si $k \neq l$ et $l \neq 1$. Lors du choix de la base $\{v_i\}_{i=1\dots}$ on peut toujours changer chaque vecteur par une phase, et cette

liberté permet de pouvoir prendre $c_{kk} = c_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour un tel choix on définit $UV_k := V'_k$ et $Uv_k = v'_k$. On a donc ;

$$U \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_k) = UV_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(Uv_1 + Uv_k).$$

Il reste à définir Uv pour tout v . Si $v = \sum C_k v_k$ on a, puisque les v'_k sont une base de l'espace, $v' = \sum C'_k Uv_k$. Mais puisque $|\langle v_k, v \rangle|^2 = |\langle Uv_k, v' \rangle|^2$ et $|\langle V_k, v \rangle|^2 = |\langle UV_k, v' \rangle|^2$, on obtient :

$$|C_k|^2 = |C'_k|^2, \quad |C_k + C_1|^2 = |C'_k + c'_1|^2$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{C_k}{C_1} = \frac{C'_k}{C'_1} \quad \text{ou} \quad \frac{C_k}{C_1} = \frac{\overline{C'_k}}{\overline{C'_1}}.$$

On montre alors que l'on peut faire, pour tous les k , le même choix dans l'alternative précédente. On définit alors U par :

$$\text{soit} \quad U\left(\sum C_k v_k\right) = \sum C_k Uv_k$$

$$\text{soit} \quad U\left(\sum C_k v_k\right) = \sum \overline{C'_k} Uv_k.$$

Il reste encore à montrer que le même choix peut être effectué pour un autre choix de coefficients C_k , et on a bien alors défini une transformation linéaire ou antilinéaire U . On montre alors aisément que U est soit unitaire, soit antiunitaire (respectivement). □

Ce théorème est fort : les hypothèses ne disent rien concernant la linéarité, que l'on peut voir comme une linéarité entre rayons (dans la géométrie projective). Signalons aussi que bien des tentatives de généraliser la mécanique quantique vers la non-linéarité, dans l'esprit que l'état actuel de la théorie ne serait qu'une approximation, une linéarisation, ont vu le jour, et ont été parfaitement décevantes.

- Axiome 3 : *L'espace des états d'un système constitué de deux parties correspondant à deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 est l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.*

Rappelons que le produit tensoriel de deux espaces vectoriels de bases $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $\{v_j\} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est l'espace vectoriel de base $\{w_{ij} := u_i v_j\}$. C'est donc un espace vectoriel de dimension $n \times m$. La signification est immédiate : l'espace des états d'un système comprenant deux sous-systèmes ne contient pas seulement les vecteurs produits, mais toutes leurs combinaisons linéaires, en particulier leurs sommes. La somme de deux vecteurs produits peut être, ou non, un produit elle-même. C'est le phénomène d'intrication que nous étudierons en détail plus tard. Signalons seulement la croissance exponentielle des dimensions lorsque l'on considère un système constitué de plusieurs particules. Prenons-en 100, chacune "vivante" dans un espace à deux dimensions. Alors la dimension de l'espace des états du système à 100 particules est

$$N = 2^{100} \sim 10^{33} \gg \text{le nombre d'Avogadro.}$$

Ainsi un ordinateur quantique à 100 bits quantiques contient beaucoup plus que l'information des positions et vitesses de chaque particule d'une môle de gaz.

• Axiome 4 : *Une mesure consiste en une observable (opérateur autoadjoint) \mathcal{A} pourvue, par le théorème spectral de sa décomposition spectrale $\mathcal{A} = \sum_l \lambda_l \Pi_l^* \Pi_l$, $\sum_l \Pi_l^* \Pi_l = Id$, Π_l projecteurs orthogonaux et $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Effectuée sur un système dans l'état v , le résultat de la mesure est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur λ_l avec probabilité $\|\Pi_l v\|$. De plus l'état du système immédiatement après la mesure (de résultat λ_l) est $v' := \frac{\Pi_l v}{\|\Pi_l v\|}$.*

Un projecteur est un opérateur (matrice) égal à son carré $\Pi_l^2 := \Pi_l \Pi_l = \Pi_l$ au sens de la multiplication des matrices vue plus haut. La norme d'un vecteur $v = \{v_j\}$ est égale à $\|v\| := \sqrt{\sum |v_j|^2}$ où $|\cdot|$ désigne le module d'un nombre complexe.

Cet axiome est certainement celui qui a fait coulé le plus d'encre. Nous en parlerons plus tard car il est important de le décrire en corrélation avec les 3 autres, mais continuons dès maintenant à le revisiter au moyen du cinéma 3D.



Très souvent un état est une superposition de deux vecteurs propres, superposition typiquement quantique, n'ayant pas d'analogie (en physique) classique. Il en est de même avec les lunettes : les deux images (états) qui traversent chacun des deux verres sont des images classiques (c'est à dire 2D), correspondant chacune à une image projetée. La vision est 3D est le résultat de la superposition de ces deux images, et effectuer la mesure "2D" c'est cacher un des deux verres. Alors la troisième dimension (quantique) disparaît et la main de Grace Kelly retourne sur l'écran.

Finissons par deux remarques concernant ces axiomes :

- tout d'abord leur grande cohérence (nous le discuterons plus tard). Ils contiennent en effet, et de façon cohérente, à la fois la cinématique et la dynamique quantique. Comment nous venons de le voir cette dynamique consiste en deux parties : une évolution (très) sage, unitaire, linéaire et le phénomène de la mesure, brutal et non déterministe. Il me semble que combiner les deux ³ dans un système cohérent est une grande réussite, d'une économie incroyable. Il faut bien comprendre que la cohérence dont il est question ici concerne à la fois la cohérence interne à chacun des deux types d'évolution et le fait que l'on puisse passer d'un type d'évolution à l'autre. Par exemple le fait que l'état juste après la mesure soit un vecteur propre signifie qu'une nouvelle mesure, effectuée immédiatement après, donnera "à coup sûr" le même résultat. D'autre part la succession des deux types d'évolution ne pose pas de problème, et l'on sait même maintenant faire évoluer des systèmes en effectuant des suites de mesures, chacune d'entre-elles déterminée par le résultat de la mesure précédente. Enfin l'aspect unitaire de l'évolution par l'équation de Schrödinger assure la conservation de la probabilité globale des événements intervenant dans la mesure.

Mais l'axiomatique ne dit rien sur celle des deux évolutions qu'il faut choisir en pratique : c'est alors un certain "bon sens" qui détermine lorsqu'un système est un appareil de mesure (macroscopique) ou un système quantique

³en 4 axiomes que l'on pourrait d'ailleurs peut-être, et d'une certaine mesure, voir comme recouvrant les 4 catégories de principes métaphysiques de la science de la nature kantienne (phoronomie, dynamique, mécanique et phénoménologie) ; c'est là une hypothèse qu'il faudrait vérifier.

(microscopique). C'est un trait de la théorie qu'il faille choisir "à la main" le statut de l'évolution qui convient à une situation précise. Ce choix est important, il fixe l'interface (constamment renouvelée) entre "nous" et la nature (quantique) et il est épistémologiquement très original.

- ensuite la puissance qu'une telle axiomatique dégage, puissance dont nous voyons à l'heure actuelle une trace dans l'informatique quantique et que nous commenterons plus tard.

3. INTRICATION-ALÉATOIRE-DÉCOHÉRENCE

Nous allons illustrer ces axiomes par 3 effets "modernes" de la théorie.

L'intrication et le feu rouge. Nous avons vu, lors de la description du 3ième axiome, qu'existent dans le produit tensoriel de deux espaces vectoriels des vecteurs qui ne se factorisent pas. On dit habituellement que ces états échappent à notre intuition, en ce sens qu'ils représentent une superposition d'états factorisés.

Avant de donner un exemple un peu technique et spectaculaire sur l'utilisation de cette intrication, demandons nous si ce phénomène est vraiment contraire à notre vécu quotidien. Lorsque nous arrivons à un feu à un carrefour nous sommes confrontés à deux possibilités : soit le feu est vert, soit il est rouge. Le feu va bien nous apparaître dans deux états, et l'on dit bien "le feu *est* vert ou rouge". En fait la raison pour laquelle nous passons au vert, et nous arrêtons au rouge, est que nous savons que si le feu est vert pour nous il est rouge pour les autres, et si il est en rouge pour nous, il est en vert pour les autres (l'en vert c'est les autres). Le feu est donc bien, pour nous, à priori, c'est à dire avant qu'on ne le regarde, dans un état ⁴

$$\frac{|nous, vert \rangle \otimes |eux, rouge \rangle + |nous, rouge \rangle \otimes |eux, vert \rangle}{\sqrt{2}}$$

Bien sûr nous ne voyons pas un tel état. Pour voir le feu il faut le regarder, et lorsqu'on le regarde, on projette cet état sur un des états factorisés, et le feu devient, par exemple, vert pour nous et rouge pour les autres ⁵.

C'est le même phénomène qui se produit lorsque

⁴on a l'habitude, depuis Dirac, de représenter un vecteur par un indice entouré de ']' et '>', c'est à dire que $|blabla \rangle$ est un vecteur de "nom" $blabla$, que l'on pourrait noter d'ailleurs v_{blabla} . L'intérêt et l'efficacité d'une telle notation se voient dans le passage à l'adjoint que l'on note $\langle blabla|$ ce qui permet de définir le produit scalaire de $|blabla \rangle$ avec $|blabla' \rangle$ par $\langle blabla'|blabla \rangle$.

⁵il faut bien comprendre que ce dont nous parlons ici concerne le feu tel que NOUS le percevons, et non pas le feu tel qu'il est organisé par la physique classique. Dans cette dernière approche nous savons bien qu'il y a une horloge qui tourne et qui fait se succéder des états du feu $|nous, vert \rangle \otimes |eux, rouge \rangle$ et puis $|nous, rouge \rangle \otimes |eux, vert \rangle$. Le



nous cachons l'un des verres de nos lunettes polarisantes.

Nous reviendrons là-dessus au sujet de la mesure, mais signalons tout de suite que, ici aussi, le formalisme quantique trouve une résonance dans le monde de tous les jours.

Les trois premiers axiomes trouvent une application spectaculaire dans le fameux effet abusivement dit de téléportation.

L'algorithme de la téléportation. On commence par deux personnages Alice et Bob qui possèdent chacun un qubit, les deux qubits étant intriqués dans un état "EPR"⁶ $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Alice possède un autre qubit $|\psi\rangle$ qu'elle va transmettre à Bob, en agissant seulement sur ses propres qubits (plus un canal classique qui lui permettra de transmettre un élément de $\{1, 2, 3, 4\}$).

Plus précisément l'état que l'on veut transporter est :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

où α et β sont des nombres complexes.

Les trois qubits (deux pour Alice, un pour Bob) sont dans l'état original :

$$|\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle$$

où $|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$.

On se place donc dans

$$\underbrace{H \otimes H}_{\text{Alice}} \otimes \underbrace{H}_{\text{Bob}}$$

où $H = \mathbb{C}^2$.

feu "en métal" est bien un objet classique. Le feu tel que nous le percevons, et tel qu'il dicte notre règle de conduite, ce feu-là me semble assez et partiellement quantique

⁶pour Einstein-Podolsky-Rosen

Lorsque Alice et Bob se séparent le système de 3 particules est donc dans l'état

$$\begin{aligned}
 |\Phi\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle (|00\rangle + |11\rangle)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha(|000\rangle + |011\rangle) + \beta(|100\rangle + |111\rangle))
 \end{aligned}$$

où l'on a fait la convention (immédiate) :

$$\left| \underbrace{\quad}_{\text{Alice}} \quad \cdot \quad \underbrace{\quad}_{\text{Bob}} \right\rangle .$$

Sur “son” $H \otimes H$ Alice fait agir la matrice suivante (porte C-NOT) :

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

Cela veut dire que l'on fait agir $U_{CNOT} \otimes \text{Id}$ (où Id est l'identité sur H) sur $|\Phi\rangle$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 |\Phi_1\rangle &=: (U_{CNOT} \otimes \text{Id}) |\Phi\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha(|000\rangle + |011\rangle) + \beta(|110\rangle + |101\rangle)).
 \end{aligned}$$

Ensuite elle fait agir sur son premier qubit une porte de Hadamard, c'est à dire la matrice :

$$H_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cela veut dire encore une fois que l'on fait agir sur $|\Phi_1\rangle$ la matrice $H_a \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 |\Phi_2 \rangle & =: (H_a \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}) |\Phi_1 \rangle \\
 & = \frac{1}{2}(\alpha (|0 \rangle + |1 \rangle)|00 \rangle + (|0 \rangle + |1 \rangle)|11 \rangle) \\
 & \quad + \beta (|0 \rangle - |1 \rangle)|10 \rangle + (|0 \rangle - |1 \rangle)|01 \rangle) \\
 & = \frac{1}{2}(|00 \rangle (\alpha|0 \rangle + \beta|1 \rangle) + \\
 & \quad |01 \rangle (\alpha|1 \rangle + \beta|0 \rangle) + \\
 & \quad |10 \rangle (\alpha|0 \rangle - \beta|1 \rangle) + \\
 & \quad |11 \rangle (\alpha|1 \rangle - \beta|0 \rangle)).
 \end{aligned}$$

Tous les α, β sont “passés” du côté de Bob. Que c’est-il passé en dehors de l’algèbre linéaire ?

Et bien le formalisme nous a permis, en n’utilisant que des actions linéaires, de transférer la partie intéressante de l’état, initialement du côté de chez Alice, vers le côté de chez Bob. On peut se convaincre facilement que faire la même chose à l’intérieur du paradigme classique est totalement illusoire.

Intrication et algorithmie quantique. Un algorithme consiste à transformer des bits 0001100101010....en d’autres bits 00001100101.... Un qubit (bit quantique) est un vecteur de l’espace des états, indicé par un bit classique. On le notera

$$|0001100101010 \rangle$$

On peut bien sûr définir une transformation unitaire qui fait passer du qubit $|0001100101010 \rangle$ au qubit $|00001100101 \rangle$, mais grâce à la structure linéaire de la théorie quantique on peut aussi avoir des transformations du type

$$|0001100101010 \rangle \rightarrow \frac{|0001100101010 \rangle + |00001100101 \rangle}{\sqrt{2}}$$

Un algorithme quantique est formé de telles transformations et..... d’une mesure finale qui donne, ou ne donne pas, le résultat. L’idée d’un algorithme quantique repose donc sur le fait que l’on puisse vérifier économiquement la véracité d’un résultat.

Un algorithme (classique) est une suite de nombres reliés par des opérations. De l’input à l’output des nombres se succèdent, reflet d’un calcul.

Les algorithmes quantiques associent à ces nombres des objets vectoriels, dont les nombres initiaux sont les labels, des étiquettes. Ces objets ont une

propriété immédiate et radicale : ils peuvent être *additionnés*. Mais cette addition n'a rien à voir avec l'addition des nombres, justement. C'est une addition dans un monde qui est inaccessible aux nombres, le monde des états quantiques. Un calcul classique peut se voir comme quantique, en remarquant que l'on peut agir sur les objets quantiques en agissant sur les étiquettes. mais le monde quantique est beaucoup plus grand, et immensément plus riche en calcul, et donc économe en temps de calcul.

On "revient" au monde "réel" (celui des nombres), on retrouve le résultat, l'output, par le processus appelé mesure qui est fondamentalement aléatoire. Le résultat d'un calcul quantique n'est donc pas acquis en principe, mais sujet à un aléatoire intrinsèque, irréductible. On s'arrange, bien sûr, pour avoir une grande probabilité que le résultat soit le bon ; dans le cas contraire on refait tourner l'algorithme. Cela ne marche donc que si le processus de vérification (du résultat) est facile et rapide.

Il me semble qu'il y a là quelque chose qui ressemble à ce que tout mathématicien vit au quotidien dans la construction de la preuve d'un résultat. Essayons de thématiser très informellement ce point. Les considérations quantiques que nous venons d'exposer suggèrent une démarche.

La preuve retenue d'un théorème, celle que l'on publie, n'a souvent rien à voir avec les ébauches de preuves, parfois totales, qui ont permis de l'élaborer. Le mathématicien se trompe (beaucoup)⁷.

Souvenons-nous qu'un algorithme quantique produit un vecteur Φ , superposition de plusieurs vecteurs ψ_i dont un contient le résultat du problème initialement posé. A la fin on effectue une mesure qui projette le vecteur Φ aléatoirement sur l'un des vecteurs superposés, avec, si possible, une grande probabilité que le vecteur choisi soit le bon.

Lorsqu'un mathématicien veut prouver un résultat, il essaie une preuve. Et cette preuve potentielle est aléatoire, il la vit comme ça. Bien sûr on évalue parfois les chances qu'a une preuve d'aboutir ("je suis sûr que ça va marcher", "tu vas dans le mur", "je suis sûr que ça marche pas, mais je veux comprendre pourquoi"), mais à la fin, et à la fin seulement, les probabilités sont réduites à 0 et 1 : la preuve marche ou ne marche pas.

Un exemple significatif est celui où l'on veut avoir un résultat de géométrie en dimension quelconque. On le montre à deux dimensions puis on le généralise à plus. On vérifie que le résultat est vrai à des dimensions plus grandes. Ça peut marcher, ou non.

On considère souvent (mais il y a débat sur ce point) l'ensemble des preuves comme constituant du sens d'un théorème (nous sommes là en pleine Géométrie de l'Interaction, il me semble). Mais on ne retient souvent que les

⁷bien sûr il y en a qui exagèrent.

preuves qui marchent. Ne faudrait-il pas aussi considérer toutes les preuves, les vraies et les fausses ? Ce nouvel ensemble a la saveur quantique. Il produit tout un ensemble de résultats, dont un est le bon, mais qui, chacun, a en soi son importance propre - certains donnant même lieu à des *conjectures*. L'aléatoire de la preuve est bien le vécu du mathématicien. Et ne croyons surtout pas que tout s'arrête lorsqu'une preuve qui marche est trouvée. Commence alors la souvent lente recherche d'une preuve meilleure, plus fine, plus naturelle, et tout recommence.

Si la logique, ses invariants, ceux que l'on peut penser de façon universelle, nous permettent d'atteindre un point dans le monde du raisonnement par le chemin le plus court, un modèle quantique de logique nous référerait à la pratique (du raisonnement) qui tend, à priori, non pas à dégager une géodésique dans l'ensemble des chemins possibles, mais à remarquer que tous les chemins possibles sont importants, leur superposition créant l'évènement. Cette *intégrale de Feynman sur l'ensemble des preuves*, ensemble de chemins d'un point à un autre (naïvement hypothèse et conclusion) devrait nous redonner une géodésique lorsqu'une certaine constante (équivalent à \hbar , et qui reste à définir) devient proche de zéro (théorème de la preuve stationnaire) [5].

Conclusion. L'intrication nous révèle que le monde quantique nous est inaccessible par le paradigme classique. Un état intriqué est tel que l'image à 3 dimensions dans le film de Hitchcock :



Nous ne pouvons toucher la main de Grace Kelly et pourtant elle existe bien là, sous nos yeux. De même nous ne pouvons que concevoir l'état intriqué du feu, lorsqu'il nous apparaît la magie est partie, le feu est vert ou rouge.

La projection vers le "réel" se fait par la mesure, brutalement, comme nous allons le voir.

L'aléatoire et l'intrinsèque. L'aléatoire de la mécanique quantique choque, il est en fait d'une sublime élégance.

Car il faut bien que quelque chose se passe pour que nous voyons les choses. Copenhague a choisi de nous les présenter au hasard, mais un hasard qu'on aurait tort de comparer au hasard classique, ce hasard frustrant qui pallie

notre manque de connaissance précise du monde. En Mécanique Quantique il n'y a pas de variable cachée, le phénomène de la mesure n'est pas une approximation : c'est un bloc dans la théorie, qui se fond magnifiquement au reste.

Aléatoire-précision contre déterminisme-imprécision. On dit souvent que la mécanique quantique est imprécise, alors qu'elle donne les résultats les plus précis (par exemple les raies spectrales) de toute l'histoire de la physique.

Ce fait est à mettre en miroir de la théorie classique où le déterminisme est total, et où la sensibilité aux conditions initiales rend les prédictions sûres mais imprécises. Ici ce qui est très précis c'est le jeu des possibles, les valeurs possibles du résultat de la mesure. Les "barres" d'erreur sont quasiment inexistantes. mais le déterminisme a disparu, là où il était total dans une théorie classique, où l'imprécision pouvait être totale à cause de la sensibilité aux conditions initiales.

Un algorithme quantique garde résiduellement une part d'aléatoire, mais cette souplesse, cette inflexion dans le dogme déterministe décuple sa puissance.

Mesure et perte d'information. Lors du phénomène de mesure le vecteur d'état est brutalement projeté sur un vecteur propre.

Notons que ce fait assure que, si l'on effectue à nouveau la mesure immédiatement après, on va retrouver la même valeur, ce qui est satisfaisant car dans le cas contraire on aurait un problème de continuité par rapport au temps entre les deux mesures consécutives.

Cette perte d'information, et d'unitarité, est choquant pour beaucoup. On invoque en particulier le fameux déterminisme classique et ses vertus curatives. En effet la possibilité de renverser le temps en mécanique classique est une pierre de touche de la théorie. On pourrait à tout instant retrouver le passé en inversant le temps dans la solution des équations. Mais c'est oublier que, comme nous venons de le discuter, ce déterminisme est *dans les faits* un leurre, et l'impossibilité effective de prédire rend académique le déterminisme, en quelque sorte. Il faudrait une notion de *prédictivisme*, qui n'existe pas.

Rappelons enfin, et c'est le sens de la phrase de Georges Perec placée au début de cet article, que l'activité de la pensée utilise énormément (mais d'une façon que nous contrôlons mal) la fonction d'oubli, fonction que la micro-informatique nous permet d'utiliser à satiété en *vidant la corbeille*.

Le temps. La mesure fait apparaître un autre aspect peu familier : la rupture avec la notion de temps continu. La mesure n'est pas décrite par une équation. Il y a un avant, et un après discontinu et totalement aléatoire. Après avoir "cassé" l'espace (absence de trajectoire) la mécanique quantique, dans un

soucis négatif, Adornien presque, de suprême élégance relativiste, casse le temps, le broie et le ramène en fait au doublet $\{0, \infty\}$.

Il y avait de toutes façons un “problème” avec le temps à l’intérieur des 3 premiers axiomes, comme le montre le “Théorème” de Pauli [6] :

Théorème 3.1. *il n’y a pas d’opérateur “temps”, c’est à dire qu’on ne peut pas trouver d’opérateur hermitien conjugué à l’énergie*

$$[T, H] = i\hbar \quad (*)$$

si l’opérateur d’énergie a un état fondamental.

La preuve de ce “théorème” réside dans l’argument suivant : supposons qu’il existe T auto-adjoint satisfaisant (*). Considérons pour $e \in \mathbb{R}$ l’opérateur (unitaire)

$$U^e := e^{-ieT/\hbar}.$$

Un peu d’algèbre montre que $[U^e, H] = -eU^e$. Par conséquent si φ est un vecteur propre de H de valeur propre E , on a

$$HU^e\varphi = UH^e\varphi - [U^e, H]\varphi = EU^e\varphi + eU^e\varphi = (E + e)U^e\varphi.$$

Par conséquent $E + e$ est une valeur propre de H , et ceci pour toute valeur de e . Le spectre de H ne peut donc pas être borné par dessous. C’est là l’argument de Pauli. Il y a des subtilités reliées à ce théorème, mais gardons seulement cet argument, et le fait que les 3 premiers axiomes contiennent en quelque sorte un argument contre l’opérateur “temps”.

La décohérence et l’extrinsèque.

Matrices densité. La connaissance partielle se traduit en mécanique quantique par l’action d’une trace partielle : la valeur moyenne d’un observable \mathcal{O} dans l’état $|v\rangle$ s’écrit ⁸

$$\langle v|\mathcal{O}|v\rangle = Tr(\mathcal{O}|v\rangle\langle v|)$$

où $|v\rangle\langle v|$ est le projecteur orthogonal sur le vecteur (normé) $|v\rangle$. Lorsqu’un système quantique sur \mathcal{H} est couplé à un réservoir qui vit dans \mathcal{H}_R et que l’on considère une observable \mathcal{O}' qui ne touche que le système et pas le réservoir, c’est à dire que

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} \otimes Id$$

où \mathcal{O} agit sur \mathcal{H} et Id sur \mathcal{H}_R , alors la trace devient

$$Tr_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_R}(\mathcal{O}'|\psi\rangle\langle\psi|) = Tr_{\mathcal{H}}(\mathcal{O}\sigma)$$

⁸la trace d’une matrice $\{u_{ij}\}$ est la somme de ses éléments diagonaux, $Tr(\{u_{ij}\}) := \sum u_{ii}$

où σ est une matrice densité, c'est à dire que

$$\sigma > 0, \text{Tr}\sigma = 1$$

(notons que la positivité implique l'hermiticité). Ce calcul est facile à faire et est conseillé au lecteur.

Donc, si l'on néglige des degrés de liberté, l'état du système n'est plus décrit par un vecteur, mais par une matrice.

Une forme de la théorie de la décohérence affirme que, pour un réservoir donné, il existe une base "préférée" sur laquelle toute évolution (couplée à un réservoir) laisse une matrice densité devenir *diagonale*. On obtient ainsi des mélanges statistiques, où le rôle des probabilités est strictement classique, venant d'un aléatoire extrinsèque, puisque palliant le manque d'information du réservoir.

Une intrication à un réservoir, un passage à la dimension infinie (macroscopique) et un temps de décohérence, voilà ce qui donne une base préférée, c'est-à-dire.....un sujet dans le sens de la vérité donné ici-même par J-Y Girard.

Revenons maintenant à notre fil rouge cinéophile.



L'usage des lunettes crée la troisième dimension, et le fait de cacher l'un des deux yeux nous reprojette hors du quantique, dans la classique à 2D. Peut-on voir le mélange statistique au cinéma? La réponse est oui, il suffit d'enlever les lunettes. Car alors que voyons nous? Un écran sur lequel se "superposent", légèrement décalées, deux images presque identiques. On trouvera dans [2] des exemples de stéréoscopie où ce phénomène est très clair.

Signalons enfin (et c'est important) que, **en aucun cas**, le phénomène de décohérence ne se substitue à la mesure. Tout d'abord il est contenu dans la partie "équation de Schrödinger" de la théorie. Ensuite la réduction de la matrice densité à une forme diagonale ne nous dit rien sur la valeur que l'on obtiendra si l'on effectue UNE mesure, un événement unique.

On parle ainsi (par exemple S. Haroche dans son cours au Collège de France) de l'action de la décohérence comme le fait d'effectuer une mesure "sans la lire". La mesure se passerait donc en deux temps; tout d'abord la

décohérence (mesure non-lue et réduction à des probabilités classiques), puis la réduction du paquet d'ondes (non déterministe).

Mesure non-lue, voilà bien un concept sorti du quantique, et qui bouscule nos intuitions de pensée.

4. RETOUR ET NON-RETOUR VERS LE CLASSIQUE

La limite semi-classique. Toute théorie présentant de l'aléatoire possède des zones limites, l'une d'entre elles est celle où le choix des possibles pour les probabilités se résout à 0, 1. Nous allons voir qu'un tel phénomène peut se produire, et qu'alors la mécanique classique, déterministe, est (parfois) retrouvée. Cela nécessite un passage à la dimension infinie, en particulier à cause du résultat suivant.

Théorème 4.1. *il n'existe pas en dimension finie d'opérateurs hermitiens P et Q satisfaisant*

$$[P, Q] = i\hbar$$

Démonstration. soit v_i la base orthogonale de vecteurs propres de Q de valeurs propres q_j et soit P_{ij} la matrice de P dans cette base. Alors on devrait avoir

$$(q_i - q_j)P_{ij} = i\hbar\delta_{ij}$$

ce qui est impossible. □

Notons qu'en dimension infinie la relation précédente donne, en prenant $Q = \times x$ et $P = i\hbar \frac{d}{dx}$

$$(x - \lambda)\delta'(x - \lambda) = \delta(x - \lambda)$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine, ce qui est vrai par intégration par partie.

La limite semiclassical ne peut donc s'approcher que par passage à la dimension infinie, mais cela ne suffit pas.

Les spectres de Q et P décrits précédemment sont continus et donc les "vecteurs propres" ne sont pas dans l'espace de Hilbert (distributions). Ceci est en fait une trace du principe de Heisenberg... qui est en fait un théorème :

Théorème 4.2. *soit A et B auto-adjoints et $|v\rangle \in \mathcal{H}$. Définissons :*

$$\Delta_v A := \sqrt{\langle v|A^2|v\rangle - \langle v|A|v\rangle^2}$$

et de même pour B . Alors

$$\Delta_v A \times \Delta_v B \geq \frac{|\langle v|[A, B]|v\rangle|}{2}.$$

Démonstration. Dénotons $\langle v, v \rangle$ par $\langle . \rangle$. Notons tout d'abord que, si $A' := A - \langle A \rangle$, $B' := B - \langle B \rangle$, alors $[A', B'] = [A, B]$, $\Delta_v A' = \Delta_v A$, $\Delta_v B' = \Delta_v B$ et $\langle A' \rangle = 0$, $\langle B' \rangle = 0$.

Il suffit donc de montrer le théorème pour A, B avec $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} |\langle [A, B] \rangle| &= |\langle AB - BA \rangle| = |\langle AB \rangle - \langle BA \rangle| = \\ &= |\langle AB \rangle - \overline{\langle AB \rangle}| \leq 2|\langle AB \rangle| = \\ &= 2|\langle Av, Bv \rangle| \leq 2|Av|^2|Bv|^2 = \\ &= 2\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle := 2\Delta_v A \Delta_v B. \end{aligned}$$

Donc $\Delta_v A \times \Delta_v B \geq \frac{|\langle v|[A,B]v \rangle|}{2}$. \square

En particulier

$$\Delta_v P \times \Delta_v Q \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Le mieux que l'on peut faire est donc d'optimiser ces relations.

Théorème 4.3. *la famille de vecteurs minimisant les relations de Heisenberg est indicée par le plan position \times impulsion.*

Démonstration. Un calcul élémentaire montre qu'une réalisation des relations de commutation canonique est donnée sur $L^2(\mathcal{R}, dx)$ par $Q = \times x$ et $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$. De plus la preuve du théorème précédent montre que les inégalités de Heisenberg sont extrémisées lorsque

$$|\langle Av, Bv \rangle| = |Av|^2|Bv|^2$$

c'est-à-dire lorsque Av et Bv sont colinéaires. Dans le cas présent cela donne

$$-i\hbar \frac{d}{dx} v(x) = \alpha x v(x)$$

c'est à dire que $v(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}(\alpha\hbar)^{1/4}} e^{i\alpha x^2/2\hbar}$, la condition L^2 forçant alors à prendre, par exemple, $\alpha = i$

Rétablissant la moyenne de P et Q , qui peut être quelconque nous donne la famille de vecteurs $\psi_{p,q}^\alpha := \frac{1}{\pi^{1/2}(\alpha\hbar)^{1/4}} e^{-(x-q)^2/2\alpha\hbar} e^{ipx/\hbar}$. \square

On voit donc que, comme dans le cas des qubits, la structure classique apparaît comme indice de la structure quantique. La limite classique est alors la limite $\hbar \rightarrow 0$ dans la famille de vecteurs.

Retour vers le classique. Une fois que l'on se place dans cette zone limite où les états sont indexés par des points de l'espace classique (espace de phase), on peut se poser la question de leur évolution. Les résultats arrivent alors, montrant que la trajectoire quantique suit une trajectoire "classique" c'est à dire que

$$\psi_{pq}^t = \psi_{p(t)q(t)}^0$$

à peu près (modulo une phase et un changement de forme du vecteur).

La dérivation des équations que satisfont $(p(t), q(t))$ redonne précisément la dynamique classique, en particulier toute sa structure géométrique. On a donc la même situation que pour les qubits : d'une certaine manière la théorie physique classique est contenue dans la théorie quantique (ouf), tout comme l'algorithmique classique l'est dans celle quantique en se restreignant à

$$|0001100101010 \rangle \rightarrow |00001100101 \rangle .$$

Mais tout cela à condition de ne pas aller trop loin, c'est à dire trop longtemps, comme nous le verrons plus loin.

Voyons comment cela nous donne une vision satisfaisante de la téléportation.

On présente en général l'aspect physique de la téléportation en disant que "Alice s'éloigne de Bob". En disant cela, on a mélangé les concepts classiques et quantiques. Voyons comment on peut formaliser en Mécanique Quantique un tel énoncé.

Quand on parle d'éloignement on parle de distance et donc d'espace : l'état du système doit donc avoir une composante spatiale. La fonction d'onde d'un qubit (supposons qu'Alice n'ait qu'un qubit) n'est plus un élément de \mathbb{C}^2 mais un élément de $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ ⁹. Un état est maintenant de la forme

$$\varphi(x) \otimes (\alpha|0 \rangle + \beta|1 \rangle)$$

Éloigner un qubit signifie tout simplement agir sur φ , par exemple en la translatant de $X \in \mathbb{R}^3$. Si φ est localisée près de 0 (par exemple $\varphi(x) = \pi^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}}$) on définit alors φ_X par

$$\varphi_X(x) = \varphi(x - X)$$

bien évidemment localisée près de X . On comprend alors bien que dire "Alice est loin de Bob" veut dire que les supports de φ_{Alice} est séparé de celui de φ_{Bob} . Par exemple $\varphi_{\text{Alice}} = \varphi_X$ et $\varphi_{\text{Bob}} = \varphi_{-X}$.

⁹nous voyons ici une des propriétés fondamentales de la Mécanique Quantique qui oublie totalement la notion ontologique de particule. Les différents degrés de liberté sont traités comme des particules différentes.

Dire que l'action d'Alice est locale autour de X veut dire que l'opérateur d'évolution correspondant peut s'écrire $U = e^{itH}$ avec

$$h = \chi \otimes \sigma$$

où σ est une matrice 2×2 hermitienne et χ est un opérateur de multiplication (dans $L^2(\mathbb{R}^3)$) par une fonction C^∞ à support compact égale à un près de X .

Le lemme suivant est crucial et montre encore l'adéquation du produit tensoriel à notre problématique.

Lemma 4.4. *Si $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ a un support en x d'intersection nulle avec celui de χ , alors*

$$U\psi = \psi$$

c'est à dire que l'action d'Alice est inopérante.

La preuve est très simple il suffit de remarquer que

$$U = \text{Id} + \sum_0^\infty \frac{1}{k!} (\chi \otimes \sigma)^k$$

donc

$$U\psi = \psi + \underbrace{\sum_0^\infty \frac{1}{k!} (\chi \otimes \sigma)^k \psi}_0.$$

L'importance de ce lemme réside dans le fait que la non-interaction des support spatiaux implique la non-interaction aussi des parties "qubits".

Il suffit enfin de remarquer que l'action du hamiltonien sur le système total des deux qubits est donné par $H \otimes Id + Id \otimes H$ ¹⁰, qui agit sur $(L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$, pour s'apercevoir que sous la même condition sur les supports que précédemment :

$$\begin{aligned} e^{it(H \otimes Id + Id \otimes H)} \varphi_A |\sigma_A \rangle \otimes \varphi_B |\sigma_B \rangle &= (e^{itH} \varphi_A |\sigma_A \rangle) \otimes (e^{itH} \varphi_B |\sigma_B \rangle) \\ &= e^{itH \otimes Id} (\varphi_A |\sigma_A \rangle \otimes \varphi_B |\sigma_B \rangle) \end{aligned}$$

et donc, par complétion,

$$e^{it(H \otimes Id + Id \otimes H)} |\Phi \rangle = e^{itH \otimes Id} |\Phi \rangle$$

pour tout $|\Phi \rangle$ Bob-localisé comme auparavant.

¹⁰penser au laplacien $\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_x^2 \otimes Id_y + Id_x \otimes \partial_y^2$

Non-retour vers le classique. En fait, comme nous l’avons vu pour la décohérence, la limite semiclassique commence par “tuer” les cohérences de phases si chères à la théorie quantique. mais grâce à la délocalisation due à la sensibilité aux conditions initiales de nouvelles interférences (quantiques) peuvent se produire.

Donnons un exemple très simple. Une particule se déplaçant librement sur un cercle évolue (Axiome 2) sous l’action de l’équation de Schrödinger suivante :

$$-i\hbar\partial_t\psi^t(\theta) = -\hbar^2\partial_\theta^2\psi^t(\theta)$$

Si l’on décompose la condition initiale en série de Fourier

$$\psi^0(\theta) = \sum c_k e^{ik\theta}$$

un calcul élémentaire montre que

$$\psi^t(\theta) = \sum c_k e^{it\hbar k^2} e^{ik\theta}$$

et donc que

$$\psi^{t=2\pi/\hbar} = \psi^0.$$

C’est à dire que le flot quantique est périodique avec période $\frac{2\pi}{\hbar}$. Cette période est précisément la trace de cette combinaison des phases quantiques dont nous venons de parler. Elle n’a rien de classique, et d’ailleurs, “passe” dans l’infini lorsque $\hbar \rightarrow 0$ [3].

Disons pour simplifier que la dynamique quantique dans la limite semiclassique voit le “chaos” ¹¹, mais elle le retourne en prenant bras au corps la problématique : un point initial “englobe” tous les possibles et n’est plus sensible à l’initial.

Conclusion. Les rapports qu’entretiennent classique et quantique sont passionnels. La mécanique quantique ne peut pas vraiment se passer de la mécanique classique en ce sens qu’elle a besoin du modèle classique pour, pas changement brutal de paradigme (quantification), résoudre les problèmes qu’on lui a posé (stabilité de la matière par exemple). A l’inverse la mécanique classique se déduit de la mécanique quantique par “ passage au bord”, mais elle ne sature pas ces bords.

Il faut noter la grande différence entre le passage quantique-classique et le passage relativiste-classique. Dans ce dernier les formules passent relativement 9si je puis dire) en douceur d’une situation à l’autre, lorsque l’on fait tendre la vitesse de la lumière vers l’infini. La limite

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \longrightarrow 1$$

¹¹”chaos” : je ne parle ici que de la sensibilité aux conditions initiales

fait changer le paradigme sans trop de heurts, permettant au passage de calculer les corrections relativistes :

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

Le passage du quantique vers le classique est plus subtil, comme nous avons essayé de le voir plus haut. Cela vient du fait que, comme l'avait d'ailleurs, dès le début, noté Heisenberg, le passage au groupe de symétries quantiques ne peut pas se voir, à priori, comme une simple déformation de celui classique, comme c'est le cas pour le passage du groupe de Galilée à celui de Lorentz. Dans le cas quantique il faut passer du groupe de Galilée au groupe de transformations unitaires sur un espace de Hilbert, en principe de dimension infinie.

Et puis il y a le fait que la limite semiclassique peut ne pas redonner la mécanique classique.

Notons, pour terminer, un pendant de ce dernier phénomène en informatique, concernant la modélisation d'équations différentielles : lorsque un programme tourne pour calculer la solution d'une équation, il y a deux paramètres : le pas de discrétisation et le temps de calcul. Quels sont les théorèmes sur la commutativité entre ces deux limites ?

5. CONCLUSION

Nous avons, dans ce court exposé, tenté de présenter le formalisme mathématique de la Mécanique Quantique en montrant comment les situations quantiques avaient des résonances dans notre faculté à percevoir le monde classique qui nous entoure. La difficulté, créatrice de nombreux pseudo-paradoxes, de décrire la *physique* quantique réside souvent dans un problème de vocabulaire ; comment expliquer avec les mots de la physique classique des situations, des objets qui échappent délibérément au monde classique ? C'est une source d'ambiguïté qui a généré nombre de malentendus.

Pour le formalisme mathématique, l'abstraction nous aide, en quelque sorte. On trouve ainsi des résonances, telles que celles que nous avons exposées ici, dans la musique [3], un art qui "baigne" aussi dans l'abstraction (qu'est-ce que l'espace de la musique?).

Il reste que le principal problème pour expliquer la Mécanique Quantique est avant tout un problème de LANGAGE. Le langage de la Mécanique Quantique n'existe pas, et les palliatifs que sont "intrication", "décohérence" et autres, ne suffisent pas à représenter tout ce que la compréhension technique en profondeur nous fait découvrir. De nouveaux éléments sémantiques sont nécessaires.

Espérons que ce nouveau langage verra le jour bientôt.

6. APPENDICE

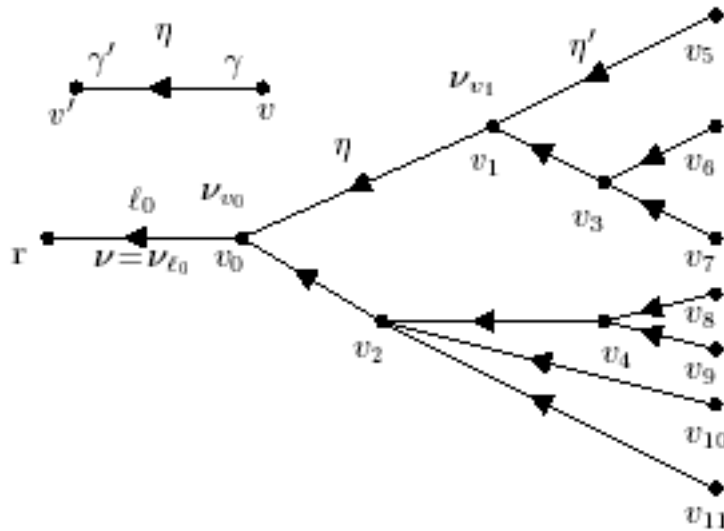
Perturbations-Diagrammes-Réalisme

Nous voudrions finir cette présentation succincte par une brève discussion de la théorie des perturbations en mécanique quantique et en mécanique classique.

Source d'inspiration pour le début de la théorie des systèmes dynamiques (grâce aux travaux de Poincaré sur la mécanique céleste), elle a aussi été à la base de la formulation de la mécanique des matrices de Heisenberg. Nous nous bornerons ici à une rapide comparaison entre les digrammatiques classique et quantique qui nous montrera immédiatement la différence entre les deux situations.

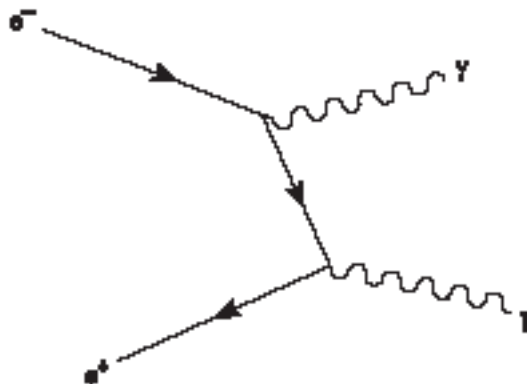
En théorie des perturbations on calcule des développements de Taylor, en puissance d'un petit paramètre, taille de la perturbation. On doit donc calculer une suite de nombres, et chacun de ces nombres est donné par un calcul algébrique, un algorithme (tout nombre n'est-il pas, en fait, un algorithme?). La grande complexité de ces calculs, surtout lorsque l'on considère des ordres élevés, incite à représenter cette algèbre par des diagrammes, interprétables grâce à un mode d'emploi.

Un diagramme typique de calcul de la mécanique céleste (série de Linsted) est :

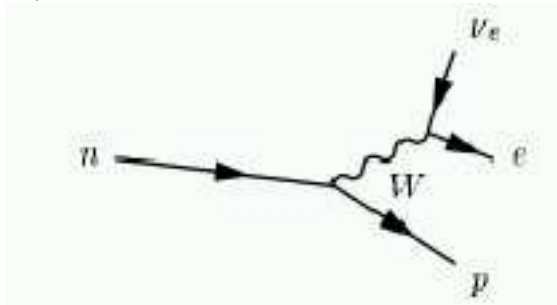


En théorie quantique des champs, les diagrammes de Feynman ont eu une importance cruciale, et pas seulement graphique. La théorie quantique des champs, théorie des particules élémentaires, est une autre extension, un autre bord, de la mécanique quantique : il s'agit du passage à un nombre infini, et donc non fixé, de particules (champs). C'est une théorie fondamentalement perturbative, qui n'a pas encore (peut-être jamais) trouvé son statut non-perturbatif.

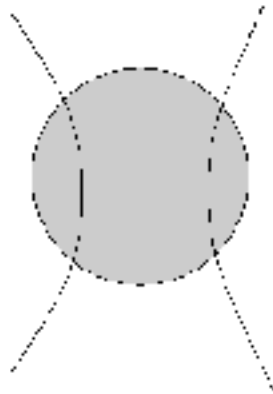
Un exemple typique de diagramme en théorie quantique des champs est le suivant :



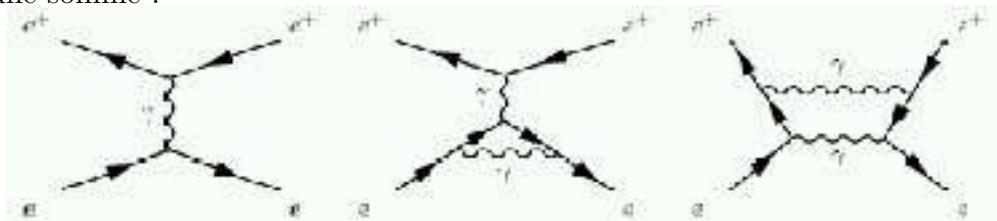
Il représente l'annihilation d'un électron et d'un positron, donnant naissance à un photon γ . En voici un autre, radioactif celui-là :



En fait de tels phénomènes n'existent pas vraiment (physiquement), ils apparaissent seulement dans le cadre du développement d'une interaction que l'on ne sait pas décrire explicitement et que l'on peut représenter par :



Un tel diagramme, véritable “black-box” se décompose généralement en une somme :



On voit donc clairement que le développement perturbatif fait apparaître, dans une situation totalement quantique et qui ne nous est pas accessible ¹², des strates “classiques”. Le + qui intervient ici ne sert pas, contrairement au cas classique, à ajouter des nombres, plus exactement il ne sert pas qu’à cela, c’est le + du principe de superposition, le “+” du début de cet exposé.

RÉFÉRENCES

- [1] J. von Neumann, “Mathematical Foundation of Quantum Mechanics”, Princeton University Press, 1955.
- [2] “Paris en 3D, de la stéréoscopie à la réalité virtuelle 1850 - 2000”, Musée CARNAVALET, Paris.

¹²encore une fois en terme de représentation avec des objets classiques

- [3] T. Paul, "Reconstruction and non-reconstruction of wave-packets", preprint.
- [4] T. Paul, "La mécanique quantique vue comme processus dynamique", dans "Logique, dynamique et cognition" (dir. J.-B. Joinet), Collection "Logique, langage, sciences, philosophie" Publications de la Sorbonne, Paris, 2007.
- [5] voir : <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1551>
- [6] W. Pauli. Handbuch der Physik, vol.V, S. Flugge ed., Springer Verlag, 1933.
- [7] A. Peres, Quantum theory : Concepts and Methods, Kluwer, 2005.
- [8] B. Teissier, "Géométrie et cognition : l'exemple du continu", dans ce volume.
- [9] S. Weinberg, "The quantum theory of fields", Vol. 1, Cambridge University Press, 2002.
- [10] E.P. Wigner, Ann. Math. **40**, 149 (1939).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS.UMR 8553 ET CNRS, ECOLE
NORMALE SUPÉRIEURE, 45, RUE D'ULM - F 75730 PARIS CEDEX 05
E-mail address: paul@dma.ens.fr