

Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents

Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

dirigé par

Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng.

Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents

Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

dirigé par

Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng.

version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

Résumé

Les travaux d'Ofer Gabber présentés dans ce volume comportent deux parties étroitement liées, l'une, géométrique, l'autre, cohomologique. La première est constituée de théorèmes d'uniformisation locale, affirmant que tout couple formé par un schéma noethérien quasi-excellent et un fermé rare devient, après localisation par des morphismes étales et des altérations convenables, isomorphe au couple formé par un schéma régulier et un diviseur à croisements normaux. Il s'agit de résultats de nature locale, mais leur démonstration fournit des corollaires globaux, raffinant des théorèmes d'altération de de Jong pour les schémas de type fini sur un corps ou un anneau de Dedekind. Des techniques de géométrie logarithmique, et, pour les résultats les plus fins, de désingularisation canonique en caractéristique nulle jouent un rôle clef dans les démonstrations. Dans la seconde partie, on donne des applications, accompagnées d'exemples et contre-exemples, à des théorèmes de finitude (abéliens), de dimension cohomologique, et de dualité en cohomologie étale sur les schémas quasi-excellents. On y démontre notamment la conjecture de dualité locale de Grothendieck, et, par une nouvelle méthode, sa conjecture de pureté cohomologique absolue. Des résultats de rigidité et finitude non abéliens sont également établis dans les derniers exposés.

Abstract

The work of Ofer Gabber presented in this book can be divided roughly into two closely related parts, a geometric one and a cohomological one. The first part contains local uniformization theorems which state that any pair consisting of a quasi-excellent Noetherian scheme and a nowhere dense closed subscheme becomes isomorphic, after localization by suitable étale morphisms and alterations, to a pair consisting of a regular scheme and a normal crossings divisor. These are local results, but their proofs have global theorems as corollaries, refining alteration theorems of de Jong for schemes of finite type over a field or a Dedekind ring. Techniques from logarithmic geometry and, as regards the finest results, canonical desingularization in characteristic zero, play a key role in the proofs. In the second part, we give applications, with examples and counter-examples, to Abelian finiteness theorems, as well as theorems on cohomological dimension and duality in étale cohomology over quasi-excellent schemes. In particular, Grothendieck's local duality conjecture is proved, and his absolute cohomological purity conjecture is proved by a new method. Non-Abelian rigidity and finiteness results are also established in the final exposés.

Introduction

Le présent volume rassemble les exposés d'un groupe de travail qui s'est tenu à l'École polytechnique du printemps 2006 au printemps 2008 sur les travaux de Gabber présentés dans [Gabber, 2005a] et [Gabber, 2005b]. Ceux-ci portent sur la cohomologie étale et l'uniformisation des schémas quasi-excellents.

En ce qui concerne la cohomologie étale, un résultat central est le théorème de finitude suivant :

THÉORÈME 1. *Soient Y un schéma noethérien quasi-excellent (cf. I-2.10), $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, n un entier inversible sur Y , et F un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur X . Alors, pour tout q , $R^q f_* F$ est constructible, et il existe un entier N tel que $R^q f_* F = 0$ pour $q \geq N$.*

Rappelons que, sans hypothèse sur Y ni sur n , mais lorsqu'on suppose f propre et de présentation finie, les faisceaux $R^q f_* F$ sont constructibles, et nuls pour $q > 2d$ si d majore la dimension des fibres de f [SGA 4 XIV 1.1]. Si f n'est pas supposé propre, l'hypothèse que n soit inversible sur Y est essentielle : si k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et X la droite affine sur $Y = \text{Spec}(k)$, $H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est un $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel de dimension infinie (cf. [SGA 4 XIV 1.3]). Pour Y excellent de caractéristique nulle, 1 est démontré dans l'exposé d'Artin [SGA 4 XIX]. Si S est un schéma noethérien régulier de dimension ≤ 1 (non nécessairement quasi-excellent) et f un morphisme de S -schémas de type fini, la conclusion de 1 est encore vraie, d'après [SGA 4½ [Th. finitude] 1.1] (ce résultat peut d'ailleurs se déduire de 1, cf. exposé XIII).

La démonstration d'Artin dans [SGA 4 XIX] utilise la résolution des singularités de Hironaka pour se ramener au cas où f est l'inclusion du complément d'un diviseur régulier dans un schéma régulier et F un faisceau constant, auquel cas la conclusion découle du théorème de pureté cohomologique absolu établi également dans *loc. cit.*

La démonstration de Gabber de 1 suit la même méthode, mais :

(a) on doit faire appel au théorème de pureté cohomologique absolu établi dans le cas général par Gabber [Fujiwara, 2002],

(b) on ne dispose plus de la résolution des singularités sous la forme de Hironaka ; celle-ci est remplacée par un théorème d'uniformisation locale, dû à Gabber ([Gabber, 2005b]), qui s'énonce ainsi (IX-1.1) :

THÉORÈME 2. *Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X et ℓ un nombre premier inversible sur X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations et telle que, pour tout $i \in I$:*

- (i) X_i soit régulier et intègre,
- (ii) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

La topologie des ℓ' -altérations est une topologie du type de celles considérées par Voevodsky (cf. [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001]), pour laquelle les ℓ' -altérations (i. e. les morphismes propres surjectifs génériquement finis de degré résiduel générique premier à ℓ) et les recouvrements étales complètement décomposés (i.e. de Nisnevich) sont des familles couvrantes ; voir (II-2.3) pour une définition précise.

La première partie de ce volume est consacrée, après des rappels, dans I, sur les notions de schéma quasi-excellent ou excellent, à la démonstration de 2 et de certains compléments et variantes.

Il y a trois grandes étapes.

(A) *Fibration en courbes.* La question étant locale pour la topologie de Nisnevich, et en particulier pour la topologie de Zariski, on peut supposer X de dimension finie. On raisonne par récurrence

sur la dimension d de X . On peut supposer X local hensélien. L'hypothèse de quasi-excellence sur X permet d'appliquer le théorème de Popescu ([Popescu, 1986], I-10.3) au complété $\widehat{X}$ de X , et de se ramener, via des techniques d'approximation dues à Gabber, expliquées dans III, au cas où X est local complet de dimension d , et même intègre, normal, avec $d \geq 2$. On dispose alors des classiques théorèmes de structure de Cohen. Tels quels, ils sont toutefois insuffisants. Mais un délicat raffinement, dû à Gabber, démontré dans IV, permet de se ramener, quitte à remplacer X par une extension finie de degré générique premier à ℓ , au cas où X est le complété en un point fermé d'un schéma X' de type fini et de dimension relative 1 sur un schéma local noethérien régulier complet de dimension $d - 1$, et le fermé Z le complété d'un fermé rare Z' de X' . Ce théorème de « fibration », ou « d'algébrisation partielle », est établi dans V. Après quelques nouvelles réductions faciles, on est ramené au cas où X est un schéma normal intègre, propre sur un schéma affine normal intègre excellent Y de dimension $d - 1$, à fibre générique géométriquement intègre, lisse, et de dimension 1, et le fermé Z un diviseur de fibre générique étale.

(B) *de Jong et log régularité*. On peut alors appliquer le théorème de la courbe nodale de de Jong, sous sa forme équivariante, [de Jong, 1997, 2.4] : il existe un groupe fini G et une altération projective G -équivariante du morphisme $f : X \rightarrow Y$ en un morphisme $f' : X' \rightarrow Y'$, qui est une courbe projective nodale G -équivariante, et l'image inverse Z' de Z un diviseur de composantes dominantes étales et transverses au lieu lisse de f' (IX-1.2). Appliquant l'hypothèse de récurrence au quotient de Y' par un ℓ -Sylow de G , et utilisant le lemme d'Abhyankar, on se ramène finalement au cas où G est un ℓ -groupe, $X = X'/G$, $Y = Y'/G$, Y' contient un fermé (G -équivariant) T' tel que le couple (Y', T') soit *log régulier*, ainsi que le couple $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$, où D est un diviseur (G -équivariant) étale sur Y' , avec $Z' \subset f'^{-1}(T') \cup D$ (cf. VI-1.9, VI-2.1).

(C) *Modifications équivariantes*. Le quotient d'un log schéma log régulier par l'action d'un groupe fini n'est pas en général log régulier. En particulier, $X = X'/G$, muni du fermé $(f'^{-1}(T') \cup D)/G$, n'est pas nécessairement log régulier. Si ce couple était log régulier, la désingularisation de Kato-Nizioł des schémas log réguliers ([Kato, 1994], [Nizioł, 2006]), généralisant la classique désingularisation des variétés toriques [Kempf et al., 1973], terminerait la démonstration de 2. Gabber a dégagé des conditions suffisantes assurant que le quotient d'un log schéma log régulier par un groupe fini est encore log régulier. Il s'agit de la notion d'*action très modérée*, étudiée dans VI. Gabber montre qu'il existe une modification projective G -équivariante $p : X'' \rightarrow X'$ et un fermé G -équivariant D'' de X'' contenant l'image inverse de $f'^{-1}(T') \cup D$ tels que le couple (X'', D'') soit log régulier, et l'action de G sur (X'', D'') très modérée. On conclut alors en appliquant la désingularisation de Kato-Nizioł au quotient de (X'', D'') par G . La démonstration de ce théorème de modification est donnée en VIII. Elle s'appuie sur la théorie des désingularisations canoniques en caractéristique nulle (Hironaka, Bierstone-Milman, Villamayor, Temkin).

On établit dans X-1.1 une *variante relative* de ce théorème de modification, due à Gabber, où le log schéma G -équivariant considéré est non seulement log régulier, mais log lisse sur une base log régulière S , avec action triviale de G : on peut construire une modification équivariante respectant la log lissité sur S . On en déduit notamment les raffinements suivants (également dus à Gabber) de théorèmes de de Jong (X-2.1, X-2.4, X-3.5) :

THÉORÈME 3. (1) Soit X un schéma séparé et de type fini sur un corps k , $Z \subset X$ un fermé rare, ℓ un nombre premier $\neq \text{car}(k)$. Il existe alors une extension finie k' de k de degré premier à ℓ et une ℓ' -altération $h : X' \rightarrow X$ au-dessus de $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$, avec X' lisse et quasi-projectif sur k' , et $h^{-1}(Z)$ le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Si k est parfait, on peut prendre $k' = k$ et choisir h génériquement étale.

(2) Soient S un schéma noethérien séparé, intègre, excellent, régulier, de dimension 1, de point générique η , X un schéma séparé, plat et de type fini sur S , ℓ un nombre premier inversible sur S , $Z \subset X$ un fermé rare. Alors il existe une extension finie η' de η de degré premier à ℓ , et une ℓ' -altération projective $h : \tilde{X} \rightarrow X$ au-dessus de $S' \rightarrow S$, où S' est le normalisé de S dans η' , avec $\tilde{X}$ régulier et quasi-projectif sur S' , un diviseur à croisements normaux strict $\tilde{T}$ sur $\tilde{X}$, et une partie fermée finie Σ de S' tels que :

(i) en dehors de Σ , le morphisme $\tilde{X} \rightarrow S'$ est lisse et $\tilde{T} \rightarrow S'$ est un diviseur relatif à croisements normaux ;

(ii) localement pour la topologie étale autour de chaque point géométrique x de $\tilde{X}_{s'}$, où s' appartient à Σ , le couple $(\tilde{X}, \tilde{T})$ est isomorphe au couple formé de

$$X' = S'[t_1, \dots, t_n, u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}] / (t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} u_1^{b_1} \cdots u_s^{b_s} - \pi),$$

$$T' = V(t_{r+1} \cdots t_m) \subset X'$$

autour du point $(u_i = 1), (t_j = 0)$, avec $1 \leq r \leq m \leq n$, pour des entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ tels que $\text{pgcd}(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$, p désignant l'exposant caractéristique de s' , et π une uniformisante locale en s' ;

(iii) $h^{-1}(Z)_{\text{réd}}$ est un sous-diviseur de $\tilde{T} \cup \bigcup_{s' \in \Sigma} \tilde{X}_{s'}$.

Diverses généralisations, dues à Temkin, de ce théorème et du théorème d'Abramovich-Karu de réduction semi-stable faible en caractéristique nulle (voir [Abramovich & Karu, 2000]) sont données dans la section 3 de l'exposé X.

Le théorème d'uniformisation 2 a le corollaire suivant, dit théorème d'uniformisation « faible », où n'apparaît plus de nombre premier ℓ :

COROLLAIRE 4. Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des altérations et telle que, pour tout $i \in I$:

- (i) X_i soit régulier et intègre,
- (ii) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

La topologie des altérations est définie de manière analogue à celle des ℓ' -altérations. Elle est plus fine que la topologie étale, et aucune contrainte n'est imposée sur le degré des extensions résiduelles génériques, cf. II-2.3.3. On peut démontrer 4 indépendamment de 2, en suivant seulement les étapes (A) et (B) décrites plus haut, à l'aide, dans (A), d'une forme faible du théorème de Cohen-Gabber. Le théorème de modification de (C) est inutile, il n'y a pas besoin de faire appel à la résolution canonique des singularités en caractéristique nulle. La résolution des singularités toriques de Kato-Nizioł suffit. Cette démonstration est exposée dans VII.

La démonstration de 1 est donnée dans (XIII-3), en application de 2 et du théorème de pureté cohomologique absolu. L'énoncé de 1 comporte deux assertions :

- (i) la constructibilité des $R^q f_* F$ pour tout q ,
- (ii) l'existence d'un entier N (dépendant de (f, F)) tel que $R^q f_* F = 0$ pour $q \geq N$, autrement dit, le fait que Rf_* envoie $D_c^b(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dans $D_c^b(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, l'indice c désignant la sous-catégorie pleine de D^b formée des complexes à cohomologie constructible.

Dans (XIII-3), ces deux assertions sont démontrées simultanément. On peut toutefois démontrer (i) en n'invoquant que le théorème d'uniformisation faible 4 (et le théorème de pureté). Ceci est fait dans (XIII-2). L'idée est la suivante. Si, dans 4, les morphismes p_i étaient propres, on pourrait, après réduction au cas où f est une immersion ouverte et F un faisceau constant, se ramener, par descente cohomologique propre, au cas de l'immersion du complément d'un diviseur à croisements normaux strict dans un schéma régulier, justiciable du théorème de pureté. Cependant, les p_i ne sont pas propres en général. Gabber tourne la difficulté à l'aide du théorème de constructibilité générique de Deligne [SGA 4½ [Th. finitude] 1.9 (i)] et d'un théorème d'« hyper-changement de base » (XII_A-2.2.5). Ce théorème est déduit dans *loc. cit.* d'un théorème de descente cohomologique « orientée » (XII_A-2.2.3), qui utilise la notion de *produit orienté de topos*, due à Deligne [Laumon, 1983]. Les définitions et propriétés de base sont rappelées dans l'exposé XI. Un résultat clé est un théorème de changement de base pour des « tubes » (XI-2.4). Une démonstration de XII_A-2.2.5 indépendante de la notion de produit orienté, due à W. Zheng, est donnée dans l'exposé XII_B.

D'après des exemples classiques de Nagata, un schéma noethérien quasi-excellent n'est pas nécessairement de dimension finie. Si Y est de dimension finie, alors Rf_* est de dimension cohomologique finie, d'après un théorème de Gabber, présenté dans l'exposé XVIII_A, et par suite (ii) découle de (i). Gabber prouve, plus précisément, que si X est un schéma noethérien, strictement local, de dimension $d > 0$, et ℓ un nombre premier inversible sur X , alors, pour tout ouvert U de X , on a $\text{cd}_\ell(U) \leq 2d - 1$.

L'hypothèse de quasi-excellence dans 1 est essentielle, comme le montre l'exemple donné dans XIX, d'une immersion ouverte $j : U \rightarrow X$ de schémas noethériens, avec 2 inversible sur X , telle que $R^1j_*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ne soit pas constructible.

Gabber a démontré des variantes de 1 pour les faisceaux d'ensembles ou de groupes non commutatifs [Gabber, 2005a] :

THÉORÈME 5. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens. Alors :

(1) Pour tout faisceau d'ensembles constructible F sur X , f_*F est constructible.

(2) Si Y est quasi-excellent, et si L est un ensemble de nombres premiers inversibles sur Y , pour tout faisceau de groupes constructible et de L -torsion F sur X , R^1f_*F est constructible.

La démonstration est donnée dans l'exposé XXI. Elle ne fait pas appel aux théorèmes d'uniformisation précédents. Elle utilise, pour le point clé, une technique d'ultraproduits, et un théorème de rigidité pour les coefficients non abéliens, dû également à Gabber, qui est établi dans l'exposé XX. Ce théorème est une variante d'un théorème de Fujiwara-Gabber pour les coefficients abéliens [Fujiwara, 1995, 6.6.4, 7.1.1] (signalée dans *loc. cit.*, 6.6.5). Il s'énonce ainsi :

THÉORÈME 6. Soient (X, Y) un couple hensélien, où $X = \text{Spec } A$, $Y = V(I)$, l'idéal I étant supposé de type fini, $\hat{X}$ le complété I -adique de X , U un ouvert de X contenant $X - Y$, et $\hat{U} = \hat{X} \times_X U$. Alors, pour tout champ en groupoïdes ind-fini C sur U , la flèche de restriction $\Gamma(U, C) \rightarrow \Gamma(\hat{U}, C|_{\hat{U}})$ est une équivalence.

La démonstration donnée dans l'exposé XX est indépendante de [Fujiwara, 1995].

Le reste du volume est consacré à trois autres applications des théorèmes d'uniformisation.

(a) *Lefschetz affine*. Il s'agit de généralisations des théorèmes de [SGA 4 XIV 3.1] (pour les morphismes affines entre schémas de type fini sur un corps) et [SGA 4 XIX 6.1] (pour les morphismes affines de type fini de schémas excellents de caractéristique nulle), ainsi que du théorème de Gabber pour les morphismes affines de schémas de type fini sur un trait [Illusie, 2003]. L'énoncé principal est le suivant (XV-1.1.2) :

THÉORÈME 7. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme affine de type fini, où Y est un schéma noethérien quasi-excellent, muni d'une fonction de dimension δ_Y , et soit n un entier inversible sur Y . Alors, pour tout faisceau constructible F de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur X , et tout entier q , on a :

$$(7.1) \quad \delta_Y(R^q f_* F) \leq \delta_X(F) - q$$

Une fonction de dimension δ sur un schéma T est une fonction $\delta : T \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $\delta(y) = \delta(x) - 1$ si y est une spécialisation étale immédiate de x . Cette notion est due à Gabber. Elle généralise celle de *dimension rectifiée* introduite dans [SGA 4 XIV]. Elle est définie et étudiée dans l'exposé XIV. Dans (7.1), la fonction δ_X est reliée à δ_Y par $\delta_X(x) = \delta_Y(f(x)) + \deg. \text{tr.}(k(x)/k(f(x)))$, et pour un faisceau G sur X (resp. Y) $\delta_X(G)$ (resp. $\delta_Y(G)$) désigne la borne supérieure des $\delta_X(x)$ (resp. $\delta_Y(x)$) pour $G_x \neq 0$. La démonstration de 7 se fait par réduction au théorème de Gabber cité plus haut, pour les schémas de type fini sur un trait, à l'aide du théorème d'uniformisation « faible » 4 et du théorème d'hyperchangement de base (XII_{A,B}). De 7 résulte :

COROLLAIRE 8. Si X est local noethérien, hensélien, quasi-excellent, et de dimension d , de corps résiduel k , et si U est un ouvert affine de X , alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X , on a

$$(8.1) \quad \text{cd}_\ell(U) \leq d + \text{cd}_\ell(k).$$

En particulier, si X est strictement hensélien, intègre, de corps des fractions K , on en déduit $\text{cd}_\ell(K) = d$ lorsque $\ell \neq 2$, formule conjecturée dans [SGA 4 x 3.1]. Plus généralement, la dimension cohomologique virtuelle $\text{vcd}_\ell(K)$ est égale dans le cas hensélien à $\text{vcd}_\ell(k) + d$, pour tout ℓ inversible sur X et de même pour la dimension cohomologique usuelle cd_ℓ , lorsque $\ell \neq 2^{(i)}$. Les valeurs possibles de $\text{cd}_\ell(U)$, pour U ouvert, non nécessairement affine, de X sont étudiées dans XVIII_A

⁽ⁱ⁾Cette formule est alors mise en défaut pour $\ell = 2$ si k est un corps formellement réel de 2-dimension cohomologique virtuelle finie et K non formellement réel, par exemple pour le hensélisé ou le complété de l'anneau local en l'origine de la variété réelle $\sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$, $n \geq 2$.

et XVIII_B. Gabber donne également des contre-exemples à (8.1) lorsqu'on omet l'hypothèse de quasi-excellence.

(b) *Une nouvelle démonstration de la conjecture de pureté absolue.* La démonstration de cette conjecture qui est donnée dans [Fujiwara, 2002] utilise, dans sa dernière partie, des techniques de K-théorie algébrique (résultats de Thomason). Gabber a annoncé dans [Gabber, 2005b] qu'on peut éviter tout recours à la K-théorie algébrique, en utilisant, à la place, la forme raffinée du théorème de de Jong 3(2). Cette nouvelle démonstration est exposée en détail dans l'exposé XVI. Cet exposé contient en outre une théorie de classes fondamentales généralisées (due à Gabber), utilisée pour construire une théorie de morphismes de Gysin pour les morphismes d'intersection complète lissifiables, généralisant les constructions de [SGA 4½ [Cycle]].

(c) *Complexes dualisants.* La notion de complexe dualisant est due à Grothendieck. L'unicité, l'existence et les propriétés générales des complexes dualisants sont étudiées dans [SGA 5 I]. Toutefois, dans *loc. cit.* l'existence n'est établie qu'en caractéristique nulle, ou sous des hypothèses d'existence de résolution des singularités, et de validité du théorème de pureté absolue (conjecturale à l'époque). Dans le cas de schémas de type fini sur un schéma régulier de dimension ≤ 1 , l'existence est prouvée inconditionnellement par Deligne dans [SGA 4½ [Dualité]]. Dans le cas général, l'existence, et la théorie de dualité locale qui en résulte, ont été annoncées par Gabber dans [Gabber, 2005b]. L'exposé XVII expose cette théorie en détail. Si X est un schéma noethérien, et $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier inversible sur X , un *complexe dualisant* sur X est un objet de $D_{\mathbb{C}}^b(X, \Lambda)$ tel que le foncteur $D_K = R\mathrm{Hom}(-, K)$ envoie $D_{\mathbb{C}}^b(X, \Lambda)$ dans $D_{\mathbb{C}}^b(X, \Lambda)$ et que, pour tout $L \in D_{\mathbb{C}}^b(X, \Lambda)$, la flèche de bidualité $L \rightarrow D_K D_K(L)$ soit un isomorphisme. Cette définition diffère légèrement de celle de [SGA 5 I 1.7], voir (XVII-0.1). L'unicité, à décalage et torsion près par un Λ -module inversible, est prouvée dans [SGA 5 I 2.1]. Le résultat principal de l'exposé XVII est que, si X est excellent et admet une fonction de dimension, au sens précisé plus haut, alors X admet un complexe dualisant. De plus, ces complexes dualisants ont les propriétés de fonctorialité attendues, et, si X est régulier, le faisceau constant Λ_X est dualisant. Cette dernière assertion était une conjecture dans [SGA 5 I], démontrée dans le cas de caractéristique nulle. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de l'exposé XVII pour des énoncés plus complets, et des indications sur la méthode de démonstration, dont les ingrédients essentiels sont le théorème de finitude 1 et le théorème d'algébrisation partielle de l'exposé V (voir (A) *supra*).

Les résultats présentés dans ce volume et leurs démonstrations sont dus à Ofer Gabber, à quelques exceptions près, précisées à la place appropriée dans les exposés correspondants.

Luc Illusie
Yves Laszlo
Fabrice Orgozo

Remerciements

Nous tenons d’abord à exprimer toute notre gratitude envers Ofer Gabber. Non seulement la quasi-totalité des résultats lui est due, mais, au cours de nombreux échanges épistolaires et discussions orales, ses explications, critiques et suggestions nous ont permis de corriger quantité d’erreurs et d’inexactitudes, et, nous l’espérons, d’améliorer substantiellement la présentation. Michael Temkin, qui n’avait pas participé au séminaire oral, a rejoint l’équipe des rédacteurs en 2011. Son concours a été déterminant pour la rédaction des exposés VIII et X, auxquels il a apporté des contributions originales. Qu’il en soit ici remercié. Deux d’entre nous ont été invités par le département de mathématiques de l’université de Tôkyô à y exposer les résultats présentés ici en novembre 2006 et janvier 2008. Ils tiennent à remercier cette institution pour son hospitalité, et les auditeurs pour leurs questions et commentaires. Tout au long de la préparation de ce volume, les rédacteurs ont bénéficié des remarques, questions et encouragements de nombreux mathématiciens, parmi lesquels Joseph Ayoub, Vladimir Berkovich, Jean-Louis Colliot-Thélène, Dennis Eriksson, Yifeng Liu, Sophie Morel, Chikara Nakayama, Gereon Quick, Takeshi Saito, et Takeshi Tsuji. Nous leur exprimons notre vive reconnaissance. Enfin, nous remercions chaleureusement les rapporteurs, dont le considérable travail de relecture nous a été extrêmement précieux.

Table des matières

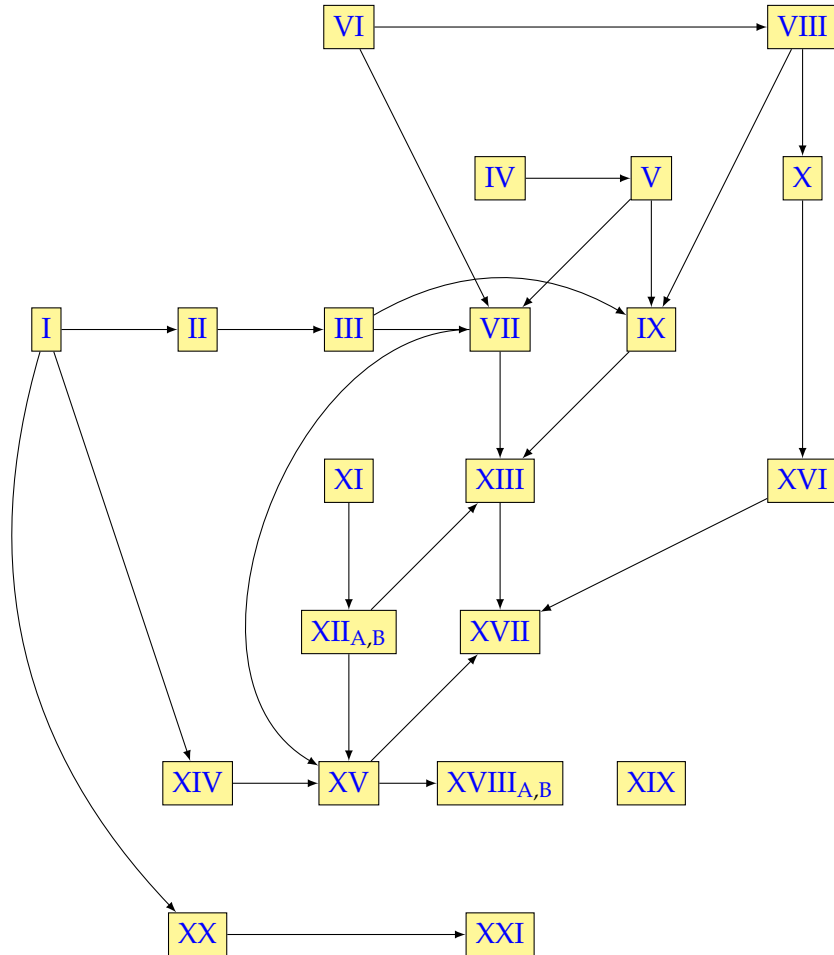
Introduction	v
Remerciements	xi
Leitfaden	xvii
Exposé I. Anneaux excellents	1
par Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo	
1. Introduction	1
2. Définitions	1
3. Exemples immédiats.	3
4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets.	4
5. Permanence par localisation et extension de type fini	4
6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement japonais	6
7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents	7
8. Hensélisation et anneaux excellents	8
9. Complétion formelle et anneaux excellents	8
10. Approximation d'Artin et anneaux excellents	9
11. Exemples de méchants anneaux noethériens	10
Exposé II. Topologies adaptées à l'uniformisation locale	15
par Fabrice Orgogozo	
1. Morphismes maximalelement dominants et la catégorie alt/S	15
2. Topologies : définitions	17
3. Formes standard	19
4. Applications	21
Exposé III. Approximation	25
par Luc Illusie et Yves Laszlo	
1. Introduction	25
2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu	25
3. Approximations et topologie des altérations	26
4. Gradués supérieurs et approximations de complexes	28
5. Modèles et α -isomorphismes	30
6. Réduction au cas local noethérien complet	32
Exposé IV. Le théorème de Cohen-Gabber	35
par Fabrice Orgogozo	
1. p -bases et différentielles (rappels)	35
2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique > 0	37
3. Autour du théorème de Epp	42
4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte	43
Exposé V. Algébrisation partielle	47
par Fabrice Orgogozo	
1. Préparatifs (rappels)	47

2. Algébrisation partielle en égale caractéristique	48
3. Algébrisation partielle première à ℓ en caractéristique mixte	50
Exposé VI. Log régularité, actions très modérées	53
par Luc Illusie	
1. Log régularité	53
2. Revêtements Kummer étales	55
3. Actions très modérées	58
4. Points fixes	63
Exposé VII. Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible)	67
par Fabrice Orgogozo	
1. Énoncé	67
2. Réductions : rappel des résultats antérieurs	67
3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong	67
4. Résolution des singularités	68
Exposé VIII. Gabber's modification theorem (absolute case)	69
par Luc Illusie et Michael Temkin	
1. Statement of the main theorem	69
2. Functorial resolutions	70
3. Resolution of log regular log schemes	79
4. Proof of Theorem 1.1 — preliminary steps	95
5. Proof of Theorem 1.1 — abelian inertia	99
Exposé IX. Uniformisation locale première à ℓ	107
par Luc Illusie	
1. Rappel de l'énoncé et premières réductions	107
2. Log régularité, fin de la démonstration	109
Exposé X. Gabber's modification theorem (log smooth case)	111
par Luc Illusie et Michael Temkin	
1. The main theorem	111
2. Prime to ℓ variants of de Jong's alteration theorems	123
3. Resolvability, log smoothness, and weak semistable reduction	129
Exposé XI. Produits orientés	143
par Luc Illusie	
1. Construction des produits orientés	143
2. Tubes et changement de base	148
3. Produits fibrés	153
4. Topos évanescents et co-évanescents	154
Exposé XII _A . Descente cohomologique orientée	159
par Fabrice Orgogozo	
1. Acyclicité orientée des morphismes propres	159
2. Descente cohomologique orientée	163
Exposé XII _B . On hyper base change	171
par Weizhe Zheng	
1. A descent formalism	171
2. Variants and counterexamples	174
3. Appendix: Proper base change for stacks on topological spaces	175
Exposé XIII. Le théorème de finitude	179
par Fabrice Orgogozo	

1. Introduction	179
2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible	179
3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à ℓ	182
4. Coefficients ℓ -adiques	187
Exposé XIV. Fonctions de dimension par Vincent Pilloni et Benoît Stroh	189
1. Universelle caténarité des schémas henséliens	189
2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension	191
Exposé XV. Théorème de Lefschetz affine par Vincent Pilloni et Benoît Stroh	201
1. Énoncé du théorème et premières réductions	201
2. Pureté, combinatoire des branches et descente	202
3. Uniformisation et approximation des données	204
Exposé XVI. Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue par Joël Riou	207
1. Classes de Chern	207
2. Morphismes de Gysin	210
3. Théorème de pureté	222
4. Conventions de signes	234
Exposé XVII. Dualité par Joël Riou	241
1. Le morphisme de transition en codimension 1	242
2. Complexes dualisants putatifs et potentiels	249
3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal	254
4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels	264
5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels	269
6. Le théorème de dualité locale	275
7. Anneaux de coefficients généraux	281
8. Produits tensoriels de complexes non bornés	295
9. Complexes inversibles	299
10. Coefficients universels	301
11. Modules ind-unipotents	303
12. Le morphisme de bidualité	305
Exposé XVIII _A . Cohomological dimension: First results par Luc Illusie	311
1. Bound in the strictly local case and applications	311
2. Proof of the main result	312
Exposé XVIII _B . Dimension cohomologique : raffinements et compléments par Fabrice Orgogozo	315
1. Préliminaires	315
2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique	316
3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique	318
4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique »	320
5. Majoration : amélioration	321
6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre épointé : minoration	323
Exposé XIX. Un contre-exemple par Yves Laszlo	329
1. Introduction	329

2. La construction	329
3. Noéthérianité de A	332
4. Étude des points doubles	334
5. D est localement mais pas globalement un diviseur à croisements normaux	334
Exposé XX. Rigidité	337
par Yves Laszlo et Alban Moreau	
1. Introduction	337
2. Lemme de rigidité	337
3. Rigidité de la ramification	345
4. Théorème de rigidité de la ramification I : forme faible	347
5. Rigidité de la ramification II : forme forte	352
6. Appendice 1 : sorites champêtres	356
7. Appendice 2 : théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck pour les champs ind-finis sur des schémas non noethériens	360
8. Appendice 3 : sorites sur les gerbes	360
Exposé XXI. Le théorème de finitude pour les coefficients non abéliens	365
par Frédéric Déglise	
1. Introduction	365
2. Image directe de faisceaux d'ensembles constructibles	366
3. Image directe dérivée de faisceaux de groupes constructibles	369
4. Cas de codimension 2 sans hypothèse sur la torsion	373
5. Revêtements principaux d'une surface strictement locale épointée	376
Annexe A. Fac-similé : Orsay	383
Annexe B. Fac-similé : Princeton	403
Bibliographie	431
Index	437

Leitfaden



I	anneaux excellents	XII	descente cohomologique orientée / hyper base change
II	topologies adaptées à l'uniformisation locale	XIII	théorème de finitude
III	approximation	XIV	fonctions de dimension
IV	le théorème de Cohen-Gabber	XV	théorème de Lefschetz affine
V	algébrisation partielle	XVI	Chern, Gysin et pureté absolue
VI	log régularité, actions très modérées	XVII	complexes dualisants
VII	théorème d'uniformisation faible	XVIII	dimension cohomologique
VIII	the modification theorem	XIX	un contre-exemple
IX	théorème d'uniformisation locale première à ℓ	XX	rigidité
X	prime to ℓ variants of theorems of de Jong	XXI	théorème de finitude non abélien
XI	produits orientés		

EXPOSÉ I

Anneaux excellents

Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo

Ce texte est une version un peu modifiée d'un exposé de Michel Raynaud.

1. Introduction

Le but est de familiariser le lecteur avec la notion d'excellence et de lui donner un fil d'Ariane pour se repérer dans **ÉGA IV** où l'on trouve les principales propriétés des anneaux excellents. Son ambition n'est certainement pas de donner une exposition complète de la théorie, mais une idée de la stratégie qui ramène pour l'essentiel les preuves à des énoncés, souvent difficiles, dans le cas complet. Dans un second temps, on montre que toutes les propriétés définissant les anneaux excellents peuvent être mises en défaut, même en petite dimension. Notamment, il existe des anneaux de valuation discrète non excellents ainsi que des anneaux noethériens intègres de dimension 1 dont le lieu régulier n'est pas ouvert. Ce dernier exemple est un sous-produit d'une construction proposée par Gabber (**XIX-2.6**). Elle montre que le théorème de constructibilité des images directes (**XIII-1.1.1**) n'est plus vrai si on omet la condition de quasi-excellence.

2. Définitions

Soit A un anneau noethérien et $X = \text{Spec}(A)$ son spectre. On va s'intéresser à des conditions sur X de deux sortes.

• Conditions globales :

2.1. Condition 1 : conditions d'ouverture. *Tout schéma intègre Y fini sur X contient un ouvert dense*

1.a) *régulier.*

1.b) *normal.*

REMARQUE 2.2. La condition 1.a) entraîne d'après le critère d'ouverture de Nagata que le lieu régulier de tout schéma fini sur X est ouvert ([**ÉGA IV**₂ 6.12.4]). De même, la condition 1.b) entraîne que le lieu normal de tout schéma fini sur X est ouvert ([**ÉGA IV**₂ 6.13.7])⁽ⁱ⁾. Ces critères d'ouverture assurent en outre que pour tester 1.a) ou 1.b) on peut se limiter à des schémas intègres Y qui sont de plus finis et radiciels sur X .

• Conditions locales.

Elles sont de deux types.

2.3. Condition 2 : Conditions sur les fibres formelles. *Pour tout point fermé x de X , le morphisme de complétion⁽ⁱⁱ⁾ $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$ est*

2.a) *régulier.*

2.b) *normal.*

2.c) *réduit.*

Un anneau vérifiant 2.a) est dit « G-ring » en anglais, ce en l'honneur de Grothendieck qui a dégagé l'importance de la notion et étudié ses propriétés.

⁽ⁱ⁾ Et en fait, 1.a) (resp. 1.b)) entraîne que le lieu régulier (resp. normal) de tout schéma intègre de type fini sur X est ouvert

⁽ⁱⁱ⁾ Ses fibres sont appelées les fibres formelles (de X ou A) en x .

REMARQUE 2.4. Rappelons qu'un morphisme de schémas noethériens est dit **régulier** (resp. **normal**, **réduit**) respectivement s'il est plat et si les fibres géométriques en tout point de la base sont régulières (resp. normales, réduites). On dit que les fibres formelles de X en x sont géométriquement régulières, géométriquement normales ou géométriquement réduites si le morphisme de complétion $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_x}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ est régulier, normal ou réduit. Bien entendu, il suffit de tester la régularité, normalité, ou réduction des fibres après changement de base radiciel fini ([ÉGA IV₂ 6.7.7]). Notons que la fibre fermée de $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_x}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ est le spectre du corps résiduel $k(x)$: elle est toujours géométriquement régulière. La fibre formelle en $y \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ s'identifie à la fibre formelle *générique* du sous-schéma fermé $\overline{\{y\}}$ (muni de sa structure réduite), adhérence de y dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$; ceci explique qu'on s'intéresse dans la littérature aux fibres formelles génériques des anneaux intègres. Dans le cas où A est local mais pas un corps, elles peuvent avoir des dimensions arbitraires entre 0 et $\dim(A) - 1$ et contenir des points fermés de hauteurs différentes, même dans le cas excellent (2.10) régulier ([Rotthaus, 1991]). Dans le cas où A est un localisé d'une algèbre intègre de type fini sur un corps, la dimension de la fibre formelle générique est bien $\dim(A) - 1$ ([Matsumura, 1988]).

2.5. Condition 3 : condition de caténarité formelle. Pour tout point fermé y d'un sous-schéma fermé irréductible Y de X , le complété⁽ⁱⁱⁱ⁾ $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ est équidimensionnel.

On dit alors que X est **formellement caténaire**. Par exemple, si X est de dimension 1, X est formellement caténaire.

EXEMPLE 2.6. Tout anneau local noethérien *complet* est formellement caténaire.

Rappelons que X est dit **caténaire** si toutes les chaînes saturées de fermés irréductibles de X ayant mêmes extrémités ont même longueur, **universellement caténaire**^(iv) si tout schéma affine de type fini sur X est caténaire. La caténarité est une notion locale. La terminologie de **caténarité formelle** est alors justifiée par la proposition élémentaire suivante ([ÉGA IV₂ 7.1.4]), proposition qui résulte de la fidèle platitude du morphisme de complétion

LEMME 2.7. Soit A local noethérien de complété équidimensionnel. Alors

- (i) A est équidimensionnel et caténaire.
- (ii) Pour tout idéal I de A , le quotient A/I est équidimensionnel si et seulement si son complété l'est ; en particulier, A/I est formellement caténaire.
- (iii) En particulier, un schéma affine X noethérien formellement caténaire est caténaire et même universellement caténaire.

Notons que (iii) découle immédiatement de (i) puisque X est caténaire si et seulement si ses composantes irréductibles le sont. On verra plus bas dans la section 5 que la propriété de caténarité formelle est notamment stable par extension finie d'où l'universelle caténarité annoncée (cf. la preuve de la proposition 7.1 et, pour une réciproque, voir (7.1.1)).

EXEMPLE 2.8. Soit alors $B \rightarrow A$ un morphisme local surjectif d'anneaux noethériens et supposons B de Cohen-Macaulay (par exemple régulier). Comme $\widehat{B}$ est de Cohen-Macaulay, il est équidimensionnel de sorte que A est formellement caténaire d'après (2.7).

Regardons ce qui se passe dans le cas complet. Rappelons pour mémoire le théorème de structure de Cohen des anneaux locaux complets noethériens ([ÉGA 0_{IV} 19.8.8]) :

THÉORÈME 2.9 (Cohen). Soit A un anneau local noethérien complet de corps résiduel k .

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Bien entendu, même si $\mathcal{O}_{Y,y}$ est intègre, son complété n'est en général pas intègre : penser à une courbe nodale.

^(iv) Cette dernière notion est utile en théorie de la dimension : si A est intègre universellement caténaire contenue dans B intègre de type fini sur A , on a pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ la formule

$$\dim B_{\mathfrak{p}} + \deg. \mathrm{tr}_{k(\mathfrak{q})} k(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{q}} + \deg. \mathrm{tr}_A B.$$

Mais, en pratique, on teste plutôt la caténarité formelle qui, comme on le voit juste après, entraîne l'universelle caténarité, et même lui est équivalente (voir (7.1.1) plus bas) !

- (i) A est isomorphe à un quotient d'un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen^(v). Si A contient un corps, il est isomorphe à un quotient d'un anneau de séries formelles sur k .
- (ii) Si A est de plus intègre, il existe un sous-anneau B isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou un corps^(vi) de sorte que l'inclusion $B \rightarrow A$ soit locale, finie et induise un isomorphisme des corps résiduels.

Tout anneau local noethérien complet est donc quotient d'un anneau régulier.

DÉFINITION 2.10. Soit X un schéma (resp. $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine) noethérien. On dit que X (resp. A) est

- **excellent** si X vérifie 1.a) + 2.a) + 3).
- **quasi-excellent** si X vérifie 1.a) + 2.a).
- **universellement japonais**^(vii) si X vérifie 1.b) + 2.c).

2.11. L'existence d'une classe de schémas stable par extension finie pour laquelle le théorème de désingularisation est vérifié impose de se limiter aux schémas quasi-excellents. Précisément, si tous les schémas intègres et finis Y sur X admettent une désingularisation (au sens de l'existence de $Y' \rightarrow Y$ propre et birationnel avec Y' régulier), alors X est quasi-excellent ([ÉGA IV₂ 7.9.5])^(viii). Inversement, le théorème de désingularisation d'Hironaka se généralise à tout schéma réduit quasi-excellent de caractéristique nulle ([Temkin, 2008, 3.4.3])^(ix).

On regroupe plus bas (11) des exemples de « méchants anneaux ». Commençons par un regard plus positif.

3. Exemples immédiats.

PROPOSITION 3.1. *Un corps, un anneau de Dedekind de corps des fractions de caractéristique nulle est excellent.*

Démonstration. Vérifions qu'un corps est excellent. En effet, une algèbre finie et intègre sur un corps est un corps : les propriétés 1.a), 2.a) et 3) sont donc vérifiées ce qui prouve que tout corps est excellent.

Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K de caractéristique nulle est excellent.

- Vérifions 1.a). Soit donc B intègre finie sur A . Soit B est un corps, auquel cas 1.a) est vérifié, soit A se plonge dans B . Comme K est de caractéristique nulle, B est génériquement étale sur A , prouvant que le lieu régulier de B contient un ouvert non vide (le lieu étale par exemple).
- Pour 2.a), considérons $\mathfrak{x}$ fermé dans $\text{Spec}(A)$. La fibre formelle non fermée en $\mathfrak{x}$ est le complété $\widehat{K}_{\mathfrak{x}}$ de K pour la valuation définie par $\mathfrak{x}$. Comme K est de caractéristique nulle, le corps $\widehat{K}_{\mathfrak{x}}$ est séparable sur K d'où 2.a).
- La propriété 3) est claire puisque le complété de A en $\mathfrak{x}$ est intègre donc équidimensionnel.

□

On verra plus bas (11.5) qu'il existe de nombreux anneaux de valuation discrète qui ne sont pas quasi-excellents.

^(v)Rappelons ([ÉGA 0_{IV} 19.8.5]) que les anneaux de Cohen C sont les corps de caractéristique nulle et les anneaux de valuation discrète complets d'inégale caractéristique $(0, p)$ non ramifiés. Lorsque le corps résiduel κ de C est parfait, C n'est autre que l'anneau des vecteurs de Witt de κ .

^(vi)Voir (4.2) pour une amélioration.

^(vii)Ou Nagata en anglais, voire *pseudo-géométrie* (chez Nagata notamment).

^(viii)Si de plus X peut localement se plonger dans un schéma régulier, alors X vérifie 3) et est donc excellent.

^(ix)Ce résultat a été longtemps considéré comme « bien connu des experts » alors que sa preuve, tout à fait non triviale, date de 2008.

4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets.

Expliquons avec Nagata pourquoi les anneaux locaux noethériens complets sont excellents^(x).

La propriété 2.a) est tautologique. La caténarité formelle a été vue (2.6). Reste 1.a). Une extension finie d'un anneau complet étant complet, on doit prouver le résultat suivant (cf. [ÉGA IV₂ 22.7.6]).

THÉORÈME 4.1 (Nagata). *Si X est local noethérien intègre et complet^(xi), alors le lieu régulier est ouvert.*

Démonstration. On va distinguer les cas d'égaux et d'inégaux caractéristiques.

Cas I (Cf. [ÉGA 0_{IV} 22.7.6].) Supposons que A contienne un corps et notons k_0 son corps premier (qui est parfait !) de sorte que le corps résiduel k de $A_{\mathfrak{p}}$ est séparable sur k_0 pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier si et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ est formellement lisse sur k_0 (voir dans ce cas [ÉGA 0_{IV} 19.6.4]). D'autre part, le théorème de structure de Cohen (2.9) assure que A est isomorphe à $k[[T_1, \dots, T_n]]/I$ de sorte que $\mathfrak{p}$ s'identifie à un idéal de $B = k[[T_1, \dots, T_n]]$ contenant I . Le critère jacobien de lissité formelle de Nagata ([ÉGA 0_{IV} 22.7.3]) assure que $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier si et seulement si il existe des k_0 -dérivations $D_i, i = 1, \dots, m$, de B dans B et $f_i, i = 1, \dots, m$, des éléments engendrant $I_{\mathfrak{p}}$ tels que $\det(D_i f_j) \notin \mathfrak{p}$. Cette condition étant visiblement ouverte, le théorème suit.

Cas II Supposons que A est d'inégale caractéristique, et donc de corps des fractions K de caractéristique nulle. D'après le théorème de structure de Cohen (2.9), A contient un sous-anneau régulier (et complet) B faisant de A une B -algèbre de finie. Le corps des fractions L de B est de caractéristique nulle comme K . Quitte à remplacer A par un localisé $A[1/a]$, on peut supposer que B est libre de rang fini sur A de base $y_1, \dots, y_m$. Mais $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ est étale en dehors du fermé $d = \det_{A/B}(\text{Tr}(y_i y_j)) \neq 0$ de $\text{Spec}(B)$, qui est non trivial puisqu'il contient le point générique, l'extension $\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A)$ étant séparable — de caractéristique nulle — ! Comme B est régulier, le théorème suit. □

REMARQUE 4.2. Ainsi, un anneau de séries formelles sur un corps est excellent.

Notons que la preuve se simplifie si on connaît l'amélioration de Gabber du théorème de structure de Cohen (IV-2.1.1 et IV-4.2.2) : si A noethérien est local complet et intègre, il contient un anneau B isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou un corps tel que $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ est fini et *génériquement étale*. On n'a alors pas besoin de distinguer les caractéristiques des corps de fractions dans la preuve. Mais la preuve de cette amélioration est difficile.

5. Permanence par localisation et extension de type fini

La notion de (quasi) excellence est remarquablement stable. Précisément, on a

THÉORÈME 5.1. *Toute algèbre de type fini ou plus généralement essentiellement de type fini sur un anneau excellent (resp. quasi-excellent) est excellente (resp. quasi-excellente). En particulier, tout localisé d'algèbre de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind ($\mathbb{Z}$ par exemple) de corps des fractions de caractéristique nulle est excellent.*

(Rappelons que, dans ce contexte, un morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est dit **essentiellement de type fini** si B est une localisation d'une A -algèbre de type fini par un système multiplicatif.)

Expliquons les grandes lignes de la preuve.

5.2. Condition 1). Le passage au localisé ne pose pas de problème. Soit B de type fini sur A . Si A vérifie 1.a) ou 1.b), les critères d'ouverture de Nagata ([ÉGA IV₂ 6.12.4 et 6.13.7]) entraînent qu'il en est de même de B .

^(x)Ceci permet de construire de nombreux exemples d'anneaux de valuation discrète excellents de caractéristique positive (par complétion de schémas réguliers aux points de hauteur 1).

^(xi)D'après (2.2), ceci entraîne que le lieu régulier d'un schéma local noethérien complet est ouvert, qu'il soit intègre ou non.

5.3. Condition 2). C'est la partie la plus difficile de la théorie ([ÉGA IV₂ 7.4.4]), entièrement due à Grothendieck. Le point le plus délicat est la localisation :

THÉORÈME 5.3.1. *Si A vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), alors pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), autrement dit les fibres formelles en tout point de $\text{Spec}(A)$ sont géométriquement régulières (resp. géométriquement normales ou géométriquement réduites).*

Démonstration. La preuve se fait par réduction au cas complet. On se limite à la propriété 2.a), le cas de 2.b) ou 2.c) se traitant de même. Soit $\mathfrak{m}$ maximal contenant $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ et soit B le complété $\mathfrak{m}$ -adique de A . Comme $A_{\mathfrak{m}} \rightarrow B$ est fidèlement plat, il existe $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Par hypothèse, $A_{\mathfrak{m}} \rightarrow B$ est régulier. Les morphismes réguliers étant stables par localisation, $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ est régulier. On regarde alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{B}_{\mathfrak{q}} \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{f} & B_{\mathfrak{q}} \end{array}$$

Supposons que β soit régulier. Alors, $\widehat{f} \circ \alpha$ est régulier comme composé de deux morphismes réguliers. Comme $\widehat{f}$ est fidèlement plat (comme morphisme local complété du morphisme plat f), on déduit que α est régulier (exercice ou [ÉGA IV₂ 6.6.1]) ce qu'on voulait. On est donc ramené à β , donc au cas complet. La régularité de β résulte alors de

THÉORÈME 5.3.2. *Soit B un anneau local noethérien complet B . Alors, les fibres formelles de B en $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$ sont géométriquement régulières.*

Ce théorème est le noyau dur de la théorie. On se ramène (2.4) à étudier les fibres formelles génériques. On montre donc dans un premier temps ([ÉGA 0_{IV} 22.3.3]) que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A local noethérien complet intègre, la fibre formelle générique $\widehat{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \text{Frac}(A_{\mathfrak{p}})$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est formellement lisse sur $\text{Frac}(A_{\mathfrak{p}}) = \text{Frac}(A)$ en tout point. Dans un second temps, on montre ([ÉGA 0_{IV} 22.5.8]) qu'une algèbre locale noethérienne sur un corps est formellement lisse^(xii) si et seulement si elle est géométriquement régulière^(xiii). $\square$

Une fois prouvée la permanence par localisation, on peut montrer :

THÉORÈME 5.3.3. *Soit B une A -algèbre de type fini. Si A vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), alors B vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c)).*

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de générateurs de B . Grâce à l'invariance par localisation, on se ramène aisément à l'étude des fibres formelles de B en un idéal maximal dans le cas où B engendré par un élément et A est complet. La preuve n'est pas facile, mais beaucoup plus simple que celles de ([ÉGA 0_{IV} 22.3.3 et 0.22.5.8]).

5.4. Condition 3). De même que pour les conditions de type 2), la stabilité par localisation et extension finie résulte comme plus haut ([ÉGA IV₂ 7.1.8]) du cas complet, la platitude du morphisme de localisation permettant de descendre du complété à l'anneau — ce n'est pas immédiat malgré tout —. Le cas complet est facile comme on a vu (2.6).

^(xii) Rappelons qu'une k -algèbre locale B (muni de la topologie adique) est formellement lisse sur k si tout k -morphisme continu d'algèbre $B \rightarrow C/I$ avec $I^2 = 0$ se relève continûment à la C -algèbre discrète C .

^(xiii) En fait, on n'a visiblement besoin que du sens formellement lisse entraîne géométriquement régulier, qui est le plus facile. Notons que la preuve de l'équivalence a été considérablement simplifiée par Faltings ([Faltings, 1978]) ou pour le lecteur non germaniste [Matsumura, 1989, 28.7]).

5.5. Application au cas local. Dans le cas local, la condition d'ouverture du lieu régulier découle de 2.a). Précisons.

PROPOSITION 5.5.1.

- (i) *Le lieu régulier d'un anneau local noethérien vérifiant 2.a) est ouvert.*
- (ii) *En particulier, un anneau local noethérien est quasi-excellent (resp. excellent) si et seulement s'il vérifie 2.a) (resp. s'il vérifie 2.a) et 3)).*

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fidèlement plat de schémas noethériens à fibres régulières (resp. normales ou réduites). Alors, $\mathcal{O}_x$ est régulier (resp. normal ou réduit) si et seulement si $\mathcal{O}_{f(x)}$ l'est ([ÉGA IV₂ 6.4.2, 6.5.1]). Notons $U_R(X)$ l'ensemble des $x \in X$ tel que $R(\mathcal{O}_x)$ est régulier (resp. normal ou réduit). Autrement dit, on a $f^{-1}(U_R(Y)) = U_R(X)$. Or le lieu régulier ou normal d'un anneau complet intègre est ouvert (4.1). De plus, le morphisme de complétion d'un anneau local noethérien A est régulier si et seulement si A vérifie 2.a) d'après (5.3.2). Il suit que 2.a) entraîne 1.a) (resp. 2.b) entraîne 1.b)) dans le cas local. $\square$

6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement japonais

Rappelons la définition usuelle des anneaux universellement japonais ([ÉGA 0_{IV} 23.1.1]).

DÉFINITION 6.1. X est dit

- (i) **japonais** s'il est intègre et si la clôture intégrale de A dans toute extension finie^(xiv) de son corps des fractions est finie sur A ^(xv) ;
- (ii) **universellement japonais** si tout anneau intègre qui est extension de type fini de A est japonais^(xvi).

La définition d'anneau japonais n'est que technique en ce qu'elle ne sert qu'à définir la seule notion véritablement utile (et vérifiable à vrai dire) : celle d'anneau universellement japonais. Cette définition est compatible avec 2.10. Expliquons pourquoi. D'après Nagata, X est universellement japonais au sens de 6.1 si et seulement si X vérifie 1.b) et si tous les quotients intègres des localisés $\mathcal{O}_{X,x}$ en les points fermés $x \in X$ sont japonais ([ÉGA IV₂ 7.7.2]). Or, le théorème de Zariski-Nagata ([ÉGA IV₂ 7.6.4]) assure que les quotients intègres de $\mathcal{O}_{X,x}$ sont japonais si et seulement si les fibres formelles de $\mathcal{O}_{X,x}$ sont géométriquement réduites^(xvii). D'où l'équivalence entre les deux définitions des anneaux universellement japonais.

Si on renforce la condition 2.c) en 2.b) (fibres formelles géométriquement normales), le passage à la clôture intégrale commute à la complétion. Précisément, on a ([ÉGA IV₂ 7.6.1 et 7.6.3])

PROPOSITION 6.2. *Supposons que A local noethérien vérifie 2.b) et soit réduit. Alors, la clôture intégrale A' de A dans son anneau total des fractions est finie sur A et son complété est isomorphe à la clôture intégrale de $\hat{A}$ ^(xviii) dans son anneau total des fractions.*

On déduit l'important critère d'intégrité du complété.

COROLLAIRE 6.3. *Soit A local noethérien.*

- (i) *Supposons A intègre et vérifiant 2.b). Alors, $\hat{A}$ est intègre si et seulement si A est unibranche (i.e. A' local).*
- (ii) *Supposons A hensélien. Alors A est excellent si et seulement s'il vérifie 2.a). Si A est de plus intègre, il en est de même de son complété.*

^(xiv) On peut se contenter des extensions finies radicielles si l'on veut : exercice ou [ÉGA IV₁ 23.1.2].

^(xv) Comme module ou comme algèbre : c'est la même chose car la clôture intégrale est entière sur A par construction.

^(xvi) Ou, ce qui est équivalent ([ÉGA IV₂ 7.7.2]), si tout quotient intègre est japonais.

^(xvii) Ou, de façon équivalente, que le complété de toute $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre finie et réduite est réduit. Comme d'habitude, la preuve se fait par réduction au cas complet, et même régulier complet grâce au théorème de structure de Cohen. Le caractère japonais de tels anneaux est garanti par le théorème de Nagata ([ÉGA 0_{IV} 23.1.5]).

^(xviii) Qui est réduit puisque A est japonais (cf. note (xvii)).

Démonstration. Prouvons (i). Comme A est unibranche, la clôture intégrale A' de A est locale : il en est de même de son complété $\widehat{A}'$. D'après (6.2), on a $\widehat{A}' = (\widehat{A})'$ et donc est normal. Or, un anneau normal et local est intègre. Comme $\widehat{A}'$ contient $\widehat{A}$, le résultat suit.

Prouvons (ii). D'après (5.5.1), on doit seulement se convaincre qu'un anneau local hensélien vérifiant 2.a) vérifie aussi 3), *i.e.* est formellement caténaire. On peut supposer A intègre et on doit prouver que $\widehat{A}$ est équidimensionnel. Mais comme A est hensélien intègre, il est unibranche [ÉGA IV₄ 18.8.16], donc $\widehat{A}$ est intègre d'après le premier point, ce qui assure l'équidimensionalité. $\square$

7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents

La définition des anneaux noethériens excellents de Grothendieck est *a priori* différente de celle donnée ici. Notamment, elle fait intervenir, un peu bizarrement, l'*universelle caténarité* en lieu et place de la *caténarité formelle*. Précisément, elle fait intervenir trois propriétés. Dans cette partie A désigne un anneau noethérien et $X = \text{Spec}(A)$ le schéma affine correspondant.

1ÉGA) Pour tout quotient intègre B de A et toute extension finie radicielle K' du corps des fractions K de B , il existe une sous- B -algèbre finie B' de K' contenant B , de corps des fractions K' telle que le lieu régulier de $\text{Spec}(B')$ soit un ouvert dense.

2ÉGA) Les fibres formelles de X en tout point (fermé ou non) sont géométriquement régulières.

3ÉGA) A est universellement caténaire.

Les anneaux excellents au sens des ÉGA sont les anneaux noethériens vérifiant les 3 propriétés précédentes ([ÉGA IV₂ 7.8.2]).

Notons tout de suite, ce qui est élémentaire, que l'universelle caténarité de A équivaut à celle des anneaux locaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ en tous ses points fermés — ou tous ses points si on préfère — ([ÉGA IV₂ 5.6.3]).

Pour que la définition des anneaux excellents de Grothendieck ([ÉGA IV₂ 7.8.2]) soit la même que (2.10), on doit prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 7.1. *Pour tout anneau noethérien et $i = 1, 2, 3$, les propriétés i) et i ÉGA) sont équivalentes. En particulier, les notions de quasi-excellence et d'excellence de la première partie coïncident avec celles des ÉGA.*

Démonstration. La condition 1ÉGA) équivaut à 1) d'après [ÉGA IV₂ 6.12.4] (seule la partie 1ÉGA) entraîne 1) est délicate même si elle n'utilise pas le critère de régularité de Nagata mais seulement de l'algèbre commutative standard — essentiellement le critère de régularité par fibres et la non dégénérescence de la trace des extensions finies séparables de corps —).

Pour l'équivalence de 2) et 2ÉGA), il faut se convaincre que la régularité géométrique des fibres formelles en tout point fermé entraîne la régularité géométrique des fibres formelles en tout point : c'est un cas particulier des propriétés de permanence (5).

Ceci prouve la compatibilité des définitions de la quasi-excellence.

Si X vérifie 3), tous ses anneaux locaux sont formellement caténaires (permanence par localisation, cf. la section 5) et donc sont caténaires (2.7). Comme tout schéma (affine) de type fini sur X vérifie 3) (permanence par extension de type finie, cf. la section 5), on déduit que X est universellement caténaire et donc X vérifie 3ÉGA).

La réciproque est due à Ratliff :

PROPOSITION 7.1.1 (Ratliff). *Un anneau noethérien universellement caténaire est formellement caténaire.*

Précisément, Ratliff prouve ([Ratliff, 1971, 3.12]) que si A est caténaire, $A_{\mathfrak{p}}$ est formellement caténaire dès que $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal^(xix). Pour montrer la proposition, on peut donc supposer $\mathfrak{p}$ maximal et A local intègre. Alors, $\mathfrak{p}[X]$ est premier non maximal dans $A[X]$ de sorte que le complété $\mathfrak{p}[X]$ -adique

^(xix) Dans l'étrange terminologie de l'auteur, c'est la condition $\text{depth}(\mathfrak{p}) > 0$, ce qui signifie donc que la *dimension* de $A/\mathfrak{p}$ est > 0 .

$\widehat{A[X]_{p[X]}}$ est formellement équidimensionnel. Comme $\widehat{A} \rightarrow \widehat{A[X]_{p[X]}}$ est local et plat, l'argument de platitude ([ÉGA IV₂ 7.1.3]) utilisé plus haut assure que $\widehat{A}$ est équidimensionnel. $\square$

8. Hensélisation et anneaux excellents

Rappelons qu'un morphisme d'anneaux noethériens $A \rightarrow B$ est dit **absolument plat** s'il est réduit à fibres discrètes et si les extensions résiduelles sont algébriques et séparables. Ou, de façon équivalente, s'il est plat ainsi que le morphisme diagonal $B \otimes_A B \rightarrow B$ (cf. [Ferrand, 1972, prop. 4.1], et [Olivier, 1971, 3.1]). Lorsque B est (localement) de type fini sur A , ceci équivaut au fait que B soit étale sur A . En particulier, les extensions résiduelles sont séparables de sorte qu'un tel morphisme est en fait régulier. Par exemple, tout morphisme ind-étale est absolument plat. On a alors le résultat suivant ([Greco, 1976]).

THÉORÈME 8.1. *Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme absolument plat d'anneaux noethériens. Alors*

- (i) *Si A est vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), B vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c))^(xx).*
- (ii) *Si A est universellement-japonais, B est universellement japonais.*
- (iii) *Si A est quasi-excellent, B est quasi-excellent.*
- (iv) *Si A est excellent, B est excellent.*
- (v) *Si f est fidèlement plat, la réciproque de (i), (ii) et (iii) est vraie.*
- (vi) *Si f est fidèlement plat et B est localement intègre, la réciproque de (iv) est vraie.*

Comme les morphismes d'hensélisation et de stricte hensélisation sont absolument plats ([ÉGA IV₄ 18.6.9 et 18.8.12]) et fidèlement plats (ils sont locaux), on trouve, en particulier, que la quasi-excellence et l'excellence sont stables par hensélisation et hensélisation stricte et que, le caractère quasi-excellent ou universellement japonais d'un anneau local se teste sur l'hensélisé ou l'hensélisé strict. Dans le cas de l'hensélisé, ces résultats étaient connus de Grothendieck ([ÉGA IV₄ 18.7]), notamment 18.7.6).

En revanche, on ne peut espérer une propriété de descente de l'excellence comme en (vi) sans condition d'intégrité locale (cf. § 11).

9. Complétion formelle et anneaux excellents

Soit I un idéal d'un anneau noethérien A contenu dans son radical de Jacobson et $\widetilde{A}$ sa complétion I -adique. On peut se demander si les propriétés d'excellence passent au complété. La réponse est oui en général. Précisément, on a :

PROPOSITION 9.1. *Soit I un idéal d'un anneau noethérien A contenu dans son radical de Jacobson et $\widetilde{A}$ sa complétion I -adique.*

- (i) *Si A est (semi)-local quasi-excellent (resp. excellent), il en est de même de $\widetilde{A}$;*
- (ii) *Si A est une $\mathbb{Q}$ -algèbre excellente, il en est de même de $\widetilde{A}$.*

La permanence de la quasi-excellence dans le cas (semi)-local, *i.e.* de la régularité géométrique des fibres formelles, est due à Rotthaus ([Rotthaus, 1977]), tandis que celle de l'universelle caténarité est due à Seydi^(xxi) (le théorème 1.12 de [Seydi, 1970] prouve qu'un anneau de série-formelles $A[[t_1, \dots, t_n]]$ est universellement caténaire dès que A l'est; il suffit alors de considérer des générateurs $i_1, \dots, i_n$ de I définissant une surjection $A[[t_1, \dots, t_n]] \twoheadrightarrow \widetilde{A}$). Pour (ii), reste à étudier l'ouverture du lieu régulier dans le. C'est ce qui est fait dans [Brodmann & Rotthaus, 1980], en utilisant le théorème de désingularisation d'Hironaka de façon cruciale. Les techniques de

^(xx) Ou plus généralement, si A est un $\mathbf{P}$ -anneau au sens de Grothendieck ([ÉGA IV₂ 7.3]), B est un $\mathbf{P}$ -anneau

^(xxi) Comme me l'a expliqué Christel Rotthaus (communication privée), si A, B sont locaux tels que $A \subset B \subset \widehat{A}$ et $\widehat{B} = \widehat{A}$, alors l'universelle caténarité de A entraîne celle de B .

[Brodmann & Rotthaus, 1980] ont d'ailleurs permis de montrer que si le théorème de désingularisation était vrai dans le cas local excellent, toute complétion I-adique d'anneau excellent comme plus haut serait excellente ([Nishimura & Nishimura, 1987]).

En fait, le résultat est général. Plus précisément, Gabber ([Gabber, 2007]) peut remplacer le théorème d'Hironaka par son théorème d'uniformisation (VII-1.1) dans les arguments de [Nishimura & Nishimura, 1987] pour prouver le résultat suivant

THÉORÈME 9.2 (Gabber). *Soit A un anneau noethérien I-adiquement complet. Alors, si A/I est quasi-excellent, A est quasi-excellent.*

On ne peut remplacer quasi-excellent par excellent dans le théorème précédent. En effet, Greco ([Greco, 1982]) a construit un idéal I d'un anneau A intègre de dimension 3, noethérien semi-local I-adiquement complet et séparé qui est quasi-excellent non excellent alors que A/I est excellent. On peut même supposer que A est une $\mathbf{Q}$ -algèbre. La construction se fait par pincements d'idéaux maximaux de hauteurs différentes (cf. 11.1). Malgré tout, comme on vient de le voir, la caténarité formelle passe aux complétions partielles ([Seydi, 1970]) de sorte que le complété I-adique d'un anneau excellent A est excellent dès lors que I est contenu dans le radical de Jacobson de A .

10. Approximation d'Artin et anneaux excellents

Rappelons la définition suivante (cf. [Artin, 1969]).

DÉFINITION 10.1 (M. Artin). Un anneau local noethérien $(A, \mathfrak{m})$ a la **propriété d'approximation (AP)** si pour toute variété affine X de type fini sur A , l'ensemble $X(A)$ est dense dans $X(\hat{A})$.

Bien entendu, il revient au même de dire que pour tout X comme plus haut, on a

$$X(\hat{A}) \neq \emptyset \Rightarrow X(A) \neq \emptyset.$$

Si A vérifie AP, A est certainement hensélien. Mais l'exemple 11.4 prouve qu'il ne suffit pas que A soit hensélien pour qu'il possède la propriété d'approximation. En fait, Rotthaus a observé que l'excellence était une condition nécessaire à l'approximation d'Artin :

LEMME 10.2 ([Rotthaus, 1990]). *Un anneau local noethérien vérifiant AP est hensélien et excellent.*

Soit k un corps de caractéristique nulle muni d'une valuation non triviale à valeurs réelles. Artin a prouvé ([Artin, 1968]) que les anneaux de séries convergentes à coefficients dans k (pas nécessairement complets) ont la propriété d'approximation. Ils sont donc henséliens et excellents^(xxii).

La situation est maintenant complètement clarifiée grâce aux travaux de Popescu culminant avec le résultat suivant ([Swan, 1998]) :

THÉORÈME 10.3 (Popescu). (i) *Soit $A \rightarrow B$ un morphisme régulier d'anneaux noethériens. Alors, B est limite inductive filtrante de A -algèbres lisses.*

(ii) *Tout anneau local noethérien hensélien et excellent satisfait la propriété d'approximation AP^(xxiii).*

Le fait que (i) entraîne (ii) est un simple exercice. En effet, si A est quasi-excellent, le morphisme de complétion $A \rightarrow \hat{A}$ est régulier et donc on peut écrire $\hat{A} = \text{colim } L$ où L est lisse sur A . Soit $X = \text{Spec}(B)$ avec B de type fini et $\hat{a} \in X(\hat{A})$ d'image $\hat{a}(0) \in X(k)$ où k corps résiduel de A . Il existe donc L lisse sur A tel que $\hat{a}$ provienne de $l \in X(L)$. Comme A est hensélien, il existe $a \in X(A)$ (tel que $a(0) = \hat{a}(0)$)^(xxiv).

^(xxii) Dans le même ordre d'idées, l'anneau $k\{x_1, \dots, x_n\}$ des séries formelles restreintes (séries dont la suite des coefficients tendent vers 0) à coefficients dans un corps valué complet non archimédien k est excellent dès que k est de caractéristique nulle ou que k est de degré fini sur k^p , $p = \text{car}(k)$ ([Greco & Valabrega, 1974]). Le cas général a été obtenu par Kiehl ([Kiehl, 1969]) et aussi [Conrad, 1999] pour une preuve et des développements). Ceci répond, partiellement, à une question de Grothendieck ([ÉGA IV₂ 7.4.8 B]). En revanche, si k est valué non archimédien non complet de caractéristique positive tel que le morphisme de complétion $k \rightarrow \hat{k}$ n'est pas séparable, Gabber sait prouver que $k\{x_1\}$ n'est pas excellent.

^(xxiii) Voir [Spivakovsky, 1999, th. 11.3] pour un énoncé un peu plus général.

^(xxiv) L'argument n'utilise que la régularité géométrique des fibres — et le caractère hensélien — mais pas la caténarité formelle. Ce n'est pas paradoxal, car un anneau local hensélien est excellent si et seulement si ses fibres formelles sont géométriquement régulières (5.5.1).

11. Exemples de méchants anneaux noethériens

Soit A un anneau noethérien et $X = \text{Spec}(A)$ le schéma affine correspondant. Il ressortira de cet inventaire que les propriétés désagréables des anneaux du point de vue de l'excellence n'ont en général pas seulement à voir avec la caractéristique > 0 mais peuvent aussi se produire pour des $\mathbf{Q}$ -algèbres.

11.1. Caténarité formelle : condition 3). Regardons d'abord de mauvais anneaux du point de vue de la caténarité formelle.

11.1.1. *La caténarité n'entraîne pas la caténarité formelle.* Dans [ÉGA IV₂ 5.6.11], Grothendieck construit un exemple d'anneau local noethérien de dimension 2 intègre, caténaire mais non universellement caténaire, donc non formellement caténaire d'après 7.1.1 (i.e. ne vérifiant pas 3)).

Expliquons la construction qui consiste à pincer une surface lisse sur un corps k , de caractéristique nulle si l'on veut, le long de deux points de hauteurs différentes ayant des corps résiduels isomorphes à k .

On part d'un corps k extension transcendante pure de degré infini sur son corps premier par exemple, que l'on peut même supposer être $\mathbf{Q}$. Soit S une surface lisse munie d'un morphisme projectif sur $T = \text{Spec}(k[\tau])$ et $t \in S(T)$. On suppose qu'il existe un point $s \in S(k)$ de la fibre S_0 de $S \rightarrow T$ au-dessus de $0 \in T$ qui n'est pas dans l'image de t . Par exemple, on peut prendre $S = \text{Spec}(k[\sigma, \tau])$ avec t la section d'image $\sigma = 0$ et $s = (1, 0)$. Les corps $k(s) = k$ et $k(t) = \text{Frac}(k[\tau])$ sont des extensions transcendentes pures de $\mathbf{Q}$ de même degré (infini) de sorte qu'on peut choisir un isomorphisme de corps $k(s) \simeq k(t)$. Ceci permet de définir le sous-anneau $\mathcal{O}_\Sigma$ de $\mathcal{O}_S$ des fonctions qui coïncident en s et t . On dispose donc d'un morphisme $\pi : S \rightarrow \Sigma$ qui envoie s, t sur $\sigma \in \Sigma$. Posons $A = \mathcal{O}_{\Sigma, \sigma}$ et soit B l'anneau de coordonnées de $S \times_\Sigma \text{Spec}(\mathcal{O}_{\Sigma, \sigma})$. Par construction, $\dim(B_s) = 2$ et $\dim(B_t) = 1$. Alors, A est noethérien, et B est la normalisation de A et est fini sur A . Comme A est de dimension 2 et intègre il est évidemment caténaire. Si A était universellement caténaire, la formule de dimension (voir note (iv)) entraînerait $\dim(A) = \dim B_s = \dim B_t$, une contradiction.

On peut même trouver pour tout $n \geq 2$ des anneaux locaux noethériens intègres de dimension n vérifiant 2.a), caténaires non universellement caténaires donc ne vérifiant pas 3) ([Heinzer et al., 2004]).

11.1.2. *La caténarité formelle ne se teste pas sur l'hensélisé.* Par des techniques de pincements analogues de surfaces sur k , donc de caractéristique nulle si on veut, comme plus haut, Grothendieck construit en effet un exemple d'anneau local non universellement caténaire (donc non formellement caténaire) dont l'hensélisé est excellent ([ÉGA IV₄ 18.7.7]). Quitte à changer de base par la clôture séparable, on s'aperçoit que la caténarité formelle ne se teste pas plus sur l'hensélisé strict, contrairement à la quasi-excellence (8.1).

11.1.3. *La caténarité formelle n'entraîne certainement pas 2.a) (ni même 2.c)).* Par exemple, un anneau de valuation discrète A non excellent (cf. la partie 11.5) a une fibre formelle générique non géométriquement régulière (en effet, il est formellement caténaire (2.8) et 2.a) entraîne 1.a) dans le cas local (5.5.1)). Or, cette fibre générique formelle est artiniennne dans ce cas (elle ne contient pas l'idéal maximal de $\hat{A}$) et donc la régularité géométrique équivaut ici à la géométrie réduction.

11.1.4. *Il existe des anneaux intègres normaux non formellement caténaires.* Ogoma ([Ogoma, 1980]) a construit une $\mathbf{Q}$ -algèbre locale A intègre normale de dimension 3 dont le complété à une composante de dimension 2 et une composante de dimension 3 et donc n'est pas équidimensionnel. Pire, cet anneau n'est même pas caténaire : il possède une infinité de chaînes saturées d'idéaux premiers de longueur 2 ou 3.

11.2. Quasi-excellence : conditions d'ouverture 1.a) et 1.b). On s'intéresse ici à des anneaux ayant un lieu régulier ou normal non ouvert.

Comme on le verra plus loin (XIX-2.6), Gabber a construit un exemple de schéma, qu'on peut même supposer être un $\mathbf{Q}$ -schéma, intègre de dimension 1, dont le lieu régulier (ou normal, c'est la même chose ici) contient une infinité de points et en particulier n'est pas ouvert. La construction assure que les fibres formelles sont géométriquement régulières. Comme on est en dimension 1, normalité et régularité coïncident de sorte qu'on a un exemple vérifiant 2.a) et 3) mais pas 1.b).

Dans [Rotthaus, 1979], Rotthaus construit une $\mathbf{Q}$ -algèbre noethérienne locale intègre de dimension 3 qui est formellement caténaire, universellement japonaise mais dont le lieu régulier n'est pas ouvert.

11.3. Quasi-excellence. Fibres formelles : conditions 2a), 2b) et 2c). On s'intéresse ici à des anneaux ayant des fibres formelles non géométriquement régulières voire pire.

- Rotthaus construit une $\mathbf{Q}$ -algèbre locale A noethérienne de dimension 3 régulière (donc formellement caténaire), universellement japonaise mais pas excellente ([Rotthaus, 1979]). Précisément, la fibre formelle au-dessus d'un point de hauteur 1 n'est pas régulière. Ainsi, elle vérifie 2.c), 3) car A régulier mais pas 2.a).

Dans l'exemple d'Ogoma précédent, la fibre formelle générique est connexe non intègre (elle a une composante de dimension 1 et une de dimension 2 qui se coupent), donc non normale. On a donc un exemple de $\mathbf{Q}$ -algèbre locale (de dimension 3) noethérienne (intègre et normale) ne vérifiant pas 2.b).

On peut descendre d'une dimension : Nagata construit ([Nagata, 1962, ex. 7 de l'appendice A1]) une $\mathbf{Q}$ -algèbre locale B qui est intègre normale, formellement caténaire et de dimension 2 mais dont le complété n'est pas intègre^(xxv). D'après 6.2, ceci prouve que B ne vérifie pas 2.b) (mais vérifie 3)).

- En caractéristique > 0 , Rotthaus construit également ([Rotthaus, 1979]) une algèbre locale noethérienne de dimension 2 régulière universellement japonaise mais pas excellente. Dans ce dernier cas, comme les fibres formelles sont de dimension < 2 , elles ne sont pas non plus géométriquement normales. Ainsi, elle vérifie 2.c), 3) mais pas 2.b).
- En caractéristique nulle, Ferrand et Raynaud ont construit ([Ferrand & Raynaud, 1970, prop. 3.3 et 3.5]) une $\mathbf{C}$ -algèbre locale noethérienne A intègre de dimension 2 telle que
 - le normalisé A' de A est l'anneau des séries convergentes noté $\mathbf{C}\{x, y\}$ (ne pas confondre avec l'hensélisé de $\mathbf{C}[x, y]$) et donc est excellent.
 - A n'est pas japonais (en fait, A' n'est pas fini sur A).
 - $\hat{A}$ a des composantes immergées (de sorte que — platitude — la fibre formelle générique a des composantes immergées et donc ne vérifie pas 2.c)).
 - Le lieu normal de $A[[T]]$ n'est pas ouvert. D'après [ÉGA IV₂ 6.13.5] son lieu régulier n'est donc pas ouvert non plus.
 - L'anneau A est formellement caténaire (le spectre de son complété est irréductible). Il en est donc de même de $A[[T]]$ ([Seydi, 1970]).
- Dans [Nagata, 1962, ex. 5 de l'appendice A1], Nagata construit même un anneau local noethérien intègre de dimension 3 (de caractéristique > 0) dont la clôture intégrale n'est même pas noethérienne ; en particulier, cet anneau n'est pas japonais^(xxvi).
- Pire, à partir d'anneaux construits par Nagata, Seydi construit ([Seydi, 1972]) un anneau noethérien intègre normal A de dimension 3 dont le corps des fractions est de caractéristique nulle et dont le complété n'est pas réduit. En particulier, il est japonais mais pas universellement japonais. Ogoma construit ([Ogoma, 1980]) une $\mathbf{Q}$ -algèbre noethérienne normale, donc japonaise, qui n'est ni universellement japonaise ni caténaire.

^(xxv) La construction est la suivante : soient x, y algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et $w = \sum_{i>0} a_i x^i \in \mathbf{Q}[[x]]$ transcendant sur $K(x)$. On pose $z_1 = (y + w)^2$ et $z_{i+1} = (z - (y + \sum_{j<i} a_j x^j)^2)/x^i$. Soit A le localisé de $\mathbf{Q}[x, y, z_i, i \geq 1]$ en $(x, y, z_i, i \geq 1)$. Alors, $B = A[X]/(X^2 - z_1)$ est l'exemple cherché. On vérifie facilement que la complétion de A est $\mathbf{Q}[[x, y]]$ de sorte que $\hat{B} = \mathbf{Q}[[x, y]][X]/(X^2 - (y + w)^2)$ n'est pas intègre. Comme d'habitude dans ces constructions, c'est le caractère noethérien de A qui pose problème. Une fois ceci acquis, A est régulier de dimension 2 et B normal puisque que Cohen-Macaulay de dimension 2 singulier uniquement à l'origine. Notons que B est formellement caténaire comme quotient d'un régulier.

^(xxvi) La construction est du même type que celle d'un anneau de valuation discrète décrite dans la note (xxvii) dont on reprend les notations. On considère cette fois-ci l'anneau $B = k^p[[X, Y, Z]][k]$ et $d = Y \sum_{i>0} X_i X^i + Z \sum_{i>0} X_{2i+1} X^i$. L'anneau $B[d]$ convient.

- Les fibres formelles peuvent être épouvantables, même en dimension 1 : Ferrand et Raynaud construisent un $\mathbf{C}$ -schéma local intègre de dimension 1 dont la fibre formelle générique est un schéma artinien qui n'est même pas Gorenstein — donc certainement non réduit — ([**Ferrand & Raynaud, 1970**], prop. 3.1) : X ne vérifie pas 2.c). En particulier, X n'est pas universellement japonais (et donc pas quasi-excellent). Bien entendu, X vérifie 1.a) et 3) pour des raisons de dimension.
- Les exemples d'anneaux de valuation discrète non excellents (donc de caractéristique positive) donnent des exemples d'anneaux ne vérifiant pas 2.c) (2.a) et 2.c) sont équivalents en dimension ≤ 1) mais vérifiant 1.a) et 3).

REMARQUE 11.4. Nagata a construit ([**Nagata, 1962**, (E3.3)]) un anneau de valuation discrète dont la fibre formelle générique est une extension radicielle non triviale de son corps des fractions, donc non excellent^(xxvii).

On va voir maintenant que de tels anneaux se rencontrent très facilement.

11.5. Méthode systématique de construction d'anneaux non quasi-excellents. En fait, on peut construire (Orgogozo) de façon systématique de très nombreux anneaux de valuation discrète non quasi-excellents. Précisons^(xxviii).

PROPOSITION 11.6. Soit $k((t))$ le corps des séries de Laurent à coefficients dans un corps k de caractéristique $p > 0$ muni de sa valuation t -adique et L/k une sous-extension de type fini de $k((t))/k$ de degré de transcendance > 1 sur k . Alors, le sous-anneau A de L des éléments de valuation ≥ 0 est un anneau de valuation discrète non excellent.

Démonstration. Soit $\bar{L}$ un corps de caractéristique > 0 . Le p -rang est la dimension, finie ou non, de $\Omega_{\bar{L}}$, le module des différentielles absolues. C'est aussi $\log_p([\bar{L} : \bar{L}^p])$ où $[\bar{L} : \bar{L}^p]$ est la dimension de $\bar{L}$ sur $\bar{L}^p$ ([**ÉGA IV₁** 21.3.5]). La remarque clef est que le p -rang croît par extension de corps séparable $\bar{K}/\bar{L}$, finie ou non, puisqu'on a dans ce cas un plongement $\bar{K} \otimes_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}} \hookrightarrow \Omega_{\bar{K}}$ ([**ÉGA IV₂** 20.6.3])

$$(11.6.1) \quad [\bar{L} : \bar{L}^p] \leq [\bar{K} : \bar{K}^p].$$

Par ailleurs, si $\bar{L}$ est de type fini sur un corps k de p -rang fini, on a ([**Bourbaki, A, V**, § 16, n° 6, cor. 3])

$$(11.6.2) \quad [\bar{L} : \bar{L}^p] = p^{\deg.\text{tr.}_k(\bar{L})} [k : k^p].$$

Plaçons nous dans la situation du lemme. L'anneau A est de valuation discrète par construction et son corps des fractions est L . L'hensélisé A^h est local régulier de dimension 1 donc intègre et son corps des fractions $K = \text{Frac}(A^h)$ contient $L = \text{Frac}(A)$. Le complété $\widehat{A^h}$ est un anneau de séries formelles $\widehat{K} = k[[\omega]]$, ω uniformisante de A^h (comme complété d'une k -algèbre locale régulière de dimension 1) et son corps des fractions $\widehat{K}$ est la fibre générique formelle de $\text{Spec}(\widehat{A^h}) \rightarrow \text{Spec}(A^h)$.

Supposons que A^h soit quasi-excellent (précisément vérifie 2.a) de sorte que l'extension $\widehat{K}/K$ est séparable.

^(xxvii) Voici la construction : soit k le corps des fractions de $\mathbb{F}_p[X_n, n > 0]$ et K celui de $\widehat{A} = k[[Y]]$. Soit L le sous-corps de $K = k((Y))$ corps des fractions de $A = k^p[[Y]][k]$. Le complété de A est $\widehat{A}$. On montre, et c'est le point délicat, que A est noethérien. L'outil est le critère de Cohen : un anneau semi-local est noethérien si et seulement si les idéaux maximaux sont de type fini et les idéaux de type fini fermés ([**Nagata, 1962**, 31.8]). Son complété étant régulier, il est lui même régulier donc de valuation discrète (dimension). Soit L le corps des fractions de A . On vérifie facilement que $c = \sum_{n>0} X_n Y^n$, n'est pas dans L . Choisissons une p -base $\{c_i\}$ de K sur L contenant c (ce qui est possible car $c \notin L^p$, cf. [**ÉGA IV₁** 21.4.3]). Soit K_0 le corps engendré sur L par les c_i distincts de c . L'extension K/K_0 est radicielle de degré p par construction. L'anneau $A \cap K_0$ est un anneau de valuation discrète de complété $k[[Y]]$ de sorte que la fibre formelle générique n'est pas géométriquement réduite.

^(xxviii) Cette construction généralise en fait, de façon indépendante, un exemple obtenu par Rotthaus dans [**Rotthaus, 1997**]

On a donc dans ce cas

$$[K : K^p] \leq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

Comme $\widehat{K} = k((\varpi))$, on a

$$[\widehat{K} : \widehat{K}^p] = p[k : k^p].$$

On a donc (11.6.1), l'extension K/L étant séparable,

$$[K : K^p] \geq [L : L^p].$$

de sorte que, grâce à (11.6.2), on a

$$p[k : k^p] = [\widehat{K} : \widehat{K}^p] \geq [L : L^p] > p[k : k^p],$$

une contradiction. Ceci interdit à A également d'être quasi-excellent (8.1). □

EXPOSÉ II

Topologies adaptées à l'uniformisation locale

Fabrice Orgogozo

Dans cet exposé, ℓ est un nombre premier, l'entier 1 ou bien le symbole ∞ et l'on note ℓ' l'ensemble des entiers naturels premiers à ℓ où, par convention, $\infty' = \{1\}$.

1. Morphismes maximalelement dominants et la catégorie alt/S

1.1. Morphismes maximalelement dominants.

1.1.1. Rappelons ([ÉGA IV 1.1.4]) qu'un point d'un schéma est dit **maximal** s'il est le point générique d'une composante irréductible ou, de façon équivalente, s'il est maximal pour l'ordre sur l'ensemble des points du schéma défini par la relation : $x \geq y$ si et seulement si y est une spécialisation de x (c'est-à-dire si $y \in \overline{\{x\}}$). Les points maximaux d'un schéma affine correspondent aux idéaux premiers minimaux. Tout ouvert dense d'un schéma noëthérien contient la totalité des points maximaux ; c'est plus généralement vrai lorsque le nombre de composantes irréductibles est localement fini, ou bien lorsque l'on suppose l'ouvert *rétrocompact*.

DÉFINITION 1.1.2. Un morphisme de schémas est dit **maximalement dominant** s'il envoie tout point maximal de la source sur un point maximal du but.

Un morphisme entre schémas irréductibles est maximalelement dominant si et seulement si il est dominant. Il est clair que le composé de deux morphismes maximalelement dominants est maximalelement dominant.

EXEMPLE 1.1.3. D'après [ÉGA IV₂ 2.3.4], un morphisme plat, ou plus généralement quasi-plat (*op. cit.*, 2.3.3), est générisant ([ÉGA I' 3.9.1]) donc maximalelement dominant (*op. cit.*, 3.9.5).

PROPOSITION 1.1.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme maximalelement dominant. Tout point maximal de Y appartenant à l'image de f est l'image d'un point maximal de X .

Démonstration. Cela résulte du fait que f est croissante pour le préordre ci-dessus et du fait que tout point de X a une générisation maximale. $\square$

PROPOSITION 1.1.5. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme maximalelement dominant et $Y' \rightarrow Y$ un morphisme plat. Alors, le morphisme $X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est maximalelement dominant.

Démonstration. Voir [ÉGA IV₂ 2.3.7 (ii)]. $\square$

Rappelons la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1.6 ([ÉGA IV 20.3.5]). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme maximalelement dominant. Supposons que X est réduit et que Y n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, pour tout ouvert U de Y et tout ouvert V dense dans U , l'ouvert $f^{-1}(V)$ est dense dans $f^{-1}(U)$.

L'hypothèse sur Y assure que tout point maximal de U appartient à V ; elle est satisfaite lorsque Y est noëthérien.

PROPOSITION 1.1.7. Soit Y un schéma noëthérien et soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, maximalelement dominant. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un ouvert dense de Y au-dessus duquel f est fini.
- (ii) Pour tout point maximal η de X , l'extension $\kappa(\eta)/\kappa(f(\eta))$ est finie.

Un morphisme de schémas satisfaisant la condition (i) ci-dessus est dit **génériquement fini** (en bas).

Démonstration. Comme rappelé ci-dessus, tout ouvert dense du schéma noëthérien Y contient ses points maximaux. On peut supposer Y irréductible et X, Y réduits : on utilise le fait que f est fini si et seulement si $f_{\text{réd}}$ l'est. Par passage à la limite ([ÉGA IV 8.10.5.(x)]), on peut également supposer que Y est le spectre d'un corps k . Dans ce cas, la conclusion résulte de [ÉGA I 6.4.2 et 6.4.4]. $\square$

DÉFINITION 1.1.8. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est **maximalement ℓ' -fini** si pour tout point maximal η de X , l'extension $\kappa(\eta)/\kappa(f(\eta))$ est finie et si pour tout point maximal μ de Y dans l'image de f , il existe un point maximal η de X au-dessus de μ tel que l'extension $\kappa(\eta)/\kappa(\mu)$ soit de degré appartenant à ℓ' .

1.1.9. Lorsque $\ell = 1$, la seconde condition est vide. Il est utile de faire les conventions de langage suivantes : un morphisme maximalement ℓ' -fini et maximalement dominant est dit **maximalement ℓ' -fini dominant**, et un morphisme maximalement $1'$ -fini « **maximalement fini** ».

PROPOSITION 1.1.10. Soient S un schéma et $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme entre S -schémas maximalement dominants. Si Y/S est maximalement fini, f est maximalement dominant. Si l'on suppose de plus X/S maximalement fini, le morphisme f est maximalement fini dominant.

Démonstration. Soient x un point maximal de X et s (resp. y) son image dans S (resp. Y). Soit $y' \geq y$ une générisation maximale de y . Les schémas X et Y étant maximalement dominants sur S , le point s est maximal et y' est d'image s . Enfin, si Y/S est maximalement fini, l'extension $\kappa(y')/\kappa(s)$ est finie de sorte que y' est fermé dans la fibre Y_s . Le point y , appartenant à l'adhérence de y' dans Y_s , coïncide donc avec y' : le morphisme f est maximalement dominant. Si l'on suppose de plus X/S maximalement fini, la finitude de l'extension $\kappa(x)/\kappa(s)$ entraîne celle de l'extension intermédiaire $\kappa(x)/\kappa(y)$. $\square$

1.2. La catégorie alt/S .

1.2.1. Soit S un schéma noëthérien. Notons η_S le schéma coproduit (fini) de ses points maximaux.

DÉFINITION 1.2.2. On note alt/S la catégorie des S -schémas de type fini, maximalement finis dominants, de source un schéma réduit. Les morphismes dans alt/S sont les S -morphisms.

1.2.3. Notons les faits suivants :

- le S -schéma $S_{\text{réd}}$ est final dans la catégorie alt/S ;
- tout morphisme de alt/S est maximalement fini dominant (1.1.10) ;
- les images inverses de diviseurs existent pour tout morphisme de alt/S ([ÉGA IV 21.4.5.(iii)] ;
- si $X \in \text{Ob } \text{alt}/S$ et $S' \rightarrow S$ est un morphisme réduit ([ÉGA IV₂ 6.8.1]) avec S' noëthérien, le produit fibré usuel $X' = X \times_S S'$ est naturellement un objet de alt/S' . Il en est plus généralement ainsi de $X'_{\text{réd}}$ dès lors que $S' \rightarrow S$ est plat. De même, si $X' \rightarrow X$ est un morphisme quasi-fini réduit (par exemple étale) et $X \in \text{Ob } \text{alt}/S$, alors X' est également un objet de alt/S .

REMARQUES 1.2.4.

- (i) Le produit fibré usuel de deux S -schémas maximalement dominants n'est pas nécessairement maximalement dominant, comme on peut le constater lorsque $S = \mathbf{A}^2$ et $X = Y$ sont l'éclatement en l'origine.
- (ii) La définition originale de la catégorie alt/S , due à O. Gabber, est moins restrictive sur le schéma S , supposé seulement cohérent et ayant un nombre fini de composantes irréductibles. Les objets de alt/S sont alors les S -schémas de type fini quasi-séparés réduits, maximalement dominants, génériquement finis. Le cadre noëthérien semble suffisant pour nos besoins. Signalons cependant que les « localisés » d'un schéma noëthérien pour la topologie des altérations (introduite ci-dessous) ne sont pas nécessairement noëthériens (voir 4.2.1).

1.2.5. Soit X un S -schéma de type fini. On note X_{md} — ou bien $X_{\text{md}/S}$ en cas d'ambiguïté sur S — l'adhérence de l'image (ensembliste) de X_{η_S} dans X , muni de la structure réduite. C'est la réunion des composantes irréductibles de X dominant une composante irréductible de S , munie de la structure réduite. (Lorsque $X \in \text{Ob alt}/S$, $X_{\eta_S} = \eta_X$.) Le foncteur $T \mapsto T_{\text{md}}$ est adjoint à droite au foncteur d'inclusion de la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalelement dominants sur S dans la catégorie des S -schémas de type fini.

PROPOSITION 1.2.6. *Les produits fibrés existent dans alt/S .*

Démonstration. Soient $X \rightarrow S' \leftarrow Y$ deux flèches dans alt/S ; d'après 1.1.10, les schémas X et Y sont naturellement des objets de alt/S' . Le composé de deux morphismes maximalelement finis dominants de type fini étant de même nature, un produit de X et Y , vus dans alt/S' , est — s'il existe — un produit fibré dans alt/S . On peut donc supposer $S = S'$ et S réduit. Il résulte formellement de l'existence du produit dans la catégorie des S -schémas de type fini et de la propriété d'adjonction de $X \mapsto X_{\text{md}}$ que le schéma $(X \times_S Y)_{\text{md}}$, muni des deux projections évidentes, est le produit de X et Y dans la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalelement dominants sur S . Il appartient à $\text{Ob alt}/S$ car $((X \times_S Y)_{\text{md}})_{\eta_S} = (X_{\eta_S} \times_{\eta_S} Y_{\eta_S})_{\text{red}}$ est fini sur η_S . $\square$

1.2.7. Pour éviter toute ambiguïté, on notera parfois $X \times_{S'}^S Y$ le produit fibré de X et Y au-dessus de S' dans alt/S , ou plus généralement dans la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalelement dominants sur S . Signalons également les faits suivants, de démonstration immédiate (le premier ayant été vu au court de la démonstration précédente) :

- si $X \rightarrow S' \leftarrow Y$ est un diagramme dans alt/S , le morphisme $X \times_{S'}^S Y \rightarrow X \times_S^S Y$ déduit du foncteur évident $\text{alt}/S' \rightarrow \text{alt}/S$ est un isomorphisme ;
- Si $X \rightarrow S' \leftarrow Y$ est un diagramme de S -schémas de type fini, les coïtités induisent un isomorphisme $X_{\text{md}/S} \times_{S'_{\text{md}/S}}^S Y_{\text{md}/S} \xrightarrow{\sim} (X \times_{S'} Y)_{\text{md}/S}$.

PROPOSITION 1.2.8. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une immersion ouverte (resp. un morphisme propre et surjectif, resp. quasi-fini) entre deux S -schémas de type fini. Le morphisme $f_{\text{md}} : X_{\text{md}} \rightarrow Y_{\text{md}}$ est une immersion ouverte (resp. un morphisme propre et surjectif, resp. quasi-fini). Enfin, si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski d'un S -schéma de type fini X , les ouverts $(U_{i\text{md}})_{i \in I}$ recouvrent le schéma X_{md} .*

Démonstration. Le cas où f est une immersion ouverte est conséquence du fait général bien connu suivant sur les topologies induites : la trace sur un ouvert de l'adhérence d'une partie coïncide avec l'adhérence de la trace de cette partie (voir p. ex. [Bourbaki, TG, I, §3, n°1, prop. 1] pour une variante). Si $f : X \rightarrow Y$ est propre et surjectif, les morphismes $X_{\text{md}} \rightarrow X$ et $Y_{\text{md}} \rightarrow Y$ sont des immersions fermées ; les schémas X_{md} et Y_{md} sont donc propres sur Y . Le Y -morphisme f_{md} est donc propre et son image contient $f_{\eta_S}(X_{\eta_S}) = Y_{\eta_S}$ et donc son adhérence Y_{md} . Le cas d'un morphisme quasi-fini est laissé au lecteur. Vérifions le dernier énoncé. Que les $U_{i\text{md}}$ soient des ouverts a déjà été vu ; il faut vérifier la surjectivité. Elle résulte des égalités $X_{\text{md}} \cap U_i = U_{i\text{md}}$ et du fait que $X = \bigcup_i U_i$. $\square$

2. Topologies : définitions

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma noëthérien S .

2.1. Topologie étale ℓ' -décomposée.

2.1.1. Nous dirons qu'un recouvrement étale $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ d'un schéma X est ℓ' -décomposé si tout point de X peut être relevé en un point x_i d'un X_i tel que le degré $[\kappa(x_i) : \kappa(x)]$ appartienne à ℓ' . Lorsque $\ell = 1$ la condition imposée est vide et l'on dit simplement que la famille constitue un recouvrement étale. Lorsque $\ell = \infty$, on retrouve la définition de [Nisnevich, 1989, §1] et l'on dit alors, comme dans *op. cit.*, que le recouvrement est **complètement décomposé**.

Le résultat de stabilité suivant résulte immédiatement du (i) du lemme ci-dessous (2.1.3).

PROPOSITION 2.1.2. *La propriété d'être un recouvrement étale ℓ' -décomposé est stable par changement de base.*

D'après 1.2.3, il n'y a pas lieu de préciser s'il s'agit du changement de base usuel ou, le cas échéant, dans une catégorie alt/S .

LEMME 2.1.3. *Soient k un corps, K/k une extension finie et k'/k une extension quelconque. Notons K' la k' -algèbre finie $K \otimes_k k'$.*

- (i) *Soit ℓ un nombre premier et supposons le degré $[K : k]$ d'ordre premier à ℓ . Alors, au moins un corps résiduel de K' est de degré sur k' premier à ℓ .*
- (ii) *Supposons K' locale et notons κ' son corps résiduel. Alors, le degré $[K : k]$ est produit de $[k' : k]$ par une puissance de l'exposant caractéristique p de k .*

Démonstration. (i) Écrivons $K' = \prod_i K'_i$ avec K'_i locale. Il existe un indice i tel que $[K'_i : k']$ soit premier à ℓ , puisqu'il en est ainsi de leur somme. Soit $\mathfrak{m}_i$ l'idéal maximal de K'_i ; le degré de l'extension $[\kappa(\mathfrak{m}_i) : k']$ divise $[K'_i : k']$, puisqu'il existe un corps de représentants; ceci permet de conclure. (ii) Le résultat est trivial si l'extension K/k est étale car $[K : k] = [K' : k']$ et, dans ce cas, $\kappa' = K'$. Si K/k est finie radicielle, $[K : k]$ est une puissance de p et, comme on l'a vu, $[k' : k]$ divise son degré. Ceci permet de conclure. $\square$

2.1.4. On appelle **topologie étale ℓ' -décomposée** la topologie de Grothendieck sur alt/S , notée $\text{ét}_{\ell'}$, définie par la prétopologie constituée des recouvrements étales ℓ' -décomposés.

2.2. Sorites sur le lieu ℓ' -décomposé.

2.2.1. Pour chaque morphisme de schémas $f : Y \rightarrow X$, posons

$$\text{déc}_{\ell'}(f) = \{x \in X : \exists y \in Y \text{ tel que } f(y) = x, [\kappa(x) : \kappa(y)] \text{ fini appartenant à } \ell'\}.$$

Lorsque $\ell = \infty$, on retrouve l'ensemble $\text{cd}(f)$ introduit par Y. Nisnevich. Nous utiliserons également cette notation.

PROPOSITION 2.2.2. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale, avec X noethérien. L'ensemble $\text{déc}_{\ell'}(f)$ est ind-constructible, c'est-à-dire — X étant noethérien — réunion de parties localement fermées.*

Démonstration. On peut supposer X et Y intègres, de points génériques notés η et μ respectivement. Par récurrence noethérienne, il suffit de montrer que si η appartient à l'ensemble $\text{déc}_{\ell'}(f)$, celui-ci contient un ouvert de X . On peut supposer de plus X et Y affines d'anneaux A et B respectivement, et le morphisme $A \rightarrow B$ fini. La fonction $\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} B/\mathfrak{p}B$, $X \rightarrow \mathbf{N}$, est localement constante pour la topologie de Zariski car B est plat de présentation finie — donc localement libre — sur A . Elle prend la valeur $[\kappa(\mu) : \kappa(\eta)]$ — première à ℓ — en η . Il en est donc ainsi au voisinage de η ; la conclusion en résulte aussitôt. $\square$

Précisons un peu ce résultat lorsque $\ell = \infty$.

PROPOSITION 2.2.3. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme localement de type fini, avec X noethérien. Un point $x \in X$ appartient à $\text{cd}(f)$ si et seulement si il existe un sous-schéma Z de X contenant x au-dessus duquel f a une section.*

Démonstration. La condition est bien entendu suffisante. Considérons $x \in \text{cd}(f)$; c'est le point générique du sous-schéma fermé réduit $\overline{\{x\}}$. Par hypothèse, il existe une section au-dessus de ce point. Le morphisme f étant localement de présentation finie, cette section s'étend par passage à la limite à un ouvert $Z = U \cap \overline{\{x\}}$ de $\overline{\{x\}}$, où U est un ouvert de X . $\square$

COROLLAIRE 2.2.4. *Soient X un schéma noethérien et $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ un recouvrement de X pour la topologie étale ℓ' -décomposée. Il existe alors un sous-ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que la famille $(U_i \rightarrow X)_{i \in I_0}$ soit également couvrante.*

Rappelons qu'un morphisme étale est, par définition, localement de présentation finie.

Démonstration. D'après [ÉGA IV 1.9.15], l'espace topologique X^{cons} , dont l'espace sous-jacent est X et dont les ouverts sont les parties ind-constructibles de X , est compact car X est cohérent. Les ensembles $\text{déc}_{\ell'}(f_i)$ en constituent un recouvrement par des ouverts. $\square$

PROPOSITION 2.2.5. Soit $(U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha)_{\alpha \in A}$ un système projectif, filtrant, cartésien, de morphismes étales entre schémas noëthériens, à morphismes de transition affines. Notons $f_\infty : U_\infty \rightarrow X_\infty$ le morphisme induit sur la limite projective et, pour chaque α , notons π_α la projection $X_\infty \rightarrow X_\alpha$. On a

$$\mathrm{cd}(f_\infty) = \bigcup_{\alpha} \pi_\alpha^{-1}(\mathrm{cd}(f_\alpha)).$$

En particulier, si $\mathrm{cd}(f_\infty) = X_\infty$, il existe α_0 tel que $\mathrm{cd}(f_\alpha) = X_\alpha$ pour chaque $\alpha \geq \alpha_0$.

Démonstration. L'inclusion du terme de droite dans le terme de gauche est évidente. Considérons réciproquement un point x_∞ dans $\mathrm{cd}(f_\infty)$. Le morphisme f_∞ a une section sur un sous-schéma de présentation finie Z_∞ contenant x_∞ . Le morphisme et la section se descendent par passage à la limite à un niveau fini α (voir [ÉGA IV 8.6.3, 8.8.2]). Si $\mathrm{cd}(f_\infty) = X_\infty$, il résulte de la compacité de X_∞^{cons} — par cohérence de X_∞ , les morphismes $X_\infty \rightarrow X_\alpha$ étant affines — que $X_\infty = \pi_\alpha^{-1}(\mathrm{cd}(f_\alpha))$ pour α suffisamment grand. L'égalité $X_\alpha = \mathrm{cd}(f_\alpha)$ pour α grand résulte alors de [ÉGA IV 8.3.11]. $\square$

Les quatre énoncés précédents sont valables, *mutatis mutandis*, lorsque l'on fait des hypothèses de présentation finie locale sur les morphismes et de cohérence sur leurs buts.

Pour référence ultérieure, signalons le résultat suivant de descente d'une section.

PROPOSITION 2.2.6. Soient k'/k une extension finie de corps de degré premier à ℓ et K/k une extension finie de degré une puissance de ℓ . Posons $K' = k' \otimes_k K$. Si le morphisme $\mathrm{Spec}(K') \rightarrow \mathrm{Spec}(K)$ possède une section, le morphisme $\mathrm{Spec}(k') \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$ possède également une section : c'est un isomorphisme.

(Notons qu'un morphisme $X \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$ a une section si et seulement si le morphisme $X_{\mathrm{réd}} \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$ qui s'en déduit a une section.)

Démonstration. Cela résulte du fait que l'image de k' dans K par le morphisme composé $k' \rightarrow K' \rightarrow K$, où la seconde flèche est la rétraction dont on suppose l'existence, est à la fois de degré premier à ℓ et de degré une puissance de ℓ sur k . $\square$

2.3. Topologie des ℓ' -altérations.

2.3.1. On appelle **topologie des ℓ' -altérations** la topologie de Grothendieck sur alt/S , notée $\mathrm{alt}_{\ell'}$, définie par la prétopologie engendrée par

- (i) les recouvrements étales ℓ' -décomposés ;
- (ii) les morphismes propres *maximalement ℓ' -finis* surjectifs.

Prendre garde au fait que la seconde condition (« maximalement ℓ' -fini ») porte sur les points maximaux tandis que la première (« ℓ' -décomposé ») sur tous les points.

REMARQUES 2.3.2.

- (i) Les familles précédentes ne constituent pas une prétopologie au sens de [SGA 4 II 1.3] : la condition de stabilité par composition n'est pas satisfaite. Les autres conditions le sont, notamment la quarrabilité des morphismes (1.2.6).
- (ii) On trouvera une variante de la définition précédente dans [Kelly, 2012, § 3].

2.3.3. La topologie $\mathrm{alt}_{\ell'}$ est appelée **topologie des altérations**, notée simplement alt .

3. Formes standard

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma noëthérien S et X un objet de alt/S .

3.1. Topologie étale. Le cas $\ell = 1$ de l'énoncé ci-dessous est un prototype bien connu des résultats que nous allons établir.

PROPOSITION 3.1.1. Toute famille couvrante $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ pour la topologie étale ℓ' -décomposée est dominée par une famille $\mathrm{alt}_{\ell'}$ -couvrante du type

$$(V_i \rightarrow Y \rightarrow X)_{i \in I}$$

où $Y \rightarrow X$ est fini, maximalement ℓ' -fini, surjectif et $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement étale complètement décomposé. Si $\ell = 1$, on peut supposer que $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

Démonstration. On peut supposer l'ensemble I fini (2.2.4) et X intègre. Par passage à la limite, on peut supposer de plus X normal, de corps des fractions ayant un groupe de Galois (absolu) pro- ℓ . (Le schéma X n'est donc pas nécessairement noëthérien.) Or, un morphisme étale ℓ' -décomposé d'un tel schéma est nécessairement complètement décomposé car le groupe de Galois des corps résiduels est également pro- ℓ . Pour le complément lorsque $\ell = 1$, voir p. ex. [Orgogozo, 2006, lemme 10.3]. $\square$

3.2. Topologie des altérations. Dans ce sous-paragraphe, on fixe un nombre premier ℓ .

THÉORÈME 3.2.1. *Supposons le schéma noëthérien X irréductible. Toute famille couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations de X est dominée par une famille couvrante du type suivant :*

$$(V_i \rightarrow Y \rightarrow X)_{i \in I},$$

où Y est un schéma intègre, $Y \rightarrow X$ est propre et surjectif de degré générique premier à ℓ et $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement pour la topologie complètement décomposée. Si de plus $\ell = 1$, on peut supposer que $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

Commençons par la démonstration du cas particulier $\ell = 1$, bien qu'il résulte du cas général (joint à 3.1.1 pour le complément).

Démonstration dans le cas où $\ell = 1$. On peut supposer l'ensemble I fini. D'après 3.1.1, il suffit de montrer que si $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts de Zariski et $(X_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$ une collection de morphismes propres et surjectifs, il existe un morphisme propre et surjectif $Y \rightarrow X$ dans alt/S et un recouvrement par des ouverts de Zariski $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ tels que chaque morphisme composé $V_i \rightarrow X$ se factorise à travers $X_i \rightarrow X$. Choisissons pour chaque i une compactification $\overline{X}_i \rightarrow X$ de $X_i \rightarrow X$; on a $\overline{X}_i|_{U_i} = X_i$. Posons $Y = \overline{X}_1 \times_X \cdots \times_X \overline{X}_r$, où $I = \{1, \dots, r\}$, et $V_1 = X_1 \times_X \overline{X}_2 \times_X \cdots \times_X \overline{X}_r$, $V_2 = \overline{X}_1 \times_X X_2 \times_X \overline{X}_3 \times_X \cdots \times_X \overline{X}_r$, etc. Les ouverts V_i recouvrent le schéma $\overline{X}$, qui est propre et surjectif sur X . Par projection sur le i -ième facteur, chaque V_i s'envoie sur X_i . Quitte à appliquer le foncteur $T \mapsto T_{\text{md}}$ (1.2.5), qui transforme un morphisme propre et surjectif (resp. un recouvrement de Zariski) en un morphisme propre et surjectif (resp. en un recouvrement de Zariski) (voir 1.2.8), on obtient un recouvrement du type désiré dans alt/S . Si, comme on l'a supposé, X est irréductible, le schéma Y peut être supposé intègre. $\square$

Démonstration dans le cas général. Il suffit de vérifier que si $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ est un recouvrement étale complètement décomposé de X et $(X_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$ une collection de morphismes propres, surjectifs, maximale- ℓ' -finis, il existe une famille comme dans l'énoncé la dominant. On peut supposer l'ensemble I fini et le schéma X intègre. Commençons par traiter le cas où X est universellement japonais (p. ex. quasi-excellent); on peut alors le supposer également normal, ce que nous faisons. Il est loisible de supposer les U_i connexes (normaux) et les morphismes $X_i \rightarrow U_i$ finis, surjectifs, plats et de degré générique premier à ℓ : chaque $X_i \rightarrow X$ étant génériquement plat (X est réduit), quitte à remplacer X par une modification $X' \rightarrow X$, on peut les platifier ([Raynaud & Gruson, 1971, I 5.2.2]), ce qui les rend finis. Quitte à ne considérer qu'une seule composante irréductible de chaque X_i , de degré générique premier à ℓ et à la normaliser, on peut supposer les X_i normaux connexes. Résumons :

— les schémas X , U_i et X_i sont normaux intègres (de corps des fractions notés respectivement K , K_i et K'_i);

— les morphismes $X_i \rightarrow U_i$ sont finis de degrés génériques premiers à ℓ .

Soit L une clôture quasi-galoisienne (=normale) sur K d'une extension composée des K'_i , et considérons X_L le normalisé de X dans L . De même, considérons pour chaque i , le produit fibré $U_{iL} = U_i \times_X X_L$ (resp. le produit fibré réduit normalisé $X_{iL} = (X_i \times_X X_L)_{\text{red}}^{\text{nor}}$). Compte tenu du choix de L , les morphismes $X_{iL} \rightarrow U_{iL}$ admettent une section au-dessus de $\text{Spec}(L)$. Ces morphismes étant finis et les U_{iL} étant normaux, les sections s'étendent en des sections $\sigma_i : U_{iL} \rightarrow X_{iL}$. Soit maintenant un ℓ -Sylow S_ℓ de $\text{Aut}(L/K) = G$ et notons p l'exposant caractéristique du corps K . Si $\ell = p$, les extensions K'_i/K sont donc étales de sorte que l'on peut supposer L/K étale donc galoisienne; l'extension L^{S_ℓ}/K est alors de degré $(G : S_\ell)$, premier à ℓ . Si $\ell \neq p$, l'extension L^{S_ℓ}/K est de degré $(G : S_\ell)$ multiplié par une puissance de p ; c'est donc également un entier premier à ℓ . Comme ci-dessus, notons $X_{L^{S_\ell}}$ le normalisé de X dans L^{S_ℓ} , et $U_{iL^{S_\ell}}$ (resp. $X_{iL^{S_\ell}}$) le produit fibré (resp. le produit fibré réduit normalisé) de

U_i (resp. X_i) avec $X_{L^{s_\ell}}$ au-dessus de X . Le morphisme $X_{L^{s_\ell}} \rightarrow X$ est fini, de degré générique premier à ℓ . D'après ce qui précède on a pour chaque i un diagramme commutatif de schémas normaux :

$$\begin{array}{ccc} X_{iL^{s_\ell}} & \xleftarrow{\quad} & X_{iL} \\ \downarrow \text{premier à } \ell & & \downarrow \sigma_i \\ U_{iL^{s_\ell}} & \xleftarrow{\text{puissance de } \ell} & U_{iL} \end{array}$$

En considérant isolément les composantes irréductibles du schéma normal $U_{iL^{s_\ell}}$ et, pour chacune d'entre elles, un point maximal de $X_{iL^{s_\ell}}$ de degré générique premier à ℓ au-dessus, on montre immédiatement (cf. proposition 2.2.6) qu'il existe une section $U_{iL^{s_\ell}} \rightarrow X_{iL^{s_\ell}}$. Cela achève la démonstration de la proposition car les $U_{iL^{s_\ell}}$ forment un recouvrement pour la topologie complètement décomposée du schéma $X_{L^{s_\ell}}$, irréductible, de degré générique premier à ℓ sur X .

Si X n'est pas universellement japonais, on écrit les normalisations ci-dessus comme des limites de morphismes finis affines et on utilise les théorèmes classiques de passage à la limite pour redescendre les schémas construits sur les normalisations. Comme nous n'utiliserons ce résultat que dans le cas excellent, nous laissons les détails au lecteur. (On pourrait également procéder par « approximation noëthérienne absolue », c'est-à-dire écrire le schéma cohérent X comme limite filtrante de schémas de type fini sur $\mathbf{Z}$, les morphismes de transition étant affines.) $\square$

REMARQUE 3.2.2. Il résulte de la proposition 3.1.1 que dans la définition du § 2.3, on peut remplacer la condition d'être ℓ' -décomposé par celle d'être *complètement* décomposé (resp. de Zariski, si $\ell = 1$). Ceci résulte également du théorème précédent car en passant à la limite sur les ℓ' -altérations Y de X , on obtient un schéma normal dont le corps des fonctions a un groupe de Galois absolu pro- ℓ . Cette propriété passe aux corps résiduels si bien qu'un recouvrement étale ℓ' -décomposé d'un tel schéma est nécessairement *complètement* décomposé.

Nous ferons également usage de la variante suivante du théorème précédent.

THÉORÈME 3.2.3. *Supposons le schéma noëthérien X irréductible. Toute famille couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations de X est dominée par une famille couvrante du type suivant :*

$$(W_i \rightarrow V_i \rightarrow Y \rightarrow X)_{i \in I},$$

où tous les schémas sont irréductibles, $Y \rightarrow X$ est propre birationnel, $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement pour la topologie complètement décomposée, et les morphismes $W_i \rightarrow V_i$ sont finis, plats, de degré premier à ℓ .

On a une variante pour X réduit non nécessairement irréductible : considérer le coproduit de ses composantes irréductibles.

Esquisse de démonstration. Par platification, il suffit de montrer le résultat d'échange suivant : si $Y \rightarrow X$ est fini, plat, de degré générique premier à ℓ et $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement étale complètement décomposé, il existe un recouvrement étale complètement décomposé $(U_j \rightarrow X)_{j \in J}$ et des morphismes $Z_j \rightarrow U_j$, finis, plats, de degré premier à ℓ tels que la famille de morphismes composés $(Z_j \rightarrow X)$ domine celle des $(V_i \rightarrow X)$. Par passage à la limite, on peut supposer X hensélien. Par hypothèse, il existe une composante connexe Y^0 de Y qui est plate de degré premier à ℓ sur X . Le schéma Y^0 étant local hensélien, il existe un indice i tel que la restriction du morphisme $V_i \rightarrow Y$ à Y^0 ait une section, de sorte que le morphisme composé $Y^0 \rightarrow X$ se factorise à travers V_i . Ceci permet de conclure. $\square$

4. Applications

4.1. Sorites.

PROPOSITION 4.1.1. *Soient X un schéma noëthérien, x un point de X , $(X_i \rightarrow X)_{i=1, \dots, n}$ un recouvrement pour la topologie des altérations et, pour chaque indice i , un ouvert $X_i^0 \hookrightarrow X_i$ contenant la fibre $(X_i)_x$. Il existe un voisinage ouvert de Zariski U de x tel que la famille $(X_i^0|_U \rightarrow U)_i$ soit alt-couvrante.*

Un cas particulièrement utile — et auquel on pourrait se ramener d'après les résultats de passage à la limite ci-dessous — est celui où X est local de point fermé x , de sorte que $U = X$.

Démonstration. D'après le théorème 3.2.1, la famille $(X_i \rightarrow X)_i$ est dominée par une famille $(V_j \hookrightarrow Y \rightarrow X)_j$ où $f : Y \rightarrow X$ est notamment propre et surjectif, et les $(V_j \rightarrow Y)_j$ forment un recouvrement ouvert de Y . Pour chaque j , notons Y_j^0 l'image inverse de $X_i^0 \hookrightarrow X_i$ par le morphisme $V_j \rightarrow X_i$ dont on suppose l'existence. Par hypothèse, au-dessus du point x de X , les ouverts Y_j^0 et V_j de Y coïncident, de sorte que les ouverts Y_j^0 recouvrent la fibre Y_x . Leur réunion $Y^0 := \bigcup_j Y_j^0$ est un ouvert de Y , contenant cette fibre, et on vérifie aussitôt que l'ouvert $U = X - f(Y - Y^0)$ de X convient. $\square$

PROPOSITION 4.1.2. *Soit $S' \rightarrow S$ un morphisme maximalelement dominant entre schémas noëthériens. Le foncteur de changement de base $\text{alt}/S \rightarrow \text{alt}/S'$, $X \mapsto X'' = (X \times_S S')_{\text{md}/S'}$, commute aux produits fibrés et transforme une famille $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante en une famille $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante.*

4.1.3. En d'autres termes, le foncteur précédent induit un *morphisme de sites* ([SGA 4 IV 4.9]) de alt/S' vers alt/S , où les deux catégories sont munies de la topologie des ℓ' -altérations. (On utilise ici le critère [SGA 4 III 1.6].) Lorsque $S' \rightarrow S$ est plat (donc maximalelement dominant, voir 1.1.3), il résulte de 1.1.5 et de la proposition précédente que si $(X_i \rightarrow X)$ est une famille $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante dans alt/S , la famille $(X_i \times_S S' \rightarrow X \times_S S')$ de morphismes dans alt/S' , obtenue par changement de base usuel, est également $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante

Démonstration de la proposition. La commutation aux produits fibrés est formelle (utiliser 1.2.7). Vérifions qu'une famille couvrante d'un schéma $X \in \text{Ob alt}/S$ est transformée par changement de base en une famille couvrante de X'' . On peut supposer X irréductible et la famille couvrante du type $(V_i \rightarrow Y \rightarrow X)$ comme en 3.2.1. Par changement de base, on obtient une famille $(V_i'' \rightarrow Y'' \rightarrow X'')$, où $(V_i'' \rightarrow Y'')$ est également étale complètement décomposée, compte tenu du fait que $V_i'' = V_i \times_Y Y''$. Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme propre et surjectif (1.2.8) $Y'' \rightarrow X''$ est maximalelement ℓ' -fini ; cela résulte de 2.1.3 (i). $\square$

4.1.4. Considérons maintenant un système projectif filtrant $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de schémas noëthériens, à morphismes de transitions affines et *dominants*. Fixons un nombre premier ℓ inversible sur ces schémas. Notons X_∞ la limite des X_α ; on suppose que c'est un schéma noëthérien. (On laisse au lecteur le soin de considérer le cas des schémas cohérents ayant un nombre fini de composantes irréductibles.) Il résulte de [ÉGA IV₃ 8.4.2 a) i)] que, pour α assez grand, le morphisme $X_\infty \rightarrow X_\alpha$ induit une bijection sur les points maximaux. En particulier, pour α assez grand et $\infty \geq \beta \geq \alpha$, les morphismes $X_\beta \rightarrow X_\alpha$ sont maximalelement dominants et induisent des bijections sur les ensembles de points maximaux. Il résulte formellement de cette observation et des résultats généraux de *op. cit.* (notamment [ÉGA IV 8.7.1, 8.10.5 (vi,xii)]) que la catégorie alt/X_∞ est la 2-colimite des catégories alt/X_α , les foncteurs $\text{alt}/X_\alpha \rightarrow \text{alt}/X_\beta$ étant ceux considérés dans la proposition précédente.

D'après ce qui précède, il est loisible de supposer les morphismes de transition maximalelement dominants ; on peut donc considérer les morphismes de *sites* $(\text{alt}/X_\beta, \text{alt}_{\ell'}) \rightarrow (\text{alt}/X_\alpha, \text{alt}_{\ell'})$. On peut montrer que le site $(\text{alt}/X_\infty, \text{alt}_{\ell'})$ est la 2-limite ([SGA 4 VI 8.2-3]) $\lim_\alpha (\text{alt}/X_\alpha, \text{alt}_{\ell'})$. Contentons nous de vérifier le fait suivant :

PROPOSITION 4.1.5. *Sous les hypothèses du 4.1.4, toute famille $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante de X_∞ est dominée par l'image inverse d'une famille $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante de l'un des X_α .*

Noter qu'*a priori*, l'« image inverse » de l'énoncé est définie à l'aide du foncteur $T \mapsto T_{\text{md}/X_\infty}$. Cependant, comme on l'a vu, ce changement de base et le changement de base naïf (produit fibré usuel) coïncident pour α assez grand.

Démonstration. Compte tenu de ce qui précède, on peut supposer X_∞ et les X_α irréductibles. D'après le théorème 3.2.1, il suffit de vérifier que (1) un X_∞ -schéma propre et surjectif Y_∞ intègre de degré premier à ℓ et (2) une famille finie couvrante pour la topologie étale complètement décomposée se descendent en des schémas et familles du même type sur X_α pour α assez grand. Dans le premier cas, seul l'énoncé sur les degrés reste à vérifier ; il résulte de 2.1.3 (ii). Dans le second

cas, on utilise [ÉGA IV₄ 17.7.8 (ii)] pour descendre un recouvrement étale complètement décomposé $(U_{i\infty})_i$ de X_∞ en un recouvrement étale $(U_{i\alpha} \rightarrow X_\alpha)$. D'après 2.2.5, appliqué aux morphismes $f_\beta : X_\beta \times_{X_\alpha} \coprod_i U_{i\alpha} \rightarrow X_\beta$ pour $\beta \geq \alpha$, le recouvrement étale induit de X_β est complètement décomposé lorsque β est suffisamment grand. $\square$

4.2. Caractérisation ponctuelle. Terminons par une caractérisation de la topologie des altérations semblable à la caractérisation de la topologie étale à l'aide des anneaux locaux strictement henséliens.

THÉORÈME 4.2.1 ([Goodwillie & Lichtenbaum, 2001], 3.5). *Soient X un schéma noethérien et Y un objet de alt/X . La flèche $Y \rightarrow X$ est couvrante pour la topologie des altérations si et seulement si elle est valuativement surjective au sens suivant : tout morphisme maximalelement dominant $\text{Spec}(V) \rightarrow X$, où V est un anneau de valuation à corps des fractions algébriquement clos, se relève en un morphisme $\text{Spec}(V) \rightarrow Y$.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. D'après le théorème précédent, on peut supposer $Y \rightarrow X$ propre et surjectif. (Le cas où Y est associé à un recouvrement par des ouverts de Zariski est clair car $\text{Spec}(V)$ est local.) Notons η_V le point générique de $\text{Spec}(V)$. Le morphisme $\eta_V \rightarrow X$ se relève en un morphisme (non unique) $\eta_V \rightarrow Y$ d'après le Nullstellensatz, car $Y \rightarrow X$ est surjectif et $\kappa(\eta_V)$ algébriquement clos. Il résulte du critère valuatif de propreté que le morphisme $\eta_V \rightarrow Y$ s'étend en un X -morphisme $\text{Spec}(V) \rightarrow Y$. (Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer $\text{Spec}(V) \rightarrow X$ maximalelement dominant.)

Montrons que la condition est suffisante. On peut supposer pour simplifier X affine intègre, de point générique noté η . On peut également supposer Y affine, de sorte qu'il existe une immersion ouverte $Y \hookrightarrow \bar{Y}$ dans un schéma propre et surjectif sur X . Choisissons une clôture algébrique de $\kappa(\eta)$ induisant un point géométrique générique $\bar{\eta} \rightarrow X$, et considérons l'espace de Zariski-Riemann $\text{ZR}_{\bar{\eta}}(X)$, limite des espaces annelés X' , où X' est un X -schéma intègre, propre et surjectif, muni d'un X -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow X'$. On peut montrer qu'il est quasi-compact (voir [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001, 3.5] ou [Zariski & Samuel, 1975, chap. VI, th. 40] pour une variante) et que si $X = \text{Spec}(A)$, l'application qui à un anneau de valuation intermédiaire $A \subset V \subset \kappa(\bar{\eta})$ associe le point de $\text{ZR}_{\bar{\eta}}(X)$ correspondant par le critère valuatif de propreté est une bijection.

Tout relèvement $r : \bar{\eta} \rightarrow Y$ du point générique géométrique de X induit un X -morphisme $\bar{\eta} \rightarrow \bar{Y}$ donc un morphisme continu $\pi_r : \text{ZR}_{\bar{\eta}}(X) \rightarrow \bar{Y}$, qui se factorise à travers la composante irréductible de $\bar{Y}$ atteinte par r . Par hypothèse, les ouverts $\pi_r^{-1}(Y)$, pour r variable, recouvrent $\text{ZR}_{\bar{\eta}}(X)$. Par quasi-compacité, il existe donc un nombre fini de relèvements $r_1, \dots, r_n : \bar{\eta} \rightarrow Y$ tels que $\text{ZR}_{\bar{\eta}}(X)$ soit recouvert par les $\pi_{r_i}^{-1}(Y)$. Notons $\bar{Z}$ la composante irréductible du produit fibré $\bar{Y} \times_X \dots \times_X \bar{Y}$ (n facteurs) de point générique l'image de $r_1 \times_X \dots \times_X r_n$. Par construction, le morphisme $\text{ZR}_{\bar{\eta}}(X) \rightarrow X$ se factorise à travers le X -schéma $\bar{Z}$, qui est donc réunion des n ouverts préimages de Y . Ainsi, $Y \rightarrow X$ peut être raffiné en un recouvrement par des ouverts de Zariski d'un schéma propre et surjectif. CQFD. $\square$

REMARQUE 4.2.2. On dispose d'un analogue du théorème 4.2.1 pour la topologie des ℓ' -altérations, le cas déjà traité étant celui où $\ell = 1$. Lorsque $\ell = \infty$, il n'y a pas de condition sur le corps des fractions des anneaux V ; si ℓ est un nombre premier, on se restreint aux anneaux de valuation V qui sont :

- à corps des fractions K de groupe de Galois absolu pro- ℓ ;
- parfaits si $\ell \neq \text{car.}(K)$.

4.3. Réduction des théorèmes d'uniformisation locale au cas hensélien. Rappelons qu'un des objectifs de ce livre est de démontrer les théorèmes d'uniformisation locale VII-1.1 et IX-1.1 (également énoncé en Intro.-2) dont nous reproduisons les énoncés.

THÉORÈME 4.3.1 ([Gabber, 2005b], 1.1). *Soient X un schéma noethérien quasi-excellent et Z un fermé rare de X . Il existe une famille finie de morphismes $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des altérations et telle que pour tout $i \in I$ on ait :*

- (i) le schéma X_i est régulier et intègre ;

(ii) l'image inverse de Z dans X_i est le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

Par convention, l'ensemble vide est considéré comme un diviseur à croisements normaux strict : c'est une somme indexée par l'ensemble vide.

THÉORÈME 4.3.2 (*op. cit.*, 1.3). Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X et ℓ un nombre premier inversible sur X . Il existe une famille finie de morphismes $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations et telle que pour tout $i \in I$ on ait :

- (i) le schéma X_i est régulier et intègre ;
- (ii) l'image inverse de Z dans X_i est le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

Nous terminons cet exposé par la réduction suivante.

PROPOSITION 4.3.3. Si l'un des théorèmes d'uniformisation précédents est vrai pour tout schéma X local noëthérien hensélien excellent normal (resp. pour tout schéma X local noëthérien hensélien excellent normal de dimension inférieure ou égale à un entier d fixé), il est vrai en général (resp. pour tout schéma noëthérien excellent de dimension finie inférieure ou égale à d).

La réduction au cas où X est local noëthérien complet est bien plus délicate, et fait l'objet de l'exposé suivant.

Démonstration. Supposons le théorème 4.3.1 (resp. 4.3.2) démontré dans le cas local hensélien excellent. Soit X un schéma noëthérien quasi-excellent et Z un fermé rare. On peut supposer X normal intègre car le morphisme de normalisation est couvrant pour la topologie des ℓ' -altérations et l'image inverse de Z reste rare. Fixons $x \in X$. D'après [ÉGA IV 18.7.6] l'hensélisé $X_{(x)}$ de X en x est excellent et $Z_{(x)}$ est un fermé rare de $X_{(x)}$. Il existe donc une famille finie de diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{(x)} & \longleftarrow & X_i \end{array}$$

dans $\text{alt}/X_{(x)}$, où Y est intègre, propre et surjectif (resp. et de degré générique premier à ℓ) sur $X_{(x)}$, $(Y_i \rightarrow Y)$ est une famille couvrante pour la topologie de Zariski (resp. complètement décomposée) et la famille $(X_i \rightarrow X_{(x)})$ satisfait les conclusions (i) et (ii) ci-dessus. Il résulte de la proposition 4.1.5 que cette famille de diagrammes s'étend en une famille du même type sur un voisinage étale complètement décomposé U de x dans X . Il reste à vérifier que les propriétés (i) et (ii) sont bien conservées. Si un morphisme $T \rightarrow X_{(x)}$ de type fini, avec T régulier, est le changement de base d'un morphisme $V \rightarrow U$ de type fini où U est un voisinage étale de x , le schéma V est régulier en les points de l'image du morphisme $T \rightarrow V$. (Un schéma local est régulier si et seulement si son hensélisé l'est.) En particulier, V est régulier en les points de la fibre V_x . Le lieu régulier étant ouvert, on peut supposer d'après 4.1.1 — quitte à rétrécir le voisinage U de x — que V est régulier. Enfin, il résulte de [ÉGA IV 19.8.1 (ii)] que la propriété d'être un diviseur à croisements normaux strict se descend si elle est satisfaite à la limite. On conclut par quasi-compacité de X pour la topologie étale complètement décomposée (qui est moins fine que les topologies alt et $\text{alt}_{\ell'}$). Le cas respé de la proposition 4.3.3 est un corollaire immédiat de la démonstration du cas non respé. $\square$

EXPOSÉ III

Approximation

Luc Illusie et Yves Laszlo

1. Introduction

On montre ici comment ramener la preuve du théorème d'uniformisation (6.1) au cas local, noethérien complet (6.2). On utilise pour cela le théorème de Popescu (qui implique que les anneaux locaux noethériens, henséliens et excellents vérifient la propriété d'approximation d'Artin, cf. I-10.3) et des méthodes d'approximations de complexes de longueur 2 adaptées de [Conrad & de Jong, 2002] (cf. section 4).

L'exposé oral donné par Alban Moreau utilisait des résultats (dus à Ofer Gabber) d'approximations de complexes plus forts que ceux utilisés ici (4.5). Une version écrite de son exposé a été très utile pour la rédaction de ce texte : nous l'en remercions. Nous remercions également Fabrice Orgozzo de nous avoir signalé que l'énoncé [Conrad & de Jong, 2002, 3.1] suffisait pour les applications en vue.

2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu

Soit A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété. On suppose A excellent et hensélien. Soit $\pi : \hat{S} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Pour tout $n \geq 0$, on note

$$i_n : S_n \hookrightarrow \hat{S}$$

l'immersion fermée définie par l'idéal $\hat{\mathfrak{m}}^{n+1} = \mathfrak{m}^{n+1}\hat{A}$ de $\hat{A}$. Le composé

$$\pi i_n : S_n \rightarrow \hat{S} \rightarrow S$$

est l'immersion fermée $S_n \hookrightarrow S$ définie par l'idéal $\mathfrak{m}^{n+1}$.

DÉFINITION 2.1. Soient $g : \hat{S} \rightarrow T$ et $f : S \rightarrow T$ des morphismes de schémas et $n \in \mathbf{N}$. On dira que f et g sont $(n+1)$ -**proches** si leurs restrictions $f\pi i_n$ et $g i_n$ à S_n coïncident.

Si X est un $\hat{S}$ -schéma, on note X_n le S_n -schéma $X \times_{\hat{S}} S_n \rightarrow S_n$.

Écrivons $\hat{A}$ comme limite inductive suivant un ensemble ordonné filtrant E de A -algèbres de type fini A_α . On a des diagrammes commutatifs

(2.1.1)

$$\begin{array}{ccc} & S_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha) & \\ s_\alpha \nearrow & & \downarrow t_\alpha \\ \hat{S} & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

avec t_α de type fini et un isomorphisme $\hat{S} = \varprojlim S_\alpha$ [ÉGA IV₃ 8.2.3].

DÉFINITION 2.2. Soit X un $\hat{S}$ -schéma de type fini et $h : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\hat{S}$ -schémas de type fini.

(i) Un **modèle** de X sur S_α est un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_\alpha \\ f \downarrow & \square & \downarrow f_\alpha \\ \hat{S} & \longrightarrow & S_\alpha \end{array}$$

où X_α est de type fini sur S_α .

- (ii) Un **modèle** de h sur S_α est un S_α -morphisme $h_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ de S_α -schémas de type fini, muni d'un isomorphisme $h \xrightarrow{\sim} (h_\alpha)_\#$.

Des modèles de X sur S_α existent pourvu que α soit assez grand [ÉGA IV₃ 8.8.3]. De plus, si X_α, X_β sont des modèles de X sur S_α, S_β , il existe $\gamma \geq \alpha, \beta$ et un S_γ -isomorphisme

$$X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\gamma \xrightarrow{\sim} X_\beta \times_{S_\beta} S_\gamma$$

(loc. cit.). De même, des modèles h_α de $h : X \rightarrow Y$ sur S_α existent pourvu que α soit assez grand et les images inverses de tels modèles h_α, h_β sur S_γ sont S_γ -isomorphes pour $\gamma \geq \alpha, \beta$ assez grand.

Si T est un S -schéma et B une A -algèbre, on note $T(B) = \text{Hom}_S(\text{Spec}(B), T)$ l'ensemble des S -points de T à valeurs dans B . D'après le théorème de Popescu [Popescu, 1986, 1.3], comme A est excellent et hensélien, il vérifie la propriété d'approximation d'Artin, cf. I-10.3. Donc, comme $S_\alpha \rightarrow S$ est de type fini, $S_\alpha(A)$ est dense dans $S_\alpha(\hat{A})$ (pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique). Il existe donc, pour tout $n > 0$ une section $u : S \rightarrow S_\alpha$ de t_α qui est n -proche de $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$. On définit alors X_u par le diagramme cartésien

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccc} X_u & \longrightarrow & X_\alpha \\ f_u \downarrow & \square & \downarrow f_\alpha \\ S & \xrightarrow{u} & S_\alpha \end{array}$$

Comme u est n -proche de s_α , on a par définition l'égalité

$$u\pi_{i_n} = s_\alpha i_n$$

de sorte la restriction de $X_u \rightarrow S$ à S_n s'identifie à $X_n \rightarrow S_n$, autrement dit on a un carré cartésien

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & X_u \\ f_n \downarrow & \square & \downarrow f_u \\ S_n & \xrightarrow{i_n} & S \end{array}$$

De même, si X, Y sont de type fini sur $\hat{S}$ et h_α est un modèle de $h \in \text{Hom}_{\hat{S}}(X, Y)$ sur S_α , l'image inverse $h_u : X_u \rightarrow Y_u$ est un S -morphisme induisant la restriction $h_n : X_n \rightarrow Y_n$ de h au dessus de S_n .

3. Approximations et topologie des altérations

Commençons par un rappel (cf. exposé II) sur la topologie des altérations. Soit T un schéma noethérien. La catégorie alt/T est la sous-catégorie pleine de la catégorie des T -schémas dont les objets sont les T -schémas réduits de type fini X , dont tout point maximal s'envoie sur un point maximal de T avec extension résiduelle finie. Notons que les morphismes de alt/T envoient point maximal sur point maximal. On définit deux topologies sur alt/T .

- (i) La *topologie des altérations* est la moins fine pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes

- (a) les recouvrements ouverts de Zariski ;
- (b) les morphismes propres et surjectifs .

Une famille couvrante pour la topologie des altérations sera dite *alt-couvrante*.

- (ii) Soit ℓ un nombre premier. La *topologie des ℓ' -altérations* sur alt/T est la moins fine pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes

- (a) les recouvrements étales de Nisnevich ;
- (b) les morphismes propres surjectifs $X' \rightarrow X$ tels que pour tout point maximal η de X , il existe un point maximal η' de X' au dessus de η avec ℓ ne divisant pas $\deg(k(\eta')/k(\eta))$.

Une famille couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations sera dite *alt $_{\ell'}$ -couvrante*.

Pour tout T -schéma X de type fini, on note X_{md} le sous-schéma fermé réduit de X réunion des composantes irréductibles qui dominant une composante irréductible de T .

PROPOSITION 3.1. *On reprend les notations de 2 : soit A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété. On suppose A excellent et hensélien. Soit $\pi : \hat{S} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Soit $X \rightarrow \hat{S}$ un objet non vide de $\text{alt}/\hat{S}$. Supposons de plus S intègre. Choisissons un modèle X_β de X sur S_β , pour un indice $\beta \in E$ (cf. 2.2), et pour $\alpha \geq \beta$ notons X_α le modèle qui s'en déduit par changement de base.*

- (i) *Alors, il existe $\alpha_0 \in E$, $\alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section $u : S \rightarrow S_\alpha$ de t_α qui est n -proche de $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$, X_u (2.2.1) est à fibre générique finie et le morphisme composé $(X_u)_{\text{md}} \rightarrow X_u \rightarrow S$ est un objet non vide de alt/S .*
- (ii) *Supposons $X \rightarrow \hat{S}$ alt-couvrant. Alors, il existe $\alpha_0 \in E$, $\alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section $u : S \rightarrow S_\alpha$ de t_α qui est n -proche de $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$, le morphisme composé $(X_u)_{\text{md}} \rightarrow X_u \rightarrow S$ est alt-couvrant.*
- (iii) *Supposons $X \rightarrow \hat{S}$ alt $_{\ell'}$ -couvrant. Alors, il existe $\alpha_0 \in E$, $\alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section $u : S \rightarrow S_\alpha$ de t_α qui est n -proche de $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$, le morphisme composé $(X_u)_{\text{md}} \rightarrow X_u \rightarrow S$ est alt $_{\ell'}$ -couvrant.*

Démonstration. Observons d'abord que, S étant hensélien et excellent, $\hat{S}$ est intègre, cf. I-6.3.

Prouvons (i). Comme $X \rightarrow \hat{S}$ est génériquement fini, il existe $a \in \hat{A} - \{0\}$ tel que X soit fini, surjectif et libre de rang $d > 0$ au dessus de l'ouvert non vide $\hat{S} - V(a)$. On peut choisir α_0 assez grand de sorte que

- a provienne de $a_\alpha \in A_\alpha - \{0\}$ pour $\alpha \geq \alpha_0$;
- $X_\alpha \rightarrow S_\alpha$ soit fini, surjectif ([ÉGA IV₃ 8.10.5]) et libre de rang d sur $S_\alpha - V(a_\alpha)$ (utiliser [ÉGA IV₃ 8.5.2]).

Choisissons alors un entier n tel que $a \notin \hat{\mathfrak{m}}^{n+1}$. Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, $m \geq n$, toute section u qui est m -proche de t_α , on a

$$u^*(a_\alpha) \notin \mathfrak{m}^{n+1}$$

et donc $u^*(a_\alpha)$ est non nul. Ceci assure que X_u est fini, surjectif et libre de rang d au dessus de l'ouvert non vide $S - V(u^*(a_\alpha))$ image réciproque de $S_\alpha - V(a_\alpha)$ par u . Le premier point en découle.

Prouvons (iii) [La preuve de (ii) est en tout point similaire]. On suppose donc que $X \rightarrow \hat{S}$ est alt $_{\ell'}$ -couvrant. On sait (II-3.2.1) que $X \rightarrow \hat{S}$ est dominé dans $\text{alt}/\hat{S}$ par un recouvrement standard

$$Y \rightarrow X' \rightarrow \hat{S}$$

avec

- $Y \rightarrow X'$ Nisnevich couvrant
- $X' \rightarrow \hat{S}$ propre et surjectif dont la restriction à chaque composante irréductible est dominante et génériquement finie, le degré générique de l'une d'elles étant premier à ℓ .

Quitte à remplacer le schéma réduit X' par une composante convenable et Y par le alt $_{\ell'}$ -recouvrement Nisnevich induit, on peut supposer X' intègre de degré générique $\deg(X'/\hat{S}) = \delta$ premier à ℓ .

Soit η le point générique de S . La construction $X \mapsto X_{\text{md}}$ est fonctorielle pour la sous-catégorie pleine des S -schémas X à fibre générique finie. Or, d'après (i), pour $\alpha_0 \geq \beta$ assez grand et des choix de modèles $Y_{\alpha_0} \rightarrow X'_{\alpha_0} \rightarrow S_{\alpha_0}$, $Y_{\alpha_0} \rightarrow X_{\alpha_0} \rightarrow S_{\alpha_0}$ et de section u de t_α ($\alpha \geq \alpha_0$) convenables, on sait que Y_u, X'_u et X_u sont à fibre générique finie. On a donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} (Y_u)_{\text{md}} & \longrightarrow & (X_u)_{\text{md}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X'_u)_{\text{md}} & \longrightarrow & S \end{array}$$

Or, toujours d'après (i), on peut en outre supposer que $(Y_u)_{\text{md}}, (X'_u)_{\text{md}}$ et $(X_u)_r$ sont des objets de alt/S . Pour conclure que $(X_u)_{\text{md}} \rightarrow S$ est alt $_{\ell'}$ -couvrant, il suffit de prouver que pour u convenable $(Y_u)_{\text{md}} \rightarrow S$ est alt $_{\ell'}$ -couvrant.

Tenant compte des propriétés de permanence usuelles des modèles [ÉGA IV₃ 8.8.3 et 8.10.5], la preuve de (i) assure que pour des modèles et u convenables le morphisme $X'_u \rightarrow S$ est propre et surjectif et que sa fibre générique est de degré premier à ℓ . Ceci assure que la restriction de $X'_u \rightarrow S$ à au moins une des composantes réduites de X'_u dominant S est de degré premier à ℓ . Ainsi, $(X'_u)_{\text{md}} \rightarrow S$ est bien $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant.

La propriété d'être un recouvrement Nisnevich (resp. propre et surjectif) étant stable par changement de base, reste à prouver le lemme suivant.

LEMME 3.1.1. *Il existe $\alpha_0 \geq \beta$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, le modèle $Y_\alpha \rightarrow X'_\alpha \rightarrow S_\alpha$ de $Y \rightarrow X' \rightarrow \hat{S}$ (dédit de $Y_{\alpha_0} \rightarrow X'_{\alpha_0} \rightarrow S_{\alpha_0}$) ait la propriété que $Y_\alpha \rightarrow X'_\alpha$ est Nisnevich couvrant.*

Démonstration. Dire que le morphisme $Y \rightarrow X'$ est Nisnevich couvrant, c'est dire qu'il est lisse, quasi-fini et qu'on a une stratification

$$\emptyset = X'_0 \subset X'_1 \cdots \subset X'_n = X'$$

avec X'_i fermé de X' et Y/X' a une section au dessus de $X'_{i+1} - X'_i$. La conclusion découle immédiatement de cette remarque et des propriétés de permanence usuelles des modèles [ÉGA IV₃ 8.8.3 et 8.10.5] et [ÉGA IV₄ 17.7.8]. $\square$

Le but de ce qui suit est d'améliorer les résultats topologiques de la proposition 3.1 en montrant que des épaississements convenables des cônes normaux des fibres spéciales de X (resp. X_u) dans X (resp. X_u) sont isomorphes. Ceci permettra de prouver des énoncés de stabilité de propriétés dans le passage de X à X_u , en l'occurrence la dimension et la régularité (corollaire 5.4). $\square$

4. Gradués supérieurs et approximations de complexes

Soient I un idéal d'un topos annelé $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$ -module de $\mathcal{X}$ et a un entier ≥ 1 . On pose $I^n = \mathcal{O}$ si $n \leq 0$. On définit le module $\mathbf{Z}$ -gradué

$$\text{gr}_a(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} I^n \mathcal{F} / I^{n+a} \mathcal{F}$$

qui est donc la somme

$$\text{gr}_a(\mathcal{F}) = \mathcal{F}/I\mathcal{F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}/I^a\mathcal{F} \oplus I\mathcal{F}/I^{a+1}\mathcal{F} \oplus I^2\mathcal{F}/I^{a+2}\mathcal{F} \oplus \cdots$$

concentrée en degrés $\geq -(a-1)$. C'est un $\mathcal{O}/I^a$ -module ; de plus, le produit

$$I^n \otimes I^m \rightarrow I^{n+m}$$

induit une structure de $\mathcal{O}/I^a$ -algèbre $\mathbf{Z}$ -gradué sur $\text{gr}_a(\mathcal{O})$ et $\text{gr}_a(\mathcal{F})$ est un $\text{gr}_a(\mathcal{O})$ -module $\mathbf{Z}$ -gradué.

On s'intéresse ici au cas où $\mathcal{X}$ est le topos de Zariski d'un S -schéma X annelé par son faisceau structural $\mathcal{O}$ et $I = \mathfrak{m}\mathcal{O}$.

REMARQUE 4.1. Le morphisme surjectif tautologique $\text{gr}_a(\mathcal{O}) \rightarrow \text{gr}_1(\mathcal{O})$ a pour noyau $J = I \cdot \text{gr}_a(\mathcal{O})$. On a donc $J^a = 0$ (puisque J est un $\mathcal{O}_{X_{a-1}}$ -module) de sorte que $C_a(X) = \text{Spec}(\text{gr}_a(\mathcal{O}))$ est un épaississement d'ordre $a-1$ du cône normal $\text{Spec}(\text{gr}_1(\mathcal{O}))$.

DÉFINITION 4.2. Soient X, Y des S -schémas (resp. des $\hat{S}$ -schémas). Un a -isomorphisme $X \xrightarrow{\sim}_a Y$ est la donnée d'un S -isomorphisme $\phi : X_{a-1} \xrightarrow{\sim} Y_{a-1}$ et d'un isomorphisme de $\text{gr}_a(A)$ -algèbres graduées $\phi^{-1} \text{gr}_a(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_a(\mathcal{O}_X)$. On dit dans ce cas que X, Y sont a -proches.

On identifiera alors leurs fibres spéciales X_0, Y_0 grâce à l'isomorphisme $X_{a-1} \xrightarrow{\sim} Y_{a-1}$.

4.3. On adapte ici le théorème 3.2 de [Conrad & de Jong, 2002] (et le lemme clef 3.1 de *loc. cit.*). Commençons par une définition. Soient B un anneau noethérien et I un idéal de B .

DÉFINITION 4.4. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de B -modules de type fini. Un entier $c \geq 0$ est une **constante d'Artin-Rees** de f si pour tout $n \geq c$ on a

$$I^n N \cap \text{Im}(f) \subset I^{n-c} \text{Im}(f).$$

Le lemme d'Artin-Rees assure l'existence d'une constante d'Artin-Rees.

PROPOSITION 4.5. Soient $(L^\bullet, d_L^\bullet), (M^\bullet, d_M^\bullet)$ des complexes de B -modules libres de type fini concentrés en degré $[-2, 0]$ avec $L^i = M^i$ pour tout i . Soit c une constante d'Artin-Rees pour d_L^{-2} et d_L^{-1} et n un entier $\geq c$. Supposons $H^{-1}(L^\bullet) = 0$ et

$$d_L^\bullet = d_M^\bullet \pmod{I^{n+1}}.$$

Alors :

- (i) c est une constante d'Artin-Rees pour d_M^{-1} ;
- (ii) si I est contenu dans le radical de A ⁽ⁱ⁾, $H^{-1}(M^\bullet) = 0$;
- (iii) L'identité de $L^0 = M^0$ induit un isomorphisme de $\text{gr}_{n+1-c}(B)$ -modules

$$\text{gr}_{n+1-c}(H^0(L^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{n+1-c}(H^0(M^\bullet));$$

- (iv) De plus, si $L^0 = M^0 = B$, l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de $\text{gr}_{n+1-c}(B)$ -algèbres, autrement dit les algèbres $H^0(L^\bullet)$ et $H^0(M^\bullet)$ sont $(n+1-c)$ -isomorphes.

Démonstration. Les deux premiers points sont prouvés dans le lemme 3.1 de *loc. cit.* Le dernier est trivial. Reste le point (iii).

Pour $n = c$, c'est le théorème 3.2 de *loc. cit.* dont on ne fait qu'adapter la preuve dans le cas $n > c$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On écrit d_L, d_M pour d_L^{-1}, d_M^{-1} . Pour $\delta = d_L, d_M$, on a

$$\text{gr}_{n+1-c}^m(\text{Coker}(\delta)) = I^m L^0 / (I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(\delta))$$

de sorte qu'il s'agit de montrer l'égalité

$$I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_L) = I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in L^{-1}$ tel que $d_L(x) \in I^m L^0$.

Supposons $m \leq c$. Comme

$$d_L(x) - d_M(x) \in I^{n+1} L^0 \text{ et } m \leq c \leq n,$$

on a $d_L(x) - d_M(x) \in I^m L^0$ de sorte que

$$d_M(x) = d_L(x) + d_M(x) - d_L(x) \in I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M).$$

Comme $n+1 \geq m+n+1-c$, on a également

$$d_L(x) - d_M(x) \in I^{n+1} L^0 \subset I^{m+n+1-c} L^0$$

de sorte que

$$d_L(x) = d_L(x) - d_M(x) + d_M(x) \in I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M)$$

et donc

$$I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_L) \subset I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M).$$

Par symétrie des rôles de d_L et d_M , on a l'égalité cherchée dans ce cas.

Si $m > c$, le calcul est analogue. On a (4.4)

$$I^m L^0 \cap \text{Im}(d_L) \subset I^{m-c} d_L(L^{-1})$$

de sorte que

$$d_L(x) = d_L(x') \text{ avec } x' \in I^{m-c} L^{-1}.$$

⁽ⁱ⁾Cette hypothèse manque dans le lemme 3.1 de *loc. cit.*

Comme $d_L - d_M = 0 \pmod{I^{n+1}}$, la matrice de $d_L - d_M$ est à coefficients dans I^{n+1} de sorte que

$$d_L - d_M \in I^{n+1} \text{Hom}_B(L^{-2}, L^{-1}).$$

On a donc

$$d_L(x') - d_M(x') \in I^{n+1} I^{m-c} L^0 = I^{n+1+m-c} L^0.$$

Comme

$$d_M(x') = d_L(x') + d_M(x') - d_L(x') = d_L(x) + d_M(x') - d_L(x'),$$

on a d'une part

$$d_M(x') \in (I^m L^0 + I^{n+1+m-c} L^0) \cap \text{Im}(d_M) \subset I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M),$$

car $n \geq c$, et, d'autre part,

$$d_L(x) = d_L(x') - d_M(x') + d_M(x') \in I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M).$$

On conclut comme plus haut par symétrie. $\square$

5. Modèles et α -isomorphismes

THÉORÈME 5.1 (Approximation). *Soit A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété. On suppose A excellent et hensélien. Soit $\pi : \hat{S} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Soit X de type fini sur $\hat{S}$. On se donne de plus $\alpha_0 \in E$ et un modèle (cf. 2.2) X_{α_0} de X sur S_{α_0} . Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ on note $X_\alpha = X_{\alpha_0} \times_{S_{\alpha_0}} S_\alpha$ le modèle de X sur S_α déduit par changement de base. Il existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ et des entiers $n_0 \geq c > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\alpha \geq \alpha_1$ et toute section u de t_α qui est $(n+1)$ -proche de s_α , il existe un unique $(n+1-c)$ -isomorphisme $X \xrightarrow{\sim}_{n+1-c} X_u$ au dessus de l'isomorphisme $X_{n-c} \rightarrow (X_u)_{n-c}$ déduit de (2.2.2).*

DÉFINITION 5.2. Dans les conditions précédentes, on dit que (X_α, α, u) (ou, si aucune conclusion n'est à craindre, X_u) est une **approximation** de X sur S (à l'ordre $n-c$).

L'assertion « Il existe α_0 , un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $\alpha \geq \alpha_0$ et toute section u de t_α qui est $(n+1)$ -proche de s_α , X_u vérifie la propriété P » pourra parfois être condensée en « Toute approximation X_u assez fine de X vérifie la propriété P ». On emploiera une terminologie analogue pour les approximations de $\hat{S}$ -morphisms.

Démonstration. Deux $(n+1-c)$ -isomorphismes diffèrent par un automorphisme

$$\iota : \text{gr}_{n+1-c}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{n+1-c}(\mathcal{O}_X)$$

de $\mathcal{O}_{X_{n-c}}$ -algèbres graduées. Il est en particulier $\mathcal{O}_S$ -linéaire. Comme $\text{gr}_{n+1-c}(\mathcal{O}_X)$ est engendré sur $\text{gr}_a(\mathcal{O}_S)$ par $\mathcal{O}_{X_{n-c}}$, l'automorphisme ι est l'identité. D'où l'unicité.

On peut donc supposer X affine. Comme X est de type fini sur $\hat{S}$, X se plonge dans l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\hat{S}}^m = \text{Spec}(\hat{A}[t])$$

de coordonnées $t = (t_1, \dots, t_m)$ comme le sous-schéma fermé d'idéal

$$J = \langle \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N \rangle$$

où $\tilde{P}_i \in B = \hat{A}[t]$. Choisissons une résolution partielle du B -module $C = B/J$ par des B -modules libres de type fini

$$(5.2.1) \quad B^a \xrightarrow{\tilde{R}} B^b \xrightarrow{\tilde{P}=(\tilde{P}_i)} B \rightarrow C \rightarrow 0$$

où $\tilde{R}$ est une matrice à coefficients dans B .

Pour α_0 assez grand, $\tilde{P}$ et $\tilde{R}$ proviennent de matrices $P_{\alpha_0}, R_{\alpha_0}$ à coefficients dans

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \text{ telles que } PR = 0$$

de sorte que le fermé F de $\mathbf{A}_{A_{\alpha_0}}^m$ d'équations $P_{\alpha_0,1} = \dots = P_{\alpha_0,N} = 0$ est un modèle de X sur S_{α_0} . Comme rappelé dans la section 2, quitte à changer α_0 en un indice plus grand, on peut supposer

qu'on a $F = X_{\alpha_0}$. Pour $\alpha \geq \alpha_0$, note P_α, R_α les matrices à coefficients dans B_α déduites de $P_{\alpha_0}, R_{\alpha_0}$ par le morphisme

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \rightarrow B_\alpha = A_\alpha[t].$$

Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, les matrices à coefficients dans B déduites de P_α, R_α par le morphisme

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \rightarrow B = \hat{A}[t]$$

sont les mêmes : on les note P, R .

On s'est ramené, pour $\alpha \geq \alpha_0$, au cas où

$$X_\alpha = \text{Spec}(C_\alpha) \text{ avec } C_\alpha = B_\alpha/(P_\alpha).$$

On dispose donc d'une part d'un complexe (en degrés $[-2, 0]$) de B_α -modules libres

$$L_\alpha = (B_\alpha^a \xrightarrow{R_\alpha} B_\alpha^b \xrightarrow{P_\alpha = (P_{i,\alpha})} B_\alpha)$$

avec $H^0(L_\alpha) = C_\alpha$. Le complexe de B -modules libres de rang fini

$$L = B \otimes_{B_\alpha} L_\alpha = (B^a \xrightarrow{R} B^b \xrightarrow{P=1 \otimes P_\alpha} B)$$

est acyclique en degré -1 par construction.

REMARQUE 5.3. *A priori*, L_α n'a pas de raison d'être acyclique en degré -1 , même pour α grand.

D'autre part, la section u de t_α est définie par un morphisme de A -algèbres

$$u^* : A_\alpha \rightarrow A$$

de sorte que

$$u^* \bmod \mathfrak{m}^{n+1} = s_\alpha^* \bmod \hat{\mathfrak{m}}^{n+1},$$

où $s_\alpha^* : A_\alpha \rightarrow \hat{A}$ est défini par $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$ (2.1.1). Par action sur les coefficients des polynômes, on obtient un morphisme d'anneau

$$\bar{u} : B_\alpha = A_\alpha[t] \rightarrow A[t] \rightarrow \hat{A}[t] = B$$

d'où un complexe

$$M = (B^a \xrightarrow{\bar{u}(R)} B^b \xrightarrow{\bar{u}(P)} B)$$

Par construction, on a

$$L/\mathfrak{m}^{n+1}L = M/\mathfrak{m}^{n+1}M.$$

On choisit alors une constante d'Artin-Rees c pour $B^b \xrightarrow{P} B$ et on invoque la proposition 4.5 pour conclure. $\square$

COROLLAIRE 5.4. *Soient X, Y des S -schémas noethériens qui sont α -proches. Soit $x \in X_0 = Y_0$.*

- (i) *Si $\alpha \geq 1$, les dimensions de X et Y en x sont les mêmes.*
- (ii) *Si $\alpha \geq 2$ et X est régulier en x , alors Y est régulier en x .*
- (iii) *Supposons $X \rightarrow \hat{S}$ de type fini et X régulier. Soit X_β un modèle de X sur S_β , et pour $\alpha \geq \beta$, notons X_α le modèle sur S_α déduit par changement de base. Alors, il existe $\alpha_0 \in E$, $\alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section u de t_α qui est n -proche de $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$, le schéma X_u déduit de X_α soit régulier dans un voisinage ouvert de la fibre spéciale.*

Démonstration. Par hypothèses, les cônes normaux de X_0, Y_0 dans X, Y sont S -isomorphes. Comme la dimension de X en x est égale à celle de son cône normal [Matsumura, 1989, 15.9], le premier point en découle.

Supposons maintenant que X, Y soient 2-proches. D'après (i), on sait que X et Y ont même dimension en x . Comme X, Y sont 2-proches, X_1 et Y_1 sont isomorphes. Puisque l'espace tangent de Zariski à X en un point de X_0 ne dépend que de X_1 , les $k(x)$ -espaces vectoriels cotangents de Zariski en x à X et Y sont isomorphes, d'où (ii).

Pour le dernier point, il suffit d'invoquer les deux premiers et le théorème 5.1 pour conclure qu'une approximation assez fine est régulière au voisinage de la fibre spéciale. Comme X_u est excellent (puisque de type fini sur S excellent), son lieu régulier R est ouvert de sorte que R est un voisinage ouvert régulier de la fibre spéciale. $\square$

REMARQUE 5.5. O. Gabber sait généraliser la proposition 4.5 au cas où les complexes envisagés sont seulement de type fini sur un anneau noethérien pour obtenir les proximités de la cohomologie également en degré -2 (et pas seulement en degré $0, -1$). Il peut plus précisément montrer des énoncés de proximité pour les images, noyaux des différentielles⁽ⁱⁱ⁾. Gabber en déduit de nombreux énoncés de permanence par approximation analogues au corollaire 5.4. Notamment, si X, Y sont α -proches pour α assez grand, alors X réduit (resp. normal) le long de X_0 entraîne Y réduit (resp. normal) le long de Y_0 . Cependant, plusieurs questions naturelles restent en suspens comme par exemple la permanence des propriétés S_n, R_n .

6. Réduction au cas local noethérien complet

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation (Intro.-2, II-4.3.2).

THÉORÈME 6.1 (Uniformisation). *Soient T un schéma noethérien quasi-excellent et Z un fermé rare de T . Soit ℓ un nombre premier inversible sur T . Il existe une famille finie de morphismes $(X_i \rightarrow T)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$ on ait*

- (i) *La famille finie de morphismes $(X_i \rightarrow T)_{i \in I}$ est alt-couvrante (resp. alt $_{\ell'}$ -couvrante) ;*
- (ii) *X_i est régulier et intègre ;*
- (iii) *l'image inverse de Z dans X_i est vide ou le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

Nous allons montrer l'énoncé de réduction suivant.

PROPOSITION 6.2. *Si (6.1) est vrai pour tout T noethérien, local, complet, alors (6.1) est vrai.*

Démonstration. On peut d'abord supposer T local, excellent et hensélien (rappelons (I-6.3) qu'un schéma local, hensélien et quasi-excellent est excellent). Voir II-4.3.3 pour cette réduction.

Supposons donc T local, noethérien, hensélien, excellent.

Quitte à remplacer T par la somme disjointe de ses composantes réduites, on se ramène au cas où T est de plus intègre.

On peut supposer de plus $T = \text{Spec}(A)$ normal intègre. En effet, comme A est excellent, le morphisme de normalisation est fini de degré générique 1, donc est alt-couvrant (resp. alt $_{\ell'}$ -couvrant). Comme A est local intègre et hensélien, A est unibranche de sorte que le normalisé de A est local, donc intègre, et est noethérien hensélien puisque fini sur A .

Comme A est excellent, la normalisation commute à la complétion (I-6.2) de sorte que $\hat{A}$ est dès lors normal comme A , donc également intègre puisque normal et local.

On peut donc supposer T local intègre, normal, hensélien et excellent.

Comme $\hat{T}$ est plat sur T , l'image inverse $\hat{Z}$ de Z est encore un fermé rare de $\hat{T}$. Choisissons une uniformisation

$$(\tilde{X}_i \rightarrow \hat{T})_{i \in I'}$$

de $(\hat{T}, \hat{Z})$ comme dans 6.1. D'après 3.1, 5.1 et 5.4, on peut trouver $\alpha_0 \in E$ et un entier $n_0 \geq 1$ tels que, pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout $n \geq n_0$ et u n -proche de s_α , on dispose de modèles $(\tilde{X}_i)_\alpha$ des $\tilde{X}_i$ sur T_α et de n -isomorphismes $\tilde{X}_i \rightarrow_n (\tilde{X}_i)_u$ tels que

a) chaque T -schéma $(\tilde{X}_i)_u$ est régulier le long de sa fibre spéciale $(\tilde{X}_i)_0$, donc au voisinage (le lieu régulier étant ouvert puisque les schémas considérés sont excellents).

b) la famille $((\tilde{X}_i)_u)_{\text{md}}$ est alt-couvrante (resp. alt $_{\ell'}$ -couvrante).

D'après a), $(\tilde{X}_i)_u$ est régulier au voisinage de la fibre spéciale et y est la réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont intègres. Notons que, pour α et $n \geq n_0$ donnés, comme le noyau de $A_\alpha / m^n A_\alpha \rightarrow A / m^n A$ est de type fini, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que $A_\alpha / m^n A_\alpha \rightarrow A_\beta / m^n A_\beta$ se factorise par

⁽ⁱⁱ⁾ La preuve de cette généralisation a été exposée par A. Moreau lors du séminaire oral.

$A/m^n A$, et donc toute section de t_β donne une section de t_α qui est n -proche de s_α . Ainsi, quitte à accroître α_0 et n_0 (ou seulement α_0), on peut supposer que $(\tilde{X}_i)_u = ((\tilde{X}_i)_u)_{\text{md}}$ dans un voisinage de la fibre spéciale. C'est en effet une conséquence de la préservation de la dimension (5.4 (i)). Pour le voir, choisissons, comme dans la démonstration de 3.1, un élément non nul a de $\hat{A}$ tel que $\tilde{X}_i - V(a)$ soit fini et plat sur $\hat{T} - V(a)$. On peut supposer qu'il en est de même pour $(\tilde{X}_i)_u - V(a')$ au-dessus de $T - V(a')$, où $a' = u^*(a_\alpha)$. On peut supposer qu'en chaque point x de la fibre spéciale les anneaux locaux de X_i et de $(\tilde{X}_i)_u$ ont la même dimension d , et de même pour $V(a)$ et $V(a')$. Comme $X_i - V(a)$ est dense dans X_i , la dimension de l'anneau local de $V(a)$ en x est $< d$, donc il en est de même pour $V(a') \subset (\tilde{X}_i)_u$. Comme $\mathcal{O}_{(\tilde{X}_i)_u, x}$ est régulier, la composante irréductible de $(\tilde{X}_i)_u$ passant par x est donc dominante.

Ainsi, au voisinage de la fibre spéciale, $(\tilde{X}_i)_u$ est schématiquement la réunion disjointe de composantes dominant T . Comme un voisinage ouvert assez petit de la fibre spéciale $(\tilde{X}_i)_0$ dans $(\tilde{X}_i)_u$ est alt-couvrant (resp. alt'-couvrant) (II-4.1.1), la famille $(X_i \rightarrow T)_{i \in I}$ des composantes connexes de voisinages convenables des $(\tilde{X}_i)_0$ dans $(\tilde{X}_i)_u$, $i \in I'$ vérifie les conditions (i) et (ii).

Soit D' l'image inverse de $\hat{Z}$ dans $\tilde{X} = \coprod_{i \in I'} \tilde{X}_i$ qu'on peut supposer non vide. Par hypothèse, $D = D'_{\text{réd}}$ est un diviseur à croisements normaux strict, c'est-à-dire $D = \sum_{j \in J} D_j$ avec

$$D_K = \bigcap_{j \in K} D_j$$

régulier de codimension $\text{card}(K)$ pour toute partie $K \subset J$. Quitte à augmenter α , on peut supposer que les D_j ont des modèles sur T_α , ces modèles induisant des modèles des D_K . Comme u est une section de t_α , le schéma D_u réunion schématique des $(D_i)_u$ est, topologiquement, l'image inverse de Z dans X_u . D'après 5.4, on peut supposer que chaque $(D_u)_K$ est régulier partout de codimension $\text{card}(K)$ le long de la fibre spéciale, de sorte que D_u est un diviseur à croisements normaux strict le long de la fibre spéciale. Les lieux réguliers de $(D_u)_K$ et X_u étant ouverts, on peut supposer que D_u est un diviseur à croisements normaux strict au voisinage de la fibre spéciale (excellence de X_u). $\square$

EXPOSÉ IV

Le théorème de Cohen-Gabber

Fabrice Orgogozo

1. p -bases et différentielles (rappels)

1.1. Définition et caractérisation différentielle.

1.1.1. Pour la commodité du lecteur, et pour fixer les notations, nous rappelons ici quelques résultats bien connus dont nous ferons usage ci-après. Nous conseillons au lecteur de ne s'y reporter qu'en cas de besoin.

DÉFINITION 1.1.2. Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k , et $(b_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de K . On dit que les (b_i) constituent une **p -base** de K sur k (resp. sont **p -libres** sur k) si les monômes $\prod_i b_i^{n(i)}$ ($0 \leq n(i) < p$, $(n(i))_{i \in I}$ de support fini) forment une base du $k(K^p)$ -espace vectoriel K (resp. sont linéairement indépendants sur $k(K^p)$).

Si $k = \mathbb{F}_p$, on parle alors de p -base **absolue**, ou de p -base s'il n'y a pas d'ambiguïté. Enfin, on appelle parfois **p -monôme** un produit comme ci-dessus. Un lien entre cette notion et la structure des anneaux locaux complets ressort du théorème suivant.

THÉORÈME 1.1.3 ([Bourbaki, AC, IX, §3, n°3, th. 1 b])). Soient A un anneau local séparé complet de caractéristique $p > 0$ et $(\beta_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A dont les classes modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ forment une p -base du corps résiduel $A/\mathfrak{m}_A$. Il existe alors un unique corps de représentants de A contenant les éléments β_i .

REMARQUE 1.1.4. On peut étendre de façon évidente la notion de p -base au cas d'un anneau quelconque de caractéristique $p > 0$; voir [ÉGA 0_{IV} 21.1-4]. Nous n'en aurons pas besoin.

1.1.5. On vérifie immédiatement que les $(b_i)_{i \in I}$ forment une p -base de K sur k si et seulement si, pour tout $i \in I$, l'élément b_i n'appartient pas au sous-corps $k(K^p, (b_j)_{j \neq i})$ de K . (Voir p. ex. [ÉGA 0_{IV} 21.4.3].)

1.1.6. Pour toute extension de corps K/k , nous noterons $d_{K/k}$ la différentielle $K \rightarrow \Omega_{K/k}^1$.

PROPOSITION 1.1.7. Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, et K une extension de k . Une famille $(b_i)_{i \in I}$ d'éléments de K est une p -base de K sur k si et seulement si les différentielles $d_{K/k}(b_i)$ forment une base du K -espace vectoriel $\Omega_{K/k}^1$.

Démonstration. Soit $B = (b_i)_{i \in I}$ une p -base de K sur k . Tout morphisme (ensembliste) $\Delta : B \rightarrow K$ s'étend de manière unique en une k -dérivation D de K : il suffit de poser $D(b_1^{n_1} \cdots b_r^{n_r}) = \sum_i n_i b_1^{n_1} \cdots b_i^{n_i-1} \cdots b_r^{n_r} \Delta(b_i)$ et de l'étendre par $k(K^p)$ -linéarité. Cela est équivalent au fait que les $d_{K/k}(b_i)$ forment une base de $\Omega_{K/k}^1$. Réciproquement, si les $d_{K/k}(b_i)$ forment une base, on observe que les p -monômes sont $k(K^p)$ -linéairement indépendants : dans le cas contraire on aurait, pour un indice i convenable, $b_i \in k(K^p, (b_j)_{j \neq i})$, ce qui se traduirait par une relation linéaire entre les différentielles. Soit B' une p -base de K sur k contenant les b_i (loc. cit., 21.4.2); d'après l'implication précédente, on a nécessairement $B' = (b_i)_{i \in I}$. $\square$

COROLLAIRE 1.1.8. Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, et K une extension de k . Un élément x de K appartient à $k(K^p)$ si et seulement si $d_{K/k}(x) = 0$.

1.1.9. Rappelons que le **p-rang** d'un corps est le cardinal d'une p-base absolue (bien défini en vertu de ce qui précède). On vérifie immédiatement que ce *cardinal* (fini ou non) est invariant par extension *finie* de corps.

1.2. Stabilisation.

LEMME 1.2.1 (voir p. ex. [ÉGA 0_{IV} 21.8.1]). Soient K un corps, k un sous-corps, $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ ($I \neq \emptyset$) une famille de sous-corps de K telle que $\bigcap_\alpha k_\alpha = k$ et filtrante décroissante, c'est-à-dire telle que pour toute paire d'indices α, β , il existe un indice γ tel que $k_\gamma \subset k_\alpha \cap k_\beta$. Soient V un K -espace vectoriel, et (v_i) ($1 \leq i \leq n$) une famille finie de vecteurs de V . Si la famille (v_i) est libre sur k , il existe un indice γ telle qu'elle soit aussi libre sur k_γ .

LEMME 1.2.2. Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, k un sous-corps et $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps contenant k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p)$;
- (ii) pour tout ensemble fini $\{b_1, \dots, b_n\} \subset K$, p -libre sur k , il existe un indice α tel qu'il soit p -libre sur K_α ;
- (iii) il existe une p -base de K sur k telle que tout sous-ensemble fini soit p -libre sur un K_α pour α convenable ;
- (iv) le morphisme canonique $\Omega_{K/k}^1 \rightarrow \lim_\alpha \Omega_{K/K_\alpha}^1$ est injectif.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate du lemme précédent. (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial (toute p -base convient). (iii) $\Rightarrow$ (iv) trivial (utiliser 1.1.7). Vérifions (iv) $\Rightarrow$ (i). Soit $x \notin k(K^p)$. D'après 1.1.8, $d_{K/k}(x) \neq 0$ de sorte qu'il existe α tel que $d_{K/K_\alpha}(x)$ soit également non nul. D'après *loc. cit.*, cela entraîne que $x \notin K_\alpha(K^p)$. $\square$

On en déduit le lemme suivant, qui est un cas particulier de [ÉGA 0_{IV} 21.8.5].

LEMME 1.2.3. Soient K un corps de caractéristique p , k un sous-corps et $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K contenant k telle que $\bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p)$. Pour toute extension finie L de K , on a également $\bigcap_\alpha K_\alpha(L^p) = k(L^p)$.

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où L/K est sans sous-extension non triviale. Si L/K est (algébrique) séparable, la conclusion résulte immédiatement de l'existence des isomorphismes canoniques $\Omega_{L/k}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{L/K}^1 \otimes_K L$, $\Omega_{L/K_\alpha}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{K/K_\alpha}^1 \otimes_K L$ et du critère (iv) ci-dessus. Dans le cas contraire, $L = K(a)$, où $b = a^p \in K - K^p$. On distingue naturellement deux cas. Premier cas : $d_{K/k}(b) = 0$, c'est-à-dire $b \in k(K^p)$. Il en résulte que pour toute sous-extension M de L/k , on a l'égalité $M(L^p) = M(K^p, b) = M(K^p)$. Ainsi,

$$\bigcap_\alpha K_\alpha(L^p) = \bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p) = k(L^p).$$

Second cas : $d_{K/k}(b) \neq 0$. On peut alors compléter $\{b\}$ en une p -base de K sur k , que l'on note $(b, (b_j)_{j \in J})$. La famille $(a, (b_j)_{j \in J})$ est alors une p -base de L sur k et on vérifie immédiatement le critère (iii) ci-dessus : si $(b, b_1, \dots, b_n)$ est p -libre sur K_α , il en est de même de $(a, b_1, \dots, b_n)$. $\square$

PROPOSITION 1.2.4 ([Matsumura, 1980b], § 30, lemme 6). Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ et (K_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps cofinis — c'est-à-dire tels que les degrés $[K : K_\alpha]$ soient finis — telle que $\bigcap_\alpha K_\alpha = K^p$. Alors, pour toute extension finie L/K , il existe un indice β tel que pour tout sous-corps cofini $K' \subset K_\beta$ on ait :

$$\text{rang}_L \Omega_{L/K'}^1 = \text{rang}_K \Omega_{K/K'}^1.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'on peut supposer L/K sans sous-extension non triviale. Supposons qu'il existe une sous- K -extension $K \subsetneq M \subsetneq L$, sans quoi il n'y a rien à démontrer. Par récurrence sur $[L : K]$, on peut supposer le lemme établi pour l'extension M/K . Les sous-corps $M_\alpha = K_\alpha(M^p)$ sont cofinis dans M et, pour α, β et γ comme dans l'énoncé, on a $M_\gamma \subset M_\alpha \cap M_\beta$. En vertu du lemme précédent, appliqué dans le cas particulier où $k = K^p$, on a l'égalité $\bigcap_\alpha M_\alpha = M^p$. D'autre part, les extensions M_α/K_α sont *finies* et, pour tout sous-corps K' de K , on a les égalités

$\Omega_{M/K'}^1 = \Omega_{M/K'(M^p)}^1$ et $\Omega_{L/K'}^1 = \Omega_{L/K'(M^p)}^1$. Ceci nous ramène au cas particulier où $M = K$, puis au cas où L/K est sans sous-extension non triviale.

Si celle-ci est (algébrique) séparable, le théorème est trivial : on a $\Omega_{L/K'}^1 \xleftarrow{\sim} \Omega_{K/K'}^1 \otimes_K L$ pour tout $K' \subset K$. Sinon, $L = K(a)$, où $a^p = b \in K - K^p$, et, pour chaque $K' \subset K$, le module des différentielles $\Omega_{L/K'}^1$ est naturellement isomorphe à

$$(\Omega_{K/K'}^1 / K d_{K/K'}(b)) \otimes_K L \oplus L d_{L/K'}(a).$$

De plus, $d_{K/K^p}(b)$ et $d_{L/L^p}(a)$ sont non nuls car b (resp. a) n'appartient pas à K^p (resp. L^p). Puisque $K^p = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}$ (resp. $L^p = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}(L^p)$), il existe un β tel que $d_{K/K_{\beta}}(b) \neq 0$ (resp. $d_{L/K_{\beta}}(a) \neq 0$). Il résulte de l'isomorphisme ci-dessus que pour chaque $K' \subset K_{\beta}$, on a l'égalité $\text{rang}_L \Omega_{L/K'}^1 = \text{rang}_K \Omega_{K/K'}^1$. CQFD. $\square$

1.2.5. Rappelons enfin que si A et B sont deux anneaux linéairement topologisés ([ÉGA 0_I 7.1.1]), et $A \rightarrow B$ un morphisme *continu*, le B -module $\Omega_{B/A}^1$ est un B -module *topologique*, la topologie étant déduite de celle de $B \otimes_A B$ par restriction et passage au quotient ([ÉGA 0_{IV} 20.4.3]). Le B -module sous-jacent ne dépend pas des topologies de A et B . On note $\widehat{\Omega}_{B/A}^1$ son *séparé complété* ; il est isomorphe à une limite de Ω^1 de morphismes entre anneaux topologiques discrets (*loc. cit.*, § 20.7.14). Pour tout B -module topologique L tel que l'anneau $D_B(L) = B \oplus L$ soit linéairement topologisé⁽ⁱ⁾, le morphisme canonique induit par la dérivation universelle est un *isomorphisme* :

$$\text{Hom}.\text{cont}_B(\Omega_{B/A}^1, L) \xrightarrow{\sim} \text{Dér}.\text{cont}_A(B, L). \quad (\text{ii})$$

Si le B -module topologique L est de plus séparé et complet, l'isomorphisme précédent peut se réécrire $\text{Hom}.\text{cont}_B(\widehat{\Omega}_{B/A}^1, L) \xrightarrow{\sim} \text{Dér}.\text{cont}_A(B, L)$. Comme on le constate dans le cas particulier très simple où A est un corps et B un anneau de séries formelles, le B -module $\widehat{\Omega}_{B/A}^1$ a des propriétés de finitude bien plus remarquables que $\Omega_{B/A}^1$ (*loc. cit.*, exemple 20.7.16 et prop. 20.7.15).

2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique > 0

2.1. Le théorème de Cohen-Gabber non équivariant en caractéristique > 0 . Le but de ce paragraphe est de démontrer la variante suivante du théorème de structure des anneaux locaux noëthériens complets [ÉGA 0_{IV} 19.8.8 (ii)], dû à Irving S. Cohen.

THÉORÈME 2.1.1 (théorème de Cohen-Gabber ; [Gabber, 2005a], lemme 8.1). *Soit A un anneau local complet noëthérien réduit, d'égale caractéristique $p > 0$, équidimensionnel de dimension d et de corps résiduel k . Il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que A soit fini sur A_0 , sans torsion et génériquement étale. De plus, le morphisme $A_0 \rightarrow A$ induit un isomorphisme sur les corps résiduels.*

REMARQUES 2.1.2. Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse, pour A intègre, dans [ÉGA 0_{IV} 21.9.5]. L'expression « génériquement étale » signifie ici qu'il existe un ouvert dense de $\text{Spec}(A_0)$ au-dessus duquel le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ est étale.

2.1.3. La démonstration du théorème, qui est une adaptation au cas non irréductible de [Gabber, 2005a], occupe le reste de cette section. Nous supposons par la suite $d > 0$, sans quoi l'énoncé est évident. Dans les alinéas 2.1.4 à 2.1.11, nous allons montrer qu'il existe un corps de représentants κ de A tel que le A -module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ soit de rang générique égal à d sur chaque composante irréductible. En 2.1.12, nous verrons comment en déduire rapidement le théorème.

⁽ⁱ⁾ Cette hypothèse entraîne que la topologie de L est définie par une famille de sous- B -modules L' tels que L/L' soit annulé par un idéal ouvert de B . Réciproquement, un B -module L muni d'une telle topologie est un B -module topologique (l'action $B \times L \rightarrow L$ est continue) et $D_B(L)$ est linéairement topologisé (c'est-à-dire par une famille de sous- B -modules).

⁽ⁱⁱ⁾ Comme nous l'a signalé O. Gabber, l'isomorphisme précédent — tiré de [ÉGA 0_{IV} 20.4.8 (ii)] — peut être mis en défaut si l'on suppose seulement que L est un B -module topologique.

2.1.4. Soit $(b_i)_{i \in E}$ une p -base de $k = A/m_A$. Choisissons des relèvements arbitraires β_i des b_i dans A . Rappelons qu'il existe un unique corps de représentants $\kappa \subset A$ contenant les β_i et se surjetant sur k (1.1.3). Changer de corps de représentants revient donc à changer les β_i . Fixons également un système de paramètres $\tau_1, \dots, \tau_d$ de A ; nous ne le changerons qu'à la fin de la démonstration (2.1.12).

2.1.5. Pour toute partie finie $e \subset E$, posons $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i, i \notin e) \subset \kappa$. Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

$$\begin{aligned} & \text{pour toute partie finie } e \subset E, [\kappa : \kappa_e] < +\infty, \\ & \text{pour toutes parties finies } e, e' \subset E, \kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'}, \\ & \bigcap_{e \subset E} \kappa_e = \kappa^p. \end{aligned}$$

2.1.6. Soient $\text{Spec}(\bar{A})$ une composante irréductible de $\text{Spec}(A)$, munie de la structure réduite, et $\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d$ les images des τ_i dans $\bar{A}$ par la surjection canonique $A \twoheadrightarrow \bar{A}$. Considérons le diagramme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_e[[\bar{\tau}_1^p, \dots, \bar{\tau}_d^p]] & \longrightarrow & \kappa[[\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d]] & \longrightarrow & \bar{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{\kappa, e} & \longrightarrow & L_\kappa & \longrightarrow & L \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques, et les flèches verticales les inclusions dans les corps de fractions respectifs. Les flèches horizontales sont injectives et correspondent à des morphismes finis. Pour la seconde, cela résulte du fait que le module $\bar{A}$ est *quasi-fini* ([ÉGA 0_I 7.4.1]) sur $\kappa[[\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d]]$ donc de type fini car l'idéal $(\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d)\bar{A}$ est un idéal de définition ([ÉGA 0_I 7.4.4]). Enfin, les $\bar{\tau}_i$ sont analytiquement indépendants sur κ : le sous-anneau $\kappa[[\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d]]$ de $\bar{A}$ est bien un anneau de séries formelles ([ÉGA 0_{IV} 16.3.10]).

On a observé ci-dessus que la famille des $\kappa_e \subset \kappa$, $e \subset E$, satisfait aux hypothèses de la proposition 1.2.4. On vérifie immédiatement qu'il en est de même de la famille des sous-corps $L_{\kappa, e}$ de L_κ ; on a donc l'égalité

$$(2.1.6.1) \quad \text{rang}_L \Omega_{L/L_{\kappa, e}}^1 = \text{rang}_{L_\kappa} \Omega_{L_\kappa/L_{\kappa, e}}^1,$$

dès que l'ensemble fini e est suffisamment grand.

Posons $R_\kappa = \kappa[[\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d]]$ et $R_{\kappa, e} = \kappa_e[[\bar{\tau}_1^p, \dots, \bar{\tau}_d^p]]$. Le terme de gauche de (2.1.6.1) est le rang générique du $\bar{A}$ -module $\Omega_{\bar{A}/R_{\kappa, e}}^1$, c'est-à-dire le rang de son tensorisé avec L . Remarquons que d'après [ÉGA 0_{IV} 21.9.4], $\Omega_{\bar{A}/R_{\kappa, e}}^1$ s'identifie au $\bar{A}$ -module $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1$ de formes différentielles complété. Le terme de droite est quant à lui le rang du $R_{\kappa, e}$ -module libre $\Omega_{R_\kappa/R_{\kappa, e}}^1$. Ce dernier est égal à $d + \text{rang}_\kappa \Omega_{\kappa/\kappa_e}^1 = d + |e|$ (où $|\cdot|$ désigne le cardinal d'un ensemble), de sorte que la formule 2.1.6.1 se réécrit :

$$(2.1.6.2) \quad \text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|.$$

2.1.7. La proposition suivante va nous permettre de modifier le corps des représentants de façon à pouvoir supposer e vide (de façon équivalente : $\kappa_e = \kappa$).

PROPOSITION 2.1.8. *Il existe une partie finie e de E et des éléments β'_i , pour $i \in e$, relevant les b_i tels que, pour chaque composante irréductible intègre $\text{Spec}(\bar{A})$ de $\text{Spec}(A)$, les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (i) $\text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|$,
- (ii) les images des $d\beta'_i$ dans $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$, où $L = \text{Frac}(\bar{A})$, sont L -linéairement indépendantes.

L'égalité 2.1.6.1 (et donc 2.1.6.2) étant valable, pour chaque composante irréductible, dès que e est suffisamment grand, on peut choisir un tel ensemble qui convient pour chacune d'entre elles. La propriété (i) en découle.

Pour démontrer la propriété (ii), nous utiliserons le lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.1.9. Soient $\bar{A}$ et L comme ci-dessus. Pour tout idéal non nul I de $\bar{A}$, l'ensemble des $df \otimes_{\bar{A}} L$, pour $f \in I$, est une famille génératrice du L -espace vectoriel $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$.

Démonstration. Soient $f_0 \in I$ non nul, et $\omega_0 = df_0$. Pour tout $b \in \bar{A}$, $d(bf_0) = b\omega_0 + f_0 db$. La famille des $d(bf_0) \otimes 1$ contient $\omega_0 \otimes 1$; d'après la formule précédente, le L -espace vectoriel qu'elle engendre contient donc les $db \otimes 1$ pour chaque $b \in \bar{A}$. $\square$

Soit $\{p_1, \dots, p_c\}$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A . Pour chaque $j \in \{1, \dots, c\}$, posons $A_j = A/p_j$ et $X_j = \text{Spec}(A_j)$ la composante irréductible intègre de $X = \text{Spec}(A)$ correspondante. Notons pour tous $i \in e$ et $j \in \{1, \dots, c\}$, $\beta_{i,j}$ l'image dans A_j de $\beta_i \in A$. (Rappelons que les β_i font partie d'une p -base de $\kappa \subset A$.) Nous allons démontrer par récurrence sur j ($0 \leq j \leq c$) qu'il existe des éléments $\{m_{i,j}\}$ dans m_A , pour $i \in e$, tels que les images des éléments $\beta_i + m_{i,j}$ dans chacun des anneaux $A_1, \dots, A_j$ aient des différentielles linéairement indépendantes dans chacun des espaces vectoriels $\Omega_{A_1/\kappa_e}^1 \otimes_{A_1} \text{Frac } A_1, \dots, \Omega_{A_j/\kappa_e}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$. Pour $j = 0$, cette condition est vide. Supposons l'assertion démontrée pour un $j \leq c - 1$ et montrons la pour $j + 1$. Quitte à remplacer β_i par $\beta_i + m_{i,j}$, on peut supposer que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in e$. L'anneau A étant réduit, les p_α forment une décomposition primaire réduite de (0) , de sorte que l'idéal $q_j := p_1 \cap \dots \cap p_j (= \text{Ker}(A \rightarrow A_1 \times \dots \times A_j))$ n'est pas contenu dans p_{j+1} . Si $j > 0$, notons I_{j+1} son image dans $\bar{A} = A_{j+1} (= A/p_{j+1})$; c'est un idéal non nul. Si $j = 0$, on considère $m_{\bar{A}}$. D'après (i), $\text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e| \geq |e|$; d'autre part, la famille $d(I_{j+1})$ est génératrice dans $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$ (où $L = \text{Frac } \bar{A}$).

LEMME 2.1.10. Soient V un espace vectoriel de dimension au moins n , $b_1, \dots, b_n$ des vecteurs de V et W une famille génératrice. Il existe une famille $w_1, \dots, w_n$ d'éléments de $W \cup \{0\}$ tels que les $b_i + w_i$ soient linéairement indépendants.

Démonstration. Par récurrence immédiate sur n . $\square$

Il existe donc des éléments $m'_{i,j+1} \in I_{j+1}$, $i \in e$, tels que les différentielles des éléments $d((\beta_i \bmod p_{j+1}) + m'_{i,j+1})$, $i \in e$, soient linéairement indépendantes dans $\hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$.

Relevons les $m'_{i,j+1}$ en des éléments $m_{i,j+1}$ de q_j si $j > 0$, ou de m_A si $j = 0$. Par construction, ils satisfont la propriété escomptée au cran $j + 1$.

2.1.11. Considérons l'unique corps de représentants (1.1.3) $\kappa' \subset A$ contenant les β_i , pour $i \notin e$, et les β'_i , pour $i \in e$, ces derniers choisis comme en 2.1.8 et posons, comme en 2.1.5, $\kappa'_e := \kappa'^p(\beta_i, i \notin e) \subset \kappa'$. Pour chaque composante irréductible intègre $\text{Spec}(\bar{A})$ de X , on a les identifications

$$\Omega_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = \Omega_{\bar{A}}^1 / \left(\sum_{i \notin e} \bar{A} d\beta_i \right) = \Omega_{\bar{A}/\kappa'_e}^1,$$

et de même pour les modules complétés. De l'égalité 2.1.6.2 et de la propriété (ii) de 2.1.8, on tire :

$$\text{rang}_{\bar{A}} \hat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa'}^1 = d.$$

Nous notons dorénavant κ ce nouveau corps de représentants $\kappa'^{(iii)}$.

2.1.12. Le A -module $\hat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ étant de rang générique d sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment qu'il existe des éléments $f_1, \dots, f_d$ de A tels que les $d(f_i \bmod p_\alpha) \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ forment une base de $\hat{\Omega}_{A_j/\kappa}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ pour chaque composante irréductible $\text{Spec}(A_j)$ de X . Quitte à les multiplier individuellement par une puissance p -ième d'un élément appartenant à $m_A - \bigcup_j p_j$, on peut les supposer dans m_A . Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres $\tau_1, \dots, \tau_d$ dans A , de sorte que le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(k[[\tau_1, \dots, \tau_d]])$ soit fini.

Posons, pour $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$t_i := \tau_i^p (1 + f_i).$$

(iii) L'auteur remercie chaleureusement Kazuma Shimomoto [下元数馬] et Kazuhiko Kurano [藏野和彦] de lui avoir signalé une erreur dans une version précédente de ce paragraphe.

Soient A_0 le sous-anneau $\kappa[[t_1, \dots, t_d]]$ de A , $X_0 = \text{Spec}(A_0)$. Le morphisme $X \rightarrow X_0$ est fini : cela résulte du fait que les éléments $1 + f_i$ sont des unités de A . Vérifions qu'il est génériquement étale. L'anneau A étant noëthérien complet, le A -module de type fini Ω_{A/A_0}^1 est également complet et coïncide donc avec le module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}_{A/A_0}^1$. Les anneaux A_0 et A étant métrisables, et tout sous- A -module de $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ étant fermé, la suite

$$\widehat{\Omega}_{A_0/\kappa}^1 \widehat{\otimes}_{A_0} A \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/A_0}^1 = \Omega_{A/A_0}^1 \rightarrow 0$$

est exacte ([ÉGA 0_{IV} 20.7.17]). Il résulte de l'hypothèse sur les éléments f_i et de la formule

$$d(t_i) = \tau_i^p df_i$$

qu'au-dessus de chaque point maximal de $X = \text{Spec}(A)$, la première flèche est surjective. On en déduit que le A -module Ω_{A/A_0}^1 est génériquement nul, CQFD.

2.2. Le théorème de Cohen-Gabber équivariant en caractéristique > 0 .

2.2.1. Nous allons démontrer ici une généralisation du théorème 2.1.1 dans le cas d'un anneau non nécessairement équidimensionnel, muni d'une action d'un groupe fini.

THÉORÈME 2.2.2. *Soient A un anneau local noëthérien complet réduit d'égale caractéristique, dimension d , corps résiduel κ et G un groupe fini agissant sur A avec $|G|$ inversible dans κ . Alors, il existe un morphisme fini génériquement étale, G -équivariant, $\kappa[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow A$, où $\kappa \rightarrow A$ relève l'identité de κ et G agit trivialement sur les t_i .*

Commençons par une proposition.

PROPOSITION 2.2.3. *Soit A un anneau muni d'une action d'un groupe fini G d'ordre inversible sur A et soit $B = \text{Fix}_G A$ le sous-anneau des invariants.*

- (i) *L'anneau B est*
 - (a) *noëthérien si A l'est ;*
 - (b) *réduit si A l'est ;*
 - (c) *local d'idéal maximal $\mathfrak{m} \cap B$ si A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel isomorphe au sous-corps $\text{Fix}_G A/\mathfrak{m}$ de $\kappa = A/\mathfrak{m}$.*
- (ii) *Le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B) = \text{Spec}(A)/G$ est*
 - (a) *fini si A est noëthérien ;*
 - (b) *génériquement étale si A est de plus réduit.*

Démonstration. (i) Notons Tr le morphisme B -linéaire $\text{Tr} : A \rightarrow B$, $x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x)$, parfois appelé « opérateur de Reynolds ». Pour tout idéal I de B , on a $IA \cap B = I$. En effet, l'inclusion $I \subset IA \cap B$ est triviale et l'inclusion opposée résulte du fait que si $x \in IA \cap B$, sa « trace » $x = \text{Tr}(x)$ appartient, par I -linéarité, à $IB = I$. On en déduit immédiatement l'énoncé (a). L'énoncé (b) est trivial. Si A est local, on a $A - \mathfrak{m} = A^\times$. Il résulte d'une part que G stabilise globalement $\mathfrak{m}$ et d'autre part que $\text{Fix}_G A - \text{Fix}_G \mathfrak{m} = (\text{Fix}_G A)^\times$. Ainsi, B est maximal d'idéal $\mathfrak{n} = \text{Fix}_G \mathfrak{m}$. Enfin, le morphisme canonique $B/\mathfrak{n} \rightarrow \text{Fix}_G \kappa$ déduit de l'inclusion canonique $B/\mathfrak{n} \rightarrow \kappa$ est un isomorphisme. En effet, si $a \in A$ est un relèvement arbitraire de $\lambda \in \text{Fix}_G \kappa$, l'élément $b = \text{Tr}(a)$ en est un relèvement G -équivariant. Ceci achève la démonstration du (c).

(ii.a) Nous allons montrer que le morphisme entier $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ est fini par réduction au cas bien connu où A est un corps.

• Réduction au cas réduit. Soient N le nilradical de A et $M = N \cap B$ celui de B . Pour chaque entier $i \in \mathbb{N}$, le A/N -module N^i/N^{i+1} est de type fini, car A est supposé noëthérien, et nul pour $i \gg 0$. Le module $\text{gr}_N(A) = \bigoplus_{n \geq 0} N^n/N^{n+1}$ est donc de type fini sur $\text{gr}_N^0(A) = A/N$. Si ce dernier est de type fini sur $B/M = \text{gr}_M^0(B)$, il en est de même de $\text{gr}_N(A)$ sur $\text{gr}_M(B)$ et finalement ([Bourbaki, AC, III, §2, n°9, cor. 1]) de A sur B , par complétude de l'anneau noëthérien B pour la topologie M -adique.

• Réduction au cas d'un produit de corps. Supposons A réduit et considérons l'ensemble fini $\{p_i\}_{i \in I}$ des idéaux premiers minimaux de A . Pour chaque i , $q_i = p_i \cap B$ est un idéal premier minimal de B . Cela résulte du théorème de Cohen-Seidenberg ([Bourbaki, AC, V, §2, n°1, th. 1

et cor. 2]) et de la transitivité de l'action de G sur les fibres de $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ (*op. cit.*, n°2, th. 2). Soit $K = \text{Frac } A$ (resp. $L = \text{Frac } B$) l'anneau total des fractions de A (resp. B); c'est un produit de corps dans lequel A (resp. B) s'injecte, isomorphe au semi-localisé de A en les $\{p_i\}_{i \in I}$ (resp. $\{q_i\}_{i \in I}$). Soit $S = A - \bigcup_i p_i$; on a donc $K = S^{-1}A$. D'après (*op. cit.*, §1, n°1, prop. 23), on a $\text{Fix}_G(S^{-1}A) = (\text{Fix}_G S)^{-1}B$, de sorte que $\text{Fix}_G K = L$ et $A \otimes_B L \cong K$. Supposons K fini sur L — comme il sera démontré au paragraphe suivant —, de sorte qu'il existe d'après l'isomorphisme précédent un nombre fini n d'éléments $a_1, \dots, a_n$ de A qui engendrent K sur L . Pour conclure, il suffit de vérifier que l'opérateur $\text{Tr} : A \rightarrow B$ définit, par composition avec le produit, un accouplement $A \otimes_B A \rightarrow B$ qui est non-dégénéré en passant aux anneaux de fractions, c'est-à-dire que si un élément $x \in K$ vérifie $\text{Tr}(K \cdot x) = \{0\}$, alors $x = 0$. En effet, s'il en est ainsi, l'application $A \rightarrow B^n$, $a \mapsto (\text{Tr}(a_i a))$ est un plongement B -linéaire et l'on peut conclure par noëthérianité de B . Le fait que l'accouplement $K \otimes_L K \rightarrow L$ soit non-dégénéré résulte du fait que si e est un idempotent correspondant à un facteur $\text{Frac } A/p$ de K , l'élément $\text{Tr}(e)$ est égal à $\frac{|H|}{|G|}f$, où H est le stabilisateur de e , et f est l'idempotent de L correspondant au facteur $\text{Frac } B/q$, avec $q = p \cap A$.

✱ Réduction au cas d'un corps. Soit donc $A = \prod_i K_i$ un produit fini de corps et posons $X = \text{Spec}(A) = \coprod_i \eta_i$. Si $X = X_1 \amalg X_2$, où X_1 et X_2 sont G -stables, $X/G = (X_1/G) \amalg (X_2/G)$ de sorte que l'on se ramène immédiatement au cas où X/G est connexe, c'est-à-dire où l'action de G est *transitive*. Pour tout i , notons G_i le groupe de décomposition correspondant. D'après le cas classique (cas d'un corps), $\eta_i \rightarrow \eta_i/G_i$ est fini étale. Il en résulte que le morphisme $X \rightarrow \coprod \eta_i/G_i$ est fini. Enfin, puisque pour tout i , $\eta_i/G_i \xrightarrow{\sim} X/G$ (*loc. cit.*, §2, n°2, prop. 4), le résultat (ii.a) en découle.

L'énoncé (ii.b) est désormais évident. $\square$

2.2.4. Soient A et G comme dans l'énoncé du théorème 2.2.2. Il résulte de la proposition précédente que l'on a l'égalité $\dim(B) = \dim(A) < +\infty$, où l'on note $B = \text{Fix}_G A$. Nous noterons d leur dimension commune. Soit B/I le quotient maximal d'équidimensionnel de B . D'après le théorème de Cohen-Gabber 2.1.1, il existe un corps de représentants $\lambda \hookrightarrow B/I$ et un système de paramètres $t_1, \dots, t_d$ de B/I tel que $\lambda[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow B/I$ soit fini, génériquement étale. On peut relever l'inclusion $\lambda \hookrightarrow B/I$ en une inclusion $\lambda \hookrightarrow B$: cela résulte par exemple, en caractéristique résiduelle positive (seul cas non trivial), de la correspondance entre sous-corps de représentants et relèvements d'une p -base donnée du corps résiduel. Enfin, on peut relever le système de paramètres de B/I en un système de paramètres de B : cela résulte, par dévissage, du lemme suivant.

LEMME 2.2.5. Soient $A \twoheadrightarrow B$ une surjection d'anneaux locaux noëthériens et $b \in \mathfrak{m}_B$ un élément sécant pour B , c'est-à-dire tel que $\dim(B/b) = \dim(B) - 1$. Il existe un relèvement de b dans A sécant pour A .

Pour des généralités sur les suites sécantes, voir par exemple *op. cit.*, chap. VIII, §3, n°2.

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où $B = A/(f)$, $f \in A$. Soit $a \in A$ un relèvement arbitraire de b ; par hypothèse, on a $\dim(A/(f, a)) = \dim(B) - 1$. Si $\dim(B) = \dim(A) - 1$, on a nécessairement $\dim(A/a) = \dim(A) - 1$ car la dimension chute d'au plus un par équation. Dans le cas contraire, f appartient à la réunion $\bigcup_{i=1}^n p_i$, où les p_i sont les idéaux premiers de A de cohauteur $\dim(A)$. Supposons que $f \in p_1, \dots, p_r$, et seulement ces idéaux-ci. La conclusion ne peut être mise en défaut que si $a + (f) \subset \bigcup_{i=1}^n p_i$, c'est-à-dire si tous les relèvements de b sont non sécants. Pour chaque $i \leq r$, on a $a \notin p_i$ car f appartenant à p_i , on aurait $\dim(A/(f, a)) = \dim(A)$. Il en résulte notamment que $r \neq n$. Il suffit donc de montrer que l'hypothèse $a + (f) \subset \bigcup_{i=r+1}^n p_i$ est absurde. On aurait en effet $a + f^m = a + f \cdot f^{m-1} \in \bigcup_{i=r+1}^n p_i$ pour tout m et finalement $f^m(1 - f^{m-m'}) \in p_i$ pour deux entiers $m > m'$ et un indice $r+1 \leq i \leq n$. On en tire immédiatement $f \in p_i$, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

2.2.6. L'extension κ/λ étant étale, car $\lambda = \text{Fix}_G \kappa$, le morphisme $\kappa \rightarrow A/\mathfrak{m}$ se relève *uniquement* en un λ -homomorphisme $k \rightarrow A$; ce morphisme est G -équivariant. Le morphisme A/B étant fini, génériquement étale, ceci achève la démonstration du théorème 2.2.2.

3. Autour du théorème de Epp

3.1. Énoncé (rappel).

3.1.1. Si X est un schéma *réduit* n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles, nous noterons X^{nor} son normalisé ([ÉGA II 6.3.6–8]).

THÉORÈME 3.1.2 (Helmut Epp, [Epp, 1973], théorème 1.9). *Soit $T \rightarrow S$ un morphisme local dominant de traits complets, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Notons κ_S et κ_T leurs corps résiduels respectifs. Supposons κ_S parfait et le sous-corps parfait maximal de κ_T algébrique sur κ_S . Il existe une extension finie de traits $S' \rightarrow S$ telle que le produit fibré réduit normalisé*

$$T' := (T \times_S S')_{\text{red}}^{\text{nor}}$$

ait une fibre spéciale réduite au-dessus de S' .

REMARQUE 3.1.3. En caractéristique mixte, le produit fibré $T \times_S S'$ est réduit. En effet, le morphisme $T' \rightarrow S'$ (obtenu par changement de base d'un plat) est plat, et S' est intègre si bien que l'anneau des fonctions de T' s'injecte dans l'anneau des fonctions de sa fibre générique. Il suffit donc de prouver que cette dernière est réduite. Or, en caractéristique nulle, toute extension de corps est séparable. On vérifie également sans difficulté que la conclusion du théorème est encore valable si l'on suppose seulement S complet, mais pas nécessairement T (cf. *loc. cit.*, § 2).

3.2. Sorites.

3.2.1. Nous dirons qu'une extension de corps K/k d'exposant caractéristique $p \geq 1$ a la **propriété de Epp** si tout élément du sous-corps parfait maximal $K^{p^\infty} := \bigcap_{i \geq 0} K^{p^i}$ de K est algébrique séparable sur k . Pour k parfait, c'est l'hypothèse faite sur κ_T/κ_S dans 3.1.2. Dans ce court paragraphe, on rappelle quelques résultats élémentaires de stabilité pour cette notion. Commençons par un lemme.

LEMME 3.2.2. *Pour tout corps K d'exposant caractéristique $p > 1$, on a, dans une clôture séparable $K^{\text{sép}}$ de K ,*

$$(K^{p^\infty})^{\text{sép}} = (K^{\text{sép}})^{p^\infty}.$$

Démonstration. L'inclusion $(K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ est évidente : K^{p^∞} est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable $(K^{p^\infty})^{\text{sép}}$, l'est également. Comme cette dernière est contenue dans $K^{\text{sép}}$, elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait $(K^{\text{sép}})^{p^\infty}$.

Réciproquement, considérons $x \in (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$, et notons, pour chaque entier $n \geq 0$, x_n sa racine p^n -ième dans $K^{\text{sép}}$ et f_n son polynôme minimal (*unitaire*). Compte tenu d'une part de l'expression de f_n en fonction des polynômes symétriques en les conjugués galoisiens de x_n et d'autre part de l'injectivité et de l'additivité de l'élévation à la puissance p^n -ième, on a l'égalité $f_0 = f_n^{(p^n)}$, où $f_n^{(p^n)}$ est le polynôme obtenu à partir de f_n en élevant les coefficients à la puissance p^n -ième. Il en résulte que les coefficients du polynôme minimal f_0 de x appartiennent à K^{p^∞} . $\square$

PROPOSITION 3.2.3 (Voir [Epp, 1973], § 0.4). *Soit k un corps d'exposant caractéristique p .*

- (i) *Soient L/K et K/k ayant la propriété de Epp. Alors, L/k a la propriété de Epp.*
- (ii) *Toute extension finie de k a la propriété de Epp.*
- (iii) *Si $p > 1$, pour tout entier naturel d , l'extension $(\text{Frac } k[[x_1, \dots, x_d]])/k$ a la propriété de Epp.*
- (iv) *Si $p > 1$, pour toute inclusion $k \subset A$, où A est un anneau local complet noethérien intègre, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels, l'extension $(\text{Frac } A)/k$ a la propriété de Epp.*

Démonstration. Supposons immédiatement $p > 1$ sans quoi (i) et (ii) sont triviaux.

(i) Par hypothèse on a dans une clôture séparable de L l'inclusion $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sép}}$. Comme le corps L^{p^∞} est *parfait*, on en déduit que $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset K^{\text{sép}}$, où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle K/k . Si elle est de hauteur $\leq r$, on a $K^{p^r} \subset k$ et en particulier $K^{p^\infty} \subset k \subset K^{\text{sép}}$.

(iii) Soit $A = k[[x_1, \dots, x_d]]$ et K son corps des fractions. Montrons que $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$. Comme K est contenu dans $k((x_1, \dots, x_{d-1}))((x_d))$, on se ramène par récurrence au cas où $d = 1$. Tout élément non nul de $k((t))^{p^\infty}$ a une valuation infiniment p -divisible donc nulle, de sorte que $k((t))^{p^\infty} - \{0\}$ est contenu dans $k[[t]]^\times$ et finalement dans k^{p^∞} par un calcul immédiat. (iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen. $\square$

4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte

4.1. Anneaux de Cohen et lissité formelle (rappels).

4.1.1. Pour la commodité du lecteur, nous énonçons quelques résultats, principalement dus à Cohen. Pour les démonstrations, nous renvoyons à [Bourbaki, AC, IX, § 2] et [ÉGA 0_{IV} § 19].

DÉFINITION 4.1.2 ([ÉGA 0_{IV} 19.3.1]). Soit A un anneau topologique^(iv). Une A -algèbre topologique B est dite **formellement lisse** si pour toute A -algèbre topologique discrète C , et tout idéal nilpotent I de C , tout A -morphisme continu $u : B \rightarrow C/I$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{\varphi} C/I$, où v est un A -morphisme continu et φ l'homomorphisme canonique.

On dit aussi que $A \rightarrow B$ est un **morphisme formellement lisse**. La proposition suivante énonce une propriété de relèvement un peu plus générale que celle de la définition.

PROPOSITION 4.1.3 (loc. cit., 19.6.1). Soient A un anneau topologique, et B un A -algèbre formellement lisse. Soient C une A -algèbre topologique, I un idéal de C vérifiant les conditions suivantes :

- (i) C est métrisable et complet ;
- (ii) I est fermé et la suite $(I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro.

Alors, tout A -morphisme continu $u : B \rightarrow C/I$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/I$, où v est un A -morphisme continu.

Les deux théorèmes suivants donnent deux critères importants de lissité formelle.

THÉORÈME 4.1.4 (loc. cit., 19.6.1). Une extension de corps munis de la topologie discrète est formellement lisse si et seulement si l'extension est séparable.

THÉORÈME 4.1.5 (loc. cit., 19.7.1). Soient A, B deux anneaux locaux noëthériens, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ leurs idéaux maximaux respectifs et $k = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de A . Munissons A et B respectivement des topologies $\mathfrak{m}$ -adique et $\mathfrak{n}$ -adique. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme local, et posons $B_0 = B \otimes_A k$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) B est une A -algèbre formellement lisse ;
- (ii) B est un A -module plat, et B_0 munie de la topologie quotient est une k -algèbre formellement lisse.

Le théorème suivant, joint au précédent, est à la base de la démonstration de l'existence des anneaux de Cohen définis ci-après.

Dans les énoncés qui suivent, les anneaux locaux sont munis de la topologie de l'idéal maximal.

THÉORÈME 4.1.6 (loc. cit., 19.7.2). Soient A un anneau local noëthérien, I un idéal strict, $A_0 = A/I$, B_0 un anneau local noëthérien complet, $A_0 \rightarrow B_0$ un morphisme local formellement lisse. Il existe alors un anneau local noëthérien complet B , un morphisme local $A \rightarrow B$ faisant de B un A -module plat, et un A_0 -isomorphisme $u : B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$.

DÉFINITION 4.1.7 (loc. cit., 19.8.4 et 5). On appelle **anneau de Cohen** un anneau qui est soit un corps de caractéristique nulle, soit un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel de caractéristique $p > 0$ et d'idéal maximal engendré par p .

THÉORÈME 4.1.8 (Cohen, loc. cit., 19.8.6 et 21.5.3).

^(iv) Ici, et ci-dessous, on suit la convention [ÉGA 0_{IV} 19.0.3] : les anneaux sont supposés linéairement topologisés.

- (i) Soient W un anneau de Cohen de corps résiduel K , C un anneau local noëthérien complet, et I un idéal strict de C . Alors, tout morphisme local $u : W \rightarrow C/I$ se factorise en $W \xrightarrow{v} C \rightarrow C/I$, où v est local. De plus, la factorisation est unique si et seulement si $\Omega_K^1 = 0$ ou $I = 0$.
- (ii) Soit K un corps. Il existe un anneau de Cohen W de corps résiduel isomorphe à K . Si W' est un second anneau de Cohen, de corps résiduel K' , tout isomorphisme $u : K \xrightarrow{\sim} K'$ provient par passage au quotient d'un isomorphisme $v : W \xrightarrow{\sim} W'$.

4.1.9. Rappelons que l'hypothèse $\Omega_K^1 = 0$ est équivalente au fait que K est *parfait* s'il est de caractéristique > 0 ou bien est une extension algébrique de $\mathbf{Q}$ s'il est de caractéristique nulle.

Signalons que si K est *parfait* de caractéristique $p > 0$, le morphisme v de (ii) est *unique*. Dans ce cas, W est d'ailleurs isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt sur K .

4.2. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte.

4.2.1. Soit A un anneau local noëthérien complet de caractéristique résiduelle $p > 0$. Le schéma $X = \text{Spec}(A)$ est de manière unique un $\text{Spec}(\mathbf{Z}_p)$ -schéma. Notons X_p le sous-schéma fermé de X , fibre au-dessus du point fermé de $\text{Spec}(\mathbf{Z}_p)$. Nous dirons qu'un ouvert $U \subset X$ est **p-dense** si $U \cap X_p$ est dense dans X_p .

THÉORÈME 4.2.2. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma local noëthérien complet normal de corps résiduel k , de dimension $d \geq 2$ et de point générique de caractéristique nulle. Il existe un morphisme fini surjectif $X' \rightarrow X$, où X' est normal intègre de corps résiduel k' , et un morphisme fini surjectif $X' \rightarrow \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$, où V est un anneau de valuation discrète de corps résiduel k' , étale au-dessus d'un ouvert p -dense du but.

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème précédent.

4.2.3. Soit X comme dans l'énoncé. Considérons le sous-corps parfait maximal $k_0 = k^{p^\infty}$ du corps résiduel k de $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et notons $W_0 = W(k_0)$ l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte du théorème de Cohen qu'il existe un unique morphisme $X \rightarrow S_0 = \text{Spec}(W_0)$ qui étende le morphisme $\text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(k_0)$ entre les points fermés (4.1.8, (i)).

Pour tout point maximal $\mathfrak{p}$ de la fibre spéciale X_p de ce morphisme, l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{p}}$ a pour corps résiduel $\text{Frac } A/\mathfrak{p}$, où l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est local noëthérien complet intègre de corps résiduel k . D'après 3.2.3 (i) & (iv), l'extension $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$ a la propriété de Epp. De tels idéaux $\mathfrak{p}$ étant en nombre fini et la conclusion du théorème de Epp (3.1.2, 3.1.3) étant stable par changement de base fini car c'est un résultat de lissité formelle, il existe donc un changement de base fini $S'_0 = \text{Spec}(W'_0) \rightarrow S_0$ tel que la fibre spéciale du produit fibré normalisé $X'_0 := (X \times_{S_0} S'_0)^{\text{nor}} = \text{Spec}(A'_0)$ soit réduite en ses points maximaux. (On utilise le fait que les points maximaux de la fibre spéciale de $X'_0 \rightarrow S'_0$ se trouvent au-dessus des points maximaux de la fibre spéciale de $X \rightarrow S_0$; cf. p. ex. [ÉGA 0_{IV} 16.1.6].)

D'après le lemme suivant, la fibre spéciale du morphisme $X'_0 \rightarrow S'_0$ est alors réduite.

LEMME 4.2.4. Soit X un schéma noëthérien normal. Tout diviseur de Cartier effectif génériquement réduit est réduit.

Démonstration. On peut supposer X affine et le diviseur de Cartier effectif défini par une fonction $f \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Soient $a \in A$ et $n \geq 1$ tels que $a^n \in (f)$; on souhaite montrer que $a \in (f)$. L'anneau $A/(f)$ étant génériquement réduit, l'élément a/f de $\text{Frac } A$ appartient à $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 contenant f . Il en est évidemment de même pour $f \notin \mathfrak{p}$. L'anneau A étant normal, $\bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = A$ où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux de hauteur 1 (voir [Bourbaki, AC, VII, §1, n°6, th. 4]) de sorte que $a/f \in A$. CQFD. $\square$

4.2.5. Notons k'_0 le corps résiduel de W'_0 , ω' une uniformisante de W'_0 , et considérons une composante connexe $X' = \text{Spec}(A')$ de X'_0 ; c'est un schéma fini surjectif au-dessus de X . Soit k' son corps résiduel. L'inclusion $k'_0 \hookrightarrow k'$ déduite du morphisme $X' \rightarrow S'_0$ est formellement lisse, car k'_0 est parfait, donc se relève d'après 4.1.5 et 4.1.6 en un morphisme *formellement lisse* $W'_0 \rightarrow V$ où V est un anneau local complet noëthérien. Cet anneau est un anneau de valuation discrète. L'anneau A'/ω' étant *réduit*, équidimensionnel de dimension $d - 1$, de corps résiduel k' , il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (2.1.1), un relèvement k'_0 -linéaire $k' \hookrightarrow A'/\omega'$ et des éléments

$x_1, \dots, x_{d-1}$ dans l'idéal maximal de A'/ω' tels que le morphisme induit $k'[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A'/\omega'$, envoyant l'indéterminée t_i sur x_i , soit fini, *génériquement étale* en haut et en bas.

Par lissité formelle de $W'_0 \rightarrow V$, le morphisme composé $V \rightarrow k' \rightarrow A'/\omega'$ se relève en un W'_0 -morphisme $V \rightarrow A'$. En relevant les x_i dans A' , nous obtenons un morphisme $V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A'$, fini injectif (cf. p. ex. [ÉGA 0_{IV} 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale. CQFD.

4.3. Le théorème de Cohen-Gabber premier à ℓ en caractéristique mixte.

THÉORÈME 4.3.1. *Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma local noëthérien complet normal de dimension $d \geq 2$, de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de point générique de caractéristique nulle. Soit ℓ un nombre premier différent de p . Il existe alors :*

- (i) *un schéma local noëthérien intègre normal Y muni d'une action d'un ℓ -groupe fini H et un morphisme fini surjectif H -équivariant $Y \rightarrow X$ tel que le quotient Y/H soit de degré (générique) premier à ℓ sur X ;*
- (ii) *un anneau de valuation discrète complet V de même corps résiduel k' que Y , de caractéristique mixte, muni d'une action de H compatible avec son action sur k' ;*
- (iii) *un morphisme local $Y \rightarrow Y' = \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ qui soit fini, étale au-dessus d'un ouvert p -dense de Y' , et H -équivariant avec action triviale de H sur les t_i .*

Ces morphismes sont représentés dans le diagramme ci-dessous, où toutes les flèches sont des morphismes finis surjectifs.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] = Y' & \xleftarrow{\text{p-génériquement étale}} & Y & \xrightarrow{\quad} & Y/H \\ & & \downarrow & \nearrow \text{degré premier à } \ell & \\ & & X & & \end{array}$$

REMARQUE 4.3.2. Observons que les conditions (i) — (iii) sur les morphismes $Y \rightarrow X$ et $Y \rightarrow Y'$ n'entraînent pas que le schéma Y/H soit étale au-dessus d'un ouvert p -dense de $\text{Spec}(\text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-1}]]) = Y'/H$. Voici un exemple, dû à Takeshi Saitô. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt sur k , ℓ un nombre premier différent de p , $A = W[[x, y]]/(x^\ell y - p)$. Soient $W' = W[\pi]/(\pi^\ell - p)$ et B le normalisé de $A \otimes_W W'$, W' -isomorphe à $W'[[x, z]]/(xz - \pi)$. Le groupe $H = \mu_\ell(k)$ agit sur B , via son action sur W' : $\zeta \cdot x = x$ et $\zeta \cdot z = \zeta z$. Le morphisme $Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ défini par $x \mapsto x$ et $y \mapsto z^\ell$ satisfait les propriétés du théorème car $Y/H \xrightarrow{\sim} X$ et $Y \rightarrow Y' = \text{Spec}(W'[[t]])$, $t \mapsto x + z^\ell$, est p -génériquement étale. Cependant, Y/H a une fibre spéciale isomorphe au schéma non réduit $\text{Spec}(k[[x, y]]/(x^\ell \cdot y))$. Elle n'est donc pas étale au-dessus d'un ouvert dense de la fibre spéciale de Y' .

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème précédent. Notons que si la fibre spéciale X_p de X sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ est réduite, ce théorème — comme le précédent — résulte simplement du théorème 2.2.2, dans le cas particulier où le groupe G est trivial : on peut prendre $Y = X$ et H trivial.

4.3.3. Considérons à nouveau le sous-corps parfait maximal k_0 du corps résiduel k de A et $W_0 = W(k_0) \hookrightarrow A$ l'unique morphisme relevant l'inclusion $k_0 \hookrightarrow k$. Soit $W_0^\vee$ la clôture intégrale de W_0 dans A .

LEMME 4.3.4. *L'extension $W_0^\vee/W_0$ est finie, totalement ramifiée.*

Démonstration. Soit W'/W_0 une extension finie de traits, où W' est contenu dans A . Le corps résiduel de W' est une extension finie de k_0 ; c'est donc un corps parfait, contenu dans k et contenant k_0 . Il est donc égal à k_0 : l'extension est totalement ramifiée. Le degré de l'extension W'/W_0 est par conséquent égal à son indice de ramification, qui est *majoré* par l'entier N tel que p appartienne à $\mathfrak{m}_A^N - \mathfrak{m}_A^{N+1}$. Si W'' est tel que le degré de l'extension $\text{Frac}(W'')/\text{Frac}(W_0)$ soit maximal, on a nécessairement $W' \subset W''$, comme on le voit immédiatement en considérant la sous-extension composée, dans $\text{Frac}(A)$, des corps des fractions. Ainsi, $W_0^\vee = W''$ est fini sur W_0 . $\square$

4.3.5. D'après le théorème de Epp (3.1.2), il existe une extension finie d'anneaux de valuation discrète $W'_0 \rightarrow W''_0$, que l'on peut supposer génériquement galoisienne de groupe un groupe fini G , telle que la fibre spéciale sur W'_0 de la normalisation A' de $A \otimes_{W'_0} W''_0$ soit *réduite*. Observons que l'anneau W'_0 étant intégralement clos dans A , l'anneau A' est local. Notons k'_0 (resp. k'_0) le corps résiduel de W'_0 (resp. W''_0) et k' le corps résiduel de A' . Choisissons des anneaux de Cohen $I(k')$ et $I(\text{Fix}_G k')$ relatifs aux corps k' et $\text{Fix}_G k'$. Il existe un morphisme $I(\text{Fix}_G k') \rightarrow I(k')$ relevant l'inclusion. Ce morphisme étant fini étale entre anneaux locaux complets donc henséliens, l'action du quotient $\text{Gal}(k'/\text{Fix}_G k')$ de G sur k' se relève en une action $I(\text{Fix}_G k')$ -linéaire sur $I(k')$ (cf. p. ex. [Serre, 1968, III, § 5, th. 3]). Le corps k'_0 étant parfait, il existe d'après le théorème 4.1.8 un morphisme G -équivariant $W(k'_0) \rightarrow I(k')$. Soient enfin $V = W'_0 \otimes_{W(k'_0)} I(k')$, ϖ une uniformisante de W'_0 , $\overline{A'} = A'/\varpi A'$ et H un ℓ -Sylow de G . D'après le théorème 2.2.2, il existe un morphisme fini, génériquement étale, H -équivariant, $\varphi : k'[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow \overline{A'}$, où les t_i s'envoient dans $\text{Fix}_H \overline{A'}$. Le morphisme $\text{Fix}_H A' \rightarrow \text{Fix}_H \overline{A'}$ étant surjectif — comme cela se voit en utilisant la trace — on peut relever les images des t_i en des x'_i dans $\text{Fix}_H A'$. De plus, par lissité formelle de V/W'_0 (pour les topologies p -adiques), on peut relever $k' \rightarrow \overline{A'}$ en un W'_0 -morphisme $\psi : V \rightarrow A'$: cela résulte par exemple de [ÉGA 0_{IV} 19.3.10]. En procédant cran par cran, et en considérant des isobarycentres dans les espaces affines définis par le lemme bien connu suivant, on constate qu'il existe même un tel relèvement qui est H -invariant.

LEMME 4.3.6. Soient $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et $C \twoheadrightarrow C'$ une surjection de A -algèbres, de noyau $\mathcal{N}$ de carré nul. Alors, l'ensemble des relèvements A -linéaires d'un morphisme A -linéaire $B \rightarrow C'$ à C est soit vide soit un tore sous $\text{Dér}_A(B, \mathcal{N})$. Le premier cas ne se produit pas si $A \rightarrow B$ est formellement lisse.

4.3.7. Le X -schéma $Y = \text{Spec}(A')$ est bien fini p -génériquement étale sur $Y' = \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ si l'on envoie V dans A' par ψ comme ci-dessus et les variables t_i sur les x'_i . Par construction Y est, génériquement sur X , galoisien de groupe G ; son quotient Y/H est donc génériquement de degré premier à ℓ sur X . Ceci achève la démonstration du théorème.

Algébrisation partielle

Fabrice Orgogozo

1. Préparatifs (rappels)

1.1. Le théorème de préparation de Weierstraß. On trouvera dans [Bourbaki, AC, VII, §3, n°7-8] une démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 1.1.1. Soient A un anneau local séparé complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $d \geq 0$ un entier et $f \in A[[X, T]]$ une série formelle, où l'on pose $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$.

- (i) Soit ρ un entier naturel tel que f soit ρ -régulière relativement à T , c'est-à-dire congrue à $(u \in A[[T]]^\times) \cdot T^\rho$ modulo $(\mathfrak{m}, \underline{X})$. Alors, pour tout $g \in A[[X, T]]$, il existe un unique couple $(q, r) \in A[[X, T]] \times A[[X]][[T]]$ tel que $g = qf + r$ et $\deg_T(r) < \rho$. De plus, il existe un unique polynôme $P = T^\rho + \sum_{i < \rho} p_i T^i$, où les coefficients p_i appartiennent à $(\mathfrak{m}, \underline{X})A[[X]]$, et une unité $u \in A[[X, T]]^\times$ tels que $f = uP$.
- (ii) Si f est non nulle modulo $\mathfrak{m}$, il existe un entier naturel ρ et un automorphisme $A[[T]]$ -linéaire c de $A[[X, T]]$, tel que $c(X_i) = X_i + T^{N_i}$ ($N_i > 0$) et la série entière $c(f)$ soit ρ -régulière.

1.1.2. Signalons que l'on peut satisfaire la condition (ii) simultanément pour un nombre fini d'éléments : cf. *loc. cit.*, n°7, lemme 2 où l'on considérera un produit (fini) de séries formelles.

Nous ferons usage de la propriété suivante des polynômes comme en (i) ci-dessus.

LEMME 1.1.3. Soient B un anneau local complet noëthérien et $P \in B[X]$ un polynôme de la forme $X^\rho + \sum_{i < \rho} b_i X^i$, où $b_i \in \mathfrak{m}_B$ et $\rho > 0$. Alors, le complété (P) -adique de $B\{X\}$ s'identifie à $B[[X]]$.

Rappelons que $B\{X\}$ désigne l'enséclisé en l'origine de l'anneau $B[X]$. Un polynôme P comme ci-dessus est parfois dit **de Weierstraß**.

Démonstration. Soient N un entier naturel et $Q = P^N$. Il résulte de 1.1.1 (i), que l'anneau quotient $B[[X]]/(Q)$ est isomorphe comme B -module à $B[X]/(X^{\deg(Q)})$ et en particulier fini sur B . Par fidélité platitud du morphisme $B\{X\} \rightarrow B[[X]]$, on a $QB[[X]] \cap B\{X\} = QB\{X\}$ de sorte que le B -morphisme $B\{X\}/Q \rightarrow B[[X]]/Q$ est *injectif*. L'anneau $B\{X\}/Q$ est donc également fini sur l'anneau complet B ; il est donc isomorphe à son complété $B[[X]]/Q$. En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que le séparé-complété (P) -adique de $B\{X\}$ est isomorphe à celui de $B[[X]]$; ce dernier est isomorphe à $B[[X]]$ puisque $\deg(P) > 0$. $\square$

1.2. Le théorème d'algébrisation d'Elkik.

DÉFINITION 1.2.1. Une paire (C, J) , où J est un idéal d'un anneau C , est dite **hensélienne** si pour tout polynôme $f \in C[T]$, toute racine β de f dans C/J telle que $f'(\beta)$ soit une unité de C/J se relève en une racine dans C .

REMARQUES 1.2.2. La notion de *racine simple* introduite dans la définition est plus forte que celle de [Bourbaki, A, IV, §2, n°1, déf. 1] et le relèvement ci-dessus est nécessairement unique. D'autre part, la définition ci-dessus ne dépend que du fermé $F = V(J)$. En effet, si $I \subset \sqrt{J}$ et (C, J) est hensélienne, il en est de même de la paire (C, I) ; voir [Kurke et al., 1975, 2.2.1] et le lemme ci-dessous pour un cas particulier. Ceci nous autorise à dire qu'une paire (X, F) , où $X = \text{Spec}(C)$ et $F = \text{Spec}(J)$, est hensélienne lorsque la paire (C, J) l'est.

LEMME 1.2.3. Soient C un anneau local hensélien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $J \subset \mathfrak{m}$ un idéal. La paire $(\text{Spec}(C), V(J))$ est hensélienne.

En particulier, pour B et P comme dans le lemme 1.1.3, la paire $(\text{Spec}(B[X]), V(P))$ est hensélienne.

Démonstration. Soient f et β comme ci-dessus. L'anneau C étant local hensélien, l'image γ de β dans le corps résiduel $C/\mathfrak{m}$ se relève en une racine α de P . Notons β' son image dans C/J et vérifions que $\beta = \beta'$. Remarquons tout d'abord que puisque $P'(\alpha)$ est une unité de C , $P'(\beta')$ est une unité de C/J . De plus, l'égalité $P(\beta) = P(\beta') + (\beta - \beta')P'(\beta') + (\beta - \beta')^2b$ où $b \in B/J$ se réduit à $\beta - \beta' = (\beta - \beta')^2 \frac{-b}{P'(\beta')}$; si l'on pose $x = \beta - \beta'$, on a donc $x(1 - ax) = 0$ pour un $a \in C/J$. Comme x appartient à $\mathfrak{m}$ (car β et β' ont pour image γ dans $C/\mathfrak{m}$), on a $x = 0$. $\square$

1.2.4. La définition donnée ci-dessus — tirée de *op. cit.* § 2.2 et [Gabber, 1992, p. 59] — est équivalente aux définitions usuelles : une paire (X, F) est hensélienne au sens précédent si et seulement si elle satisfait la propriété de relèvement des idempotents de [ÉGA IV 18.5.5] ou encore si elle satisfait le théorème des fonctions implicites au-dessus de F (voir p. ex. [Gruson, 1972, définition]). Pour la démonstration de ces équivalences, voir par exemple [Kurke et al., 1975, 2.6.1], [Crépeaux, 1967, prop. 2] et [Raynaud, 1970, chap. XI, § 2, prop. 1].

1.2.5. Signalons que dans ces deux dernières références, il est supposé que J est contenu dans le radical de Jacobson de A ; c'est ici automatique, comme on le voit en considérant les polynômes de degré 1 adéquats (cf. [Kurke et al., 1975, 2.2.1]). Notons d'ailleurs que dans [Crépeaux, 1967] et [Raynaud, 1970], ne sont considérés que des polynômes *unitaires*. L'équivalence entre les deux points de vue peut se vérifier de la façon suivante. Soit $f = a_0 + a_1T + \dots + a_nT^n \in C[T]$ avec $a_0 \in J$ et $a_1 \in C^\times$; ce polynôme a , modulo J , a une racine simple en 0. Cherchons une racine de f dans C de la forme a_0/u , avec $u \in C^\times$. Par substitution, il suffit de montrer que l'équation $g = 0$, où $g = U^n + a_1U^{n-1} + a_2a_0U^{n-2} + \dots + a_0^{n-1}a_n$ est un polynôme *unitaire*, possède une racine inversible. Or, ce polynôme a , modulo J , la classe de $-a_1$ pour racine simple.

Terminons ces rappels par l'énoncé du théorème d'algébrisation de Renée Elkik ([Elkik, 1973, théorème 5]).

THÉORÈME 1.2.6. Soient $(X = \text{Spec}(A), F)$ une paire hensélienne avec A noethérien, et U le sous-schéma ouvert complémentaire de F dans X . Notons $X_{\widehat{F}}$ le complété de X le long de F , $\widehat{F}$ le fermé correspondant à F et $\widehat{U}$ son complémentaire dans $X_{\widehat{F}}$. Le foncteur $X' \mapsto X' \times_X X_{\widehat{F}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des X -schémas finis, étales sur U , et la catégorie des $X_{\widehat{F}}$ -schémas finis, étales sur $\widehat{U}$.

2. Algébrisation partielle en égale caractéristique

2.1. Énoncé.

2.1.1. Soient A un anneau local noethérien complet et $\{I_e\}_{e \in E}$ une collection d'idéaux de A . On dit que la paire $(A, \{I_e\}_{e \in E})$ est **partiellement algébrisable** s'il existe un anneau local noethérien complet B de dimension strictement inférieure à celle de A , une B -algèbre de type fini C , un idéal maximal $\mathfrak{n}$ au-dessus de l'idéal maximal de B , et un isomorphisme $A \simeq \widehat{C_n}$ tel que les idéaux I_e ($e \in E$) proviennent d'idéaux de C_n .

THÉORÈME 2.1.2. Soit A un anneau local noethérien complet réduit d'égale caractéristique qui ne soit pas un corps. Alors, A muni d'un ensemble fini quelconque d'idéaux est partiellement algébrisable.

2.2. Démonstration.

2.2.1. Soient $X = \text{Spec}(A)$ et $I_1, \dots, I_n \subset A$ comme dans l'énoncé. Il résulte de la définition 2.1.1 que si un idéal I de A est de la forme $J_1 \cap \dots \cap J_r$ et que les J_i sont simultanément partiellement algébrisables (c'est-à-dire : la paire $(A, \{J_i\}_{i=1, \dots, r})$ est partiellement algébrisable au sens de la définition précédente), l'idéal I l'est également. D'après le théorème de décomposition primaire des idéaux, on peut supposer les I_i *primaires*.

2.2.2. Notons k le corps résiduel de A et $d > 0$ sa dimension. D'après IV-2.1.1 si X est équidimensionnel ou bien d'après IV-2.2.2 (avec $G = \{1\}$) dans le cas général, il existe un morphisme fini génériquement étale $\pi : X \rightarrow X_0$, où $X_0 = \text{Spec}(k[[t_1, \dots, t_d]])$.

2.2.3. Soit I l'un des I_i . Deux cas se présentent.

- (i) $\dim(A/I) = d$. L'idéal I est donc un idéal premier minimal de A .
- (ii) $\dim(A/I) < d$. L'image de $V(I)$ dans X_0 est donc de dimension au plus $d - 1$ donc contenue dans un fermé $V(g_I)$ où $g_I \in A_0 = \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) - \{0\}$.

Soient $g = \prod_{I_i} g_{I_i}$ où $I_i \in \{I_1, \dots, I_n\}$ parcourt le sous-ensemble des idéaux du second type, et $f \in A_0 - \{0\}$ telle que le lieu de ramification de π soit contenu dans $V(f)$. Posons $h = gf$. D'après 1.1.1 (ii) et (i), quitte à changer de base par un automorphisme (c'est-à-dire changer les coordonnées), on peut supposer que h est un polynôme de Weierstraß en t_d . (Si h est une unité, on le remplace par t_d .) Considérons le sous-anneau $\tilde{A}_0 = k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$ de A_0 . Il est hensélien et contient h . D'après les lemmes 1.1.3 et 1.2.3, la paire $(\tilde{X}_0 = \text{Spec}(\tilde{A}_0), V(h))$ est hensélienne. On est donc en mesure d'appliquer le théorème 1.2.6 et d'en déduire qu'il existe un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & \tilde{X}_0 \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est, par hypothèse, étale hors de $V(h)$ et les flèches horizontales sont des morphismes de complétion (à la fois pour la topologie h -adique et celle définie par leurs idéaux maximaux respectifs).

Les idéaux I du premier type (c'est-à-dire premiers minimaux) se descendent à $\tilde{X}$ d'après le lemme suivant.

LEMME 2.2.4. *Soit B un anneau local hensélien quasi-excellent de complété noté $\hat{B}$. Tout idéal premier minimal de $\hat{B}$ provient par extension d'un idéal premier minimal de B .*

Démonstration. Par restriction à l'adhérence du point générique du fermé, il suffit de démontrer que le complété d'un anneau intègre hensélien quasi-excellent est intègre. Ce fait est bien connu et résulte d'ailleurs immédiatement du théorème d'approximation de Popescu, appliqué à l'équation $xy = 0$. $\square$

2.2.5. Quant aux idéaux I du second type, il suffit d'observer que chaque $V(I)$ est fini sur $\text{Spec}(k[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$, donc sur $\tilde{X} = \text{Spec}(\tilde{A})$, et d'appliquer le

LEMME 2.2.6. *Soient B un anneau local noëthérien, $J \subset \mathfrak{m}_B$ un idéal, et $\hat{B}$ le complété J -adique de B . Tout quotient de $\hat{B}$ fini sur B se descend à B .*

2.2.7. Admettons momentanément ce lemme et achevons la démonstration de 2.1.2. Comme on l'a vu, les idéaux $I_1, \dots, I_n$ proviennent d'idéaux de $\tilde{A}$. Cet anneau est fini — donc *a fortiori* de présentation finie par noëthérianité — sur l'anneau $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$. Ce dernier est l'hensélisé en l'origine de $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$; il est isomorphe à la colimite filtrante d'anneaux de type fini sur $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$ donc sur l'anneau $B = k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$. La conclusion résulte de [ÉGA IV 8.8.2] qui assure l'existence d'une B -algèbre C comme en 2.1.1 dont proviennent les idéaux I_i .

2.2.8. Revenons à la démonstration du lemme 2.2.6 ci-dessus. Soit $I \subset \hat{B}$ tel que $\hat{B}/I$ soit fini sur B . Quitte à remplacer B par $B/\text{Ker}(B \rightarrow \hat{B}/I)$, c'est-à-dire $\text{Spec}(B)$ par l'image schématique de $V(I)$, on peut supposer $B \rightarrow \hat{B}/I$ injectif, c'est-à-dire $V(I) \rightarrow \text{Spec}(B)$ schématiquement dominant. Le B -module $\hat{B}/I$ étant fini, la topologie J -adique sur $\hat{B}/I$ induit la topologie J -adique sur B . Puisque l'application $B \rightarrow \hat{B}/I$ est injective, d'image dense, et continue, il en résulte que $\hat{B}/I$ est le *séparé-complété* de B pour la topologie J -adique. On a donc $I = (0)$; il se descend tautologiquement à B .

3. Algébrisation partielle première à ℓ en caractéristique mixte

3.1. Énoncé.

THÉORÈME 3.1.1. Soient A un anneau local noëthérien complet normal de caractéristique mixte $(0, p)$ de dimension $d \geq 2$ et $\ell \neq p$ un nombre premier. Il existe un morphisme injectif fini $A \rightarrow A'$ de degré générique premier à ℓ , où A' est un anneau normal intègre dont toute famille finie d'idéaux est partiellement algébrisable.

REMARQUE 3.1.2. Signalons qu'il suffit pour démontrer XIII-1.1.1 d'établir la variante affaiblie de l'énoncé précédent selon laquelle — en reprenant les notations de 2.1.1 — tout fermé rare de $\text{Spec}(A') \simeq \text{Spec}(\widehat{C}_n)$ est ensemblistement contenu dans l'image inverse d'un diviseur de $\text{Spec}(C_n)$.

3.1.3. *Reformulation géométrique.* Soient X un schéma local noëthérien complet de caractéristique mixte, de dimension $d \geq 2$ et ℓ un nombre premier inversible sur X . Il existe schéma local normal X' et un morphisme fini $\pi : X' \rightarrow X$ de degré générique premier à ℓ tel que pour chaque famille finie $\{Z'_i\}_{i \in I}$ de fermés de X' , il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi} & X' \xrightarrow{\alpha} Y \\ & & \downarrow f \\ & & S \end{array}$$

où :

- S est un schéma noëthérien régulier complet de caractéristique mixte et de dimension $d - 1$;
- f est un morphisme de type fini ;
- α induit un isomorphisme entre X' et le complété de Y en un point fermé de la fibre spéciale de f ,

et des fermés F_i de Y tels que $Z'_i = \alpha^{-1}(F_i)$ pour tout $i \in I$.

REMARQUE 3.1.4. Il découle de 2.1.2 que le résultat précédent est également vrai en égale caractéristique, et que l'on peut alors supposer $X = X'$.

3.2. Démonstration.

3.2.1. Soient $X = \text{Spec}(A)$ de dimension $d \geq 2$ et ℓ comme dans l'énoncé. D'après le théorème IV-4.3.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] = B_0 & \longrightarrow & B & \longleftarrow & A' = \text{Fix}_H(B) \\ & & \uparrow & \nearrow & \\ & & A & & \end{array}$$

où V est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}_V$, et H est un ℓ -groupe agissant sur l'anneau normal B , son sous-anneau V , et trivialement sur les variables t_i ($1 \leq i \leq d - 1$). De plus, $A \rightarrow A'$ est une injection finie de rang générique premier à ℓ et $\pi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B_0)$ est fini, p -génériquement étale.

3.2.2. Nous allons montrer que toute famille finie d'idéaux de A' est partiellement algébrisable. Soit $I'_1, \dots, I'_n$ une telle famille, que l'on peut supposer constituée d'idéaux primaires (cf. § 2.2.1).

3.2.3. Soit I' l'un des I'_i . Deux cas se présentent.

- $\dim(A'/I' + (p)) = d - 1$. Supposons $I' \neq (0)$ et notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier, nécessairement de hauteur un, pour lequel I' est primaire. Par hypothèse, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ contient p ; c'est un idéal premier minimal de $A'/(p)$. D'autre part, A' est normal car B l'est. Il résulte par exemple de [Serre, 1965, chap. III, C, § 1] que I' est une puissance symbolique de $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire l'image inverse dans A' d'une puissance de l'idéal (principal) $\mathfrak{p}A'_p$.
- $\dim(A'/(I' + (p))) < d - 1$. L'image de $V(I')$ dans $\text{Spec}(\text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ est donc contenue dans un fermé $V(g_{I'})$ où $g_{I'} \in \text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$ est non nulle modulo $\mathfrak{m}_{\text{Fix}_H(V)}$.

Soient $g = \prod_{I'_i} g_{I'_i}$ où $I'_i \in \{I'_1, \dots, I'_n\}$ parcourt le sous-ensemble des idéaux du second type, et une équation $f \in V[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$ non nulle modulo $\mathfrak{m}_V$ telle que le lieu de ramification de π soit contenu

dans $V(f)$. On peut supposer que f n'est pas une unité. D'autre part, quitte à la multiplier par ses H -conjugués, on peut supposer que l'équation f est H -invariante. Posons $h = gf$. D'après le théorème de préparation (1.1.1), on peut supposer que h est un polynôme de Weierstraß (non inversible) en t_{d-1} , invariant sous l'action de H . (Rappelons que H agit trivialement sur les variables). Comme en §2, le morphisme $B_0 \rightarrow B$ se descend donc d'après 1.2.6 en un morphisme $\widetilde{B}_0 \rightarrow \widetilde{B}$, où $\widetilde{B}_0 = V[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$. Le groupe H préservant l'ouvert $D(h)$ de $\text{Spec}(B_0)$, son action se descend. Le diagramme ci-dessus se complète donc en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} V[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\} = \widetilde{B}_0 & \longrightarrow & \widetilde{B} & \longleftarrow & \widetilde{A}' = \text{Fix}_H(\widetilde{B}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_0 & \longrightarrow & B & \longleftarrow & A' \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de complétion et les flèches horizontales sont finies.

3.2.4. Les idéaux I' du second type se descendent de A' à $\widetilde{A}'$ car A'/I' est fini sur $\text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$ donc *a fortiori* sur $\widetilde{A}'$ (cf. 2.2.6). Quant aux idéaux du premier type (puissances symboliques), il suffit d'appliquer le lemme 2.2.4 à la paire constituée de $\widetilde{A}'/(p)$ et de son complété $A'/(p)$. Comme en §2, on utilise le fait que $\widetilde{A}'$ soit fini — de type fini suffirait — sur $\text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$ pour descendre, par passage à la limite, les idéaux à un anneau de type fini sur $\text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$.

EXPOSÉ VI

Log régularité, actions très modérées

Luc Illusie

1. Log régularité

1.1. Pour le langage des log schémas nous renvoyons le lecteur à [Kato, 1988], [Nizioł, 2006], [Gabber & Ramero, 2013]. Sauf mention du contraire, les log structures considérées le seront au sens de la topologie étale. Un log schéma **fin** (resp. fs, *i.e.* **fin et saturé**) [Kato, 1988] est un schéma muni d'une log structure admettant localement (pour la topologie étale) une carte sur un monoïde fin (resp. fin et saturé). On note en général M_X le faisceau de monoïdes d'un log schéma X , $\alpha : M_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ le morphisme structural, et $\overline{M}_X = M_X / \mathcal{O}_X^*$, $\overline{M}_X^{\text{gp}} = M_X^{\text{gp}} / \mathcal{O}_X^*$. Sauf mention du contraire, les log schémas considérés sont supposés localement noethériens.

Dans ce qui suit, X désigne un fs log schéma.

1.2. Soient $\bar{x}$ un point géométrique de X , d'image $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ le localisé strict de X en $\bar{x}$. Notons $I_{X,\bar{x}}$ (ou $I_{\bar{x}}$ s'il n'y a pas de confusion à craindre) l'idéal de $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ engendré par $\alpha(M_{X,\bar{x}} - \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^*)$, $C_{X,\bar{x}}$ le sous-schéma fermé de $X_{(\bar{x})} = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ défini par $I_{\bar{x}}$. Le fermé sous-jacent à $C_{X,\bar{x}}$ est la trace sur $X_{(\bar{x})}$ de la strate de X où le rang de $\overline{M}_X^{\text{gp}}$ est égal à $r(x) = \text{rg}(\overline{M}_{X,\bar{x}}^{\text{gp}})$.

On dit que X est **log régulier** en x (ou $\bar{x}$) si $C_{X,\bar{x}}$ est régulier et l'on a

$$(1.2.1) \quad \dim(X_{(\bar{x})}) = \dim(C_{X,\bar{x}}) + \text{rang}_Z(\overline{M}_{X,\bar{x}}^{\text{gp}}),$$

(cette condition ne dépend que de x). On dit que X est **log régulier** si X est log régulier en tout point. La définition analogue pour les log schémas zariski est due à Kato [Kato, 1994]. La variante dans le cadre étale a été traitée par Nizioł [Nizioł, 2006]. Voir aussi [Mochizuki, 1999] et [Gabber & Ramero, 2013, 9.5]. Nous rappelons ci-après quelques propriétés de cette notion.

1.3. Supposons X muni d'une carte $P_X \rightarrow M_X$, avec P fin et saturé. Alors, pour tout x , X est log régulier en x si et seulement si X , muni de la log structure Zariski $M_X^{\text{Zar}} := \varepsilon_* M_X$, où $\varepsilon : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$, est log régulier en x au sens de Kato [Kato, 1994], [Tsuji, 1997, II 4.6], [Nizioł, 2006, 2.4]. En particulier, si X est log régulier en x , X est log régulier en toute générisation y de X (la stabilité de la log régularité (Zariski) par générisation est énoncée dans [Kato, 1994, 7.1], mais, comme Gabber l'a observé, la démonstration qui est donnée est insuffisante ; voir [Gabber & Ramero, 2013, 9.5.47] pour un argument correct).

Si la log structure de X est triviale, X est log régulier si et seulement si X est régulier au sens usuel.

1.4. Supposons X log régulier. Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert de trivialité de sa log structure. Alors U est un ouvert dense de X et on a

$$M_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^*$$

([Nizioł, 2006, 2.6]).

Nous dirons qu'un couple (X, Z) formé d'un schéma X et d'un fermé Z est un couple **log régulier** si, pour la log structure sur X définie par $M_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^*$, où $j : U \hookrightarrow X$ est l'ouvert complémentaire de Z , X est log régulier et Z est le complément de l'ouvert de trivialité de sa log structure. La log structure précédente sur X sera dite **associée** au couple (X, Z) .

1.5. Supposons X log régulier. Il résulte de 1.6 ci-après (cf. [Kato, 1994, 4.1]) que le schéma sous-jacent à X est Cohen-Macaulay et normal. En particulier, en (1.2.1), on a

$$(1.5.1) \quad \text{codim}_{\bar{x}}(C_{X,\bar{x}}, X_{(\bar{x})}) = \text{rang}_{\mathbb{Z}}(\overline{M}_{X,\bar{x}}^{\text{gp}}).$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $X^{(i)}$ l'ensemble des points x de X tels que $r(x) = i$, avec la notation de 1.2. C'est une partie localement fermée, sous-jacente à un sous-schéma régulier de X , de codimension i , dont la trace sur $X_{(\bar{x})}$, en chaque point géométrique $\bar{x}$ localisé en $x \in X^{(i)}$, est $C_{X,\bar{x}}$. On dit que $X^{(i)}$ est la **strate de codimension i** définie par le rang de $\overline{M}^{\text{gp}}$. La stratification par les $X^{(i)}$ est appelée **stratification par le rang de $\overline{M}^{\text{gp}}$** , ou **stratification canonique**. Voici deux exemples.

(i) Si X est un schéma noethérien régulier, muni de la log structure définie par un diviseur à croisements normaux D , $X^{(i)}$ est l'ensemble des points où passent exactement i branches de D , *i.e.* tels que le normalisé de D ait i points au-dessus de x .

(ii) Si X est une variété torique sur un corps k , de tore T , munie de sa log structure canonique, X est un log schéma log régulier, l'ouvert de trivialité de la log structure est T , et $X^{(i)}$ est la réunion des orbites de T de codimension i .

1.6. Supposons X log régulier en x , image du point géométrique $\bar{x}$, soient $P = \overline{M}_{X,\bar{x}}$, $k = k(\bar{x})$. Notons que P est un monoïde fs **saillant** (*i.e.* tel que $P^* = 0$). Soit $\widehat{X}_{\bar{x}}$ le complété de $X_{(\bar{x})}$ au point fermé. Alors, d'après [Kato, 1994, 3.2], X admet une carte modelée sur P en $\bar{x}$, qui donne lieu à des isomorphismes

(i)

$$\widehat{X}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } k[[P]][[t_1, \dots, t_n]]$$

si $\mathcal{O}_{X,x}$ est d'égale caractéristique,

(ii)

$$\widehat{X}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } C(k)[[P]][[t_1, \dots, t_n]]/(f)$$

si $\mathcal{O}_{X,x}$ est d'inégale caractéristique $(0, p)$, où $C(k)$ est un anneau de Cohen pour k , et f est congru à p modulo l'idéal engendré par $P - \{0\}$ et les t_i .

1.7. Supposons X log régulier. Alors X est régulier en x , image de $\bar{x}$, si et seulement si $\overline{M}_{\bar{x}} \simeq \mathbb{N}^r$ ([Nizioł, 2006, 5.2], voir aussi [Vidal, 2001b, 1.8]). Il en résulte que l'ensemble des points de régularité de X coïncide avec l'ensemble des points de régularité du monoïde $\overline{M}_{\bar{x}}$, et en particulier est ouvert dans X ([Nizioł, 2006, 5.3]). Si X est log régulier et régulier, l'ouvert de trivialité de la log structure est alors le complément d'un diviseur à croisements normaux.

1.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de log schémas fs. Si Y est log régulier et f log lisse, X est log régulier.

L'analogue pour les log structures Zariski est [Kato, 1994, 8.2]. La démonstration de *loc. cit.* s'applique, *mutatis mutandis*, dans le cadre étale.

Le corollaire suivant jouera un rôle clé dans l'application des résultats de de Jong à la démonstration du théorème d'uniformisation de Gabber. Un énoncé similaire est donné dans [Mochizuki, 1999, 4.2]. Rappelons que, si S est un schéma, une **courbe nodale** $f : C \rightarrow S$ est un morphisme plat, localement de présentation finie, purement de dimension relative 1, dont les fibres géométriques ont pour seules singularités des croisements normaux⁽ⁱ⁾.

PROPOSITION 1.9. *Soit (Y, T) un couple log régulier (1.4). Soit $f : X \rightarrow Y$ une courbe nodale, lisse au-dessus de $Y - T$. Soit D un diviseur effectif sur X , de support contenu dans le lieu de lissité de f , et étale sur Y . Alors le couple $(X, f^{-1}(T) \cup D)$ est log régulier, et pour les log structures associées, f est un morphisme de log schémas et est log lisse.*

⁽ⁱ⁾On impose souvent aux fibres géométriques d'être connexes. Cette condition supplémentaire est inutile pour l'énoncé qui suit.

La question est locale pour la topologie étale sur X et l'assertion est triviale sur l'ouvert de lissité de f et sur $f^{-1}(Y - T)$. On peut donc supposer $D = \emptyset$. D'après [SGA7 xv 1.3.2] (voir aussi [de Jong, 1996, 2.23]), on peut supposer que Y est affine, $Y = \text{Spec } R$, et que X est défini par

$$(1.9.1) \quad X = \text{Spec } R[u, v]/(uv - h),$$

où h est une section de $\mathcal{O}_Y$ inversible sur $Y - T$. On peut supposer de plus qu'on dispose d'une carte $c : P \rightarrow M_Y$ avec $h = \varepsilon c(a)$, pour $\varepsilon \in R^*$ et $a \in P$. Soit Q le monoïde fs défini par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & Q \\ \uparrow & & \uparrow g \\ \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \times P \end{array},$$

où la flèche $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}^2$ (resp. $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z} \times P$) est donnée par $1 \mapsto (1, 1)$ (resp. $1 \mapsto (1, a)$). Le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } R[u, v]/(uv - h) & \xrightarrow{d} & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow & & \downarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[g] \\ \text{Spec } R & \xrightarrow{c'} & \text{Spec } \mathbf{Z}[\mathbf{Z} \times P] \end{array},$$

où la flèche c' est donnée par c et $\mathbf{Z} \rightarrow R$, $1 \mapsto \varepsilon$, et d par $(1, 0) \mapsto u$, $(0, 1) \mapsto v$ sur $\mathbf{N}^2$ et c' sur $\mathbf{Z} \times P$, est cartésien. Alors d définit une log structure sur X dont l'ouvert de trivialité est $f^{-1}(Y - T)$, et (c', d, g) est une carte de f . Comme g est injectif et $\text{Coker } g^{\text{gp}} \simeq \mathbf{Z}$, f est log lisse. Comme Y est log régulier, X est donc log régulier, et comme l'ouvert de trivialité de la log structure de X est $f^{-1}(Y - T)$, le couple $(X, f^{-1}(T))$ est log régulier.

2. Revêtements Kummer étales

Dans cette section et la suivante, nous aurons à considérer des actions de groupes sur des schémas ou des log schémas : sauf mention du contraire, il s'agira d'actions à droite.

2.1. Rappelons quelques définitions (cf. [Illusie, 2002, 3], [Stix, 2002, 3.1], [Vidal, 2001a]). Un homomorphisme $h : P \rightarrow Q$ de monoïdes intègres est dit **de Kummer** si h est injectif et, pour tout $q \in Q$, il existe $n \geq 1$ et $p \in P$ tels que $nq = h(p)$. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de fs log schémas est **de Kummer** si, pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X d'image $\bar{y} = f(\bar{x})$ dans Y , l'homomorphisme induit $\overline{M}_{\bar{y}} \rightarrow \overline{M}_{\bar{x}}$ est de Kummer. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est **Kummer étale** si f est de Kummer et log étale. On dit que f est un **revêtement Kummer étale** si f est de Kummer étale et le morphisme de schémas sous-jacent est fini.

Le **site Kummer étale** d'un fs log schéma X est la catégorie des fs log schémas de Kummer étales au-dessus de X munie de la topologie définie par les familles surjectives de X -morphisms (lesquels sont automatiquement de Kummer étale). Pour X connexe non vide, les revêtements Kummer étales de X forment une catégorie galoisienne, équivalente à la catégorie des représentations d'un groupe profini, le *groupe fondamental logarithmique* de X , $\pi_1^{\log}(X, x)$, où x est un *point géométrique logarithmique* de X , cf. *loc. cit.*

2.2. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de log schémas fs qui est déduit par changement de base par un morphisme strict $g : Y \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$ d'un morphisme $\text{Spec } \mathbf{Z}[h] : \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$, où $h : P \rightarrow Q$ est un homomorphisme de Kummer entre monoïdes fs tels que le conoyau de h^{gp} soit annulé par un entier n inversible sur Y , est un revêtement Kummer étale. On dit qu'un tel revêtement est un **revêtement Kummer étale standard**.

Un revêtement Kummer étale standard $f : X \rightarrow Y$ comme ci-dessus est **galoisien** dans le sens suivant : le groupe diagonalisable (étale) $G = \text{Hom}(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}}, \mathbf{G}_{mY})$ opère sur X par automorphismes de Y -log schémas, et le morphisme canonique

$$(2.2.1) \quad X \times_Y G \rightarrow X \times_Y X, (x, g) \mapsto (x, xg),$$

où le produit au second membre est pris dans la catégorie des fs log schémas, est un isomorphisme ; le log schéma Y est un quotient faisceautique de X par G dans la catégorie des faisceaux sur le site Kummer étale de Y , et en tant que schéma, un quotient géométrique au sens usuel de X par G : on a

$$(2.2.2) \quad \mathcal{O}_Y = (f_* \mathcal{O}_X)^G ; \quad M_Y = (f_* M_X)^G.$$

De plus, le morphisme f est fini, ouvert et surjectif, et le reste après tout changement de base fs $Y' \rightarrow Y$. Ces assertions sont un cas particulier de théorèmes de descente de Kato [Kato, 1991, 3.1, 3.4.1, 3.5]. Pour le fait que 2.2.1 soit un isomorphisme, voir [Illusie, 2002, 3.2]. Pour la première formule de 2.2.2, voir [Kato, 1991, 3.4.1] (et [Illusie et al., 2013, 2.1] pour le fait, utilisé dans la démonstration de [Kato, 1991, 3.4.1], que $\mathbf{Z}[P]$ est facteur direct de $\mathbf{Z}[Q]$ comme $\mathbf{Z}[P]$ -module). On pourrait aussi invoquer la structure des représentations des groupes diagonalisables et le fait que $Q \cap P^{\text{gp}} = P$. La vérification de la seconde formule est plus délicate. Nous en donnons une démonstration directe dans 2.4.

Tout morphisme de Kummer étale est, localement pour la topologie étale, isomorphe à un revêtement Kummer étale standard (cf. [Stix, 2002, 3.1.4]). Plus précisément, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de Kummer étale surjectif, avec X (resp. Y) strictement local de point fermé x (resp. y), on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[h] \\ Y & \xrightarrow{b} & \text{Spec } \mathbf{Z}[P] \end{array},$$

où a (resp. b) est une carte de X (resp. Y), et $h : P \rightarrow Q$ un morphisme de Kummer tel que $\text{Coker } h^{\text{gp}}$ soit annulé par un entier n inversible sur Y . Alors f est un revêtement Kummer étale galoisien de groupe $G = \text{Hom}(\text{Coker } h^{\text{gp}}, \mu_n(k(y)))$.

2.3. Dans ce cas, l'action de G sur X se décrit simplement. Plus généralement, considérons un revêtement Kummer étale standard $f : X \rightarrow Y$, donné par un carré cartésien de schémas

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & \text{Spec } \Lambda[Q] \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Spec } \Lambda[h] \\ Y & \xrightarrow{b} & \text{Spec } \Lambda[P] \end{array}$$

où $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$, $\mu_n = \mu_n(\mathbf{C})$ (n entier ≥ 1), $h : P \rightarrow Q$ est un morphisme de Kummer tel que $\text{Coker } h^{\text{gp}}$ soit annulé par n , et l'on munit X et Y des log structures définies par les flèches horizontales. Soit $C = \text{Coker } h^{\text{gp}}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow P^{\text{gp}} \rightarrow Q^{\text{gp}} \rightarrow C \rightarrow 0$$

donne, par application du dual de Cartier $D = \text{Hom}(-, \mathbf{G}_m)$, une suite exacte de groupes diagonalisables sur $\text{Spec } \Lambda$,

$$0 \rightarrow G \rightarrow T_Q \rightarrow T_P \rightarrow 0,$$

où $G = D(C)$. Posons $Z_P = \text{Spec } \Lambda[P]$, $Z_Q = \text{Spec } \Lambda[Q]$. L'accouplement canonique

$$(2.3.2) \quad T_P \otimes P^{\text{gp}} \rightarrow \mathbf{G}_m$$

définit une famille de caractères

$$(\chi_p : T_P \rightarrow \mathbf{G}_m)_{p \in P^{\text{gp}}},$$

qui détermine l'action de T_P sur Z_P par

$$(2.3.3) \quad g \cdot p = \chi_p(g)p,$$

pour un point g de T_P (à valeurs dans un schéma S), et un point p de Z_P à valeurs dans S . L'action de T_Q sur Z_Q est décrite de façon similaire, et la carte $a : X \rightarrow Z_Q$ est équivariante relativement aux actions de G et T_Q sur X et Z_Q respectivement : pour $g \in G$ et $q \in Q$,

$$(2.3.4) \quad g \cdot a^*(q) = \chi_q(g)a^*(q),$$

où $\alpha^*(q)$ est la section de M_X image inverse de q par α .

2.4. Dédoublons de cette description la seconde formule de (2.2.2). L'argument qui suit est dû à Gabber. On doit vérifier que $M_Y \rightarrow (f_* M_X)^G$ induit un isomorphisme sur les fibres en tout point géométrique de Y , donc on peut supposer Y strictement local de point fermé y . Dans la suite, nous omettrons parfois $h : P \rightarrow Q$ de la notation, et noterons encore a (resp. b) l'homomorphisme $Q \rightarrow \mathcal{O}(X)$ (resp. $P \rightarrow \mathcal{O}(Y)$) déduit de a (resp. b). Quitte à remplacer P par son localisé $P_{(p)}$ en l'idéal premier p complémentaire de la face $b^{-1}(\mathcal{O}_{Y,y}^*)$, et Q par $Q \oplus_P P_{(p)}$, on peut supposer que $P^* = b^{-1}(\mathcal{O}_{Y,y}^*)$. Et, pour $q \in Q$, q est inversible si et seulement si $\alpha(q)$ l'est sur un point au-dessus de y (car si tel est le cas, et $n \geq 1$ est tel que $q^n \in P$, on a $\alpha(q^n) = b(q^n) \in \mathcal{O}_{Y,y}^*$ et $q^n \in P^*$). Si x est un point de X au-dessus de y , donc (l'extension $k(x)/k(y)$ étant séparable, donc triviale) correspondant à un relèvement à Q de $P \rightarrow k(y)$, il en résulte, par la formule (2.3.4) (appliquée à l'action de T_Q sur X), que $g \in G$ fixe ce point si et seulement si g est orthogonal à $Q^*/P^* \subset Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}}$ pour l'accouplement $G \otimes Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n$ déduit de (2.3.2). L'homomorphisme $P \rightarrow Q$ se factorise canoniquement en

$$P \hookrightarrow P' \hookrightarrow Q,$$

où $P' := Q^* \oplus_{P^*} P$. Cette factorisation définit une factorisation de f en

$$X \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} Y,$$

où v est un revêtement fini étale usuel, galoisien de groupe H égal au dual de Cartier de Q^*/P^* , et strict en tant que morphisme de log schémas. En particulier, $\mathcal{O}_Y^* \rightarrow (v_* \mathcal{O}_{Y'}^*)^H$ et $M_Y \rightarrow (v_* M_{Y'})^H$ sont des isomorphismes. Remplaçant Y par Y' puis par son localisé strict en un point au-dessus de y , on peut donc supposer que $P^* = Q^*$. Il découle de la remarque faite plus haut que X a alors un unique point x au-dessus de y , donc est strictement local, et que le groupe d'inertie en x est G tout entier. Considérons le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes, où les flèches verticales sont les flèches canoniques évidentes :

$$(2.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y,y}^* & \longrightarrow & M_{Y,y}^{\text{gp}} & \longrightarrow & \overline{M}_{Y,y}^{\text{gp}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{X,x}^*)^G & \longrightarrow & (M_{X,x}^{\text{gp}})^G & \longrightarrow & (\overline{M}_{X,x}^{\text{gp}})^G \xrightarrow{d} H^1(G, \mathcal{O}_{X,x}^*) \end{array},$$

où d est l'opérateur bord de la suite exacte de cohomologie de G relative à la suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^* \rightarrow M_{X,x}^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_{X,x}^{\text{gp}} \rightarrow 0.$$

D'après la première formule de (2.2.2), la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. D'après (2.3.4), G opère trivialement sur $\overline{M}_{X,x}^{\text{gp}}$, donc $(\overline{M}_{X,x}^{\text{gp}})^G = \overline{M}_{X,x}^{\text{gp}}$. Un calcul qui sera fait en 3.5 montre que la flèche naturelle $H^1(G, \mathcal{O}_{X,x}^*) \rightarrow H^1(G, k(x)^*) = \text{Hom}(G, \mu_n)$ est un isomorphisme, et que, via ces identifications, l'opérateur bord

$$d : \overline{M}_{X,x}^{\text{gp}} (= Q^{\text{gp}}/P^*) \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_n)$$

est déduit de l'accouplement canonique $G \otimes Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n$ (cf. (2.3.2)), qui est un accouplement parfait. Le noyau de d est donc $P^{\text{gp}}/P^* = \overline{M}_{Y,y}^{\text{gp}}$. Il s'ensuit que i induit un isomorphisme sur le noyau de d , et donc que la flèche verticale médiane de (2.4.1) est un isomorphisme. Comme $\overline{M}_{Y,y} = \overline{M}_{Y,y}^{\text{gp}} \cap \overline{M}_{X,x} \subset M_{X,x}^{\text{gp}}$ (f étant de Kummer), si $a \in (M_{X,x})^G$, il existe $b \in M_{Y,y}$ et $u \in \mathcal{O}_{X,x}^*$ tels que $a = ub$, donc $u \in (\mathcal{O}_{X,x}^*)^G = \mathcal{O}_{Y,y}^*$, et $a \in M_{Y,y}$, et la flèche $M_{Y,y} \rightarrow (f_* M_{X,x})^G$ est elle aussi un isomorphisme.

PROPOSITION 2.5. *Considérons un revêtement Kummer étale standard (2.3.1). Pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X d'image $\bar{y}$ dans Y , le morphisme $G_{\bar{x}}$ -équivariant*

$$(2.5.1) \quad C_{X,\bar{x}} \rightarrow C_{Y,\bar{y}},$$

où $G_{\bar{x}}$ est le sous-groupe d'inertie en $\bar{x}$, est un isomorphisme. En particulier, $G_{\bar{x}}$ opère trivialement sur $C_{X,\bar{x}}$.

Procédant comme en 2.4, on peut supposer X (resp. Y) strictement local de point fermé x (resp. y), avec $P^* = b^{-1}(\mathcal{O}_{Y,y}^*)$, (resp. $Q^* = a^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$), et $P^* \xrightarrow{\sim} Q^*$. Il en résulte que la flèche composée

$$\mathbf{Z}[P^*] \rightarrow \mathbf{Z}[P] \rightarrow \mathbf{Z}[P]/b^{-1}(\mathcal{O}_{Y,y} - \mathcal{O}_{Y,y}^*)$$

(resp.

$$\mathbf{Z}[Q^*] \rightarrow \mathbf{Z}[Q] \rightarrow \mathbf{Z}[Q]/a^{-1}(\mathcal{O}_{X,x} - \mathcal{O}_{X,x}^*))$$

est un isomorphisme, et que par suite la flèche

$$\varphi : \mathbf{Z}[P]/b^{-1}(\mathcal{O}_{Y,y} - \mathcal{O}_{Y,y}^*) \rightarrow \mathbf{Z}[Q]/a^{-1}(\mathcal{O}_{X,x} - \mathcal{O}_{X,x}^*)$$

est un isomorphisme. Comme la flèche $\mathcal{O}_{Y,y}/I_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}/I_{X,x}$ est donnée par $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \varphi$, la projection $C_{X,x} \rightarrow C_{Y,y}$ (2.5.1) est donc un isomorphisme.

3. Actions très modérées

3.1. Soit X un log schéma fs, muni d'une action d'un groupe fini G . On se propose de dégager des conditions suffisantes sur l'action de G pour que, lorsque X est log régulier, le quotient de X par G existe comme log schéma et soit log régulier.

On dit que G **opère modérément sur X en un point géométrique $\bar{x}$** de X localisé en x , si le stabilisateur $G_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ (**groupe d'inertie en x**) est d'ordre premier à la caractéristique de $k(x)$. On dit que G **opère modérément sur X** si G opère modérément en $\bar{x}$ pour tout $\bar{x}$. Ces définitions ne font pas intervenir la log structure de X .

La définition et les résultats qui suivent sont dus à Gabber. On dit que G **opère très modérément sur X en $\bar{x}$** si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) G opère modérément en $\bar{x}$;
- (ii) G opère trivialement sur $\overline{M}_{X,\bar{x}}$;
- (iii) $G_{\bar{x}}$ opère trivialement sur la strate $C_{X,\bar{x}}$ (1.2).

On dit que G **opère très modérément sur X** si G opère très modérément sur X en tout point géométrique.

Dans la situation de (2.3.1), il découle de (2.3.4) et de 2.5 que, pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X , $G_{\bar{x}}$ opère trivialement sur $\overline{M}_{\bar{x}}$ et sur la strate $C_{X,\bar{x}}$. Donc G opère très modérément sur X . On va voir qu'en un sens convenable, toute action très modérée génériquement libre sur un log schéma log régulier est localement de ce type. Plus précisément, le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 3.2. *Soit X un log schéma fs log régulier, muni d'une action d'un groupe fini G . On suppose que G opère de façon admissible sur le schéma sous-jacent à X , librement sur un ouvert dense, et très modérément. Soit $Y = X/G$ le schéma quotient, $f : X \rightarrow Y$ la projection. Alors :*

- (i) Y est localement noethérien et le morphisme f est fini ;
- (ii) l'homomorphisme $f_*\alpha : (f_*M_X)^G \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Y$ est une log structure fs sur Y , qui fait de Y un log schéma log régulier, et $f : X \rightarrow Y$ est un revêtement Kummer étale de groupe G . En outre, en tout point géométrique $\bar{x}$ de X , le groupe d'inertie $G_{\bar{x}}$ est abélien.

Rappelons ([SGA1 v 1]) que dire que G opère de façon admissible sur un schéma (non nécessairement localement noethérien) X signifie que X est réunion d'ouverts affines stables par G , de sorte que le quotient X/G existe comme schéma.

3.3. La preuve de 3.2 sera donnée en 3.6. Nous établirons d'abord un résultat plus précis que 3.2, à savoir 3.4, de nature locale sur X . Nous aurons besoin pour cela de la notion suivante. Soient n un entier ≥ 1 , G un groupe fini, et Q un monoïde fs. Supposons donné un homomorphisme

$$\chi : G^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n := \mu_n(\mathbf{C}), \quad g \otimes q \mapsto \chi(g, q).$$

Pour $g \in G$ et $q \in Q$, on écrira encore, par abus, $\chi(g, q)$ (ou $\chi_q(g)$) pour $\chi(\bar{g}, q)$, où $\bar{g}$ est l'image de g dans G^{ab} . Soit $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$. On déduit de χ une action de G sur le log schéma $\text{Spec } \Lambda[Q]$, caractérisée par

$$g \cdot q = \chi_q(g)q$$

pour $g \in G, q \in Q$.

Soit X un log schéma fs muni d'une action de G . Par une **carte G -équivariante de X modelée sur (X, Q)** , on entend un morphisme strict, G -équivariant

$$c : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q].$$

Un tel morphisme est donné par un homomorphisme

$$c^* : Q \rightarrow \Gamma(X, M_X)$$

tel que, pour tout $q \in Q$ et tout $g \in G$, on ait $g^*(c^*(q)) = \chi(g, q)c^*(q)$, où g^* désigne l'endomorphisme de $\Gamma(X, M_X)$ défini par g .

PROPOSITION 3.4. *Soit X un fs log schéma, muni d'une action d'un groupe fini G , et soit $\bar{x}$ un point géométrique de X localisé en x . On note $H = G_{\bar{x}}$ le groupe d'inertie en x .*

(a) *On suppose que les conditions (i) et (ii) de 3.1 sont vérifiées en $\bar{x}$. Soit n l'ordre de H . Il existe un voisinage étale affine H -équivariant U de $\bar{x}$ et une carte H -équivariante de U modelée sur (X, Q) , où $Q = \overline{M}_{\bar{x}}$ et $\chi : H^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n$.*

(b) *On suppose de plus que G agit très modérément en $\bar{x}$, i.e. que H agit trivialement sur la strate $C_{X, \bar{x}}$. Alors, il existe un voisinage affine étale H -équivariant U de $\bar{x}$ tel que le schéma quotient $V = U/H$, muni de la log structure $(\pi_* M_U)^H \rightarrow (\pi_* \mathcal{O}_U)^H = \mathcal{O}_V$, où $\pi : U \rightarrow V$ est la projection, soit un fs log schéma, et qu'on ait une V -immersion fermée stricte équivariante, et d'idéal nilpotent, $i : U \hookrightarrow U'$, où $\pi' : U' \rightarrow V$ est un revêtement Kummer étale standard de V .*

(c) *Si, sous les hypothèses de (b), X est supposé en outre log régulier en x , alors il existe $\pi : U \rightarrow V$ comme en (b) tel que π soit un revêtement Kummer étale standard de V , et V est log régulier en $y = \pi(x)$. Si de plus H opère librement sur un ouvert dense de U , H est abélien, et égal au groupe du revêtement π .*

3.5. Preuve de 3.4.

(a) Observons d'abord que les voisinages affines étales H -stables de $\bar{x}$ forment une famille cofinale de voisinages étales de $\bar{x}$. En effet, soit U_1 un voisinage étale, affine, de $\bar{x}$. Soit $U_2 = \prod_{h \in H} U_1 h$, où $\prod$ désigne un produit fibré sur X . Le schéma U_2 est un voisinage étale quasi-affine H -stable de $\bar{x}$. Si U_3 est un voisinage ouvert affine de l'image x de $\bar{x}$ dans U_2 , $U_4 = \bigcap_{h \in H} U_3 h$ est un voisinage affine étale, H -stable, de $\bar{x}$, au-dessus de U . Comme $k(\bar{x})$ contient μ_n , on peut supposer, quitte à remplacer X par un voisinage étale H -stable convenable de $\bar{x}$, que X est au-dessus de $\text{Spec } \Lambda$, où $\Lambda = \mathbb{Z}[\mu_n][1/n]$, avec action triviale de H sur Λ .

Considérons la suite exacte de groupes abéliens

$$(3.5.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^* \rightarrow M_{X, \bar{x}}^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_{X, \bar{x}}^{\text{gp}} \rightarrow 0.$$

Elle est H -équivariante, et si $Q = \overline{M}_{\bar{x}}$, Q^{gp} est de type fini sans torsion. Choisissons un scindage $s : Q^{\text{gp}} \rightarrow M_{X, \bar{x}}^{\text{gp}}$ de (3.5.1) (comme suite exacte de groupes). Comme H agit trivialement sur Q^{gp} , on a, pour $q \in Q^{\text{gp}}$ et $g \in H$

$$(3.5.2) \quad g.s(q) = z(g, q)s(q)$$

avec $z(g, q) \in \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*$. Pour g_1, g_2 dans H , on a

$$z(g_1 g_2, q) = (g_1 z(g_2, q)).z(g_2, q),$$

en d'autres termes, $g \mapsto (q \mapsto z(g, q))$ est un 1-cocycle

$$z \in Z^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*)).$$

L'image $[z]$ de z dans $H^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*))$ est la classe de cohomologie de (3.5.1). Dans le carré commutatif de flèches canoniques

$$\begin{array}{ccc} Z^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*)) & \longrightarrow & Z^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, k(\bar{x})^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*)) & \longrightarrow & H^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, k(\bar{x})^*)) \end{array}$$

la flèche verticale de droite est (trivialement) un isomorphisme. D'autre part, la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme, car $(1 + m_{\chi, \bar{x}})^*$ est n -divisible. L'image de z dans $Z^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, k(\bar{x})^*))$ est un homomorphisme

$$\chi : H \rightarrow \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mu_n), g \mapsto (q \mapsto \chi(g, q)).$$

Cet homomorphisme se relève en un élément de $Z^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{\chi, \bar{x}}^*))$, noté encore χ , qui a même classe de cohomologie que z dans $H^1(H, \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{\chi, \bar{x}}^*))$. Il existe donc $u \in \text{Hom}(Q^{\text{gp}}, \mathcal{O}_{\chi, \bar{x}}^*)$ tel que $z(g, q)/\chi(g, q) = gu(q)/u(q)$. Alors $g \cdot (u(q)^{-1}s(q)) = \chi(g, q)u(q)^{-1}s(q)$. Donc quitte à remplacer s par $(q \mapsto u(q)^{-1}s(q))$, on peut supposer que $z = \chi$, autrement dit z est défini par un homomorphisme (noté encore χ)

$$(3.5.3) \quad \chi : H^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n, (h, q) \mapsto \chi(h, q),$$

i.e. $z(h, q) = \chi(h, q)$ pour tout $h \in H$ et tout $q \in Q$ (avec la notation de 3.3). D'après [Kato, 1988, 2.10], l'homomorphisme $Q \rightarrow M_{\chi, \bar{x}}$ induit par s se prolonge en une carte $\alpha : U \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$ (correspondant à un homomorphisme $\alpha^* : Q \rightarrow \Gamma(U, M_U)$) d'un voisinage étale U de $\bar{x}$. D'après ce qu'on a vu plus haut, on peut supposer U H -stable. D'après (3.5.2), l'homomorphisme $s : Q \rightarrow M_{\chi, \bar{x}}$ est H -équivalent, i.e. pour $q \in Q$ et $h \in H$, on a (dans $M_{\chi, \bar{x}}$)

$$h^* \alpha^*(q)_{\bar{x}} = \chi(h, q) \alpha^*(q)_{\bar{x}}.$$

Pour h et q fixé, on a donc $h^* \alpha^*(q) = \chi(h, q) \alpha^*(q)$ sur un voisinage étale H -stable de $\bar{x}$ au-dessus de U , donc *a fortiori* sur un voisinage ouvert H -stable U' de l'image x de $\bar{x}$ dans U . Comme H est fini et Q de type fini, il existe un voisinage ouvert affine H -stable U'' de x contenu dans U' tel que l'identité précédente soit satisfaite au-dessus de U'' . Donc, quitte à remplacer U par un voisinage ouvert affine H -stable plus petit, α est une carte H -équivalente de U modelée sur (χ, Q) .

(b) Compte tenu de (a), on peut supposer qu'on dispose d'un voisinage affine étale, H -stable, U de $\bar{x}$, et d'une carte H -équivalente

$$\alpha : U \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$$

modelée sur (χ, Q) . Comme $n = |H|$ est inversible en x , quitte à rétrécir U , on peut supposer de plus que n est inversible sur U . Comme U est affine, le quotient $V = U/H$ existe et est affine. De plus, d'après IV-2.2.3, V est noethérien, et $f : U \rightarrow V$ est fini. Soit P' le sous-groupe de Q^{gp} défini par

$$P' = \{q \in Q^{\text{gp}} \mid \chi(h, q) = 1 \text{ pour tout } h \in H\}.$$

En d'autres termes, P' est défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow P' \rightarrow Q^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(H^{\text{ab}}, \mu_n),$$

où la seconde flèche est $q \mapsto (h \mapsto \chi(h, q))$. Il est donc d'indice fini dans Q^{gp} , premier à la caractéristique de $k(\bar{x})$, et l'inclusion $Q^{\text{gp}}/P' \hookrightarrow D(H^{\text{ab}})$ (où $D = \text{Hom}(-, \mu_n)$) définit par dualité un épimorphisme

$$(3.5.4) \quad H^{\text{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\text{gp}}/P').$$

Soit

$$P = P' \cap Q.$$

C'est un sous-monoïde fs de Q , tel que $P^{\text{gp}} = P'$, et $P \rightarrow Q$ est de Kummer. Le morphisme $\alpha : U \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$ de (a) (où $\Lambda = \mathbb{Z}[\mu_n][1/n]$) est équivariant relativement à l'épimorphisme $H \twoheadrightarrow H^{\text{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\text{gp}}/P')$, donc définit, par passage au quotient, un morphisme $b : V \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$ donnant lieu à un carré commutatif

$$(3.5.5) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & \text{Spec } \Lambda[Q] \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{b} & \text{Spec } \Lambda[P] \end{array}$$

d'où un triangle commutatif

$$(3.5.6) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & U' \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\ V & & \end{array}$$

où $U' = V \times_{\text{Spec } \Lambda[P]} \text{Spec } \Lambda[Q]$. Si l'on munit V de la log structure (fs) définie par b , π est un morphisme de log schémas, et (3.5.5) en est une carte. Le triangle (3.5.6) est un triangle de log schémas. De plus, π' est un revêtement Kummer étale standard de groupe $D(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}})$, et i est équivariant relativement à l'épimorphisme $H \rightarrow H^{\text{ab}} \rightarrow D(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}})$ (3.5.4). Comme H agit trivialement sur la strate $C_{X, \bar{x}} = C_{U, \bar{x}} = \text{Spec } \mathcal{O}_{U, \bar{x}}/I_{\bar{x}}$, et que H est d'ordre premier à la caractéristique de $k(\bar{x})$, l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{V, \bar{y}} (= \mathcal{O}_{U, \bar{x}}^H) \rightarrow \mathcal{O}_{U, \bar{x}}/I_{\bar{x}} (= (\mathcal{O}_{U, \bar{x}}/I_{\bar{x}})^H)$$

est surjectif, où $\bar{y} = f(\bar{x})$, donc il en est de même de l'homomorphisme

$$k(\bar{y})[Q] = k(\bar{x})[Q] \rightarrow \mathcal{O}_{U, \bar{x}}/\mathfrak{m}_{V, \bar{y}} \mathcal{O}_{U, \bar{x}}.$$

Par Nakayama, il en résulte que le morphisme i de (3.5.6) induit une immersion fermée en $\bar{x}$, *i.e.* sur les localisés stricts en $\bar{x}$. Quitte à induire (3.5.6) sur un voisinage affine étale convenable de $\bar{y}$ au-dessus de V , on peut donc supposer que i est une immersion fermée. Comme H opère transitivement sur les fibres de π , donc, compte tenu de (3.5.4), également sur celles de π' , au-dessus de tout point de V , ces fibres coïncident, et donc U et U' ont mêmes espaces sous-jacents. L'immersion fermée i est donc définie par un idéal nilpotent I de $\mathcal{O}_{U'}$, et est stricte pour les log structures envisagées. Considérons les homomorphismes

$$(3.5.7) \quad M_V \rightarrow (\pi'_* M_{U'})^H \rightarrow (\pi_* M_U)^H$$

définis par (3.5.6). Comme $H \rightarrow D(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}})$ est surjectif, il résulte de (2.4) que la première flèche de (3.5.7) est un isomorphisme. Montrons qu'il en est de même de la seconde. Comme l'immersion i est stricte, on a un diagramme commutatif équivariant, à lignes exactes,

$$(3.5.8) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (1+I)^* & \longrightarrow & M_{U'} & \longrightarrow & M_U \longrightarrow 0 \\ & & \text{Id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (1+I)^* & \longrightarrow & M_{U'}^{\text{gp}} & \longrightarrow & M_U^{\text{gp}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $(1+I)^* = \text{Ker } \mathcal{O}_{U'}^* \rightarrow \mathcal{O}_U^*$. Plus précisément, $M_{U'}$ est un $(1+I)^*$ -torseur sur M_U induit par le $(1+I)^*$ -torseur $M_{U'}^{\text{gp}}$ sur M_U^{gp} , en particulier, le carré de droite est cartésien. On en déduit un diagramme commutatif où le carré est cartésien et la ligne du bas est exacte :

$$(3.5.9) \quad \begin{array}{ccccc} (\pi'_* M_{U'})^H & \longrightarrow & (\pi_* M_U)^H & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\pi'_*(1+I)^*)^H & \longrightarrow & (\pi'_* M_{U'}^{\text{gp}})^H \longrightarrow (\pi_* M_U^{\text{gp}})^H \end{array}$$

Comme π' est fini, en tout point géométrique $\bar{z}$ de V , on a $H^q(H, \pi'_*(1+I)_{\bar{z}}^*) = \prod_{\bar{t} \in U_{\bar{z}}} H^q(H, (1+I)_{\bar{t}}^*)$, et comme les fibres de $(1+I)^*$ sont n -divisibles, on a $H^q(H, \pi'_*(1+I)^*) = 0$ pour tout $q > 0$. Par ailleurs, $(\pi'_*(1+I)^*)^H = 0$ (puisque $(\pi_* \mathcal{O}_U)^H = (\pi'_* \mathcal{O}_{U'})^H$ et donc $(\pi'_* I)^H = 0$). La flèche $(\pi'_* M_{U'}^{\text{gp}})^H \rightarrow (\pi_* M_U^{\text{gp}})^H$ de (3.5.9) est donc un isomorphisme, et le carré de droite étant cartésien, il en est de même de la flèche $(\pi'_* M_{U'})^H \rightarrow (\pi_* M_U)^H$, comme annoncé, ce qui achève la démonstration de (b).

(c) Dans ce cas, avec les notations de la démonstration de (b), la strate $C_{U, \bar{x}}$ est régulière, et se projette isomorphiquement sur $C_{V, \bar{y}}$. Comme $\text{rg}(\overline{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}}) = \text{rg}(\overline{M}_{\bar{y}}^{\text{gp}}) = \text{codim}(C_{V, \bar{y}}, V_{(\bar{y})})$, V est log régulier en $y = \pi(x)$, donc en toute généralisation de y (cf. 1.3), donc $V_{(\bar{y})}$ est log régulier. Comme π' est log étale, $U' \times_V V_{(\bar{y})}$ est donc log régulier, en particulier, réduit, et l'immersion i induit un isomorphisme au-dessus de $V_{(\bar{y})}$, et donc déjà au-dessus de $V_{(y)} = \text{Spec } \mathcal{O}_{V, y}$. Quitte à remplacer V par un voisinage

ouvert convenable de y , i est donc un isomorphisme, et $\pi : U \rightarrow V$ est un revêtement Kummer étale (de groupe $D(P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})$, quotient de H). Enfin, si H opère librement sur un ouvert dense, prenant un point géométrique t de V tel que H opère librement sur la fibre $V_{\pi(t)}$, on a $t.H = t.D(P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})$, donc $H = D(P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})$.

3.6. Preuve de 3.2.

Les assertions de 3.2 découlent du corollaire suivant de 3.4 :

COROLLAIRE 3.7. *On se place sous les hypothèses de (3.4 (c)), i.e. X est log régulier en x , l'action de G sur X est très modérée en $\bar{x}$. On suppose de plus que l'action de G sur X est admissible, et libre sur un ouvert dense. On note $f : X \rightarrow Y = X/G$ la projection, et x (resp. y) l'image de $\bar{x}$ (resp. $\bar{y} = f(\bar{x})$) dans X (resp. Y). Alors $G_{\bar{x}}$ est abélien, et il existe un voisinage ouvert affine V de y dans Y tel que :*

(i) *le schéma V soit noethérien, et, muni de la log structure $f_*\alpha : (f_*M_X)^G|_V \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)^G|_V = \mathcal{O}_V$, soit un log schéma fs , log régulier en y ;*

(ii) *$f_V : X \times_Y V \rightarrow V$ soit un revêtement Kummer étale de V de groupe G .*

Preuve de 3.7. La question est locale sur Y au voisinage de $\bar{y}$. Quitte à remplacer Y par un voisinage étale Y' de $\bar{y}$, et X par $X \times_Y Y'$, on peut supposer que x est un point rationnel de X_y , de stabilisateur H , de sorte que X_y s'identifie à $H \backslash G$ par $x \mapsto xg$. Le morphisme $f : X \rightarrow Y$ étant entier, donc fermé, quitte à remplacer Y par un voisinage de y , on peut trouver un voisinage ouvert et fermé U de x , stable par H , dont les translatés par un système de représentants de $H \backslash G$ dans G sont deux à deux disjoints, de sorte que X s'identifie au produit contracté $U \wedge^H G$. Alors $U/H \rightarrow X/G$ est un isomorphisme, et en particulier, d'après IV-2.2.3, Y est noethérien, et $f : X \rightarrow Y$ est fini. Par l'argument précédent, on se ramène au cas où $G = H$, $X_y = \{x\}$. Comme f est fini, les voisinages étales de $\bar{x}$ images inverses par f de voisinages étales de $\bar{y}$ forment un système cofinal de voisinages étales de $\bar{x}$, et ceux-ci sont H -stables. De plus, pour tout voisinage étale H -stable Z de $\bar{x}$ il existe un voisinage étale V de $\bar{y}$ et un morphisme $h : Z' \rightarrow Z$ entre voisinages de $\bar{x}$, où $Z' = f^{-1}(V)$, et, quitte à rétrécir V , on peut imposer à h d'être H -équivariant. La démonstration de (3.4 (c)) montre qu'on peut choisir U de *loc. cit.* de cette forme, i.e. $U = f^{-1}(V)$, de sorte que $f = \pi : U \rightarrow V = U/H$ est un revêtement Kummer étale standard de V de groupe H , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 3.8. *Sous les hypothèses de 3.4 (b), le sous-groupe $\text{Ker}(G_{\bar{x}} \rightarrow \text{Hom}(\overline{M}_{X,\bar{x}}, k(\bar{x})))$ agit trivialement sur le log schéma X dans un voisinage ouvert $G_{\bar{x}}$ -stable de x .*

En effet, avec les notations de 3.5 (b), on a

$$H = G_{\bar{x}} \twoheadrightarrow H^{\text{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}}) = \text{Hom}(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}}, k(\bar{x})) \hookrightarrow \text{Hom}(\overline{M}_{X,\bar{x}}, k(\bar{x})),$$

donc 3.4 (b) implique qu'il existe un voisinage étale H -stable $u : U \rightarrow X$ de $\bar{x}$ tel que $\text{Ker } H \rightarrow \text{Hom}(\overline{M}_{X,\bar{x}}, k(\bar{x}))$ opère trivialement sur le log schéma U , et donc *a fortiori* sur le voisinage ouvert (H -stable) $u(U)$ de x .

Signalons également la conséquence suivante de 3.4 (b) :

COROLLAIRE 3.9. *Plaçons-nous sous les hypothèses de 3.4 (b), et supposons X séparé. Alors G agit très modérément sur X dans un voisinage ouvert G -stable de x .*

Considérons le voisinage étale H -stable $u : U \rightarrow X$ de $\bar{x}$ construit dans 3.5 (b). Comme on l'a observé en 3.1, H agit très modérément sur U' , donc sur U , et *a fortiori* sur $u(U)$. Admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME 3.10. *Quitte à remplacer U par un voisinage ouvert H -stable de l'image x' de $\bar{x}$ plus petit, on peut supposer que la propriété suivante est satisfaite :*

(*) *pour tout point géométrique $\bar{z}$ de U , l'homomorphisme $H_{\bar{z}} \rightarrow G_{u(\bar{z})}$ est un isomorphisme.*

Supposons que U possède la propriété (*). Alors, comme H opère très modérément sur $u(U)$, G opère très modérément sur $u(U).G$. Il reste donc à prouver 3.10. La propriété (*) équivaut à la conjonction de

(i) $u^{-1}(X^g) = \emptyset$ pour $g \in G - H$,

(ii) $u^{-1}(X^g) = U^g$ pour $g \in H$,

où $(-)^g$ désigne un schéma des points fixes de g . Comme X est séparé, X^g est un sous-schéma fermé de X . Si g n'est pas dans H , X^g ne contient pas x , donc, quitte à ôter de U la réunion des $u^{-1}(X^g)$ pour $g \in G - H$, la condition (i) est réalisée. Pour $g \in H$, U^g est défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U^g & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ u^{-1}(X^g) & \xrightarrow{(1,g)} & U \times_X U \end{array},$$

où Δ est la diagonale. Comme Δ est ouverte et fermée, U^g est ouvert et fermé dans $u^{-1}(X^g)$. Mais U^g et $u^{-1}(X^g)$ sont des sous-schémas fermés de U contenant x' . Ils coïncident donc dans un voisinage ouvert de x' . Donc quitte à remplacer U par un voisinage ouvert H -stable de x' plus petit, on peut réaliser la condition (ii) pour tout $g \in H$.

4. Points fixes

4.1. Soit X un schéma noethérien sur lequel opère un groupe fini G . Pour chaque sous-groupe H de G , on note X^H le schéma des points fixes de H . C'est un sous-schéma de X , fermé si X est séparé, représentant le foncteur $S \mapsto X(S)^H$, intersection des graphes des translations $h : X \rightarrow X$, $x \mapsto xh$ pour $h \in H$. Supposons X séparé. En chaque point géométrique $\bar{x}$ de X^H d'image x , le sous-groupe d'inertie $G_{\bar{x}}$ de G contient H , et est égal à H si et seulement si x appartient au sous-schéma (localement fermé)

$$X_H = X^H - \bigcup_{H' \supset H, H' \neq H} X^{H'}.$$

Pour $g \in G$, on a

$$(X^H)g = X^{g^{-1}Hg},$$

et de même

$$(X_H)g = X_{g^{-1}Hg}$$

de sorte que la réunion X^C (resp. X_C) des X^H (resp. X_H) pour H dans une classe de conjugaison C de sous-groupes de G est G -stable. Les X_C , pour C parcourant les classes de conjugaison de sous-groupes de G , forment une stratification de X par des sous- G -schémas, avec la propriété que pour tout point géométrique $\bar{x}$ localisé en X_C , le groupe d'inertie $G_{\bar{x}}$ appartient à C . Nous appellerons cette stratification la **stratification par l'inertie**.

Le but de ce numéro est de donner des exemples d'actions très modérées de groupes finis G sur des log schémas log réguliers et réguliers X , où un raffinement de la stratification par l'inertie est déduite de la stratification canonique d'un diviseur à croisements normaux G -stable.

Le résultat suivant est classique, nous en donnons une démonstration, faute de référence.

PROPOSITION 4.2. *Soit X un schéma noethérien régulier sur lequel opère un groupe fini G de façon modérée 3.1. Alors le schéma des points fixes X^G est régulier.*

Si y est un point d'un schéma Y , notons $Y_{(y)} = \text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y}$. Supposons $X^G \neq \emptyset$. Soit x un point de X^G . Il s'agit de montrer que $(X^G)_{(x)}$ est régulier. Le groupe G est le groupe d'inertie en x : il fixe x et $k(x)$. Il existe un voisinage ouvert affine de x stable par G : si U est un voisinage ouvert affine de x , l'intersection V des Ug pour $g \in G$ est un voisinage ouvert quasi-affine de x stable par G , et si W est un voisinage ouvert affine de x contenu dans V , l'intersection des Vg est un voisinage ouvert affine de x stable par G . Donc G opère sur $X_{(x)}$, trivialement sur $k(x)$, et, si $A = \mathcal{O}_{X,x}$, on a

$$(X^G)_{(x)} = (X_{(x)})^G = \text{Spec } A_G,$$

où A_G est l'algèbre des co-invariants de G dans A , i.e.

$$A_G = A/I,$$

où I l'idéal engendré par les $ga - a$, pour g dans G et a dans A . On est donc ramené à supposer $X = X_{(x)}$. Si $Y = X/G = \text{Spec } A^G$, G opère par Y -automorphismes de X . Comme G est d'ordre inversible

en x , d'après IV-2.2.3, X est fini sur Y , et Y est local, noethérien, de point fermé y , avec pour corps résiduel $k(y) = k(x)^G = k(x)$. Les morphismes $X^G \hookrightarrow X \rightarrow Y$ correspondent aux homomorphismes locaux $A^G \hookrightarrow A \rightarrow A_G$, qui induisent des isomorphismes sur les corps résiduels. Comme $\widehat{X}^G = \text{Spec } \widehat{A}/I\widehat{A} = (\widehat{X})^G$, on peut supposer X local et complet. Il en est alors de même de Y . En effet, comme il est observé dans la démonstration de IV-2.2.3, pour tout idéal J de B , on a $JA \cap B = J$. En particulier, si m_A (resp. m_B) désigne l'idéal maximal de A (resp. B), on a $m_B^n A \cap B = m_B^n$, donc $\widehat{B} = \varprojlim B/m_B^n \rightarrow \varprojlim A/m_B^n A = A$ est injectif, d'image contenue dans $A^G = B$, donc $B = \widehat{B}$. On notera $k = k(x) = k(y)$, et $m_A = m$.

On va démontrer la proposition en *linéarisant* l'action de G .

Supposons d'abord que A soit d'égale caractéristique. Choisissons une base $t = (t_i)_{1 \leq i \leq r}$ sur k de l'espace cotangent $T = m/m^2$ et des éléments x_i dans m relevant les t_i . Comme B est local noethérien complet, choisissons en outre un corps de représentants, noté encore k , de k dans B . Notons

$$\varphi : k[[T]] \rightarrow A$$

l'homomorphisme envoyant t_i sur x_i . L'homomorphisme

$$f : k[[T]] \rightarrow A$$

envoyant t sur le système

$$y = \frac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} g \varphi g^{-1} t$$

est G -équivariant. En outre, y est congru à x modulo m^2 , donc est un système régulier de paramètres de A , et donc f est un isomorphisme. Par suite f induit un isomorphisme

$$k[[T]]_G = k[[T_G]] \rightarrow A_G,$$

où T_G est l'espace des co-invariants de G sur T , ce qui démontre 4.2 dans ce cas.

Supposons maintenant que A soit de caractéristique mixte $(0, p)$. Soit C un anneau de Cohen pour B , de corps résiduel k , de sorte que B est quotient d'un anneau de séries formelles sur C . Comme G est d'ordre premier à p , il existe un (essentiellement) unique $C[G]$ -module V , libre de type fini sur C , relevant T . Soit $t = (t_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de T , $v = (v_i)$ une base de V relevant t . Comme plus haut, choisissons des relèvements x_i dans m des t_i , qui forment donc une suite régulière de paramètres dans A . Prolongeons l'homomorphisme $C \rightarrow A$ en

$$\varphi : C[[V]] \rightarrow A$$

en envoyant v_i sur x_i . L'homomorphisme

$$f : C[[V]] \rightarrow A$$

envoyant $v = (v_i)$ sur

$$y = \frac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} g \varphi g^{-1} v$$

est G -équivariant, et y est congru à x modulo m^2 , donc est un système régulier de paramètres de A . L'homomorphisme f est donc surjectif, et son noyau est défini par un élément F congru à p modulo l'idéal engendré par les v_i . Ainsi X est un diviseur régulier G -équivariant dans $X' = \text{Spec } C[[V]]$, d'équation $F = 0$. Observons que le module des coinvariants V_G est libre sur C . En effet, comme l'ordre de G est inversible dans C , V est projectif de type fini sur $C[G]$, et donc, si I_G est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$, $V_G = V/I_G V = V \otimes_{C[G]} C$ est projectif de type fini, donc libre de type fini, sur C (il en est de même d'ailleurs de V^G et l'homomorphisme composé $V^G \hookrightarrow V \rightarrow V_G$ est un isomorphisme). L'image de F dans $C[[V_G]]$ est un paramètre régulier, donc, comme $X'^G = \text{Spec } C[[V_G]]$, $X^G = X \times_{X'} X'^G$ est régulier, ce qui achève la démonstration de 4.2.

COROLLAIRE 4.3. *Soit X un schéma noethérien séparé, régulier, muni d'une action modérée d'un groupe fini G . Alors la stratification de X par l'inertie est formée de schémas réguliers.*

REMARQUE 4.4. Pour référence ultérieure, notons le résultat complémentaire suivant : sous les hypothèses de 4.2, pour tout $x \in X^G$, l'homomorphisme canonique

$$(4.4.1) \quad T_x(X^G) \rightarrow T_x(X)^G$$

est un isomorphisme, où pour un schéma localement noethérien Y on note $T_y(Y)$ l'espace tangent de Zariski en un point y de Y ($= \text{Hom}_{k(y)}(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2, k(y))$). Plus généralement, comme l'observe Gabber, (4.4.1) est un isomorphisme pour un schéma local noethérien $X = \text{Spec } A$, de point fermé x , muni d'une action d'un groupe fini G tel que l'homomorphisme $A^G \rightarrow A/\mathfrak{m} = k(x)$ soit surjectif. En effet, dans ce cas, si I est l'idéal de A engendré par les $ga - a$ pour $g \in G$ et $a \in A$, de sorte que $X^G = \text{Spec } A_G$, où $A_G = A/I$, I est aussi l'idéal de A engendré par les $ga - a$ pour $g \in G$ et $a \in \mathfrak{m}$, autrement dit, $I = I_G \mathfrak{m}$. Notant $T_x^*(-)$ un espace cotangent, dual (à valeurs dans $k(x)$) de $T_x(-)$, l'homomorphisme

$$\text{Hom}(T_x(X)^G, k(x)) = T_x^*(X)_G \rightarrow T_x^*(X^G)$$

s'identifie à l'homomorphisme

$$(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)_G = \mathfrak{m}/(I_G \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^2) \rightarrow \mathfrak{m}/(I + \mathfrak{m}^2)$$

qui est un isomorphisme, puisque $I = I_G \mathfrak{m}$.

4.5. Sous les hypothèses de 4.3, soit Y un diviseur à croisements normaux strict G -stable, réunion de composantes irréductibles Y_i , $1 \leq i \leq m$. On munit X de la log structure définie par Y . Rappelons (cf. [de Jong, 1996, 7.1]) qu'on dit que Y est G -strict si la condition suivante est réalisée : pour tout i et pour tout $g \in G$, si $Y_i g \cap Y_i \neq \emptyset$, alors $Y_i g = Y_i$. Si Y est G -strict, alors la condition (ii) de 3.1 est vérifiée en chaque point géométrique $\bar{x}$ de X . En effet, si $(D_i)_{1 \leq i \leq r}$ est l'ensemble des branches de Y passant par $\bar{x}$, alors $D_i g = D_i$ pour tout i . Comme $\bar{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z} e_i$, e_i correspondant à D_i , le groupe d'inertie $G_{\bar{x}}$ opère trivialement sur $\bar{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}}$. Rappelons également ([de Jong, 1996, 7.2]) qu'il existe une modification G -équivariante canonique $f : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que $f^{-1}(Y)_{\text{red}}$ soit G -strict.

COROLLAIRE 4.6. Supposons que Y soit G -strict, que G opère de façon modérée, admissible et génériquement libre, et que la stratification de X par les composantes irréductibles des strates de la stratification canonique (1.5) soit plus fine que la stratification par l'inertie (4.1), i.e. que chacune de ces composantes irréductibles soit contenue dans une strate de la stratification par l'inertie. Alors G opère très modérément sur X (et donc la conclusion de 3.2 s'applique). Le groupe d'inertie est constant le long de chaque composante irréductible c de la strate $X^{(i)}$ (1.5 (i)), de valeur G_c (le nombre minimum de générateurs de G_c étant, d'après 3.8, au plus égal à i). En particulier, G opère librement sur la strate $X^{(0)} = X - Y$.

4.7. Exemples.

(a) Soient k un corps algébriquement clos, n un entier ≥ 2 premier à la caractéristique de k , G le groupe $\mu_n = \mu_n(k)$. On fait opérer G sur $X = \mathbb{A}_k^2$ par homothéties $((\lambda, x) \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in G, x \in X(k)$). La stratification par l'inertie comporte deux strates, $X - \{0\}$, où G opère librement, et $X^G = \{0\}$. La donnée de deux droites Y_1, Y_2 telles que $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ définit un diviseur à croisements normaux G -strict $Y = Y_1 \cup Y_2$, et le couple (X, Y) vérifie les conditions de 4.6. Le choix de paramètres t_1, t_2 tels que $Y_i = V(t_i)$ permet de définir une carte équivariante 3.3 $c : \text{Spec } \mathbb{Z}[\mathbb{N}^2] \leftarrow X$, $e_i \mapsto t_i$, associée à l'homomorphisme $\chi : G \otimes \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mu_n$ tel que $\chi(\lambda \otimes e_i) = \lambda$. Le quotient X/G est le schéma torique $\text{Spec } k[x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n]$.

Plus généralement, soient n un entier ≥ 1 , G un groupe abélien d'ordre n , S un schéma noethérien séparé, régulier, au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/n, \mu_n]$, E un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang fini, muni d'une action linéaire de G , X le fibré vectoriel $V(E) = \text{Spec } \text{Sym}(E)$. Pour chaque caractère $\chi : G \rightarrow \mu_n$, notons L_χ le G - $\mathcal{O}_S$ -module correspondant. L'homomorphisme canonique G -équivariant

$$\bigoplus_{\chi} L_\chi \otimes E_\chi \rightarrow E,$$

où $E_\chi = \mathcal{H}om_G(L_\chi, E)$ et χ parcourt le groupe des caractères de G , est un isomorphisme. Il définit une décomposition G -équivariante

$$X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\chi} X_\chi,$$

où $X_\chi = V(E_\chi)$, muni de l'action de G à travers χ . En particulier, $X^G = X_1$, où $1 : G \rightarrow \mu_n$ est le caractère trivial. Supposons S local, $S = \text{Spec } A$. Pour chaque $\chi \in \text{Hom}(G, \mu_n)$, choisissons une base $(t_i)_{i \in I_\chi}$ de E_χ , de sorte que $X_\chi = \text{Spec } A[[t_i]_{i \in I_\chi}]$, avec $gt_i = \chi(g)t_i$ pour $g \in G$, $i \in I_\chi$. Le couple formé de X et du diviseur à croisements normaux (relatifs à S) $Y = \sum_{\chi, i \in I_\chi} Y_i$, où $Y_i = (t_i = 0)$ pour $i \in I_\chi$, vérifie les conditions de 4.6 (et les vérifie d'ailleurs fibre à fibre).

(b) Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p , n un entier ≥ 2 tel que $(2n, p) = 1$, G le groupe diédral $D_n = \langle s, r : s^2 = 1, r^n = 1, srs = r^{-1} \rangle$. Soit $\zeta \in k$ une racine primitive n -ième de 1. Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ la représentation de degré 2 induite du caractère χ de $\mu_n \subset G$ tel que $\chi(r) = \zeta : \rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho(r) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$. Soit X le G -schéma $V(E) = \text{Spec } k[u, v]$, $s(u) = v, r(u) = \zeta u$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, notons $Z_i \subset X$ la droite $v = \zeta^i u$, et $Z = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} Z_i$. La stratification par l'inertie comporte $n+2$ strates : $X - Z$, où G opère librement, $Z_i - \{0\}$ ($0 \leq i \leq n-1$), où le groupe d'inertie est d'ordre 2 (de générateur $r^i s$), et $\{0\} = X^G$.

Pour $n = 2$, $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, Z est un diviseur à croisements normaux G -strict, et le couple (X, Y) vérifie les conditions de 4.6. Pour $n > 2$, Z n'est plus un diviseur à croisements normaux, et l'inertie en $\{0\}$ n'est plus abélienne. Soient $f : X' \rightarrow X$ l'éclaté de $\{0\}$ dans X , $E = f^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel, $Z' = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} Z'_i$ le transformé strict de Z . Alors G opère de façon naturelle sur X' , la projection f est G -équivariante, et $Y' = f^{-1}(Z) = E \cup Z'$ est un diviseur à croisements normaux G -strict. Le couple (X', Y') vérifie les conditions de 4.6. La stratification de X' par l'inertie se compose des strates Z'_i , où l'inertie est un groupe à deux éléments, et de $X' - Z'$, où G opère librement. La stratification canonique associée à Y' la raffine : $X'^{(0)} = X' - Y'$, $X'^{(1)} = Y' - \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} (E \cap Z'_i)$, $X'^{(2)} = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} (E \cap Z'_i)$.

4.8. La construction précédente, qui rend les inerties abéliennes, se généralise. Soit X un schéma noethérien régulier, séparé, muni d'une action modérée d'un groupe fini G , et soit Y un diviseur à croisements normaux G -strict. Si H est un sous-groupe de G , X^H est régulier (et séparé), donc il en est de même de l'éclaté $X' = \text{Écl}_{X^H}(X)$ de X le long de X^H . Le normalisateur $N = N_G(H)$ de H dans G stabilise X^H , donc agit sur X' , et le morphisme $f : X' \rightarrow X$ est équivariant relativement à $N \rightarrow G$. De plus, $f^{-1}(X^H)$ est un diviseur régulier dans X' . Si D est une composante de Y , comme D est H -stable, $D \times_X X^H = D^H$ est régulier, et le transformé strict $\tilde{D} = \text{Écl}_{D^H}(D)$ est un diviseur régulier croisant $f^{-1}(X^H)$ transversalement. Il s'ensuit que le transformé total réduit $Y' = f^{-1}(Y)_{\text{red}}$ est un diviseur à croisements normaux N -strict dans X' .

PROPOSITION 4.9. *Sous les hypothèses de 4.8, soit $\bar{x}$ un point géométrique de X en lequel le groupe d'inertie $G_{\bar{x}}$ n'est pas abélien, et soit H le sous-groupe des commutateurs $(G_{\bar{x}}, G_{\bar{x}})$. Alors $G_{\bar{x}} = N_{G_{\bar{x}}}(H)$ agit sur $X' = \text{Écl}_{X^H}(X)$, et en chaque point géométrique $\bar{y}$ de X' au-dessus de $\bar{x}$, le groupe d'inertie $(G_{\bar{x}})_{\bar{y}}$ est strictement plus petit que $G_{\bar{x}}$.*

En effet, le point $\bar{y}$ correspond à une droite L dans $(T_{\bar{x}}/T_{\bar{x}}^H) \otimes_{k(\bar{x})} k(\bar{y})$, où $T_{\bar{x}} = T_{\bar{x}}(X)$. Supposons que $\bar{y}$ soit fixe sous $G_{\bar{x}}$. Alors $G_{\bar{x}}$ agit sur L par un caractère, donc H agit trivialement sur L . Or $(T_{\bar{x}}/T_{\bar{x}}^H)^H = 0$, contradiction. (Noter que cet argument montre en particulier que, si $H \neq \{1\}$ et l'action de G sur X est génériquement libre, X^H est de codimension ≥ 2 dans X en x .)

EXPOSÉ VII

Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible)

Fabrice Orgogozo

1. Énoncé

L'objet de cet exposé est de démontrer le théorème [II-4.3.1](#) (voir aussi [Intro.-4](#)), dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous :

THÉORÈME 1.1. *Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent et Z un fermé rare de X . Il existe une famille finie de morphismes $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des altérations et telle que pour tout $i \in I$ on ait :*

- (i) *le schéma X_i est régulier et intègre ;*
- (ii) *l'image inverse de Z dans X_i est le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

2. Réductions : rappel des résultats antérieurs

2.1. Réduction au cas local, normal de dimension finie. Nous avons vu en [II-4.3.3](#) qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque le schéma X est local noëthérien normal hensélien excellent. Faisons cette hypothèse supplémentaire. Un tel schéma est nécessairement de dimension finie, que nous noterons ici d . De plus, on a vu en *loc. cit.* que si le théorème est établi pour chaque schéma local noëthérien hensélien excellent de dimension au plus d , il en est de même pour les schémas noëthériens quasi-excellents de dimension au plus d .

2.2. Réduction au cas complet. Il résulte de la proposition [III-6.2](#) qu'il suffit de démontrer le théorème pour le schéma local noëthérien complet $\hat{X}$, ce dernier étant de même dimension que X et également normal.

2.3. Récurrence. Il résulte de ce qui précède que l'on peut supposer le schéma X local noëthérien complet normal de dimension d et le théorème connu pour chaque schéma noëthérien quasi-excellent de dimension au plus $d - 1$. Lorsque $d = 1$, le théorème est bien connu ; nous supposons dorénavant $d \geq 2$.

3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong

3.1. Soient $X = \text{Spec}(A)$ un schéma local noëthérien complet normal comme en [2.3](#) et Z un fermé rare. Quitte à remplacer X (resp. Z) par un X -schéma fini également local noëthérien normal excellent de dimension d (resp. par son image inverse), on peut supposer d'après [V-3.1.3](#), qu'il existe un schéma local noëthérien régulier S de dimension $d - 1$, un S -schéma de type fini dominant X' intègre et affine, un point fermé x' de la fibre spéciale de $f : X' \rightarrow S$, un fermé rare Z' de X' , et enfin un morphisme $c : X \rightarrow X'$ satisfaisant les conditions suivantes :

- le morphisme c induit un isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X',x'}})$;
- l'image inverse $c^{-1}(Z')$ de Z' coïncide avec Z .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & X' \\ & & \downarrow f \\ & & S \end{array}$$

3.2. Supposons l'existence d'une famille $(X'_i \rightarrow X')$ couvrante pour la topologie des altérations (II-2.3) telle que chaque X'_i soit régulier et chaque image inverse Z'_i de Z' dans X'_i soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Il résulte de II-4.1.2 que la famille $(X_i \rightarrow X)$ obtenue par changement de base (plat) $X \rightarrow X'$ est également alt-couvrante. D'autre part, l'hypothèse d'excellence faite sur les schémas garantit que le morphisme de complétion c est régulier (I-2.10). La régularité d'un morphisme étant stable par changement de base localement de type fini ([ÉGA IV₂ 6.8.3]), et préservant la régularité des schémas ([ÉGA IV₂ 6.5.2 (ii)]) il en résulte que chaque X_i est régulier. De même, l'image inverse Z_i de Z'_i dans X_i — qui coïncide avec l'image inverse de Z dans X_i par le morphisme évident — est le support d'un diviseur à croisements normaux strict pour chaque indice i .

3.3. Quitte à remplacer X par X' , ce qui est licite d'après ce qui précède, nous pouvons supposer le schéma X intègre de dimension d , équipé d'un morphisme dominant de type fini $f : X \rightarrow S$, de fibre générique de dimension 1, où S est local noëthérien régulier de dimension $d - 1$. Quitte à compactifier f , on peut le supposer *propre*; quitte à éclater, on peut supposer que le fermé Z est un *diviseur* (c'est-à-dire le support d'un diviseur de Cartier effectif).

3.4. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème [de Jong, 1997, 2.4], d'après lequel, quitte à altérer S et X , on peut supposer les faits suivants :

- le morphisme f est une courbe nodale ;
- le diviseur Z est contenu dans la réunion d'un diviseur D étale sur S , contenu dans le lieu lisse de f , et de l'image inverse $f^{-1}(T)$ d'un fermé rare T de S .

4. Résolution des singularités

4.1. Résolution des singularités de la base. Les altérations précédentes conduisent à une situation où les schémas X et S ne sont pas nécessairement locaux (ni même affines) et S n'est plus nécessairement régulier. Il est cependant excellent de dimension $d - 1$ donc justiciable de l'hypothèse de récurrence 2.3. Ainsi, on peut supposer que la paire (S, T) est régulière, c'est-à-dire que le schéma S est régulier et que T est un diviseur à croisements normaux. Il en est en effet ainsi localement pour la topologie des altérations.

4.2. D'après VI-1.9, la paire $(X, D \cup f^{-1}(T))$ est log régulière au sens de VI-1.2. Qu'un diviseur contenu dans un diviseur à croisements normaux strict soit également un diviseur à croisements normaux strict nous permet de supposer que $Z = D \cup f^{-1}(T)$. La conclusion résulte alors du théorème suivant de Katô K. ([Kato, 1994, 10.3, 10.4]), complété par W. Nizioł ([Nizioł, 2006, 5.7]). (Voir aussi [Gabber & Ramero, 2013, 9.6.32 & 53] et VIII-3.4.)

THÉORÈME 4.3. *Soit (X, Z) une paire log régulière, où X est un schéma noëthérien. Il existe un schéma noëthérien régulier Y et un morphisme projectif birationnel $\pi : Y \rightarrow X$ tels que l'image inverse ensembliste $\pi^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

(On utilise le procédé [de Jong, 1996, 7.2] permettant de rendre strict un diviseur à croisements normaux.)

Gabber's modification theorem (absolute case)

Luc Illusie and Michael Temkin⁽ⁱ⁾

In this exposé we state and prove Gabber's modification theorem mentioned in the introduction (see step (C)). Its main application is to Gabber's refined — i.e. prime to ℓ — local uniformization theorem. This is treated in exposé IX. A relative variant of the modification theorem, also due to Gabber, has applications to prime to ℓ refinements of theorems of de Jong on alterations of schemes of finite type over a field or a trait. This is discussed in exposé X. In §1, we state Gabber's modification theorem in its absolute form (Theorem 1.1). The proof of this theorem occupies §§4–5. A key ingredient is the existence of functorial (with respect to regular morphisms) resolutions in characteristic zero; the relevant material is collected in §2. We apply it in §3 to get resolutions of log regular log schemes, using the language of Kato's fans and Ogus's monoschemes. The main results, on which the proof of 1.1 is based, are Theorems 3.3.16 and 3.4.15. §§2 and 3 can be read independently of §§1, 4, 5.

Though we basically follow the lines of Gabber's original proof, our approach differs from it at several places, especially in our use of associated points and saturated desingularization towers, whose idea is due to the second author. In 2.3.13 and 2.4 we discuss material from Gabber's original proof.

We wish to thank Sophie Morel for sharing with us her notes on resolution of log regular log schemes and Gabber's magic box. They were quite useful.

1. Statement of the main theorem

THEOREM 1.1. *Let X be a noetherian, qc, separated, log regular fs log scheme (VI-1.2), endowed with an action of a finite group G . We assume that G acts tamely (VI-3.1) and generically freely on X (i.e. there exists a G -stable, dense open subset of X where the inertia groups $G_{\bar{x}}$ are trivial). Let Z be the complement of the open subset of triviality of the log structure of X , and let T be the complement of the largest G -stable open subset of X on which G acts freely. Then there exists an fs log scheme X' and a G -equivariant morphism $f = f_{(G,X,Z)}: X' \rightarrow X$ of log schemes having the following properties:*

(i) *As a morphism of schemes, f is a projective modification, i.e. f is projective and induces an isomorphism of dense open subsets.*

(ii) *X' is log regular and $Z' = f^{-1}(Z \cup T)$ is the complement of the open subset of triviality of the log structure of X' .*

(iii) *The action of G on X' is very tame (VI-3.1).*

When proving the theorem we will construct $f_{(G,X,Z)}$ that satisfies a few more nice properties that will be listed in Theorem 5.6.1. We remark that Gabber also proves the theorem, more generally, when X is not assumed to be qc. However, the quasi-excellence assumption simplifies the proof so we impose it here. Most of the proof works for a general noetherian X , so we will assume that X is qc only when this will be needed in §5.

1.2. (a) Note that we do not demand that f is log smooth. In general, it is not. Here is an example. Let k be an algebraically closed field of characteristic $\neq 2$. Let $G = \{\pm 1\}$ act on the affine plane $X = \mathbb{A}_k^2$, endowed with the trivial log structure, by $x \mapsto \pm x$. Then X is regular and log regular, and $T = \{0\}$. The action of G on X is tame, but not very tame, as $G_{\{0\}} (= G)$ does not act trivially on the

⁽ⁱ⁾The research of M.T. was partially supported by the European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) under grant agreement 268182.

(only) stratum X of the stratification by the rank of $M^{\text{gp}}/\mathcal{O}^*$. Let $f: X' \rightarrow X$ be the blow up of T , with its natural action of G . Then the pair $(X', Z' = f^{-1}(T))$ is log regular, f is a G -equivariant morphism of log schemes, $X' - Z'$ is at the same time the open subset of triviality of the log structure and the largest G -stable open subset of X' where G acts freely, and G acts very tamely on X' . However, f is not log smooth (the fiber of f at $\{0\}$ is the line Z' with the log structure associated to $\mathbf{N} \rightarrow \mathcal{O}, 1 \mapsto 0$, which is not log smooth over $\text{Spec } k$ with the trivial log structure).

(b) In the above example, let D_1, D_2 be distinct lines in X crossing at $\{0\}$, and put the log structure $M(D)$ on X defined by the divisor with normal crossings $D = D_1 \cup D_2$. Then $\tilde{X} = (X, M(D))$ is log smooth over $\text{Spec } k$ endowed with the trivial log structure, and G acts very tamely on $(X, M(D))$ (VI-4.6). Moreover, the modification f considered above underlies the log blow up $\tilde{f}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ of X at (the ideal in $M(D)$ of) $\{0\}$. While f depends only on X , the log étale morphism $\tilde{f}$ is not canonical, as it depends on the choice of D . However, one can recover f from the *canonical* resolutions of toric singularities (discussed in the next section). Namely, as G acts very tamely on $\tilde{X}$, the quotient $\tilde{Y} = \tilde{X}/G$ is log regular (VI-3.2): $\tilde{Y} = \text{Spec } k[P]$, where P is the submonoid of $\mathbf{Z}^2$ generated by $(2, 0)$, $(1, 1)$ and $(0, 2)$, and the projection $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ is a Kummer étale cover of group G , in particular, U is a G -étale cover of $V = p(U)$, where $U = X - D$. Let $g: \tilde{Y}' \rightarrow \tilde{Y}$ be the log blow up of $\{0\} = p(\{0\})$ in $\tilde{Y}$. We then have a cartesian diagram of log schemes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \longrightarrow & \tilde{Y}' \\ \downarrow & & \downarrow g \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & \tilde{Y} \end{array}$$

where the horizontal maps are Kummer étale covers of group G . Now, as a morphism of schemes, $\tilde{Y}' \rightarrow \tilde{Y}$ is the *canonical resolution* of $\tilde{Y}$, and the underlying scheme X' of $\tilde{X}'$ is the *normalization* of $\tilde{Y}'$ in the G -étale cover $p: U \rightarrow V$. This observation, suitably generalized, plays a key role in the proof of 1.1.

2. Functorial resolutions

For simplicity, all schemes considered in this section are quasi-compact and quasi-separated. In particular, all morphisms are quasi-compact and quasi-separated.

2.1. Towers of blow ups. In this section we review various known results on the following related topics: blow ups and their towers, various operations on towers, such as strict transforms and pushforwards, associated points of schemes and schematic closure.

2.1.1. Blow ups. We start with recalling basic properties of blow ups; a good reference is [Conrad, 2007, §1]. Let X be a scheme. By a **blow up** of X we mean a triple consisting of a morphism $f: Y \rightarrow X$, a finitely presented closed subscheme V of X (the **center**), and an X -isomorphism $\alpha: Y \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{I}^n)$, where $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V)$ is the ideal of V . We will write $Y = \text{Bl}_V(X)$. When there is no risk of confusion we will omit V and α from the notation. A blow up (f, V, α) is said to be **empty** if $V = \emptyset$. In this case, $Y = X$ and f is the identity. The only X -automorphism of Y is the identity. Also, it is well known that Y is the universal X -scheme such that $V \times_X Y$ is a Cartier divisor (i.e. the ideal $\mathcal{I} \mathcal{O}_Y$ is invertible).

2.1.2. Total and strict transforms. Given a blow up $f: Y = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$, there are two natural ways to pullback closed subschemes $i: Z \hookrightarrow X$. The **total transform** of Z under f is the scheme-theoretic preimage $f^{\text{tot}}(Z) = Z \times_X Y$. The **strict transform** $f^{\text{st}}(Z)$ is defined as the schematic closure of $f^{-1}(Z - V) \xrightarrow{\sim} Z - V$.

REMARK 2.1.3. (i) The strict transform depends on the centers and not only on Z and the morphism $Y \rightarrow X$. For example, if $D \hookrightarrow X$ is a Cartier divisor then the morphism $\text{Bl}_D(X) \rightarrow X$ is an isomorphism but the strict transform of D is empty.

(ii) While $f^{\text{tot}}(Z) \rightarrow Z$ is just a proper morphism, the morphism $f^{\text{st}}(Z) \rightarrow Z$ can be provided with the blow up structure because $f^{\text{st}}(Z) \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{V \times_X Z}(Z)$ (e.g., if $Z \hookrightarrow V$ then $f^{\text{st}}(Z) = \emptyset = \text{Bl}_Z(Z)$). Thus, the strict transform can be viewed as a genuine blow up pullback of f with respect to i .

2.1.4. *Towers of blow ups.* Next we introduce blow up towers and study various operations with them (see also [Temkin, 2012, §2.2]). By a **tower of blow ups** of X we mean a finite sequence of length $n \geq 0$

$$X_\bullet = (X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_0} X_0 = X)$$

of blow ups. In particular, this data includes the centers $V_i \hookrightarrow X_i$ for $0 \leq i \leq n-1$. Usually, we will denote the tower as $X_\bullet$ or $(X_\bullet, V_\bullet)$. Also, we will often use notation $X_n \dashrightarrow X_0$ to denote a sequence of morphisms.

If $n = 0$ then we say that the tower is **trivial**. Note that the morphism $X_n \rightarrow X$ is projective, and it is a modification if and only if the centers V_i are nowhere dense. If $X_\bullet$ is a tower of blow ups, we denote by $(X_\bullet)_c$ the **contracted** tower deduced from $X_\bullet$ by omitting the empty blow ups.

2.1.5. *Strict transform of a tower.* Assume that $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$ is a blow up tower of X and $h: Y \rightarrow X$ is a morphism. We claim that there exists a unique blow up tower $\mathcal{Y} = (Y_\bullet, W_\bullet)$ of Y such that $Y_i \rightarrow Y \rightarrow X$ factors through X_i and $W_i = V_i \times_{X_i} Y_i$. Indeed, this defines Y_0, W_0 and Y_1 uniquely. Since $V_0 \times_X Y_1 = W_0 \times_{Y_0} Y_1$ is a Cartier divisor, $Y_1 \rightarrow X$ factors uniquely through X_1 . The morphism $Y_1 \rightarrow X_1$ uniquely defines W_1 and Y_2 , etc. We call $\mathcal{Y}$ the **strict transform** of $\mathcal{X}$ with respect to h and denote it $h^{\text{st}}(\mathcal{X})$.

REMARK 2.1.6. The following observation motivates our terminology: if $h: Y \hookrightarrow X$ is a closed immersion then $Y_i \hookrightarrow X_i$ is a closed immersion and Y_{i+1} is the strict transform of Y_i under the blow up $X_{i+1} \rightarrow X_i$.

2.1.7. *Pullbacks.* One can also define a naive base change of $\mathcal{X}$ with respect to h simply as $(Y_\bullet, W_\bullet) = \mathcal{X} \times_X Y$. This produces a sequence of proper morphisms $Y_n \dashrightarrow Y_0$ and closed subschemes $W_i \hookrightarrow Y_i$ for $0 \leq i \leq n-1$. If this datum is a blow up sequence, i.e. $Y_{i+1} \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{W_i}(Y_i)$, then we say that $\mathcal{X} \times_X Y$ is the **pullback** of $\mathcal{X}$ and use the notation $h^*(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \times_X Y$.

REMARK 2.1.8. The pullback exists if and only if $h^{\text{st}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X} \times_X Y$. Indeed, this is obvious for towers of length one, and the general case follows by induction on the length.

2.1.9. *Flat pullbacks.* Blow ups are compatible with flat base changes $h: Y \rightarrow X$ in the sense that $\text{Bl}_{V \times_X Y}(Y) \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_V(X) \times_X Y$ (e.g. just compute these blow ups in the terms of Proj). By induction on length of blow up towers it follows that pullbacks of blow up towers with respect to flat morphisms always exist. One can slightly strengthen this fact as follows.

REMARK 2.1.10. Assume that $X_\bullet$ is a blow up tower of X and $h: Y \rightarrow X$ is a morphism. If there exists a flat morphism $f: X \rightarrow S$ such that the composition $g: Y \rightarrow S$ is flat and the blow up tower $X_\bullet$ is the pullback of a blow up tower $S_\bullet$ then the pullback $h^*(X_\bullet)$ exists and equals to $g^*(S_\bullet)$.

2.1.11. *Equivariant blow ups.* Assume that X is an S -scheme acted on by a flat S -group scheme G . We will denote by $p, m: X_0 = G \times_S X \rightarrow X$ the projection and the action morphisms. Assume that $V \hookrightarrow X$ is a G -equivariant closed subscheme (i.e., $V \times_X (X_0; m)$ coincides with $V_0 = V \times_X (X_0; p)$) then the action of G lifts to the blow up $Y = \text{Bl}_V(X)$. Indeed, the blow up $Y_0 = \text{Bl}_{V_0}(X_0) \rightarrow X_0$ is the pullback of $Y \rightarrow X$ with respect to both m and p , i.e. there is a pair of cartesian squares

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \longrightarrow & X_0 \\ p' \downarrow & m' & \downarrow p \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

So, we obtain an isomorphism $Y_0 \xrightarrow{\sim} G \times_S Y$ (giving rise to the projection $p': Y_0 \rightarrow Y$) and a group action morphism $m': Y_0 \rightarrow Y$ compatible with m . Furthermore, the unit map $e: X \rightarrow X_0$ satisfies the condition of Remark 2.1.10 (with $X = S$), hence we obtain the base change $e': Y \rightarrow Y_0$ of e .

It is now straightforward to check that m' and e' satisfy the group action axioms, but let us briefly spell this out using simplicial nerves. The action of G on V defines a cartesian sub-simplicial scheme $\text{Ner}(G, V) \hookrightarrow \text{Ner}(G, X)$. By the flatness of G over S and Remark 2.1.10, $\text{Bl}_{\text{Ner}(G, V)}(\text{Ner}(G, X))$ is cartesian over $\text{Ner}(G)$, hence corresponds to an action of G on $\text{Bl}_V(X)$.

2.1.12. *Flat monomorphism.* Flat monomorphisms are studied in [Raynaud, 1967]. In particular, it is proved in [Raynaud, 1967, Prop. 1.1] that $i : Y \hookrightarrow X$ is a flat monomorphism if and only if i is injective and for any $y \in Y$ the homomorphism $\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ is an isomorphism. Moreover, it is proved in [Raynaud, 1967, Prop. 1.2] that in this case i is a topological embedding and $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$. In addition to open immersions, the main source of flat monomorphisms for us will be morphisms of the form $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow X$ and their base changes.

2.1.13. *Pushforwards of ideals.* Let $i : Y \rightarrow X$ be a flat monomorphism, e.g. $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow X$. By the **pushforward** $U = i_*(V)$ of a closed subscheme $V \hookrightarrow Y$ we mean its schematic image in X , i.e. U is the minimal closed subscheme such that $V \hookrightarrow X$ factors through U . It exists by [ÉGA I 9.5.1].

LEMMA 2.1.14. *The pushforward $U = i_*(V)$ extends V in the sense that $U \times_X Y = V$.*

Proof. See [Raynaud, 1967, Proof of Proposition 1.2]. □

2.1.15. *Pushforwards of blow up towers.* Given a blow up $f : \text{Bl}_Y(Y) \rightarrow Y$ and a flat monomorphism $i : Y \hookrightarrow X$ we define the pushforward $i_*(f)$ as the blow up along $U = i_*(V)$, assuming that U is finitely presented over X . Using Lemma 2.1.14 and flat pullbacks we see that $i^*i_*(f) = f$ and $\text{Bl}_Y(Y) \hookrightarrow \text{Bl}_U(X)$ is a flat monomorphism. So, we can iterate this procedure to construct pushforward with respect to i of any blow up tower $Y_\bullet$ of Y . It will be denoted $(X_\bullet, U_\bullet) = i_*(Y_\bullet, V_\bullet)$.

REMARK 2.1.16. (i) Clearly, $i^*i_*(Y_\bullet) = Y_\bullet$.

(ii) In the opposite direction, a blow up tower $(X_\bullet, U_\bullet)$ of X satisfies $i_*i^*(X_\bullet) = X_\bullet$ if and only if the preimage of Y in each center U_i of the tower is schematically dense.

2.1.17. *Associated points of a scheme.* Assume that X is a noetherian scheme. Recall that a point $x \in X$ is called associated if $\mathfrak{m}_x$ is an associated prime of $\mathcal{O}_{X,x}$, i.e. $\mathcal{O}_{X,x}$ contains an element whose annihilator is $\mathfrak{m}_x$, see [ÉGA IV₂ 3.1.1]. The set of all such points will be denoted $\text{Ass}(X)$. The following result is well known but difficult to find in the literature.

LEMMA 2.1.18. *Let $i : Y \hookrightarrow X$ be a flat monomorphism. Then the schematic image of i coincides with X if and only if $\text{Ass}(X) \subset i(Y)$.*

Proof. Note that the schematic image of i can be described as $\text{Spec}(\mathcal{F})$, where $\mathcal{F}$ is the image of the homomorphism $\phi : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)$. Thus, the schematic image coincides with X if and only if $\text{Ker}(\phi) = 0$.

If $i(Y)$ omits a point x then any $\mathfrak{m}_x$ -torsion element $s \in \mathcal{O}_{X,x}$ is in the kernel of $\phi_x : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)_x$ (we use that $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$ by 2.1.12 and since the closure of x is the support of an extension of s to a sufficiently small neighborhood, the restriction $s|_Y$ vanishes). So, if there exists $x \in \text{Ass}(X)$ with $x \notin i(Y)$ then $\text{Ker}(\phi) \neq 0$.

Conversely, if the kernel is non-zero then we take x to be any maximal point of its support and choose any non-zero $s \in \text{Ker}(\phi_x)$. In particular, $s|_{Y \cap X_x} = 0$ and hence $x \notin i(Y)$. For any non-trivial generization y of x the image of s in $\mathcal{O}_{X,y}$ vanishes because $\text{Ker}(\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)_y) = 0$ by maximality of x . Thus, the closure of x is the support of s , and hence s is annihilated by a power of $\mathfrak{m}_x$. Since X is noetherian, we can find a multiple of s whose annihilator is $\mathfrak{m}_x$, thereby obtaining that $x \in \text{Ass}(X)$. □

2.1.19. *Associated points of blow up towers.* If $(X_\bullet, V_\bullet)$ is a blow up tower and all X_i 's are noetherian then by the set $\text{Ass}(X_\bullet)$ of its associated points we mean the union of the images of $\text{Ass}(V_i)$ in X . Combining Remark 2.1.16(i) and Lemma 2.1.18 we obtain the following:

LEMMA 2.1.20. *Let $i : Y \hookrightarrow X$ be a flat monomorphism and let $X_\bullet$ be a blow up tower of X . Then $i_*i^*(X_\bullet) = X_\bullet$ if and only if $\text{Ass}(X_\bullet) \subset i(Y)$.*

2.2. Normalized blow up towers. For reduced schemes most of the notions, constructions and results of §2.1 have normalized analogs. We develop such a "normalized" theory in this section.

2.2.1. Normalization. The normalization of a reduced scheme X with finitely many irreducible components, as defined in [ÉGA II 6.3.8], will be denoted X^{nor} . Recall that normalization is compatible with open immersions and for an affine $X = \text{Spec}(A)$ its normalization is $X^{\text{nor}} = \text{Spec}(B)$ where B is the integral closure of A in its total ring of fractions (which is a finite product of fields). The normalization morphism $X^{\text{nor}} \rightarrow X$ is integral but not necessarily finite.

2.2.2. Functoriality. Recall (II-1.1.2) that a morphism $f: Y \rightarrow X$ is called **maximally dominating** if it takes generic points of Y to generic points of X . Normalization is a functor on the category whose objects are reduced schemes having finitely many irreducible components and whose morphisms are the maximally dominating ones. Furthermore, it possesses the following universal property: any maximally dominating morphism $Y \rightarrow X$ with normal Y factors uniquely through X^{nor} . (By definition, Y is normal if its local rings are normal domains. Both claims are local on Y and X and are obvious for affine schemes.)

2.2.3. Normalized blow ups. Assume that X is a reduced scheme with finitely many irreducible components. By the **normalized blow up** of X along a closed subscheme V of finite presentation we mean the morphism $f: \text{Bl}_V(X)^{\text{nor}} \rightarrow X$. The normalization is well defined since $\text{Bl}_V(X)$ is reduced and has finitely many irreducible components. Note that f is universally closed but does not have to be of finite type. As in the case of usual blow ups, V is a part of the structure. In particular, $\text{Bl}_V(X)^{\text{nor}}$ has no X -automorphisms and we can talk about equality of normalized blow ups (as opposed to an isomorphism).

PROPOSITION 2.2.4. (i) *Keep the above notation. Then $\text{Bl}_V(X)^{\text{nor}} \rightarrow X$ is the universal maximally dominating morphism $Y \rightarrow X$ such that Y is normal and $V \times_X Y$ is a Cartier divisor.*

(ii) *For any blow up $f: Y = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$ its normalization $f^{\text{nor}}: Y^{\text{nor}} \rightarrow X^{\text{nor}}$ is the normalized blow up along $V \times_X X^{\text{nor}}$.*

Proof. Combining the universal properties of blow ups and normalizations we obtain (i), and (ii) is its immediate corollary. $\square$

Towers of normalized blow ups and their transforms can now be defined similarly to their non-normalized analogs.

2.2.5. Towers of normalized blow ups. A **tower of normalized blow ups** is a finite sequence $X_n \dashrightarrow X_{n-1}$ with $n \geq 0$ of normalized blow ups with centers $V_i \hookrightarrow X_i$ for $-1 \leq i \leq n-1$ and $V_{-1} = \emptyset$. The centers are part of the datum. Note that the map $X_0 \rightarrow X_{-1}$ is just the normalization map. The **contraction** of a normalized blow up tower removes the normalized blow ups with empty centers for $i \geq 0$. It follows from [ÉGA IV₃ 8.6.3] that each X_i with $i \geq 0$ is a normalization of a reduced projective X_{-1} -scheme. A tower is called **noetherian** if all X_i are noetherian.

2.2.6. Normalization of a blow up tower. Using induction on length and Proposition 2.2.4(ii), we can associate to a blow up tower $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$ of a reduced scheme X with finitely many irreducible components a normalized blow up tower $\mathcal{X}^{\text{nor}} = (Y_\bullet, W_\bullet)$, where $Y_{-1} = X$ and $Y_i = X_i^{\text{nor}}$, $W_i = V_i \times_{X_i} X_i^{\text{nor}}$ for $i \geq 0$. We call $\mathcal{X}^{\text{nor}}$ the **normalization** of $\mathcal{X}$.

2.2.7. Strict transforms. If $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$ is a normalized blow up tower of $X = X_{-1}$ and $f: Y \rightarrow X$ is a morphism between reduced schemes with finitely many irreducible components then we define the strict transform $f^{\text{st}}(\mathcal{X})$ as the normalized blow up tower $(Y_\bullet, W_\bullet)$ such that $Y_{-1} = Y$ and $W_i = V_i \times_{X_i} Y_i$. Using induction on the length and the universal property of normalized blow ups, see 2.2.4 (i), one shows that such a tower exists and is the universal normalized blow up tower of Y such that $f = f_{-1}$ extends to a compatible sequence of morphisms $f_i: Y_i \rightarrow X_i$.

2.2.8. Pullbacks. The strict transform $f^{\text{st}}(\mathcal{X})$ as above will be called the **pullback** and denoted $f^*(\mathcal{X})$ if $Y_i \xrightarrow{\sim} X_i \times_X Y$ for any $-1 \leq i \leq n$. Recall that a morphism is **regular** if it is flat and has geometrically regular fibers, see [ÉGA IV₂ 6.8.1].

LEMMA 2.2.9. *If $f: Y \rightarrow X$ is a regular morphism between reduced noetherian schemes then any normalized blow up tower $\mathcal{X}$ of X admits a pullback $f^*(\mathcal{X})$.*

Proof. Blow ups are compatible with flat morphisms hence we should only show that normalizations in our tower are compatible with regular morphisms: if $f: Y \rightarrow X$ is a regular morphism of

reduced noetherian schemes then the morphism $h: Y^{\text{nor}} \rightarrow X^{\text{nor}} \times_X Y$ is an isomorphism. Since h is an integral morphism which is generically an isomorphism, it suffices to show that $X^{\text{nor}} \times_X Y$ is normal.

To prove the latter we can assume that X and Y are affine. Then f is a filtered limit of smooth morphisms $h_i: Y_i \rightarrow X$ by Popescu's theorem. If the claim holds for h_i then it holds for h , so we can assume that h is smooth. We claim that, more generally, if A is a normal domain and $\phi: A \rightarrow B$ is a smooth homomorphism then B is normal. Indeed, A is a filtered colimit of noetherian normal subdomains A_i and by [ÉGA IV₃ 8.8.2] and [ÉGA IV₄ 17.7.8] ϕ is the base change of a smooth homomorphism $\phi_i: A_i \rightarrow B_i$ for large enough i . For each $j \geq i$ let $\phi_j: A_j \rightarrow B_j$ be the base change of ϕ_i . Each B_j is normal by [Matsumura, 1980a, 21.E (iii)] and B is the colimit of B_j , hence B is normal. $\square$

2.2.10. Fpqc descent of blow up towers. The classical fpqc descent of ideals (and modules) implies that there is also an fpqc descent for blow up towers. Namely, if $Y \rightarrow X$ is an fpqc covering and $Y_\bullet$ is a blow up tower of Y whose both pullbacks to $Y \times_X Y$ are equal then $Y_\bullet$ canonically descends to a blow up tower of X because the centers descend. In the same way, normalized blow up towers descend with respect to quasi-compact surjective regular morphisms.

2.2.11. Associated points. The material of 2.1.15–2.1.19 extends to noetherian normalized blow up towers almost verbatim. In particular, if $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$ is such a tower then $\text{Ass}(\mathcal{X})$ is the union of the images of $\text{Ass}(V_j)$ and for any flat monomorphism $i: Y \hookrightarrow X$ (which is a regular morphism by 2.1.12) with a blow up tower $\mathcal{Y}$ of Y we always have that $i^*i_*\mathcal{Y} = \mathcal{Y}$, and we have that $i_*i^*\mathcal{X} = \mathcal{X}$ if and only if $\text{Ass}(\mathcal{X}) \subset i(Y)$.

2.3. Functorial desingularization. In this section we will formulate the desingularization result about toric varieties that will be used later in the proof of Theorem 1.1. Then we will show how it is obtained from known desingularization results.

2.3.1. Desingularization of a scheme. By a **resolution** (or **desingularization**) **tower** of a noetherian scheme X we mean a tower of blow ups with nowhere dense centers $X_\bullet$ such that $X = X_0$, X_n is regular and no f_i is an empty blow up. For example, the trivial tower is a desingularization if and only if X itself is regular.

2.3.2. Normalized desingularization. We will also consider normalized blow up towers such that each center is non-empty and nowhere dense, $X = X_{-1}$ and X_n is regular. Such a tower will be called a **normalized desingularization tower** of X .

REMARK 2.3.3. (i) For any desingularization tower $\mathcal{X}$ of X its normalization $\mathcal{X}^{\text{nor}}$ is a normalized desingularization tower of X .

(ii) Usually one works with non-normalized towers; they are subtler objects that possess more good properties. All known constructions of functorial desingularization (see below) produce blow up towers by an inductive procedure, and one cannot work with normalized towers instead. However, it will be easier for us to deal with normalized towers in log geometry because in this case one may work only with fs log schemes.

2.3.4. Functoriality of desingularization. For concreteness, we consider desingularizations in the current section, but all what we say holds for normalized desingularizations too. Assume that a class $\mathcal{S}^0$ of noetherian S -schemes is provided with desingularizations $\mathcal{F}(X) = X_\bullet$ for any $X \in \mathcal{S}^0$. We say that the desingularization (family) $\mathcal{F}$ is **functorial** with respect to a class $\mathcal{S}^1$ of S -morphisms between the elements of $\mathcal{S}^0$ if for any $f: Y \rightarrow X$ from $\mathcal{S}^1$ the desingularization of X induces that of Y in the sense that $f^*\mathcal{F}(X)$ is defined and its contraction coincides with $\mathcal{F}(Y)$ (so, $\mathcal{F}(Y) = (Y \times_X \mathcal{F}(X))_c$). Note that we put the $=$ sign instead of an isomorphism sign, which causes no ambiguity by the fact that any automorphism of a blow up is the identity as we observed above.

REMARK 2.3.5. (i) Contractions in the pulled back tower appear when some centers of $\mathcal{F}(X)$ are mapped to the complement of $f(Y)$ in X . In particular, if $f \in \mathcal{S}^1$ is surjective then the precise equality $\mathcal{F}(Y) = Y \times_X \mathcal{F}(X)$ holds.

(ii) Assume that $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ is a Zariski covering and the morphisms $X_i \hookrightarrow X$ and $\prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X$ are in $\mathcal{S}^1$. In general, one cannot reconstruct $\mathcal{F}(X)$ from the $\mathcal{F}(X_i)$'s because the latter are contracted pullbacks and it is not clear how to glue them with correct synchronization. However, all information

about $\mathcal{F}(X)$ is kept in $\mathcal{F}(\coprod_{i=1}^n X_i)$. The latter is the pullback of $\mathcal{F}(X)$ hence we can reconstruct $\mathcal{F}(X)$ by gluing the restricted blow up towers $\mathcal{F}(\coprod_{i=1}^n X_i)|_{X_i}$. Note that $\mathcal{F}(\coprod_{i=1}^n X_i)|_{X_i}$ can be obtained from $\mathcal{F}(X_i)$ by inserting empty blow ups, and these empty blow ups make the gluing possible. This trick with synchronization of the towers $\mathcal{F}(X_i)$ by desingularizing disjoint unions is often used in the modern desingularization theory, and one can formally show (see [Temkin, 2012, Rem. 2.3.4(iv)]) that such approach is equivalent to the classical synchronization of the algorithm with an invariant.

(iii) Assume that $\mathcal{S}^1$ contains all identities Id_X with $X \in \mathcal{S}^0$ and for any $Y, Z \in \mathcal{S}^0$ there exists $T = Y \coprod Z \in \mathcal{S}^0$ such that for any pair of morphisms $a: Y \rightarrow X, b: Z \rightarrow X$ in $\mathcal{S}^1$ the morphism $(a, b): T \rightarrow X$ is in $\mathcal{S}^1$. As an illustration of the above trick, let us show that even if $f, g: Y \rightarrow X$ are in $\mathcal{S}^1$ but not surjective, we have an equality $\mathcal{F}(X) \times_X (Y, f) = \mathcal{F}(X) \times_X (Y, g)$ of non-contracted towers. Indeed, set $Y' = Y \coprod X$ and consider the morphisms $f', g': Y' \rightarrow X$ that agree with f and g and map X by the identity. Then $\mathcal{F}(X) \times_X (Y', f')$ and $\mathcal{F}(X) \times_X (Y', g')$ are equal because f' and g' are surjective, hence their restrictions onto Y are also equal, but these are precisely $\mathcal{F}(X) \times_X (Y, f)$ and $\mathcal{F}(X) \times_X (Y, g)$.

2.3.6. Gabber's magic box. Now we have tools to formulate the aforementioned desingularization result.

THEOREM 2.3.7. *Let $\mathcal{S}^0$ denote the class of finite disjoint unions of affine toric varieties over $\mathbf{Q}$, i.e. $\mathcal{S}^0 = \{\coprod_{i=1}^n \text{Spec}(\mathbf{Q}[P_i])\}$, where $P_1, \dots, P_n$ are fs torsion free monoids. Let $\mathcal{S}^1$ denote the class of smooth morphisms*

$$f: \coprod_{j=1}^m \text{Spec}(\mathbf{Q}[Q_j]) \rightarrow \coprod_{i=1}^n \text{Spec}(\mathbf{Q}[P_i])$$

such that for each $1 \leq j \leq m$ there exists $1 \leq i = i(j) \leq n$ and a homomorphism of monoids $\phi_j: P_i \rightarrow Q_j$ so that the restriction of f onto $\text{Spec}(\mathbf{Q}[Q_j])$ factors through the toric morphism $\text{Spec}(\mathbf{Q}[\phi_j])$. Then there exists a desingularization $\mathcal{F}$ on $\mathcal{S}^0$ which is functorial with respect to $\mathcal{S}^1$ and, in addition, satisfies the following compatibility condition: if $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_l$ are complete noetherian local rings containing $\mathbf{Q}$, $Z = \coprod_{i=1}^l \text{Spec}(\mathcal{O}_i)$, and $g, h: Z \rightarrow X$ are two regular morphisms with $X \in \mathcal{S}^0$ then

$$(2.3.7.1) \quad (Z, g) \times_X \mathcal{F}(X) = (Z, h) \times_X \mathcal{F}(X).$$

In the above theorem, we use the convention that different tuples $P_1, \dots, P_n$ give rise to different schemes $\coprod_{i=1}^n \text{Spec}(\mathbf{Q}[P_i])$. Before showing how this theorem follows from known desingularization results, let us make a few comments.

REMARK 2.3.8. (i) Gabber's original magic box also requires that the centers are smooth schemes. This (and much more) can also be achieved as will be explained later, but we prefer to emphasize the minimal list of properties that will be used in the proof of Theorem 1.1.

(ii) It is very important to allow disjoint unions in the theorem in order to deal with synchronization issues, as explained in Remark 2.3.5(ii). This theme will show up repeatedly throughout the exposé.

2.3.9. Desingularization of qc schemes over $\mathbf{Q}$. In practice, all known functorial desingularization families are constructed in an explicit algorithmic way, so one often says a **desingularization algorithm** instead of a desingularization family. We adopt this terminology below.

Gabber's magic box 2.3.7 is a particular case of the following theorem, see [Temkin, 2012, Th. 1.2.1]. Indeed, due to Remark 2.3.5(iii), functoriality with respect to regular morphisms implies (2.3.7.1).

THEOREM 2.3.10. *There exists a desingularization algorithm $\mathcal{F}$ defined for all reduced noetherian quasi-excellent schemes over $\mathbf{Q}$ and functorial with respect to all regular morphisms. In addition, $\mathcal{F}$ blows up only regular centers.*

REMARK 2.3.11. Although this is not stated in [Temkin, 2012], one can strengthen Theorem 2.3.10 by requiring that $\mathcal{F}$ blows up only regular centers contained in the singular locus. An algorithm $\mathcal{F}$

is constructed in [Temkin, 2012] from an algorithm $\mathcal{F}_{\text{Var}}$ that desingularizes varieties of characteristic zero, and one can check that if the centers of $\mathcal{F}_{\text{Var}}$ lie in the singular loci (of the intermediate varieties) then the same is true for $\mathcal{F}$. Let us explain how one can choose an appropriate $\mathcal{F}_{\text{Var}}$. In [Temkin, 2012], one uses the algorithm of Bierstone-Milman to construct $\mathcal{F}$, see Theorem 6.1 and its Addendum in [Bierstone et al., 2011] for a description of this algorithm and its properties. It follows from the Addendum that the algorithm blows up centers lying in the singular loci until X becomes smooth, and then it performs some additional blow ups to make the exceptional divisor snc. Eliminating the latter blow ups we obtain a desingularization algorithm $\mathcal{F}_{\text{Var}}$ which only blows up regular centers lying in the singular locus.

It will be convenient for us to use the algorithm $\mathcal{F}$ from Theorem 2.3.10 in the sequel. Also, to simplify the exposition we will freely use all properties of $\mathcal{F}$ but the careful reader will notice that only the properties of Gabber's magic box will be crucial in the end. Also, instead of working with $\mathcal{F}$ itself we will work with its normalization $\mathcal{F}^{\text{nor}}$ which assigns to a reduced qc scheme over $\mathbf{Q}$ the normalized blow up tower $\mathcal{F}(X)^{\text{nor}}$. It will be convenient to use the notation $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{\text{nor}}$ in the sequel.

REMARK 2.3.12. (i) Since normalized blow ups are compatible with regular morphisms, it follows from Theorem 2.3.10 that the normalized desingularization $\widetilde{\mathcal{F}}$ is functorial with respect to all regular morphisms.

(ii) The feature which is lost under normalization (and which is not needed for our purposes) is some control on the centers. The centers $\widetilde{V}_i$ of $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$ are preimages of the centers $V_i \hookrightarrow X_i$ of $\mathcal{F}(X)$ under the normalization morphisms $X_i^{\text{nor}} \rightarrow X_i$, so they do not have to be even reduced. It will only be important that $\widetilde{V}_i$'s are equivariant when a smooth group acts on X . In Gabber's original argument it was important to blow up only regular centers because they were not part of the blow up data, and one used that a regular center without codimension one components intersecting the regular locus is determined already by the underlying morphism of the blow up.

2.3.13. *Alternative desingularization inputs.* For the sake of completeness, we discuss how other algorithms could be used instead of $\mathcal{F}$. Some desingularization algorithms for reduced varieties over $\mathbf{Q}$ are constructed in [Bierstone & Milman, 1997], [Włodarczyk, 2005], [Bravo et al., 2005], and [Kollár, 2007]. They all are functorial with respect to equidimensional smooth morphisms (though usually one "forgets" to mention the equidimensionality restriction). It is shown in [Bierstone et al., 2011, §6.3] how to make the algorithm of [Bierstone & Milman, 1997] fully functorial by a slight adjusting of the synchronization of its blow ups. All these algorithms can be used to produce a desingularization of log regular schemes (see §3), so the only difficulty is in establishing the compatibility (2.3.7.1).

For the algorithm of [Bierstone et al., 2011] it was shown by Bierstone-Milman (unpublished, see [Bierstone et al., 2011, Rem. 7.1(2)]) that the induced desingularization of a formal completion at a point depends only on the formal completion as a scheme. This is precisely what we need in (2.3.7.1).

Finally, there is a much more general result by Gabber, see Theorem 2.4.1, whose proof uses Popescu's theorem and the cotangent complex. It implies that, actually, any desingularization of reduced varieties over $\mathbf{Q}$ which is functorial with respect to smooth morphisms automatically satisfies (2.3.7.1). So, in principle, any functorial desingularization of varieties over $\mathbf{Q}$ could be used for our purposes. Since Gabber's result and its proof are powerful and novel for the desingularization theory (and were missed in [Bierstone et al., 2011], mainly due to a not so trivial involvement of the cotangent complex), we include them in §2.4.

2.3.14. *Invariance of the regular locus.* Until the end of §2.3 we consider only qc schemes of characteristic zero, and our aim is to establish a few useful properties of $\mathcal{F}$ (and $\widetilde{\mathcal{F}}$) that are consequences of the functoriality property $\mathcal{F}$ satisfies. First, we claim that $\mathcal{F}$ does not modify the regular locus of X , and even slightly more than that:

COROLLARY 2.3.15. *All centers of $\mathcal{F}(X)$ and $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$ sit over the singular locus of X . In particular, X is regular if and only if $\mathcal{F}(X)$ is the trivial tower.*

Proof. It suffices to study $\mathcal{F}$. The claim is obvious for $S = \operatorname{Spec}(\mathbf{Q})$ because S does not contain non-dense non-empty subschemes. By functoriality, $\mathcal{F}(T)$ is trivial for any regular T of characteristic zero, because it is regular over S . Finally, if T is the regular locus of X then $\mathcal{F}(T) = (\mathcal{F}(X) \times_X T)_c$ and hence any center $V_i \hookrightarrow X_i$ of $\mathcal{F}(X)$ does not intersect the preimage of T . $\square$

2.3.16. Equivariance of the desingularization. It is well known that functorial desingularization is equivariant with respect to any smooth group action (and, moreover, extends to functorial desingularization of stacks, see [Temkin, 2012, Th. 5.1.1]). For the reader's convenience we provide an elementary argument.

COROLLARY 2.3.17. *Let S be a qc scheme over $\mathbf{Q}$, G be a smooth S -group and X be a reduced S -scheme of finite type acted on by G . Then there exists a unique action of G on $\mathcal{F}(X)$ and $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$ that agrees with the given action on X .*

Proof. Again, it suffices to study $\mathcal{F}$. Let $\mathcal{F}(X)$ be given by $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ and $V_i \hookrightarrow X_i$ for $0 \leq i \leq n-1$. By $p, m: Y = G \times_S X \rightarrow X$ we denote the projection and the action morphisms. Note that m is smooth (e.g. m is the composition of the automorphism $(g, x) \rightarrow (g, gx)$ of $G \times_S X$ and p). Therefore, $\mathcal{F}(X) \times_X (Y; m) = \mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(X) \times_S G$ by Theorem 2.3.10 and Remark 2.3.5(i). In particular, $V_0 \times_X (Y; p) = V_0 \times_X (Y; m)$, i.e. V_0 is G -equivariant. By 2.1.11, X_1 inherits a G -action. Then the same argument implies that V_1 is G -equivariant and X_2 inherits a G -action, etc. $\square$

2.4. Complements on functorial desingularizations. This section is devoted to Gabber's result on a certain non-trivial compatibility property that any functorial desingularization satisfies. It will not be used in the sequel, so an uninterested reader may safely skip it.

THEOREM 2.4.1. *Assume that S is a noetherian scheme, $\mathcal{S}^0$ is a class of reduced S -schemes of finite type and $\mathcal{S}^1$ is a class of morphisms between elements of $\mathcal{S}^0$ such that if $f: Y \rightarrow X$ is smooth and $X \in \mathcal{S}^0$ then $Y \in \mathcal{S}^0$ and $f \in \mathcal{S}^1$. Let $\mathcal{F}$ be a desingularization on $\mathcal{S}^0$ which is functorial with respect to all morphisms of $\mathcal{S}^1$. Then any pair of regular morphisms $g: Z \rightarrow X$ and $h: Z \rightarrow Y$ with targets in $\mathcal{S}^0$ induces the same desingularization of Z ; namely, $\mathcal{F}(X) \times_X Z = \mathcal{F}(Y) \times_Y Z$.*

Note that the theorem has no restrictions on the characteristic (because no such restriction appears in Popescu's theorem). Before proving the theorem let us formulate its important corollary, whose main case is when $S = \operatorname{Spec}(k)$ for a field k and $\mathcal{S}^0$ is the class of all reduced k -schemes of finite type.

COROLLARY 2.4.2. *Keep the notation of Theorem 2.4.1. Then $\mathcal{F}$ canonically extends to the class $\widehat{\mathcal{S}^0}$ of all schemes that admit a regular morphism to a scheme from $\mathcal{S}^0$ and the extension is functorial with respect to all regular morphisms between schemes of $\widehat{\mathcal{S}^0}$.*

The main ingredient of the proof will be the following result that we are going to establish first.

PROPOSITION 2.4.3. *Consider a commutative diagram of noetherian schemes*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & g \swarrow & \downarrow f & \searrow h & \\
 X & \xleftarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & Y \\
 & \searrow a & & \swarrow b & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

such that a and b are of finite type, g and h are regular and g' is smooth. Then h' is smooth around the image of f .

For the proof we will need the following three lemmas. In the first one we recall the Jacobian criterion of smoothness, rephrased in terms of the cotangent complex.

LEMMA 2.4.4. *Let $f: X \rightarrow S$ be a morphism which is locally of finite presentation, and let $x \in X$. Then the following conditions are equivalent:*

- (i) f is smooth at x ;
- (ii) $H_1(L_{X/S} \overset{L}{\otimes} k(x)) = 0$.

In the lemma we use the convention $H_i = H^{-i}$, and $L_{X/S}$ denotes the cotangent complex of X/S .

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) is trivial: as f is smooth at x , up to shrinking X we may assume f smooth, then $L_{X/S}$ is cohomologically concentrated in degree zero and locally free [Illusie, 1972, III 3.1.2]. Let us prove (ii) $\Rightarrow$ (i). We may assume that we have a factorization

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ \downarrow f & \searrow g & \\ S & & \end{array}$$

where i is a closed immersion of ideal I and g is smooth. Consider the standard exact sequence

$$(*) \quad I/I^2 \rightarrow i^* \Omega_{Z/S}^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0.$$

By the Jacobian criterion [ÉGA IV₄ 17.12.1] and [ÉGA 0_{IV} 19.1.12], the smoothness of f at x is equivalent to the fact that the morphism

$$(**) \quad (I/I^2) \otimes k(x) \rightarrow \Omega_{Z/S}^1 \otimes k(x)$$

deduced from the left one in $(*)$ is injective. Now, $(I/I^2) \otimes k(x) = H_1(L_{X/Z} \overset{L}{\otimes} k(x))$ [Illusie, 1972, III 3.1.3], and $(**)$ is a morphism in the exact sequence associated with the triangle deduced from the transitivity triangle $Li^*L_{Z/S} \rightarrow L_{X/S} \rightarrow L_{X/Z} \rightarrow Li^*L_{Z/S}[1]$ by applying $\overset{L}{\otimes} k(x)$:

$$H_1(L_{X/S} \overset{L}{\otimes} k(x)) \rightarrow H_1(L_{X/Z} \overset{L}{\otimes} k(x)) = (I/I^2) \otimes k(x) \rightarrow \Omega_{Z/S}^1 \otimes k(x).$$

By (ii), $H_1(L_{X/S} \overset{L}{\otimes} k(x)) = 0$, hence $(**)$ is injective, which completes the proof. $\square$

LEMMA 2.4.5. *Consider morphisms $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow S$, $h = gf: X \rightarrow S$, and let $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. Assume that*

- (i) $H_1(L_{X/S} \overset{L}{\otimes} k(x)) = 0$
- (ii) $H_2(L_{X/Y} \overset{L}{\otimes} k(x)) = 0$.

Then $H_1(L_{Y/S} \overset{L}{\otimes} k(y)) = 0$. In particular, if g is locally of finite presentation then g is smooth at y .

Proof. It is equivalent to show that $H_1(L_{Y/S} \overset{L}{\otimes} k(x)) = 0$, and this follows trivially from the exact sequence

$$H_2(L_{X/Y} \overset{L}{\otimes} k(x)) \rightarrow H_1(L_{Y/S} \overset{L}{\otimes} k(x)) \rightarrow H_1(L_{X/S} \overset{L}{\otimes} k(x)).$$

$\square$

LEMMA 2.4.6. *Let $f: X \rightarrow S$ be a regular morphism between noetherian schemes. Then $L_{X/S}$ is cohomologically concentrated in degree zero and $H_0(L_{X/S}) = \Omega_{X/S}^1$ is flat.*

Proof. We may assume $X = \text{Spec } B$ and $S = \text{Spec } A$ affine. Then, by Popescu's theorem [Swan, 1998, 1.1], X is a filtering projective limit of smooth affine S -schemes $X_\alpha = \text{Spec } B_\alpha$. By [Illusie, 1972, II (1.2.3.4)], we have

$$L_{B/A} = \text{colim}_\alpha L_{B_\alpha/A}.$$

By [Illusie, 1972, III 3.1.2 and II 2.3.6.3], $L_{B_\alpha/A}$ is cohomologically concentrated in degree zero and $H_0(L_{B_\alpha/A}) = \Omega_{B_\alpha/A}^1$ is projective of finite type over B_α , so the conclusion follows. $\square$

Proof of Proposition 2.4.3. The composition $ag': Z' \rightarrow S$ is locally of finite type. Since S is noetherian, ag' is locally of finite presentation, and so h' is locally of finite presentation too.

Next, we note that the question is local around a point $y = f(x) \in Z'$, $x \in Z$. In view of Lemma 2.4.4, by Lemma 2.4.5 applied to $Z \rightarrow Z' \rightarrow Y$ it suffices to show that $H_1(L_{Z/Y} \otimes^L k(x)) = 0$ and $H_2(L_{Z/Z'} \otimes^L k(x)) = 0$. As Z is regular over Y , the first vanishing follows from Lemma 2.4.6. For the second one, consider the exact sequence

$$H_2(L_{Z/X} \otimes^L k(x)) \rightarrow H_2(L_{Z/Z'} \otimes^L k(x)) \rightarrow H_1(L_{Z'/X} \otimes^L k(x)).$$

By the regularity of Z/X and Lemma 2.4.6, $H_2(L_{Z/X} \otimes^L k(x)) = 0$. As Z' is smooth over X , $H_1(L_{Z'/X} \otimes^L k(x)) = 0$ by Lemma 2.4.4, which proves the desired vanishing and finishes the proof. $\square$

Proof of Theorem 2.4.1. Find finite affine coverings $X = \bigcup_i X_i$, $Y = \bigcup_i Y_i$ and $Z = \bigcup_i Z_i$ such that $g(Z_i) \subset X_i$ and $h(Z_i) \subset Y_i$. Set $X' = \coprod_i X_i$, $Y' = \coprod_i Y_i$ and $Z' = \coprod_i Z_i$ and let $Z' \rightarrow X'$ and $Z' \rightarrow Y'$ be the induced morphisms. It suffices to check that $\mathcal{F}(X) \times_X Z$ and $\mathcal{F}(Y) \times_Y Z$ become equal after pulling them back to Z' . So, we should check that $(\mathcal{F}(X) \times_X X') \times_{X'} Z'$ coincides with $(\mathcal{F}(Y) \times_Y Y') \times_{Y'} Z'$. The morphisms $X' \rightarrow X$ and $Y' \rightarrow Y$ are smooth and hence contained in $\mathcal{S}^1$. So, $\mathcal{F}(X) \times_X X' = \mathcal{F}(X')$ and similarly for Y . In particular, it suffices to prove that $\mathcal{F}(X') \times_{X'} Z' = \mathcal{F}(Y') \times_{Y'} Z'$. This reduces the problem to the case when all schemes are affine, so in the sequel we assume that X, Y and Z are affine.

Next, note that it suffices to find factorizations $g = g_0 f$ and $h = h_0 f$, where $f: Z \rightarrow Z_0$ is a morphism with target in $\mathcal{S}^0$ and $g_0: Z_0 \rightarrow X$, $h_0: Z_0 \rightarrow Y$ are smooth. By Popescu's theorem, one can write $g: Z \rightarrow X$ as a filtering projective limit of affine smooth morphisms $g_\alpha: Z_\alpha \rightarrow X$, $\alpha \in A$. As Y is of finite type over S , h will factor through one of the Z_α 's ([ÉGA IV₃ 8.8.2.3]): there exists $\alpha \in A$, $f_\alpha: Z \rightarrow Z_\alpha$, $h_\alpha: Z_\alpha \rightarrow Y$ such that $g = g_\alpha f_\alpha$, $h = h_\alpha f_\alpha$. By Proposition 2.4.3, h_α is smooth around the image of f_α , so we can take Z_0 to be a sufficiently small neighborhood of the image of f_α . $\square$

3. Resolution of log regular log schemes

All schemes considered from now on will be assumed to be noetherian. Unless said to the contrary, by log structure we mean a log structure with respect to the étale topology. We will say that a log structure M_X on a scheme X is **Zariski** if $\varepsilon^* \varepsilon_* M_X \xrightarrow{\sim} M_X$, where $\varepsilon: X_{\text{ét}} \rightarrow X$ is the morphism between the étale and Zariski sites. In this case, we can safely view the log structure as a Zariski log structure. A similar convention will hold also for log schemes.

3.1. Fans. Many definitions/constructions on log schemes are of "combinatorial nature". Roughly speaking, these constructions use only multiplication and ignore addition. Naturally, there exists a category of geometric spaces whose structure sheaves are monoids, and most of combinatorial constructions can be described as "pullbacks" of analogous "monoidal" operations. The first definition of such a category was done by Kato in [Kato, 1994]. Kato called his spaces **fans** to stress their relation to the classical combinatorial fans obtained by gluing polyhedral cones. For example, to any combinatorial fan C one can naturally associate a fan $F(C)$ whose set of points is the set of faces of C . The main motivation for the definition is that fans can be naturally associated to various log schemes.

It took some time to discover that fans are sort of "piecewise schemes" rather than a monoidal version of schemes. A more geometric version of combinatorial schemes was introduced by Deitmar in [Deitmar, 2005]. He called them F_1 -schemes, but we prefer the terminology of monoschemes introduced by Ogus in his book project [Ogus, 2013]. Note that when working with a log scheme X , we use the sheaf M_X in some constructions and we use its sharpening $\overline{M}_X$ (see 3.1.1) in other constructions. Roughly speaking, monoschemes naturally arise when we work with M_X while fans naturally arise when we work with $\overline{M}_X$.

In §3, we will show that: (a) a functorial desingularization of toric varieties over $\mathbf{Q}$ descends to a desingularization of monoschemes, (b) to give the latter is more or less equivalent to give a desingularization of fans, (c) a desingularization of fans can be used to induce a monoidal desingularization of log schemes, (d) the latter induces a desingularization of log regular schemes, which (at least in some cases) depends only on the underlying scheme.

In principle, we could work locally, using desingularization of disjoint unions of all charts for synchronization. In this case, we could almost ignore the intermediate categories by working only with fine monoids and blow up towers of their spectra. However, we decided to emphasize the actual geometric objects beyond the constructions, and, especially, stress the difference between fans and monoschemes.

3.1.1. *Sharpening.* For a monoid M , by M^* we denote the group of its invertible elements, and its **sharpening** $\bar{M}$ is defined as M/M^* .

3.1.2. *Localization.* By **localization** of a monoid M along a subset S we mean the universal M -monoid M_S such that the image of S in M_S is contained in M_S^* . If M is integral then M_S is simply the submonoid $M[S^{-1}] \subset M^{\text{gp}}$ generated by M and S^{-1} . If M is a fine then any localization is isomorphic to a localization at a single element f , and will be denoted M_f .

3.1.3. *Spectra of fine monoids.* All our combinatorial objects will be glued from finitely many spectra of fine monoids. Recall that with any fine monoid P one can associate the set $\text{Spec}(P)$ of prime ideals (with the convention that $\emptyset$ is also a prime ideal) equipped with the Zariski topology whose basis is formed by the sets $D(f) = \{p \in \text{Spec}(P) \mid f \notin p\}$ for $f \in P$, see, for example, [Kato, 1994, §9]. The structure sheaf M_P is defined by $M_P(D(f)) = P_f$, and the sharp structure sheaf $\bar{M}_P = M_P/M_P^*$ is the sharpening of M_P (we will see in Remark 3.1.4(iii) that actually $\bar{M}_P(D(f)) = \bar{P}_f = P_f/(P_f^*)$, i.e. no sheafification is needed).

REMARK 3.1.4. (i) Since $P \setminus P^*$ and $\emptyset$ are the maximal and the minimal prime ideals of P , $\text{Spec}(P)$ possesses unique closed and generic points s and η . The latter is the only point whose stalk $M_{P,\eta} = P^{\text{gp}}$ is a group.

(ii) The set $\text{Spec}(P)$ is finite and its topology is the specialization topology, i.e. U is open if and only if it is closed under generizations. (More generally, this is true for any finite sober topological space, such as a scheme that has finitely many points.)

(iii) A subset $U \subset \text{Spec}(P)$ is affine (and even of the form $D(f)$) if and only if it is the localization of $\text{Spec}(P)$ at a point x (i.e. the set of all generizations of x). Any open covering $U = \bigcup_i U_i$ of an affine set is trivial (i.e. U is equal to some U_i), therefore any functor $\mathcal{F}(U)$ on affine sets uniquely extends to a sheaf on $\text{Spec}(P)$. In particular, this explains why no sheafification is needed when defining $\bar{M}_P$. Furthermore, we see that, roughly speaking, any notion/construction that is "defined in terms of" localizations X_x and stalks M_x or $\bar{M}_x$ is Zariski local. This is very different from the situation with schemes.

3.1.5. *Local homomorphisms of monoids.* Any monoid M is local because $M \setminus M^*$ is its unique maximal ideal. A homomorphism $f: M \rightarrow N$ of monoids is **local** if it takes the maximal ideal of M to the maximal ideal of N . This happens if and only if $f^{-1}(N^*) = M^*$.

3.1.6. *Monoidal spaces.* A **monoidal space** is a topological space X provided with a sheaf of monoids M_X . A morphism of monoidal spaces $(f, f^\#): (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ is a continuous map $f: Y \rightarrow X$ and a homomorphism $f^\#: f^{-1}(M_X) \rightarrow M_Y$ such that for any $y \in Y$ the homomorphism of monoids $f_y^\#: M_{X,f(y)} \rightarrow M_{Y,y}$ is local.

REMARK 3.1.7. Strictly speaking one should have called the above category the category of locally monoidal spaces and allow non-local homomorphisms in the general category of monoidal spaces. However, we will not use the larger category, so we prefer to abuse the terminology slightly.

Spectra of monoids possess the usual universal property, namely:

LEMMA 3.1.8. *Let (X, M_X) be a monoidal space and let P be a monoid.*

(i) *The global sections functor Γ induces a bijection between morphisms of monoidal spaces $(f, f^\#): (X, M_X) \rightarrow (\text{Spec}(P), M_P)$ and homomorphisms $\phi: P \rightarrow \Gamma(M_X)$.*

(ii) If M_X has sharp stalks then Γ induces a bijection between morphisms of monoidal spaces $(f, f^\#): (X, M_X) \rightarrow (\text{Spec}(P), \overline{M}_P)$ and homomorphisms $\phi: P \rightarrow \Gamma(M_X)$.

Proof. (i) Let us construct the opposite map. Given a homomorphism ϕ , for any $x \in X$ we obtain a homomorphism $\phi_x: P \rightarrow M_{X,x}$. Clearly, $\mathfrak{m} = P \setminus \phi_x^{-1}(M_{X,x}^*)$ is a prime ideal and hence ϕ_x factors through a uniquely defined local homomorphism $P_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{X,x}$. Setting $f(x) = \mathfrak{m}$ we obtain a map $f: X \rightarrow \text{Spec}(P)$, and the rest of the proof of (i) is straightforward.

If the stalks of M_X are sharp then any morphism $(X, M_X) \rightarrow (\text{Spec}(P), M_P)$ factors uniquely through $(\text{Spec}(P), \overline{M}_P)$. Also, $\Gamma(M_X)$ is sharp, hence any homomorphism to it from P factors uniquely through $\overline{P}$. Therefore, (ii) follows from (i). $\square$

3.1.9. Fine fans and monoschemes. A fine **monoscheme** (resp. a fine **fan**) is a monoidal space (X, M_X) that is locally isomorphic to $A_P = (\text{Spec}(P), M_P)$ (resp. $\overline{A}_P = (\text{Spec}(P), \overline{M}_P)$), where P is a fine monoid. We say that (X, M_X) is **affine** if it is isomorphic to A_P (resp. $\overline{A}_P$). A morphism of monoschemes (resp. fans) is a morphism of monoidal spaces. A monoscheme (resp. a fan) is called **torsion free** if it is covered by spectra of P 's with torsion free P^{gp} 's. It follows from Remark 3.1.4(iii) that this happens if and only if all groups $M_{X,x}^{\text{gp}}$ are torsion free.

REMARK 3.1.10. (i) Any fs fan is torsion free because if an fs monoid is torsion free then any of its localization is so. In particular, if P is fs and sharp then P^{gp} is torsion free. This is not true for general fine fans. For example, if $\mu_2 = \{\pm 1\}$ then $P = \mathbf{N} \oplus \mu_2 \setminus \{(0, -1)\}$ is a sharp monoid with $P^{\text{gp}} = \mathbf{Z} \oplus \mu_2$.

(ii) For any point x of a fine monoscheme (resp. fan) X the localization X_x that consists of all generizations of x is affine. In particular, by Remark 3.1.4(i) there exists a unique maximal point generizing x , and hence X is a disjoint union of irreducible components.

3.1.11. Comparison of monoschemes and fans. There is an obvious sharpening functor $(X, M_X) \mapsto (X, \overline{M}_X)$ from monoschemes to fans, and there is a natural morphism of monoidal spaces $(X, \overline{M}_X) \rightarrow (X, M_X)$. The sharpening functor loses information, and one needs to know M_X^{gp} to reconstruct M_X from $\overline{M}_X$ as a fibred product (see [Ogus, 2013]). Actually, there are much more fans than monoschemes. For example, the generic point $\eta \in \text{Spec}(P)$ is open and $\overline{M}_{P,\eta}$ is trivial hence for any pair of fine monoids P and Q we can glue their sharpened spectra along the generic points. What one gets is sort of "piecewise scheme" and, in general, it does not correspond to standard geometric objects, such as schemes or monoschemes. We conclude that, in general, fans can be lifted to monoschemes only locally.

REMARK 3.1.12. As a side remark we note that sharpened monoids naturally appear as structure sheaves of piecewise linear spaces (a work in progress of the second author on skeletons of Berkovich spaces). In particular, PL functions can be naturally interpreted as sections of the sharpened sheaf of linear functions on polytopes.

3.1.13. Local smoothness. A local homomorphism of fine monoids $\phi: P \rightarrow Q$ is called **smooth** if it can be extended to an isomorphism $P \oplus \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s \xrightarrow{\sim} Q$. The following lemma checks that this property is stable under localizations.

LEMMA 3.1.14. Assume that $\phi: P \rightarrow Q$ is smooth and P', Q' are localizations of P, Q such that ϕ extends to a local homomorphism $\phi': P' \rightarrow Q'$. Then ϕ' is smooth.

Proof. Recall that $P' = P_a$ for $a \in P$ (notation of 3.1.2), and ϕ' factors through the homomorphism $\phi_a: P' \rightarrow Q_a$, which is obviously smooth. Therefore, replacing ϕ with ϕ_a we can assume that $P = P'$. Let $b = (p, n, z) \in Q$ be such that $Q' = Q_b$. Then $p \in P^*$ because $P \rightarrow Q'$ is local, and hence Q' is isomorphic to $P \oplus (\mathbf{N}^r)_n \oplus \mathbf{Z}^s$. It remains to note that any localization of $\mathbf{N}^r$ is of the form $\mathbf{N}^{r-t} \oplus \mathbf{Z}^t$. $\square$

3.1.15. Smoothness. The lemma enables us to globalize the notion of smoothness: a morphism $f: Y \rightarrow X$ of monoschemes is called **smooth** if the homomorphisms of stalks $M_{X,f(y)} \rightarrow M_{Y,y}$ are smooth. In particular, X is smooth if its morphism to $\text{Spec}(1)$ is smooth, that is, the stalks $M_{X,x}$ are of the form $\mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s$. In particular, a smooth monoscheme is torsion free.

Analogous smoothness definitions are given for fans. Moreover, in this case we can consider only sharp monoids, and then the group component $\mathbf{Z}^s$ is automatically trivial. It follows that we can rewrite the above paragraph almost *verbatim* but with $s = 0$. Obviously, a morphism of torsion free fs monoschemes is smooth if and only if its sharpening is a smooth morphism of fans.

REMARK 3.1.16. (i) Recall that any fine monoscheme X admits an open affine covering $X = \bigcup_{x \in X} \text{Spec}(M_{X,x})$. It follows that a morphism of fine monoschemes $f: Y \rightarrow X$ is smooth if and only if it is covered by open affine charts of the form $\text{Spec}(P \oplus \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s) \rightarrow \text{Spec}(P)$.

(ii) Smooth morphisms of fine fans admit a similar local description, and we leave the details to the reader.

3.1.17. *Saturation.* As usually, for a fine monoid P we denote its saturation by P^{sat} (it consists of all $x \in P^{\text{gp}}$ with $x^n \in P$ for some $n > 0$). Saturation is compatible with localizations and sharpening and hence extends to a saturation functor $F \mapsto F^{\text{sat}}$ on the categories of fine monoschemes (resp. fine fans). We also have a natural morphism $F^{\text{sat}} \rightarrow F$, which is easily seen to be bijective. So, actually, $(F, M_F)^{\text{sat}} = (F, M_F^{\text{sat}})$.

3.1.18. *Ideals.* A subsheaf of ideals $\mathcal{I} \subset M_X$ on a monoscheme (X, M_X) is called a **coherent ideal** if for any point $x \in X$ the restriction of $\mathcal{I}$ on X_x coincides with $\mathcal{I}_x M_{X_x}$. (Due to Remark 3.1.4(iii) this means that $\mathcal{I}$ is coherent in the usual sense, i.e. its restriction on an open affine submonoscheme U is generated by the global sections over U .) We will consider only coherent ideals, so we will omit the word "coherent" as a rule. An ideal $\mathcal{I} \subset M_X$ is **invertible** if it is locally generated by a single element.

3.1.19. *Blow ups.* Similarly to schemes, for any ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ there exists a universal morphism of monoschemes $h: X' \rightarrow X$ such that the *pullback ideal* $h^{-1}\mathcal{I} = \mathcal{I} M_{X'}$ is invertible. We call $\mathcal{I}$ the **center** of the blow up. (One does not have an adequate notion of closed submonoscheme, so unlike blow ups of the scheme it would not make sense to say that " $V(\mathcal{I})$ " is the center.) An explicit construction of X' copies its scheme analog: it is local on the base and for an affine $X = \text{Spec}(P)$ with an ideal $I \subset P$ corresponding to $\mathcal{I}$ one glues X' from the charts $\text{Spec}(P[a^{-1}I])$, where $a \in I$ and $P[a^{-1}I]$ is the submonoid of P^{gp} generated by the fractions b/a for $b \in I$ (see [Ogus, 2013] for details).

REMARK 3.1.20. Blow ups induce isomorphisms on the stalks of M^{gp} ; this is an analog of the fact that blow ups of schemes along nowhere dense subschemes are birational morphisms.

3.1.21. *Saturated blow ups.* Analogously to normalized blow ups, one defines **saturated blow up** of a monoscheme X along an ideal $\mathcal{I} \subset M_X$ as the saturation of $\text{Bl}_{\mathcal{I}}(X)$. The same argument as for schemes shows that $\text{Bl}_{\mathcal{I}}(X)^{\text{sat}}$ is the universal saturated X -monoscheme such that the pullback of $\mathcal{I}$ is invertible.

3.1.22. *Towers and pullbacks.* Towers of (saturated) blow ups of a monoscheme X are defined analogously to towers of (normalized) blow ups. In particular, saturated towers start with the saturation morphism $X_0 \rightarrow X_{-1}$. Given such a tower $X_{\bullet}$ with $X = X_0$ (resp. $X_{-1} = X$) and a morphism $f: Y \rightarrow X$ we define the **pullback tower** $Y_{\bullet} = f^*(X_{\bullet})$ as follows: $Y_0 = Y$ (resp. $Y_{-1} = Y$) and Y_{i+1} is the (saturated) blow up of Y_i along the pullback of the center $\mathcal{I}_i$ of $X_{i+1} \rightarrow X_i$. Due to the universal property of (saturated) blow ups this definition makes sense and $Y_{\bullet}$ is the universal (saturated) blow up tower of Y that admits a morphism to $X_{\bullet}$ extending f .

REMARK 3.1.23. Unlike pullbacks of (normalized) blow up towers of schemes, see 2.1.7 and 2.2.8, we do not distinguish strict transforms and pullbacks. The above definition of pullback covers our needs, and we do not have to study the base change of monoschemes. For the sake of completeness, we note that fibred products of monoschemes exist and in the affine case are defined by amalgamated sums of monoids, see [Deitmar, 2005]. Also, it is easy to check that for a smooth f (which is the only case we will use) one indeed has that $f^*(X_{\bullet}) = X_{\bullet} \times_X Y$ for any (saturated) blow up tower $X_{\bullet}$. For blow ups one checks this with charts and in the saturated case one also uses that saturation is compatible with a smooth morphism $f: Y \rightarrow X$, i.e. $Y^{\text{sat}} \xrightarrow{\sim} X^{\text{sat}} \times_X Y$.

3.1.24. *Compatibility with sharpening.* Ideals and blow ups of fans are defined in the same way, but with $\overline{M}_X$ used instead of M_X (Kato defines their saturated version in [Kato, 1994, 9.7]). Towers of blow ups of fans are defined in the obvious way.

LEMMA 3.1.25. *Let $X = (X, M_X)$ be a monoscheme, let $(F, M_F) = (X, \overline{M}_X)$ be the corresponding fan and let $\lambda: M_X \rightarrow M_F$ denote the sharpening homomorphism.*

- (i) $\mathcal{I} \mapsto \lambda(\mathcal{I})$ induces a natural bijection between the ideals on X and on F .
- (ii) Blow ups are compatible with sharpening, that is, the sharpening of $\text{Bl}_{\mathcal{I}}(X)$ is naturally isomorphic to $\text{Bl}_{\lambda(\mathcal{I})}(F)$. The same statement holds for saturated blow ups.
- (iii) Sharpening induces a natural bijection between the (saturated) blow up towers of X and F .

Proof. (i) is obvious. (ii) is shown by comparing the blow up charts. Combining (i) and (ii), we obtain (iii). $\square$

3.1.26. *Desingularization.* Using the above notions of smoothness and blow ups, one can copy other definitions of the desingularization theory. By a **desingularization** (resp. **saturated desingularization**) of a fine monoscheme X we mean a blow up tower (resp. saturated blow up tower) $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ (resp. $X_n \dashrightarrow X_{-1} = X$) with smooth X_n . By Remark 3.1.20, if X admits a desingularization then it is torsion free, and we will later see that the converse is also true.

For concreteness, we consider below non-saturated desingularizations, but everything extends to the saturated case verbatim. A family $\mathcal{F}^{\text{mono}}(X)$ of desingularizations of torsion free monoschemes is called **functorial** (with respect to smooth morphisms) if for any smooth $f: Y \rightarrow X$ the desingularization $\mathcal{F}^{\text{mono}}(Y)$ is the contracted pullback of $\mathcal{F}^{\text{mono}}(X)$. The same argument as for schemes (see Remark 2.3.5(ii)) shows that $\mathcal{F}^{\text{mono}}$ is already determined by its restriction to the family of finite disjoint unions of affine monoschemes.

The definition of a functorial desingularization $\mathcal{F}^{\text{fan}}$ of fine torsion free fans is similar. Since blow up towers and smoothness are compatible with the sharpening functor, it follows that a desingularization of a monoscheme X induces a desingularization of its sharpening. Moreover, any affine fan can be lifted to an affine monoscheme and $\mathcal{F}^{\text{fan}}$ is determined by its restriction onto disjoint unions of affine fans, hence we obtain the following result.

THEOREM 3.1.27. *The sharpening functor induces a natural bijection between functorial desingularizations of quasi-compact fine torsion free monoschemes and functorial desingularizations of quasi-compact fine torsion free fans. A similar statement holds for saturated desingularizations.*

REMARK 3.1.28. Similarly to the normalization of a desingularization tower, to any desingularization $\mathcal{F}$ of monoschemes or fans one can associate a saturated desingularization $\mathcal{F}^{\text{sat}}$: one replaces all levels of the towers, except the zero level, with their saturations. In this case blow ups are replaced with saturated blow ups along the pulled back ideals. If $\mathcal{F}$ is functorial with respect to all smooth morphisms then the same is true for $\mathcal{F}^{\text{sat}}$. Indeed, for any smooth $Y \rightarrow X$ the centers of $\mathcal{F}(Y)$, $\mathcal{F}^{\text{sat}}(X)$ and $\mathcal{F}^{\text{sat}}(Y)$ are the pullbacks of those of $\mathcal{F}(X)$. In addition, the saturation construction is compatible with the bijections from Theorem 3.1.27 in the obvious way.

REMARK 3.1.29. In principle, (saturated) desingularization of fans or monoschemes can be described in purely combinatorial terms of fans and their subdivisions (e.g. see [Kato, 1994, 9.6] or [Niziol, 2006, §4]). However, it is not easy to construct a functorial one directly. We will instead use a relation between monoschemes and toric varieties to descend desingularization of toric varieties to monoschemes and fans.

3.2. Monoschemes and toric varieties.

3.2.1. *Base change from monoschemes to schemes.* Let S be a scheme. The following proposition introduces a functor from monoschemes to S -schemes that can be intuitively viewed as a base change with respect to a "morphism" $S \rightarrow \text{Spec}(1)$.

PROPOSITION 3.2.2. *Let S be a scheme and F be a monoscheme. Then there exists an S -scheme $X = S[F]$ with a morphism of monoidal spaces $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$ such that any morphism $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (F, M_F)$, where Y is an S -scheme, factors uniquely through f .*

Proof. Assume, first, that $F = \operatorname{Spec}(P)$ is affine. By Lemma 3.1.8(i), to give a morphism $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (F, M_F)$ is equivalent to give a homomorphism of monoids $\phi: P \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_Y)$, and the latter factors uniquely through a homomorphism of sheaves of rings $\mathcal{O}_S[P] \rightarrow \mathcal{O}_Y$. It follows that $S[F] = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S[P])$ in this case. Since the above formula is compatible with localizations by elements $a \in P$, i.e. $S[F_a] \xrightarrow{\sim} S[F]_{\phi(a)}$, it globalizes to the case of an arbitrary monoscheme. Thus, for a general monoscheme F covered by $F_i = \operatorname{Spec}(P_i)$, the scheme $S[F]$ is glued from $S[F_i]$. $\square$

REMARK 3.2.3. Note that if $S = \operatorname{Spec}(R)$ and $F = \operatorname{Spec}(P)$ then $S[F] = \operatorname{Spec}(R[P])$. However, we will often consider an "intermediate" situation where $S = \operatorname{Spec}(R)$ is affine and F is a general monoscheme. To simplify notation, we will abuse them by writing $R[F]$ instead of $\operatorname{Spec}(R[F])$. Such "mixed" notation will always refer to a scheme.

3.2.4. *Toric schemes.* If F is torsion free and connected then we call $S[F]$ a **toric scheme** over S . Recall that by Remark 3.1.10(ii), F possesses a unique maximal point $\eta = \operatorname{Spec}(P^{\text{gp}})$, where $\operatorname{Spec}(P)$ is any affine open submonoscheme. Hence $X = S[F]$ possesses a dense open subscheme $T = S[\eta]$, which is a split torus over S , and the action of T on itself naturally extends to the action of T on X .

REMARK 3.2.5. Assume that $S = \operatorname{Spec}(k)$ where k is a field. Classically, a toric k -variety is defined as a normal finite type separated k -scheme X that contains a split torus T as a dense open subscheme such that the action of T on itself extends to the whole X . If F is saturated then our definition above is equivalent to the classical one. However, we also consider non-normal toric varieties corresponding to non-saturated monoids.

3.2.6. *Canonical log structures.* For any monoscheme F , the S -scheme $X = S[F]$ possesses a natural log structure induced by the universal morphism $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$. Namely, M_X is the log structure associated with the pre-log structure $g^{-1}M_F \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$, where $g: (X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$ is the composition. We call M_X the **canonical** log structure of $X = S[F]$.

REMARK 3.2.7. (i) The canonical log structure is Zariski, as $\varepsilon_* M_X$ coincides with the Zariski log structure associated with the pre-log structure $f^{-1}M_F \rightarrow \mathcal{O}_X$.

(ii) The log scheme $(X = S[F], M_X)$ is log smooth over the scheme S provided with the trivial log structure. In particular, if S is regular and F is saturated then (X, M_X) is fs and log regular. Without the saturation assumption we still have that $X^{\text{sat}} \xrightarrow{\sim} S[F^{\text{sat}}]$ is log regular, hence X is log regular in the sense of Gabber (see §3.5).

(iii) If η is the set of generic points of F then $T = S[\eta]$ is the open subset of X which is the triviality set of its log structure. However, the map $M_X \rightarrow \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_T^*$ is not an isomorphism in general, as the case where $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \subset X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t^2, t^3]$ already shows: the image of $t^2 + t^3$ in $\mathcal{O}_{X, \{0\}}$ belongs to $(j_* \mathcal{O}_T^*)_{\{0\}}$, but does not belong to $M_{\{0\}} = t^P \mathcal{O}_{X, \{0\}}^*$, where P is the (fine, but not saturated) submonoid of $\mathbb{N}$ generated by 2 and 3. (We use that $\mathcal{O}_{X, \{0\}}$ is strictly smaller than its normalization $\mathbb{C}[t]_{(t)} = \mathcal{O}_{X, \{0\}}[t]$ and hence $\frac{t^2+t^3}{t^2} = 1+t$ is not contained in $\mathcal{O}_{X, \{0\}}$.)

3.2.8. *Toric saturation.* Saturation of monoschemes corresponds to normalization of schemes. This will play an essential role later, since we get a combinatorial description of the normalization.

LEMMA 3.2.9. *If S is a normal scheme and F is a fine torsion free monoscheme then there is a natural isomorphism $S[F]^{\text{nor}} \xrightarrow{\sim} S[F^{\text{sat}}]$.*

Proof. Note that $f: \mathbf{Z}[F^{\text{sat}}] \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ is a flat morphism and its fibers are normal because they are classical toric varieties $\mathbf{F}_p[F^{\text{sat}}]$. So, $f \times S: S[F^{\text{sat}}] \rightarrow S$ is a flat morphism with normal fibers and normal target, and we obtain that its source is normal by [Matsumura, 1980a, 21.E(iii)]. It remains to note that $S[F^{\text{sat}}] \rightarrow S[F]$ is a finite morphism inducing isomorphism of dense open subschemes $S[F^{\text{gp}}]$, hence $S[F^{\text{sat}}]$ is the normalization of $S[F]$. $\square$

REMARK 3.2.10. The same argument shows that if S is Cohen-Macaulay then so is $S[F^{\text{sat}}]$.

3.2.11. *Toric smoothness.* Next, let us compare smoothness of morphisms of monoschemes as defined in 3.1.15 and classical smoothness of toric morphisms. The following lemma slightly extends the classical result (e.g. see [Fulton, 1993, §2.1]) that if P is fs and $\mathbf{C}[P]$ is regular then $P \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s$.

LEMMA 3.2.12. *Let $f: F \rightarrow F'$ be a morphism of fine monoschemes and let S be a non-empty scheme.*

(i) *If f is smooth then $S[f]$ is smooth (as a morphism of schemes).*

(ii) *If F is torsion free and the morphism $S[F] \rightarrow S$ is smooth then F is smooth.*

Proof. Part (i) is obvious, so let us check (ii). We can also assume that $F = \text{Spec}(P)$ is affine. Also, we can replace S with any of its points achieving that $S = \text{Spec}(k)$. Then P is a fine torsion free monoid and $k[P] \subset k[P^{\text{gp}}] \xrightarrow{\sim} k[\mathbf{Z}^n]$. It follows that $X = \text{Spec}(k[P])$ is an integral smooth k -variety of dimension n . Note that $\text{Spec}(k[P^{\text{sat}}])$ is a finite modification of X which is generically an isomorphism. Since X is normal we have that $\text{Spec}(k[P^{\text{sat}}]) \xrightarrow{\sim} X$, and it follows that P is saturated. Now, $P \xrightarrow{\sim} \bar{P} \oplus \mathbf{Z}^l$ and hence $X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(k[\bar{P}]) \times_k \mathbf{G}_m^l$. Obviously, $\text{Spec}(k[\bar{P}])$ is smooth of dimension $r = n - l$ and our task reduces to showing that $\bar{P} \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^r$.

Let $\mathfrak{m} = \bar{P} \setminus \{1\}$ be the maximal ideal of $\bar{P}$. Then $I = k[\mathfrak{m}]$ is a maximal ideal of $k[\bar{P}]$ with residue field k . In particular, by k -smoothness of $k[\bar{P}]$ we have that $\dim_k(I/I^2) = r$. On the other hand, $I = \bigoplus_{x \in \mathfrak{m}} xk$ and $I^2 = \bigoplus_{x \in \mathfrak{m}^2} xk$, hence $I/I^2 \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2} xk$ and we obtain that $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ consists of r elements $t_1, \dots, t_r$. Note that these elements generate $\bar{P}$ as a monoid and hence they generate $\bar{P}^{\text{gp}}$ as a group. Since $\bar{P}^{\text{gp}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^r$, the elements $t_1, \dots, t_r$ are linearly independent in $\bar{P}^{\text{gp}}$, and we obtain that the surjection $\bigoplus_{i=1}^r t_i \mathbf{N} \rightarrow \bar{P}$ is an isomorphism. $\square$

REMARK 3.2.13. It seems very probable that, much more generally, f is smooth whenever $S[f]$ is smooth as a morphism of schemes and one of the following conditions holds: (a) S has points in all characteristics, (b) the homomorphisms $M_{F',x}^{\text{gp}} \rightarrow M_{F,x}^{\text{gp}}$ induced by f have torsion free kernels and cokernels. We could prove this either in the saturated case or under some milder but unnatural restrictions. The main ideas are similar but the proof becomes more technical. We do not develop this direction here since the lemma covers our needs.

3.2.14. *Toric ideals.* Let F be a torsion free monoscheme, k be a field and $X = k[F]$. For any ideal $\mathcal{J}$ on F one naturally defines an ideal $k[\mathcal{J}]$ on X : in local charts, an ideal $I \subset P$ goes to the ideal $\text{Ik}[P] = k[I] = \bigoplus_{a \in I} ak$ in $k[P]$. We say that $\mathcal{J} = k[\mathcal{J}]$ is a **monoidal ideal** on $k[F]$. Note that $\mathcal{J}$ determines $\mathcal{J}$ uniquely via the following equality, which is obvious in local charts: $f^* \mathcal{J} = \mathcal{J} \cap M_X$, where $f: X \rightarrow F$ is the natural map.

LEMMA 3.2.15. *Assume that F is connected, η is its maximal point, $X = k[F]$, and $T = k[\eta]$ is the torus of the toric scheme X . A coherent ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ is T -equivariant if and only if it is monoidal.*

Proof. Any monoidal ideal is obviously T -equivariant, so let us prove the inverse implication. The claim is local on F , so we should prove that any T -equivariant ideal $J \subset A = k[P]$ is of the form $k[I]$ for a unique ideal I of P . Consider the coaction homomorphism $\mu: A \rightarrow A \otimes_k k[P^{\text{gp}}] = B$. The equivariance of J means that JB (with respect to the embedding $A \hookrightarrow A \otimes_k k[P^{\text{gp}}]$) is equal to $\mu(J)B$. In particular, $\mu|_J: J \rightarrow JB = J \otimes_k k[P^{\text{gp}}]$ induces a P^{gp} -grading on J compatible with the P^{gp} -grading $A = \bigoplus_{\gamma \in P} A_\gamma$. Thus, J is a homogeneous ideal in A and, since $A_1 = k$ is a field and each k -module A_γ is of rank one, we obtain that $J = \bigoplus_{\gamma \in I} A_\gamma$ for a subset $I \subset P$. Thus, $J = k[I]$, and clearly I is an ideal. $\square$

3.2.16. *Toric blow ups.* We will also need the well known fact that toric blow ups are of combinatorial origin, i.e. they are induced from blow ups of monoschemes.

LEMMA 3.2.17. *Assume that F is a monoscheme, $\mathcal{J} \subset M_F$ is an ideal, $X = k[F]$, and $\mathcal{J} = k[\mathcal{J}]$. Then there is a canonical isomorphism $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X) \xrightarrow{\sim} k[\text{Bl}_{\mathcal{J}}(F)]$.*

Proof. Assume first that $F = \text{Spec}(P)$. Then $\mathcal{J}$ corresponds to an ideal $I \subset P$ and we can simply compare charts: $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(F)$ is covered by the charts $\text{Spec}(P[a^{-1}I])$ for $a \in I$, and, since I generates J , the

charts $k[a^{-1}J] = k[P[a^{-1}I]]$ cover $\mathrm{Bl}_I(X)$. This construction is compatible with localizations $(P, I) \mapsto (P_b, b^{-1}I)$ hence it globalizes to the case of a general fine monoscheme with an ideal. $\square$

Using Lemma 3.2.9 we obtain a similar relation between saturated blow ups and normalized toric blow ups.

COROLLARY 3.2.18. *Keep notation of Lemma 3.2.17 and assume that F is torsion free. Then $\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X)^{\mathrm{nor}} \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(F)^{\mathrm{sat}}]$.*

3.2.19. Desingularization of monoschemes. Let F be a torsion free monoscheme and $X = k[F]$ for a field k of characteristic zero (e.g. $k = \mathbf{Q}$). Recall that the normalized desingularization functor $\widetilde{\mathcal{F}}$ from 2.3.9 is compatible with the action of any smooth k -group, hence the centers of $\widetilde{\mathcal{F}}(X): X_n \dashrightarrow X_{n-1} = X$ are T -equivariant ideals. By Lemma 3.2.15, the blown up ideal of $X_0 = k[F^{\mathrm{sat}}]$ is of the form $k[\mathcal{I}]$ for an ideal $\mathcal{I} \subset M_{F^{\mathrm{sat}}}$, hence $X_1 = k[F_1]$ for $F_1 = \mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(F^{\mathrm{sat}})^{\mathrm{sat}}$ by Lemma 3.2.18. Applying this argument inductively we obtain that the entire normalized blow up tower $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$ descends to a saturated blow up tower of F , which we denote as $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}(F)$ (in other words, $\widetilde{\mathcal{F}}(X) = k[\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}(F)]$). Since F_n is smooth by Lemma 3.2.12(ii), the tower $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}(F)$ is a desingularization of F . Moreover, part (i) of the same lemma implies that $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}$ is functorial with respect to smooth morphisms of monoschemes. Namely, for any smooth morphism $F' \rightarrow F$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}(F')$ is the contracted pullback of $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}(F)$ (see 3.1.22). Inspecting what is needed for 2.3.17, one obtains:

THEOREM 3.2.20. *Let k be a field and let $\widetilde{\mathcal{F}}$ be a normalized desingularization of finite disjoint unions of toric k -varieties which is functorial with respect to smooth toric morphisms. Then each normalized blow up tower $\widetilde{\mathcal{F}}(k[F])$ is the pullback of a uniquely defined saturated blow up tower of monoschemes $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}}(F)$. This construction produces a saturated desingularization of quasi-compact fine torsion free monoschemes which is functorial with respect to smooth morphisms.*

Combining theorems 3.1.27 and 3.2.20 we obtain a functorial saturated desingularization of fans that will be denoted $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{fan}}$.

REMARK 3.2.21. We will work with normalized and saturated desingularizations, so we formulated the theorem for $\widetilde{\mathcal{F}}$. The same argument shows that $\mathcal{F}$ induces desingularizations $\mathcal{F}^{\mathrm{mono}}$ and $\mathcal{F}^{\mathrm{fan}}$ that are functorial with respect to all smooth morphisms. Moreover, the descent from toric desingularization is compatible with normalization/saturation, i.e. $\widetilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{mono}} = (\mathcal{F}^{\mathrm{mono}})^{\mathrm{sat}}$ and similarly for fans.

3.3. Monoidal desingularization. In this section we will establish, what we call, monoidal desingularization of fine log schemes (X, M_X) . This operation "resolves" the sheaf $\overline{M}_X$ but does not "improve" the log strata of X .

3.3.1. Log stratification. Using charts one immediately checks that for any fine log scheme (X, M_X) the monoidal rank function $x \mapsto \mathrm{rank}(\overline{M}_x^{\mathrm{gp}})$ is upper semicontinuous. The corresponding stratification of X , whose strata $X^{(i)}$ are the locally closed subsets on which the monoidal rank function equals to i , will be called the **log stratification**. We remark that the analogous stratification in VI-1.5 was called canonical or stratification by rank.

REMARK 3.3.2. Sometimes it is more convenient to work with the **local log stratification** of (X, M_X) whose strata are the maximal connected non-empty locally closed subsets of X on which the monoidal rank function is constant. This stratification is obtained from the log stratification by replacing each stratum with the set of its connected components, in particular, all empty strata are discarded. For example, this stratification showed up in VI-3.9.

3.3.3. Monoscheme charts of log schemes. A (global) **monoscheme chart** of a Zariski log scheme (X, M_X) is a morphism of monoidal spaces $c: (X, \varepsilon_* M_X) \rightarrow (F, M_F)$ such that the target is a monoscheme and $\varepsilon_* M_X$ is isomorphic to the Zariski log structure associated with the pre-log structure $c^{-1}M_F \rightarrow \mathcal{O}_X$ (obtained as $c^{-1}M_F \rightarrow M_X \rightarrow \mathcal{O}_X$). In particular, M_X is the log structure

associated with $(c \circ \varepsilon)^{-1}M_F \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$. We say that the chart is **fine** if (F, M_F) is so. For example, any toric scheme $R[F]$, where F is a monoscheme, possesses a canonical chart $R[F] \rightarrow F$.

LEMMA 3.3.4. *Let (X, M_X) be a log scheme and let (F, M_F) be a monoscheme. Then any morphism of monoidal spaces $f: (X, M_X) \rightarrow (F, M_F)$ factors uniquely into the composition of a morphism of log schemes $(X, M_X) \rightarrow \mathbf{Z}[F]$ and the canonical chart $\mathbf{Z}[F] \rightarrow F$.*

Proof. Note that $(\text{Id}_X, \alpha): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, M_X)$ is a morphism of monoidal spaces, hence so is the composition $h: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$. If $F = \text{Spec}(P)$ then h is determined by the homomorphism $P \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$ by Lemma 3.1.8. Since the latter factors uniquely into the composition of the homomorphism of monoids $P \rightarrow \mathbf{Z}[P]$ and the homomorphism of rings $\mathbf{Z}[P] \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$, we obtain a canonical factoring $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P]) \rightarrow \text{Spec}(P)$. Furthermore, this affine construction is compatible with localizations of P , hence it globalizes to the case when the monoscheme F is arbitrary. $\square$

REMARK 3.3.5. (i) Usually, one works with log schemes using local charts $(X, M_X) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$. By Lemma 3.3.4 this is equivalent to working with affine monoscheme charts.

(ii) In particular, any fine log scheme (X, M_X) admits a fine monoscheme chart étale locally, i.e., there exists a strict (in the log sense) étale covering $(Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ whose source possesses a fine monoscheme chart. Similarly, any Zariski fine log scheme admits a fine monoscheme chart Zariski locally.

3.3.6. *Chart base change.* Given a fine monoscheme chart $(X, M_X) \rightarrow F$ and a morphism of monoschemes $F' \rightarrow F$ we will write $(X, M_X) \times_F F'$ instead of $(X, M_X) \times_{\mathbf{Z}[F]} \mathbf{Z}[F']$, where the second product is taken in the category of fine log schemes. This notation is partially justified by the following result.

LEMMA 3.3.7. *Keep the above notation and let $(X', M_{X'}) = (X, M_X) \times_F F'$.*

(i) *The morphism $c': (X', M_{X'}) \rightarrow F'$ is a monoscheme chart.*

(ii) *If (Y, M_Y) is a log scheme over (X, M_X) and $d: (Y, M_Y) \rightarrow F$ is the induced morphism of monoidal spaces, then any lifting of d to a morphism $(Y, M_Y) \rightarrow F'$ factors uniquely through c' .*

Proof. Strictness is stable under base changes, hence $(X', M_{X'}) \rightarrow \mathbf{Z}[F']$ is strict and we obtain (i). The assertion of (ii) is a consequence of Lemma 3.3.4. $\square$

3.3.8. *Log ideals.* By a **log ideal** on a fine log scheme (X, M_X) we mean any ideal $\mathcal{I} \subset M_X$ that étale locally on X admits a coherent chart as follows: there exists a strict étale covering $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$, a fine monoscheme chart $c: (Y, M_Y) \rightarrow F$ and a coherent ideal $\mathcal{I}_F \subset M_F$ such that $f^{-1}(\mathcal{I})M_Y = c^{-1}(\mathcal{I}_F)M_Y$.

3.3.9. *Log blow ups.* It is proved in [Niziol, 2006, 4.2] that there exists a universal morphism $f: (X', M_{X'}) \rightarrow (X, M_X)$ such that the ideal $f^{-1}(\mathcal{I})M_{X'}$ is invertible, i.e. locally (in the étale topology) generated by one element. (We use here that, unlike rings, any principal ideal aM of an integral monoid M is invertible in the usual sense, i.e. $M \xrightarrow{\sim} aM$ as M -sets.) Actually, the formulation in [Niziol, 2006] refers only to saturated blow ups, but the proof deals also with the non-saturated ones.

The construction of log blow ups is standard and it also shows that they are compatible with arbitrary strict morphisms. If (X, M_X) and $\mathcal{I}$ admit a chart F , $\mathcal{I} \subset M_F$ then $(X', M_{X'}) = (X, M_X) \times_F \text{Bl}_{\mathcal{I}}(F)$ is as required. If $(Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ is strict then F is also a chart of (Y, M_Y) , hence the local construction is compatible with strict morphisms. The general case now follows by descent because any fine log scheme admits a chart étale locally. We call f the **log blow up** of (X, M_X) along $\mathcal{I}$ and denote it $\text{LogBl}_{\mathcal{I}}(X, M_X)$ (it is called unsaturated log blow up in [Niziol, 2006]). Log blow up towers are defined in the obvious way. As usual, contraction of such a tower is obtained by removing all empty log blow ups (i.e. blow ups along $\mathcal{I} = M_X$).

3.3.10. *Saturated log blow ups.* Saturated log blow up along a log ideal $\mathcal{I}$ is defined as $(\text{LogBl}_{\mathcal{I}}(X, M_X))^{\text{sat}}$. It satisfies an obvious universal property too. (It is called log blow up in [Niziol, 2006]). Towers of saturated log blow ups, their pullbacks, and saturation of a tower of log blow ups are defined in the obvious way.

3.3.11. *Pullbacks.* Let $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ be a morphism of log schemes. By **pullback** of the log blow up $\text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, M_X)$ along a log ideal $\mathcal{J} \subset M_X$ we mean the log blow up $\text{LogBl}_{\mathcal{J}}(Y, M_Y)$, where $\mathcal{J} = f^{-1}(\mathcal{J})M_Y$. This is the universal log scheme over (Y, M_Y) whose morphism to (X, M_X) factors through $\text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, M_X)$. The pullback of saturated blow ups is defined similarly, and these definitions extend inductively to pullbacks of towers of (saturated) log blow ups.

3.3.12. *Basic properties.* Despite the similarity with usual blow ups of schemes, log blow ups (resp. saturated log blow ups) have nice properties that are not satisfied by usual blow ups. First, it is proved in [Nizioł, 2006, 4.8] that log blow ups are compatible with any log base change $f: Y \rightarrow X$, i.e. $\text{LogBl}_{f^{-1}(\mathcal{J})}(Y) \xrightarrow{\sim} \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X) \times_X Y$ for a monoidal ideal $\mathcal{J}$ on X . In particular, saturated blow ups are compatible with saturated base changes. Second, log blow ups (resp. saturated log blow ups) are log étale morphisms because so are both saturation morphisms and charts of the form $\mathbf{Z}[\text{Bl}_{\mathcal{J}}(F)] \rightarrow \mathbf{Z}[F]$.

3.3.13. *Fan charts.* A **fan chart** of a Zariski log scheme (X, M_X) is a morphism $d: (X, \varepsilon_* \overline{M}_X) \rightarrow (F, M_F)$ of monoidal spaces such that the target is a fan and $d^{-1}(M_F) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_* \overline{M}_X$. For example, for any monoscheme chart $c: (X, \varepsilon_* M_X) \rightarrow (F, M_F)$, its sharpening $\bar{c}: (X, \varepsilon_* \overline{M}_X) \rightarrow (F, \overline{M}_F)$ is a fan chart. Fan charts were considered by Kato (e.g., in [Kato, 1994, 9.9]). They contain less information than monoscheme charts, but "remember everything about ideals and blow ups" because there is a one-to-one correspondence between ideals and blow up towers of M_F and $\overline{M}_F$. Let us make this observation rigorous. For concreteness, we discuss only non-saturated (log) blow ups, but everything easily extends to the saturated case.

REMARK 3.3.14. (i) Assume that $\bar{c}: (X, \overline{M}_X) \rightarrow (F, \overline{M}_F)$ is a fan chart. Any ideal $\mathcal{J}_F \subset M_F$ induces a log ideal $\mathcal{J} \subset M_X$, which is the preimage of $\bar{c}^{-1}(\mathcal{J}_F)\overline{M}_X$ under $M_X \rightarrow \overline{M}_X$. We say that the blow up $F' = \text{Bl}(\mathcal{J}_F)$ induces the log blow up $(X', \overline{M}_{X'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, \overline{M}_X)$ or that the latter log blow up is the **pullback** of $\text{Bl}(\mathcal{J}_F)$. Furthermore, $(X', \overline{M}_{X'}) \rightarrow F'$ is also a fan chart (see [Kato, 1994, 9.9], where the fs case is treated), hence this definition iterates to a tower $F_\bullet$ of blow ups of F . We will denote the pullback tower of log blow ups as $\bar{c}^*(F_\bullet)$.

(ii) By a slight abuse of notation, Kato and Nizioł denote $\bar{c}^*(F_\bullet)$ as $(X, M_X) \times_F F_\bullet$. One should be very careful with this notation because, in general, there is no morphism $(X, M_X) \rightarrow F$ that lifts $\bar{c}$. Also, one cannot define analogous "base change" for an arbitrary morphism of fans $F' \rightarrow F$. The reason is that there are many "unnatural" gluings in the category of fans (e.g. along generic points), and such gluings cannot be lifted to log schemes (and even to monoschemes).

(iii) For blow up towers, however, the base change notation is safe and agrees with the base change from the monoschemes. Namely, if $\bar{c}$ is the sharpening of a monoscheme chart $c: (X, M_X) \rightarrow (F, M_F)$ then there exists a one-to-one correspondence between blow up towers of the monoscheme $F = (F, M_F)$ and the fan $\bar{F} = (F, \overline{M}_F)$, see Lemma 3.1.25. Clearly, the matching towers induce the same log blow up tower of (X, M_X) . In particular, $\mathcal{F}^{\text{mono}}(F, M_F)$ and $\mathcal{F}^{\text{fan}}(F, \overline{M}_F)$ (see Theorem 3.1.27) induce the same log blow up tower of (X, M_X) .

3.3.15. *Monoidal desingularization of log schemes.* Let (X, M) be a fine log scheme and assume that (X, M) is **monoidally torsion free** in the sense that the groups $\overline{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}}$ are torsion free. By a **monoidal desingularization** (resp. a **saturated monoidal desingularization**) of a fine log scheme (X, M) we mean a tower of log blow ups (resp. a tower of saturated log blow ups) $(X_n, M_n) \dashrightarrow (X_0, M_0) = (X, M)$ (resp. $(X_n, M_n) \dashrightarrow (X_{-1}, M_{-1}) = (X, M)$) such that for any geometric point $\bar{x} \rightarrow X_n$ the stalk of $\overline{M}_n$ at $\bar{x}$ is a free monoid. A morphism $(Y, N) \rightarrow (X, M)$ is called **monoidally smooth** if each induced homomorphism of stalks of monoids $\overline{M}_{\bar{x}} \rightarrow \overline{N}_{\bar{y}}$ can be extended to an isomorphism $\overline{M}_{\bar{x}} \oplus \mathbf{N}^r \xrightarrow{\sim} \overline{N}_{\bar{y}}$.

THEOREM 3.3.16. Let $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}$ be a saturated desingularization of quasi-compact fine torsion free fans which is functorial with respect to smooth morphisms. Then there exists unique saturated monoidal desingularization $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M)$ of monoidally torsion free fine log schemes (X, M) , such that $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}$ is functorial with respect to all monoidally smooth morphisms and $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M)$ is the contraction of $c^*(\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}(F))$ for any log scheme (X, M)

that admits a fan chart $c: (X, \overline{M}_X) \rightarrow F$. In the same way, a functorial desingularization $\mathcal{F}^{\text{fan}}$ induces a monoidal desingularization $\mathcal{F}^{\text{log}}$.

REMARK 3.3.17. Since any monoscheme chart induces a fan chart, it then follows from Remark 3.3.14(iii) that $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M)$ is the contraction of $d^*(\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F))$ for any log scheme (X, M) that admits a monoscheme chart $d: (X, \overline{M}_X) \rightarrow F$.

Proof of Theorem 3.3.16. Both cases are established similarly, so we prefer to deal with $\mathcal{F}^{\text{fan}}$ (to avoid mentioning saturations at any step of the proof). By descent, it suffices to show that the pull-back from fans induces a functorial monoidal desingularization of those fine log schemes that admit a global fan chart. Thus, if $\mathcal{F}^{\text{log}}$ exists then it is unique, and our aim is to establish existence and functoriality. Both are consequences of the following claim: assume that $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ is a monoidally smooth morphism whose source and target admit fan charts $d: (Y, \overline{M}_Y) \rightarrow G$ and $d': (X, \overline{M}_X) \rightarrow F$, then the contractions of $d^*(\mathcal{F}^{\text{fan}}(G))$ and $c^*(\mathcal{F}^{\text{fan}}(F))$ are equal, where $c = d' \circ \bar{f}: (Y, \overline{M}_Y) \rightarrow (X, \overline{M}_X) \rightarrow F$. Note that $d^{-1}(\overline{M}_G) \xrightarrow{\sim} \overline{M}_Y$ and the homomorphism $c^{-1}(\overline{M}_F) \rightarrow \overline{M}_Y$ is smooth.

Choose a point $y \in Y$ and consider the localizations $Y' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, $F' = \text{Spec}(M_{F,c(y)})$ and $G' = \text{Spec}(M_{G,d(y)})$ at y and its images in the fans. Since $\phi: M_{G,d(y)} \rightarrow \overline{M}_{Y,y}$ is an isomorphism and the homomorphism $\psi: M_{F,c(y)} \rightarrow \overline{M}_{Y,y}$ is smooth, we obtain a factorization of ψ into a composition of a homomorphism $\lambda: M_{F,c(y)} \rightarrow M_{G,d(y)}$ and ϕ , where λ is smooth. Set $U = c^{-1}(F') \cap d^{-1}(G')$. Then U is a neighborhood of y , and c and d induce homomorphisms $\phi_U: M_{G,d(y)} \rightarrow \overline{M}_Y(U)$ and $\psi_U: M_{F,c(y)} \rightarrow \overline{M}_Y(U)$. Since the monoids are fine, we can shrink U so that the equality $\psi_U = \phi_U \circ \lambda$ holds. It then follows from Lemma 3.1.8(ii) that $c|_U$ factors into a composition of $d|_U$ and the smooth morphism $\text{Spec}(\lambda): G' \rightarrow F'$.

By quasi-compactness of Y we can now find finite coverings $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ and $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, and smooth morphisms $\lambda_i: G_i \rightarrow F_i$ such that Y_i is mapped to F_i and G_i by c and d , respectively, and the induced maps of monoidal spaces $c_i: Y_i \rightarrow F_i$ and $d_i: Y_i \rightarrow G_i$ satisfy $c_i = \lambda_i \circ d_i$. Set $Y' = \coprod_{i=1}^n Y_i$, $F' = \coprod_{i=1}^n F_i$, $G' = \coprod_{i=1}^n G_i$, $c': Y' \rightarrow F$ and $d': Y' \rightarrow G$. By descent, it suffices to check that contractions of $c'^*(\mathcal{F}^{\text{fan}}(F))$ and $d'^*(\mathcal{F}^{\text{fan}}(G))$ are equal. Since, the morphism $Y' \rightarrow F$ factors through the surjective smooth morphism $F' \rightarrow F$, and similarly for G , these two pullbacks are equal to the contracted pullbacks of $\mathcal{F}^{\text{fan}}(F')$ and $\mathcal{F}^{\text{fan}}(G')$, respectively. It remains to note that $Y' \rightarrow F'$ factors through the smooth morphism $\coprod_{i=1}^n \lambda_i: G' \rightarrow F'$. Hence $\mathcal{F}^{\text{fan}}(G')$ is the contracted pullback of $\mathcal{F}^{\text{fan}}(F')$, and their contracted pullbacks to Y' coincide. $\square$

3.4. Desingularization of log regular log schemes. In this section we will see how saturated monoidal desingularization leads to normalized desingularization of log regular log schemes. Up to now we freely considered saturated and unsaturated cases simultaneously, and did not feel any essential difference. This will not be the case in the present section because the notion of log regularity was developed by Kato and Nizioł in the saturated case. Gabber generalized the definition to the non-saturated case and extended to that case all main results about log regular log schemes. This was necessary for his original approach, but can be bypassed by use of saturated monoidal desingularization. So, we prefer to stick to the saturated case and simply refer to all foundational results about log regular fs log schemes to [Kato, 1994] and [Nizioł, 2006]. For the sake of completeness, we will outline Gabber's results about the general case in §3.5.

3.4.1. Conventions. Recall that Kato's notion of log regular fs log schemes was already used in VI-1.2. Throughout §3.4 we assume that (X, M_X) is a log regular fs log scheme. Note that the homomorphism $\alpha_X: M_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ of $X_{\text{ét}}$ -sheaves is injective by [Nizioł, 2006, 2.6], and actually $M_X = \mathcal{O}_U^* \cap \mathcal{O}_X$, where $U \subset X$ is the triviality locus of M_X . So, we will freely identify M_X with a multiplicative submonoid of $\mathcal{O}_X$.

3.4.2. Monoidal ideals. For any log ideal $\mathcal{I} \subset M_X$ consider the ideal $\mathcal{J} = \alpha(\mathcal{I})\mathcal{O}_X$ it generates. We call $\mathcal{I}$ a **monoidal ideal** and by a slight abuse of notation, we will write $\mathcal{J} = \mathcal{I}\mathcal{O}_X$.

LEMMA 3.4.3. *Let (X, M_X) be as in 3.4.1. The rules $\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J} \mathcal{O}_X$ and $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \cap M_X$ give rise to a one-to-one correspondence between log ideals $\mathcal{J} \subset M_X$ and monoidal ideals $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_X$.*

Proof. It suffices to show that any log ideal $\mathcal{J}$ coincides with $\mathcal{J} = \mathcal{J} \mathcal{O}_X \cap M_X$. Furthermore, it suffices to check the equality at the strict localizations of X , hence we can assume that $X = \text{Spec}(A)$ for a strictly local ring A . Then the log structure admits a chart $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ and $\mathcal{J} = \text{IM}_X$ for an ideal $I \subset P$, and we should prove that $J := \mathcal{J}(X) = IA \cap P$ coincides with I .

Assume on the contrary that $I \subsetneq J$, and consider the exact sequence

$$(3.4.3.1) \quad \mathbb{Z}[P] \otimes_{\mathbb{Z}[P]} A \rightarrow \mathbb{Z}[P] \otimes_{\mathbb{Z}[P]} A \rightarrow \mathbb{Z}[P]/\mathbb{Z}[P] \otimes_{\mathbb{Z}[P]} A \rightarrow 0.$$

Since $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}[P]}(\mathbb{Z}[P]/\mathbb{Z}[P], A) = 0$ by [Kato, 1994, 6.1(ii)], $\mathbb{Z}[P] \otimes_{\mathbb{Z}[P]} A = IA$ and similarly for J , and we obtain that the first morphism in the sequence (3.4.3.1) is $IA \rightarrow JA$. To obtain a contradiction, it suffices to show that $\mathbb{Z}[P]/\mathbb{Z}[P] \otimes_{\mathbb{Z}[P]} A \neq 0$. Note that $\mathbb{Z}[P]/\mathbb{Z}[m_P]$ is a quotient of $\mathbb{Z}[P]/\mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[J]/\mathbb{Z}[I]$, so it remains to note that $m_P A \neq A$ and hence $\mathbb{Z}[P]/m_P \mathbb{Z}[P] \otimes_{\mathbb{Z}[P]} A \neq 0$. $\square$

3.4.4. *Interpretation of monoidal smoothness.* Note that by VI-1.7 (X, M_X) is monoidally smooth if and only if X is regular and in this case the non-triviality locus of M_X is a normal crossings divisor D .

3.4.5. *Saturated log blow ups of log regular log schemes.* Using Kato's Tor-independence result [Kato, 1994, 6.1(ii)] Nizioł proved in [Nizioł, 2006, 4.3] that saturated log blow ups of (X, M_X) are compatible with normalized blow ups along monoidal ideals. Namely, if $(Y, M_Y) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, M_X)^{\text{sat}}$ then $Y \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J} \mathcal{O}_X}(X)^{\text{nor}}$. We will also need more specific results that showed up in the proof of loc.cit., so we collect them altogether in the following lemma.

LEMMA 3.4.6. *Let $f: (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$ be a strict morphism of fs log regular log schemes, let $\mathcal{J} \subset M_Y$ be a log ideal and $\mathcal{J}' = f^{-1} \mathcal{J} M_X$. Set $(X', M_{X'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}'}(X, M_X)$, $(X'', M_{X''}) = (X', M_{X'})^{\text{sat}}$, $(Y', M_{Y'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(Y, M_Y)$ and $(Y'', M_{Y''}) = (Y', M_{Y'})^{\text{sat}}$. Then*

(i) *The (saturated) log blow up of (X, M_X) is compatible with (normalized) blow up of X : $X' \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J} \mathcal{O}_X}(X)$ and $X'' \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J} \mathcal{O}_X}(X)^{\text{nor}}$.*

(ii) *The (normalized) blow up of X along $\mathcal{J} \mathcal{O}_X$ is the pullback of the (normalized) blow up of Y along $\mathcal{J} \mathcal{O}_Y$. In particular, $X' \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y'$ and $X'' \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y''$.*

Proof. All claims can be checked étale locally, hence we can assume that there exists a chart $g: (Y, M_Y) \rightarrow (\mathbb{Z}[P], P)$ and $\mathcal{J} = g^{-1}(I_0) M_Y$ for an ideal $I_0 \subset P$. Then it suffices to prove (ii) for g and the induced chart $g \circ f$ of (X, M_X) . In particular, this reduces the lemma to the particular case when $X = \text{Spec}(A)$ and f is a chart $(X, M_X) \rightarrow (\mathbb{Z}[P], P)$. It is shown in the first part of the proof of [Nizioł, 2006, 4.3] that

$$X' \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(A \otimes_{\mathbb{Z}[P]} (\bigoplus_{n=0}^{\infty} I_0^n)) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}^n)$$

The first isomorphism implies that $X' \rightarrow X$ is the base change of $\text{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I_0^n) = Y' \rightarrow Y$, and the second isomorphism means that $X' \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J} \mathcal{O}_X}(X)$. This establishes the unsaturated and unnormalized part of the Lemma, and the second part follows in the same way from the second part of the proof of [Nizioł, 2006, 4.3]. $\square$

REMARK 3.4.7. It follows from the lemma that the unsaturated log blow up $(X', M_{X'})$ is log regular in the sense of Gabber, see §3.5. Thus, once log regularity is correctly defined in full generality, it becomes a property preserved by log blow ups (as it should be, since log blow ups are log smooth).

3.4.8. *Desingularization of log regular log schemes.* By Lemma 3.4.6, any saturated log blow up tower $f: (X_n, M_n) \dashrightarrow (X, M_X)$ induces a normalized blow up tower $g: X_n \dashrightarrow X$ of the underlying schemes. Furthermore, g completely determines f as follows: if $X_{i+1} \rightarrow X_i$ is the normalized blow up along $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X_i}$ then $(X_{i+1}, M_{X_{i+1}}) \rightarrow (X_i, M_{X_i})$ is the saturated log blow up along $\mathcal{J} \cap M_{X_i}$ by Lemma

3.4.3. The convention that centers of blow ups are part of the data is used here essentially. Furthermore, by 3.4.4, f is a saturated monoidal desingularization if and only if g is a normalized desingularization. In particular, the saturated monoidal desingularization $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(X, M_X)$ induces a normalized desingularization of the scheme X that depends on (X, M_X) and will be denoted $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$.

THEOREM 3.4.9. *The saturated monoidal desingularization $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}$ (see Theorem 3.3.16) gives rise to desingularization $\widetilde{\mathcal{F}}$ of log regular log schemes that possesses the same functoriality properties: if $\phi: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ is a monoidally smooth morphism of log regular log schemes then $\widetilde{\mathcal{F}}(Y, M_Y)$ is the contraction of $\phi^{\text{st}}(\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X))$. Furthermore, if ϕ is strict then $\phi^{\text{st}}(\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)) = \widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X) \times_X Y$.*

Strictness of ϕ in the last claim is not needed. To remove it one should work out the assertion of Remark 3.1.23.

Proof. We only need to establish functoriality. Let $(X', M_{X'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, M_X)^{\text{sat}}$ be the first saturated blow up of $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(X, M_X)$. Set $\mathcal{J} = \phi^{-1}\mathcal{J}M_Y$, then $(Y', M_{Y'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(Y, M_Y)^{\text{sat}}$ is the first saturated blow up of $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(Y, M_Y)$ by functoriality of $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}$. By Lemma 3.4.6, $X' = \text{Bl}_{\mathcal{J}\mathcal{O}_X}(X)^{\text{nor}}$ and $Y' = \text{Bl}_{\mathcal{J}\mathcal{O}_Y}(Y)^{\text{nor}}$, and using that $\phi^{-1}(\mathcal{J}\mathcal{O}_X)\mathcal{O}_Y = \mathcal{J}\mathcal{O}_Y$ we obtain that Y' is the strict transform of X' . It remains to inductively apply the same argument to the other levels of the towers. The last claim follows from Lemma 3.4.6(ii). $\square$

REMARK 3.4.10. The same results hold for (non-saturated) monoidal desingularization, which induces a (usual) desingularization of log regular log schemes. For non-saturated log regular log schemes (see §3.5) one should first establish analogs of Lemmas 3.4.3 and 3.4.6 (where the input in the second one does not have to be saturated). Then the same proof as above applies.

3.4.11. Canonical fans and associated points. By the **canonical fan** $\text{Fan}(X)$ of (X, M_X) we mean the set of maximal points of the log stratification (i.e. the maximal points of the log strata). Alternatively, $\text{Fan}(X)$ can be described as in [Niziol, 2006, §2.2] as the set of points $x \in X$ such that $m_{\bar{x}}$ coincides with the ideal $I_{\bar{x}} \subset \mathcal{O}_{\bar{x}}$ generated by $\alpha(M_{\bar{x}} - M_{\bar{x}}^*)$.

We provide $F = \text{Fan}(X)$ with the induced topology and define M_F to be the restriction of $\overline{M}_X$ onto F . For example, for a toric k -variety $X = \text{Spec}(k[Z])$, where Z is a monoscheme, (F, M_F) is isomorphic to the sharpening of Z . More generally, if a log scheme (X, M_X) is Zariski then (F, M_F) is a fan and the map $c: X \rightarrow F$ sending any point to the maximal point of its log stratum is a fan chart of X . This follows easily from the fact that such (X, M_X) admits monoscheme charts Zariski locally.

REMARK 3.4.12. In general, (F, M_F) does not have to be a fan, but it seems probable that it can be extended to a meaningful object playing the role of algebraic spaces in the category of fans. We will not investigate this direction here.

LEMMA 3.4.13. *Let $X = (X, M_X)$ be an fs log regular log scheme with a monoidal ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$. Then:*

- (i) *The set of associated points of $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ is contained in $\text{Fan}(X)$.*
- (ii) *The fans of $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X)$ and $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X)^{\text{nor}}$ are contained in the preimage of $\text{Fan}(X)$.*

(iii) *For any tower of monoidal blow ups (resp. normalized monoidal blow ups) $X_n \dashrightarrow X$, its set of associated points is contained in $\text{Fan}(X)$.*

Proof. (i) Fix a point $x \in X - \text{Fan}(X)$ and let us prove that it is not an associated point of $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Since associated points are compatible with flat morphisms, we can pass to the formal completion $\widehat{X}_x = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$. Let us consider first the more difficult case when $A = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ is of mixed characteristic $(0, p)$. By VI-1.6, $A \xrightarrow{\sim} B/(f)$ where $B = C(k)[[Q]][[\underline{t}]]$, Q is a sharp monoid defining the log structure, $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$, and $f \in B$ reduces to p modulo $(Q \setminus \{1\}, \underline{t})$. Note that $n \geq 1$ as otherwise $Q \setminus \{1\}$ would generate the maximal ideal of A . In this case, x is the log stratum of $\widehat{X}_x$ and hence x is the maximal point of its log stratum in X_x , which contradicts that $x \notin \text{Fan}(X)$. The completion $\widehat{\mathcal{J}}$ of $\mathcal{J}$ is of the form IA for an ideal $I \subset Q$. We should prove that $x \in \widehat{X}_x$ is not an associated point of $A/\widehat{\mathcal{J}}$, or, equivalently, $\text{depth}(A/\widehat{\mathcal{J}}) \geq 1$. Since $B/(fB + \widehat{\mathcal{J}}B) = A/\widehat{\mathcal{J}}$, it suffices to show that $\text{depth}(B/\widehat{\mathcal{J}}B) \geq 2$ and f is a regular element of $B/\widehat{\mathcal{J}}B$.

Regularity of f follows from the following easy claim by taking $C = C(k)$, $J = I$ and $R = Qt_1^N \dots t_n^N$: if C is a domain, R is a sharp fine monoid with an ideal J , f is an element of $C[[R]]$ with a non-zero free term (i.e. $c_1 \neq 0$, where $f = \sum_{r \in R} c_r r$), and $g \in C[[R]]$ satisfies $fg \in JC[[R]]$ then $g \in JC[[R]]$. Next, let us bound the depth of $B/\mathcal{J}B$. In view of [Matsumura, 1980a, 21.C], depth is preserved by completions of local rings hence it suffices to show that $\text{depth}(D_r/ID_r) \geq 2$, where $D = C(k)[Q][t]$ and $r = (m_Q, p, \underline{t})$ is the ideal generated by $m_Q = Q \setminus \{1\}$, p and $\underline{t}$. Note that $D/ID \xrightarrow{\sim} C(k)[t][Q \setminus I]$ as a $C(k)[t]$ -module, hence it is a flat $C(k)[t]$ -module and the local homomorphism $C(k)[t]_{(p, \underline{t})} \rightarrow D_r/ID_r$ is flat. By [Matsumura, 1980a, 21.C], $\text{depth}(D_r/ID_r) \geq \text{depth}(C(k)[t]_{(p, \underline{t})}) = n + 1 \geq 2$, so we have established the mixed characteristic case. In the equal characteristic case we have that $A = k[[Q]][[t]]$, and the same argument shows that $\text{depth}(A/\mathcal{J}) \geq \text{depth}(k[[t]]_{(\underline{t})}) = n \geq 1$.

To prove (ii) we should check that if $x \in X - \text{Fan}(X)$ then no point of $\text{Fan}(\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X))$ sits over x . We will only check the mixed characteristic case since it is more difficult. As earlier, $\widehat{X}_x = \text{Spec}(A)$ where $A = B/(f)$ and $B = C(k)[[Q]][[t]]$ with $n \geq 1$. Note that $\psi: \widehat{X}_x \rightarrow X$ is a flat strict morphism of log schemes. Hence ψ is compatible with blow ups and it maps the fans of $\widehat{X}_x$ and $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(\widehat{X}_x)$ to the fans of X_x and $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X)$, respectively. Therefore, we should only check that $\text{Fan}(\text{Bl}_{\mathcal{J}}(\widehat{X}_x))$ is disjoint from the preimage of x . The latter blow up is covered by the charts $V_a = \text{Spec}(A[a^{-1}\mathcal{J}])$ with $a \in I$. Set $P' = Q[a^{-1}I]$, $B' = C(k)[[P']][[t_1, \dots, t_n]]/(f)$ and $A' = B'/(f)$ (where f is as above). Then the m_x -adic completion of V_a is $\widehat{V}_a = \text{Spec}(A')$. The ideal defining the closed point of $\text{Fan}(\widehat{V}_a)$ is generated by the maximal ideal m' of P' . This ideal does not contain any t_i . Indeed, $t_i \notin m'B' + fB'$ because $t_i \notin fC(k)[[t_1, \dots, t_n]]$ as $f - p \in (t_1, \dots, t_n)$. Thus, $\text{Fan}(\widehat{V}_a)$ is disjoint from the preimage of x , and hence the same is true for $\text{Fan}(V_a)$. This proves (ii) in the non-saturated case, and the saturated case is dealt with similarly but with P' replaced by its saturation. Finally, (iii) follows immediately from (i) and (ii). $\square$

3.4.14. Independence of the log structure. Dependence of $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ on M_X is a subtle question. In this section we will use functoriality of $\widetilde{\mathcal{F}}$ to prove that $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ is independent of M_X in characteristic zero. This will cover our needs, but the restriction on the characteristic will complicate our arguments later. Conjecturally, $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ does not depend on M_X at all and the following result of Gabber supports this conjecture: if P and Q are two fine sharp monoids and $k[[P]] \simeq k[[Q]]$ for a field k (of any characteristic!) then $P \simeq Q$. For completeness, we will give a proof of this in §3.6.

THEOREM 3.4.15. *Let $\widetilde{\mathcal{F}}$ be a functorial normalized desingularization of reduced qc schemes of characteristic zero, and let $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ be the normalized desingularization of log regular log schemes it induces (see Theorem 3.4.9). Assume that (X, M_X) and (Y, M_Y) are saturated log regular log schemes such that there exists an isomorphism $\phi: Y \xrightarrow{\sim} X$ of the underlying schemes. Assume also that the maximal points of the strata of the stratifications of X and Y by the rank of $\overline{M}^{\text{gp}}$ are of characteristic zero. Then $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ and $\widetilde{\mathcal{F}}(Y, M_Y)$ are compatible with ϕ , that is, $\widetilde{\mathcal{F}}(Y, M_Y) = \phi^*(\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X))$.*

Proof. We can check the assertion of the theorem étale locally. Namely, we can replace X with a strict étale covering X' and replace Y with $Y' = Y \times_X X'$ with the log structure induced from Y . In particular, we can assume that the log structures are Zariski, and so the canonical fans $\text{Fan}(X)$ and $\text{Fan}(Y)$ are defined. Our assumption on the maximal points actually means that $\text{Fan}(X)$ is contained in $X_Q = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. By Lemma 3.4.13(iii) and 2.2.11, $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ is the pushforward of its restriction onto X_Q , and similarly for Y . So, it suffices to prove that the normalized desingularizations of X_Q and Y_Q are compatible with respect to $\phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}: X_Q \xrightarrow{\sim} Y_Q$. Thus, it suffices to prove the theorem for X and Y of characteristic zero, and, in the sequel, we assume that this is the case.

To simplify notation we identify X and Y , and set $N_X = M_Y$. It suffices to check that the blow up towers $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ and $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$ coincide after the base change to each completion $\widehat{X}_{\bar{x}} = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, \bar{x}})$ at a geometric point $\bar{x}$. By VI-1.6, we have that $\widehat{X}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(k[[P]][[t_1, \dots, t_n]])$, where $P \xrightarrow{\sim} \overline{M}_{X, \bar{x}}$, and the morphism of fs log schemes $(\widehat{X}_{\bar{x}}, P) \rightarrow (X, M_X)$ is strict. By Theorem 3.3.16 the contracted pullback

of $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ to $\widehat{X}_{\bar{x}}$ coincides with $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, P)$. In the same way, the contracted pullback of $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$ coincides with $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, Q)$, where $\widehat{\mathcal{O}}_{X, \bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(k[[Q]][[t_1, \dots, t_m]])$ (we use that k is isomorphic to the residue field of this ring and hence depends only on the ring $\widehat{\mathcal{O}}_{X, \bar{x}}$).

Let us now recall how $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, P)$ is constructed (Theorems 3.1.27, 3.2.20 and 3.3.16). We have the obvious strict morphism $\widehat{X}_{\bar{x}} \rightarrow Z := \text{Spec}(\mathbf{Q}[P][t_1, \dots, t_n])$, hence $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, P)$ is the pullback of $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(Z, P)$. The latter is the pullback of $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(P) = \widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}(P)$, which, in its turn, is induced from $\widetilde{\mathcal{F}}(Z)$. Therefore, $\widetilde{\mathcal{F}}(Z, P) = \widetilde{\mathcal{F}}(Z)$ and, by the functoriality of $\widetilde{\mathcal{F}}$, its pullback to $\widehat{X}_{\bar{x}}$ is $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{X}_{\bar{x}})$. The same argument shows that $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{X}_{\bar{x}})$ is the contracted pullback of $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$.

In order to prove that $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X) = \widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$ it only remains to resolve the synchronization issues, i.e. to prove equality without contractions. For this one should take the union S of the fans of (X, M_X) and (X, N_X) , and consider the morphism $\widehat{X}_S := \coprod_{x \in S} \widehat{X}_{\bar{x}}$ rather than the individual completions. The pullbacks of $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ and $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$ to $\widehat{X}_S$ have no empty blow ups because the fans contain all associated points of the towers by Lemma 3.4.13(iii). Hence the same argument as above shows that they both coincide with $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{X}_S)$. $\square$

REMARK 3.4.16. (i) Without taking the completion, $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$ does not even have to be defined as X may be non-qe. In order to pass to the completion we used functoriality of the monoidal desingularization with respect to strict morphisms, which may be very bad (e.g. non-flat) on the level of usual morphisms of schemes. Even when (X, M_X) is log regular, the formal completion morphism $\widehat{X}_{\bar{x}} \rightarrow X$ can be non-regular in the non-qe case. However, one can show that it is regular over the fan, and this is enough to relate the (log) desingularization of X and $\widehat{X}_{\bar{x}}$.

(ii) We used the very strong desingularization $\widetilde{\mathcal{F}}$ from Theorem 2.3.10. However, it is easy to see that only the properties listed in Theorem 2.3.7 were essential.

3.5. Complements on non-saturated log regular log schemes. For the sake of completeness, we mention Gabber's results on non-saturated log regular log schemes that will not be used. We only formulate results but do not give proofs. Gabber defines a fine log scheme (X, M_X) to be **log regular** if its saturation is log regular in the usual sense. Assume now that (X, M_X) is fine and log regular. The key result that lifts the theory off the ground is that Kato's Tor independence extends to non-saturated log regular log schemes. Namely, if (X, M_X) admits a chart $\mathbf{Z}[P]$ and $I \subset P$ is an ideal then $\text{Tor}_1^{\mathbf{Z}[P]}(\mathcal{O}_X, \mathbf{Z}[P]/I) = 0$. For fs log schemes this is due to Kato, and Gabber deduces the general case using a non-flat descent. It then follows similarly to the saturated case that if $(Y, M_Y) = \text{LogBl}_{\mathcal{F}}(X, M_X)$ then $Y \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{F}}(X)$ and (Y, M_Y) is log regular. In addition, one shows that (X, M_X) is saturated if and only if X is normal, and if $(Y, M_Y) = (X, M_X)^{\text{sat}}$ then $Y \xrightarrow{\sim} X^{\text{nor}}$. Using these foundational results on log regular fine log schemes one can imitate the method of §3.4 to extend Lemma 3.4.13 to the non-saturated case. As a corollary, one obtains an analog of Theorem 3.4.15 for $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}^{\log}$.

3.6. Reconstruction of the monoid. This section will not be used in the sequel. Its aim is to prove that a fine torsion free monoid P can be reconstructed from a ring $A = k[[P]]$ where k is a field. The main idea of the proof is that an isomorphism $k[[P]] \xrightarrow{\sim} A$ defines an action of the torus $\text{Spec}(k[P^{\text{gp}}])$ on A , and any two maximal tori in $\text{Aut}_{k\text{-aug}}(A)$ are conjugate.

3.6.1. Automorphism groups of complete rings. Let k be a field and A be a complete local noetherian k -algebra with residue field k . Let $\mathfrak{m}$ denote the maximal ideal and set $A_n = A/\mathfrak{m}^{n+1}$. Let $G_n = \text{Aut}_{k\text{-aug}}(A_n)$ be the automorphism group scheme of A_n viewed as an augmented k -algebra, i.e.

$$G_n(B) = \{\sigma \in \text{Aut}_B(A_n \otimes_k B) \mid \sigma(\mathfrak{m}A_n \otimes_k B) = \mathfrak{m}A_n \otimes_k B\}.$$

This is a closed subgroup of the automorphism group scheme $\text{Aut}_k(A_n)$ defined by a nilpotent ideal. The groups G_n form a filtering projective system $\cdots \rightarrow G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0$; we call such a system an algebraic pro-group. Note that $G_{\bullet}$ induces a set-valued functor $G(B) = \lim_n G_n(B)$ on the category of k -algebras, and $G(k) = \text{Aut}_k(A)$.

REMARK 3.6.2. Gabber also considered more complicated filtering families, but we stick to the simplest case we need.

3.6.3. *Stabilization.* We say that an algebraic pro-group $G_\bullet$ is **stable** if the homomorphisms $\pi_n: G_{n+1} \rightarrow G_n$ are surjective for large enough n . Any algebraic group can be stabilized as follows. For each G_n and $i \geq 0$ let $G_{n,i}$ denote the scheme-theoretic image of G_{n+i} in G_n . Then $G_{n,0} \supset G_{n,1} \supset \dots$ is a decreasing sequence of algebraic subgroups of G_n , hence it stabilizes on a subgroup $G_n^{\text{st}} \subset G_n$. The family $G_\bullet^{\text{st}}$ with obvious transition morphisms is an algebraic pro-subgroup of $G_\bullet$, and it is clear from the definition that $G_\bullet^{\text{st}}$ is stable. Note also that $G_\bullet^{\text{st}}$ is isomorphic to $G_\bullet$ at least in the sense that $G(B) \xrightarrow{\sim} \lim_n G_n^{\text{st}}(B)$ for any k -algebra B .

3.6.4. *Maximal pro-tori.* By a **pro-torus** $T_\bullet$ in $G_\bullet$ we mean a *compatible* family of tori $T_n \hookrightarrow G_n$ for all $n \geq 0$, in the sense that $\pi_n(T_{n+1}) = T_n$. It is called a **torus** if the π_n 's are isomorphisms for $n \gg 0$. A pro-torus is **componentwise maximal** if for $n \gg 0$ all tori T_n are maximal. A pro-torus $T_\bullet$ is **maximal** if for any inclusion of pro-tori $T_\bullet \subset T'_\bullet$ we have that $T_n = T'_n$ for $n \gg 0$. In particular, any componentwise maximal pro-torus is maximal. If k is algebraically closed and $G_{n+1} \rightarrow G_n$ is surjective then any torus $S_n \subset G_n$ is the image of a torus $S_{n+1} \subset G_{n+1}$, and hence componentwise maximal pro-tori exist whenever $G_\bullet$ is stable. For shortness, given an element $c \in G_n(k)$ we will denote the corresponding conjugation by $c: G_n \rightarrow G_n$. Pro-tori $T_\bullet$ and $T'_\bullet$ are **conjugate** if there exists a *compatible* family of elements $c_n \in G_n(k)$ such that for $n \gg 0$ the conjugation $c_n: G_n \rightarrow G_n$ takes T_n to T'_n .

PROPOSITION 3.6.5. *Assume that k is an algebraically closed field, $G_\bullet$ is a stable pro-algebraic k -group, and $T_\bullet, T'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ are pro-tori. If $T_\bullet$ is componentwise maximal then $T'_\bullet$ is conjugate to a sub-pro-torus of $T_\bullet$. In particular, a pro-torus is maximal if and only if it is componentwise maximal, and any two maximal pro-tori are conjugate.*

Proof. It is a classical result that maximal tori in algebraic k -groups are conjugate. In particular, for each n we can move T'_n into T_n by a conjugation, and the only issue is compatibility of the conjugations. Naturally, to achieve compatibility we should lift conjugations inductively from G_n to G_{n+1} . It suffices to prove that if π_n is surjective and $c_n: G_n \rightarrow G_n$ conjugates T'_n into T_n then it lifts to $c_{n+1}: G_{n+1} \rightarrow G_{n+1}$ that conjugates T'_{n+1} into T_{n+1} . By the stability assumption, we can lift c_n to a conjugation c' of G_{n+1} . It takes T'_{n+1} to the subgroup $H = K T_{n+1}$, where K is the kernel of π_n . Since maximal tori in H are conjugate and conjugation by elements of T_{n+1} preserves T_{n+1} , we can find a conjugation c'' by an element of K that takes $c'(T'_{n+1})$ to T_{n+1} . Then $c_{n+1} = c''c'$ is a lifting of c_n as required. $\square$

COROLLARY 3.6.6. *Assume that k is an algebraically closed field, $G_\bullet$ is a pro-algebraic k -group, and $T_\bullet, T'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ are pro-tori. If $T_\bullet$ is maximal then $T'_\bullet$ is conjugate to a sub-pro-torus of $T_\bullet$.*

Proof. Obviously, $T_n, T'_n \subset G_n^{\text{st}}$ for all $n \geq 0$. So, $T'_\bullet$ is conjugate to a subtorus of $T_\bullet$ already inside of G^{st} by Proposition 3.6.5. $\square$

3.6.7. *Certain tori in $\text{Aut}_{k\text{-aug}}(A)$.* Any k -isomorphism $C[[P]] \xrightarrow{\sim} A$, where C is a complete local k -algebra and P is a sharp fine monoid, induces a pro-algebraic action of the split torus $T_P = \text{Spec}(k[[P^{\text{gp}}]])$ on A : a character $\chi: P \rightarrow k^*$ acts on C trivially and acts on $p \in P$ by $p \mapsto \chi(p)p$ (and the action of B -points $\chi: P \rightarrow B^*$ is analogous). Thus we obtain homomorphisms $\psi: T_P \rightarrow G_n$ which are monomorphisms for $n > 0$. In particular, the image is a split torus of G . Furthermore, we claim that if $C = k$ then the torus is maximal (as a pro-torus). Indeed, if $\phi \in \text{Aut}_k(A)$ commutes with T_P then its action on $k[[P]]$ preserves the T_P -eigenspaces pk for $p \in P$ and on each pk it acts by multiplication by a number $\lambda(p)$. Clearly, $\lambda: P \rightarrow k^*$ is a homomorphism and we obtain that ϕ belongs to $\psi(T_P(k))$ and corresponds to $\lambda \in T_P(k)$.

THEOREM 3.6.8. *Assume that k is an algebraically closed field, P is a sharp fine monoid and $A = k[[P]]$. If C is a complete local k -algebra, Q is a sharp fine monoid and $C[[Q]] \rightarrow A$ is a k -isomorphism then $C \simeq k[[R]]$ and $P \simeq Q \times R$ for a sharp fine monoid R . In particular, P is uniquely determined by A .*

Proof. Consider $G = \text{Aut}_{k\text{-aug}}(A)$ with split tori $T_P, T_Q \hookrightarrow G$ corresponding to these isomorphisms. By maximality of T_P and Corollary 3.6.6 there exists a conjugation of G that maps T_Q into T_P . This produces a new isomorphism $C[[Q]] \xrightarrow{\sim} A = k[[P]]$ that respects the grading, i.e. each pk lies in some qC , and we obtain a surjective map $f: P \rightarrow Q$, which is clearly a homomorphism. If $C = k$ then f is an isomorphism and we obtain that P is determined by A .

Set $R_q = \prod_{p \in f^{-1}(q)} pk$. We have natural embeddings $\prod_{p \in f^{-1}(q)} pk \hookrightarrow qC$ which are all isomorphisms because $A = \prod_{q \in Q} R_q$ is isomorphic to $C[[Q]] = \prod_{q \in Q} qC$. In particular, for $R = f^{-1}(1)$ we have that $C = \prod_{q \in R} qk = k[[R]]$. Therefore, $A \simeq k[[R]][[Q]] \simeq k[[R \times Q]]$, and since the monoid is determined by A we obtain that $P \simeq Q \times R$. $\square$

COROLLARY 3.6.9. *Assume that P and Q are sharp fine monoids and k is a field such that $k[[P]]$ is k -isomorphic to $k[[Q]]$. Then P is isomorphic to Q .*

Proof. Observe that $\bar{k}[[P]]$ is isomorphic to $\bar{k}[[Q]]$ and use the above theorem. $\square$

4. Proof of Theorem 1.1 — preliminary steps

The goal of §4 is to reduce the proof of Theorem 1.1 to the case when the following conditions are satisfied: (1) X is regular, (2) the log structure is given by an snc divisor Z which is **G-strict** in the sense that for any $g \in G$ and a component Z_i either $gZ_i = Z_i$ or $gZ_i \cap Z_i = \emptyset$, (3) G acts freely on $X \setminus Z$ and for any geometric point $\bar{x} \rightarrow X$ the inertia group $G_{\bar{x}}$ is abelian.

4.1. Plan. A general method for constructing a G -equivariant morphism f as in Theorem 1.1 is to construct a tower of G -equivariant morphisms of log schemes $X' = X_n \dashrightarrow X_0 = X$, where the underlying morphisms of schemes are normalized blow ups along G -stable centers sitting over $Z \cup T$, such that various properties of the log scheme X_i with the action of G gradually improve to match all assertions of the Theorem. To simplify notation, we will, as a rule, replace X with the new log scheme after each step. The three conditions above will be achieved in three steps as follows.

4.1.1. Step 1. Making X regular. This is achieved by the saturated log blow up tower $\widetilde{\mathcal{F}}(X, Z): X' \dashrightarrow X$ from Theorem 3.4.9. In particular, the morphism $X' \rightarrow X$ is even log smooth. In the sequel, we assume that X is regular, in particular, Z is a normal crossings divisor by VI-1.7. We will call Z the **boundary** of X . In the sequel, these conditions will be preserved, so let us describe an appropriate restriction on further modifications.

4.1.2. Permissible blow ups. After Step 1 any modification in the remaining tower will be of the form $f: (X', Z') \rightarrow (X, Z)$ where $X' = \text{Bl}_V(X)$, $Z' = f^{-1}(Z \cup V)$ and V has **normal crossings** with Z , i.e. étale locally on X there exist regular parameters $t_1, \dots, t_d$ such that $Z = V(\prod_{i=1}^l t_i)$ and $V = V(t_{i_1}, \dots, t_{i_m})$. We call such modification of log schemes **permissible** and use the convention that the center V is part of the data. A blow up of schemes $f: X' \rightarrow X$ is called **permissible** (with respect to the boundary Z) if it underlies a permissible modification. Since there is an obvious bijective correspondence between permissible modifications and blow ups we will freely pass from one to another. Note that $Z' = f^{\text{st}}(Z) \cup E'$, where $E' = f^{-1}(V)$ is the exceptional divisor.

4.1.3. Permissible towers. A **permissible modification tower** $(X_d, Z_d) \dashrightarrow (X_0, Z_0) = (X, Z)$ is defined in the obvious way and we say that a blow up tower $X_d \dashrightarrow X$ is permissible if it underlies such a modification tower. Again, we will freely pass between permissible towers of these types. Note that $Z_i = Z_i^{\text{st}} \cup E_i$, where Z_i^{st} is the strict transform of Z under $h_i: X_i \dashrightarrow X$ and E_i is the exceptional divisor of h_i (i.e. the union of the preimages of the centers of h_i).

REMARK 4.1.4. (i) Consider a permissible tower as above. It is well known that for any i one has that X_i is regular, Z_i is normal crossings and E_i is even snc. For completeness, let us outline the proof. Both claims follow from the following: if Z is snc then Z_i is snc. Indeed, the claim about E_i follows by taking $Z = \emptyset$ and the claim about Z_i can be checked étale locally, so we can assume that Z is snc. Finally, if Z is snc then Z_i is snc by Lemma 4.2.9 below.

(ii) Permissible towers are very common in embedded desingularization because they do not destroy regularity of the ambient scheme and the normal crossings (or snc) property of the boundary (or accumulated exceptional divisor). Even when one starts with an empty boundary, a non-trivial boundary appears after the first step, and this restricts the choice of further centers. Actually, any known self-contained proof of embedded desingularization constructs a permissible resolution tower.

4.1.5. *G-permissible towers.* In addition, we will only blow up G -equivariant centers V . So, $f: X' = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$ is G -equivariant and the exceptional divisor $E = f^{-1}(V)$ is regular and G -equivariant and hence G -strict. Such a blow up (or their tower) will be called **G -permissible**. It follows by induction that the exceptional divisor of such a tower is G -strict.

4.1.6. *Step 2. Making Z snc and G -strict.* Consider the stratification of Z by multiplicity: a point $z \in Z$ is in Z^n if it has exactly n preimages in the normalization of Z . Note that $\{Z^n\}$ is precisely the log stratification as defined in 3.3.1. By **depth** of the stratification we mean the maximal d such that $Z^d \neq \emptyset$. In particular, Z^d is the only closed stratum. Step 2 proceeds as follows: $X_{i+1} \rightarrow X_i$ is the blow up along the closed stratum of Z_i^{st} .

REMARK 4.1.7. What we use above is the standard algorithm that achieves the following two things: Z' is snc and $Z^{\text{st}} = \emptyset$ (see, for example, [de Jong, 1996, 7.2]). Even when Z is snc, the second property is often used in the embedded desingularization algorithms to get rid of the old components of the boundary.

4.1.8. *Justification of Step 2.* Since the construction is well known, we just sketch the argument. First, observe that Z^d has normal crossings with Z , that is, $X' = \text{Bl}_{Z^d}(X) \rightarrow X$ is permissible. Thus, Z' is normal crossings and hence Z^{st} is also normal crossings. A simple computation with blow up charts shows that the depth of Z^{st} is $d - 1$ (for example, one can work étale locally, and then this follows from Lemma 4.2.8 below). It follows by induction that the tower produced by Step 2 is permissible, of length d and with $Z_d^{\text{st}} = \emptyset$. So, $Z_d = E_d$ is snc by Remark 4.1.4 and G -strict by 4.1.5.

4.1.9. *Step 3. Making the inertia groups abelian and the action of G on $X \setminus Z$ free.* Recall (VI-4.1) that the inertia strata are of the form $X_H = X^H \setminus \bigcup_{H \subsetneq H'} X^{H'}$. Step 3 runs analogously to Step 2, but this time we will work with the inertia stratification of X instead of the log stratification, and will have to apply the same operation a few times. Let us first describe the blow up algorithm used in this step; its justification will be given in §4.2.

Let $f_{\{X^H\}}: X' \dashrightarrow X$ denote the following blow up tower. First we blow up the union of all closed strata X_H . In other words, V_0 is the union of all non-empty minimal X^H , i.e. non-empty X^H that do not contain X^K with $\emptyset \subsetneq X^K \subsetneq X^H$. Next, we consider the family of all strict transforms of X^H and blow up the union of the non-empty minimal ones, etc. Obviously, the construction is G -equivariant. We will prove in Proposition 4.2.11 that $f_{\{X^H\}}$ is permissible of length bounded by the length of the maximal chains of subgroups. Also, we will show in 4.2.13 that $f_{\{X^H\}}$ decreases all non-abelian inertia groups, so the algorithm of Step 3 goes as follows: until all inertia groups become abelian, apply $f_{\{X^H\}}: X' \dashrightarrow X$ (i.e. replace (X, Z) with (X', Z')).

4.2. Justification of Step 3.

4.2.1. *Weakly snc families.* Assume that X is regular, $Z \hookrightarrow X$ is an snc divisor, and $\{X_i\}_{i \in I}$ is a finite collection of closed subschemes of X . For any $J \subset I$ we denote by X_J the scheme-theoretic intersection $\bigcap_{i \in J} X_i$. The family $\{X_i\}$ is called **weakly snc** if each X_i is nowhere dense and X_J is regular. The family $\{X_i\}$ is called **weakly Z -snc** if it is weakly snc and each X_J has normal crossings with Z . In particular, $\{X_i\}_{i \in I}$ is weakly snc (resp. weakly Z -snc) if and only if the family $\{X_J\}_{\emptyset \neq J \subset I}$ is weakly snc (resp. weakly Z -snc).

REMARK 4.2.2. (i) Here is a standard criterion of being an snc divisor, which is often taken as a definition. Let $D \hookrightarrow X$ be a divisor with irreducible components $\{D_i\}_{i \in I}$. Then D is snc if and only if the set of its irreducible components is weakly snc and each irreducible component of D_J is of codimension $|J|$ in X .

(ii) The condition on the codimension is essential. For example, $xy(x+y) = 0$ defines a weakly snc but not snc family of irreducible divisors in $\mathbf{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$.

(iii) The criterion from (i) implies that if X is qe then the snc locus of D is open—it is the complement of the union of singular loci of D_J 's and the loci where D_J is of codimension smaller than $|J|$. (Note that this makes sense for all points of X because D is snc at a point $x \in X \setminus D$ if and only if $X = D_\emptyset$ is regular at x .)

LEMMA 4.2.3. *Let (X, Z) and G be as achieved in Step 2. Then the family $\{X^H\}_{1 \neq H \subset G}$ is weakly Z -snc.*

Proof. Recall that for any subgroup $H \subset G$ the fixed point subscheme X^H is regular by Proposition VI-4.2, and X^H is nowhere dense for $H \neq 1$ by generic freeness of the action of G . Since for any pair of subgroups $K, H \subset G$ we have that $X^H \times_X X^K = X^{KH}$, the family is weakly snc. It remains to show that $Y = X^H$ has normal crossings with Z . Note that it is enough to consider the case when X is local with closed point x and $G = H$. The cotangent spaces at x will be denoted $T^*X = m_{X,x}/m_{X,x}^2$, T^*Y , etc. Their dual spaces will be called the tangent spaces, and denoted TX , TY , etc. Let $\phi^* : T^*X \rightarrow T^*Y$ denote the natural map and let $\phi : TY \hookrightarrow TX$ denote its dual. We will systematically use without mention that $|G|$ is coprime to $\text{char } k(x)$, in particular, the action of G on T^*X is semi-simple.

The proof of VI-4.2 also shows that for any point $x \in X^H$, the tangent space $T_x(X^H)$ is isomorphic to $(T_x X)^H$. In particular, $TY \xrightarrow{\sim} (TX)^G$ and hence ϕ^* maps $(T^*X)^G \subset T^*X$ isomorphically onto T^*Y . Therefore, $U = \text{Ker}(\phi^*)$ is the G -orthogonal complement to $(T^*X)^G$, i.e. the only G -invariant subspace such that $(T^*X)^G \oplus U \xrightarrow{\sim} T^*X$. Let $Z_i = V(t_i)$, $1 \leq i \leq n$ be the components of Z and let $dt_i \in T^*X$ denote the image of t_i . By Z -strictness of G , each line $L_i = \text{Span}(dt_i)$ is G -invariant, so G acts on dt_i by a character χ_i . Without restriction of generality, $\chi_1, \dots, \chi_l$ for some $0 \leq l \leq n$ are the only trivial characters. In particular, $L = \text{Span}(dt_1, \dots, dt_n)$ is the direct sum of $L^G = \text{Span}(dt_1, \dots, dt_l)$ and its G -orthogonal complement $L \cap U$, which (by uniqueness of the complement) coincides with $\text{Span}(dt_{l+1}, \dots, dt_n)$. Complete the basis of L to a basis $\{dt_1, \dots, dt_n, e_1, \dots, e_m\}$ of T^*X such that $\{dt_{l+1}, \dots, dt_n, e_1, \dots, e_r\}$ for some $r \leq m$ is a basis of U and choose functions $s_1, \dots, s_m$ on X so that $ds_j = e_j$ and $s_1, \dots, s_r$ vanish on Y . Clearly, $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m$ is a regular family of parameters of $\mathcal{O}_{X,x}$, so the lemma would follow if we prove that $Y = V(t_{l+1}, \dots, t_n, s_1, \dots, s_r)$.

Since Y is regular and $\text{Ker}(\phi^*)$ is spanned by the images of $t_{l+1}, \dots, t_n, s_1, \dots, s_r$, we should only check that these functions vanish on Y . The s_j 's vanish on Y by the construction, so we should check that t_i vanishes on Y whenever $l < i \leq n$. Using the functorial definition from VI-4.1 of the subscheme of fixed points, we obtain that $Z_i^G = Z_i \times_X X^G$, hence $Z_i \times_X Y$ is regular by VI-4.2. However, TY is contained in TZ_i , which is the vanishing space of dt_i , hence we necessarily have that $Y \hookrightarrow Z_i$. $\square$

4.2.4. *Snc families.* A family of nowhere dense closed subschemes $\{X_i\}_{i \in I}$ is called **snc** (resp. **Z -snc**) at a point x if X is regular at x and there exists a regular family of parameters $t_j \in \mathcal{O}_{X,x}$ such that in a neighborhood of x each X_i (resp. and each irreducible component Z_k of Z) passing through x is given by the vanishing of a subfamily $t_{j_1}, \dots, t_{j_l}$. Note that the family $\{X_i\}_{i \in I}$ is Z -snc if and only if the union $\{X_i\} \cup \{Z_k\}$ is snc. A family is **snc** if it is so at any point of X (in particular, X is regular).

REMARK 4.2.5. (i) It is easy to see that the family $\{X^H\}_{H \subset G}$ is snc whenever G is abelian. Indeed, it suffices to show that for any point x there exists a basis of $T_x X$ such that each $T_x(X^H)$ is given by vanishing of some of the coordinates. But this is so because the action of G on $T_x X$ is (geometrically) diagonalizable and $T_x(X^H) = (T_x X)^H$. In general, the family $\{X^H\}_{H \subset G}$ does not have to be snc, as the example of a dihedral group D_n with $n \geq 3$ acting on the plane shows.

(ii) If $Z \hookrightarrow X$ is an snc divisor with components Z_i and $V \hookrightarrow X$ is a closed subscheme then the family $\{Z_i, V\}$ is snc if and only if V has normal crossings with Z .

The transversal case of the following lemma can be deduced from [ÉGA IV₄ §19.1], but we could not find the general case in the literature (although it seems very probable that it should have appeared somewhere).

LEMMA 4.2.6. *Any weakly snc family with $|I| = 2$ is snc.*

Proof. We should prove that if $X = \text{Spec}(A)$ is a regular local scheme and Y, Z are regular closed subschemes such that $T = Y \times_X Z$ is regular then there exists a regular family of parameters $t_1, \dots, t_n \in A$ such that Y and Z are given by vanishing of some set of these parameters. Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of A , and let I, J and $K = I + J$ be the ideals defining Y, Z and T , respectively. By $T^*X = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, T^*Y , etc., we denote the cotangent spaces at the closed point of X . Note that $I/\mathfrak{m}I \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Y)$, and similar formulas hold for $J/\mathfrak{m}J$ and $K/\mathfrak{m}K$. Indeed, we can choose the parameters so that $Y = V(t_1, \dots, t_l)$ and then the images of $t_1, \dots, t_l$ form a basis both of $I/\mathfrak{m}I$ and $\text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Y)$.

Now, let us prove the lemma. Assume first that Y and Z are transversal, i.e. $T^*X \hookrightarrow T^*Y \oplus T^*Z$. Choose elements $t_1, \dots, t_{l+k}$ such that $Y = V(t_1, \dots, t_l)$, $Z = V(t_{l+1}, \dots, t_{l+k})$, $l = \text{codim}(Y)$ and $k = \text{codim}(Z)$. Then the images $dt_i \in T^*X$ of t_i are linearly independent because $dt_1, \dots, dt_l$ span $\text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Y)$ and $dt_{l+1}, \dots, dt_{l+k}$ span $\text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Z)$. Hence we can complete t_i 's to a regular family of parameters by choosing $t_{l+k+1}, \dots, t_n$ such that $dt_1, \dots, dt_n$ is a basis of T^*X . This proves the transversal case, and to establish the general case it now suffices to show that if Y and Z are not transversal then there exists an element $t_1 \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ which vanishes both on Y and Z . (The we can replace X with $X_1 = V(t_1)$ and repeat this process until Y and Z are transversal in $X_a = V(t_1, \dots, t_a)$.) Tensoring the exact sequence $0 \rightarrow I \cap J \rightarrow I \oplus J \rightarrow K \rightarrow 0$ with $A/\mathfrak{m}$ we obtain an exact sequence

$$(I \cap J)/\mathfrak{m}(I \cap J) \rightarrow I/\mathfrak{m}I \oplus J/\mathfrak{m}J \xrightarrow{\phi} K/\mathfrak{m}K \rightarrow 0$$

The failure of transversality is equivalent to non-injectivity of ϕ , hence there exists an element $f \in I \cap J$ with a non-zero image in $I/\mathfrak{m}I \oplus J/\mathfrak{m}J$. Thus, $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ and we are done. $\square$

4.2.7. Blowing up the minimal strata of a weakly snc family. Given a weakly snc family $\{X_i\}_{i \in I}$, we say that a scheme X_J with $J \subset I$ is **minimal** if it is non-empty and any $X_{J'} \subsetneq X_J$ is empty. Also, we will need the following notation: if $Z \hookrightarrow X$ is a closed subscheme and $D \hookrightarrow X$ is a Cartier divisor with the corresponding ideals $\mathcal{I}_Z, \mathcal{I}_D \subset \mathcal{O}_X$, then $Z + D$ is the closed subscheme defined by the ideal $\mathcal{I}_Z \mathcal{I}_D$.

PROPOSITION 4.2.8. *Assume that X is regular, $Z \hookrightarrow X$ is an snc divisor with irreducible components $Z_1, \dots, Z_l$, and $\{X_i\}_{i \in I}$ is a Z -snc (resp. weakly Z -snc) family of subschemes. Let V be the union of all non-empty minimal subschemes X_J , $f: X' = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$, $X'_i = f^{\text{st}}(X_i)$ and $Z' = f^{-1}(Z \cup V)$. Then*

- (i) X' is regular and Z' is snc.
- (ii) The family $\{X'_i\}_{i \in I}$ is Z' -snc (resp. weakly Z' -snc).
- (iii) For any $J \subset I$, the scheme-theoretical intersection $X'_J = \bigcap_{j \in J} X'_j$ coincides with $f^{\text{st}}(X_J)$.
- (iv) For any $J \subset I$ the total transform $X_J \times_X X'$ is of the form $X'_J + D'_J$ where D'_J is the divisor consisting of all connected components of $E' = f^{-1}(V)$ contained in $f^{-1}(X_J)$.

Proof. We start with the following lemma.

LEMMA 4.2.9. *Assume that X is regular, Z is an snc divisor and $V \hookrightarrow Y$ are closed subschemes having normal crossings with Z . Let $f: X' \rightarrow X$ be the blow up along V , $Y' = f^{\text{st}}(Y)$, $Z' = f^{-1}(Z \cup V)$, and $E' = f^{-1}(V)$. Then Z' is snc, Y' has normal crossings with Z' and $Y \times_X X' = Y' + E'$.*

Proof. The proof is a usual local computation with charts. Take any point $u \in V$ and choose a regular family of parameters $t_1, \dots, t_n$ at u such that Y (resp. V , resp. Z) are given by the vanishing of $t_1, \dots, t_m$ (resp. $t_1, \dots, t_l$, resp. $\prod_{i \in I} t_i$), where $0 \leq m \leq l \leq n$ and $I \subset \{1, \dots, n\}$. Locally over u the blow up is covered by l charts, and the local coordinates on the i -th chart are t'_j such that $t'_j = t_j$ for $j > l$ or $j = i$ and $t'_i = \frac{t_i}{t_l}$ otherwise. On this chart, $Y \times_X X'$ (resp. Y' , resp. E' , resp. Z') is given by the vanishing of $t_1, \dots, t_m$ (resp. $t'_1, \dots, t'_m$, resp. t'_i , resp. $\prod_{j \in I \cup \{i\}} t'_j$), hence the lemma follows. $\square$

The lemma implies (i). In addition, it follows from the lemma that $f^{\text{st}}(X_J)$ has normal crossings with Z' and $X_J \times_X X' = f^{\text{st}}(X_J) + D'_J$. Thus, (iii) implies (iv), and (iii) implies (ii) in the case when the family $\{X_i\}_{i \in I}$ is weakly Z -snc. Note also that if this family is Z -snc then locally at any point $x \in X$ there exists a family of regular parameters $\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ such that each X_J and each component of Z is given by the vanishing of a subfamily of $\underline{t}$ locally in a neighborhood of x . Then the same

local computation as was used in the proof of Lemma 4.2.9 proves also claims (ii) and (iii) of the proposition. So, it remains to prove (iii) when the family is weakly snc. It suffices to prove that if (iii) holds for X_J and X_K then it holds for $X_{J \cup K}$. Moreover, (iii) does not involve the boundary so we can assume that $Z = \emptyset$. It remains to note that $\{X_J, X_S\}$ is an snc family by Lemma 4.2.6, hence our claim follows from the snc case. $\square$

4.2.10. Blow up tower of a weakly Z -snc family. Let X be a regular scheme, Z be an snc divisor and $\{X_i\}_{i \in I}$ be a weakly Z -snc family. By the blow up tower $f_{\{X_i\}}$ of $\{X_i\}$ we mean the following tower: the first blow up $h_1 : X_1 \rightarrow X_0 = X$ is along the union of all non-empty minimal schemes of the form X_J for $\emptyset \neq J \subset I$, the second blow up is along the union of all non-empty minimal schemes of the form $h_1^{\text{st}}(X_J)$ for $\emptyset \neq J \subset I$, etc.

PROPOSITION 4.2.11. *Keep the above notation. Then the tower $f_{\{X_i\}}$ is permissible with respect to Z and its length equals to the maximal length of chains $\emptyset \neq X_{J_1} \subsetneq \cdots \subsetneq X_{J_d}$ with $\emptyset \neq J_d \subsetneq \cdots \subsetneq J_1 \subset I$. Furthermore, the strict transform of any scheme X_J is empty and the total transform of X_J is a Cartier divisor.*

Proof. The claim about the length is obvious. Let $f_{\{X_i\}} : X_d \dashrightarrow X_0 = X$ and let $h_n : X_n \dashrightarrow X_0 = X$ be its n -th truncation. For each $i \in I$ set $X_{n,i} = h_n^{\text{st}}(X_i)$ and for each $J \subset I$ set $X_{n,J} = \bigcap_{i \in J} X_{n,i}$. Using Proposition 4.2.8 and straightforward induction on length, we obtain that the family $\{X_{n,i}\}_{i \in I}$ is weakly Z_n -snc, $X_{n,J} = h_n^{\text{st}}(X_J)$, the blow up $X_{n+1} \rightarrow X_n$ is along the union of non-empty minimal $X_{n,J}$'s, and $X_J \times_X X_n = X_{n,J} + D_{J,n}$, where $D_{J,n}$ is a divisor. So, the tower is permissible, and since $X_{d,J} = \emptyset$ we also have that $X_J \times_X X_d$ is a divisor. $\square$

REMARK 4.2.12. We will not need this, but it is easy to deduce from the proposition that on the level of morphisms the modification $X_d \rightarrow X$ is isomorphic to the blow up along $\prod_{\emptyset \neq J \subset I} \mathcal{I}_{X_J}$.

4.2.13. Justification of Step 3. The blow up tower $f_{\{X^H\}} : X' \dashrightarrow X$ from Step 3 is G -equivariant in an obvious way, and it is permissible by Proposition 4.2.11. In addition, $Z' = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(\bigcup_{1 \neq H \subset G} X^H)$ and, since G acts freely on $X' \setminus f^{-1}(\bigcup_{1 \neq H \subset G} X^H) \xrightarrow{\sim} X \setminus \bigcup_{1 \neq H \subset G} X^H$, it also acts freely on $X' \setminus Z'$. It remains to show that applying $f_{\{X^H\}}$ we decrease all non-abelian inertia groups. Namely, for any $x' \in X'$ mapped to $x \in X$ we want to show that either $G_{\bar{x}}$ is abelian or the inclusion $G_{\bar{x}'} \subsetneq G_{\bar{x}}$ is strict.

Let $H \subset G$ be any non-abelian subgroup with commutator $K = [H, H]$. Since $X^K \times_X X'$ is a divisor by Proposition 4.2.11, the universal property of blow ups implies that $X' \rightarrow X$ factors through $Y = \text{Bl}_{X^K}(X)$. On the other hand, it is proved in VI-4.8 that $Y \rightarrow X$ is an H -equivariant blow up, and if a geometric point $\bar{x} \rightarrow X$ with $G_{\bar{x}} = H$ lifts to a geometric point $\bar{y} \rightarrow Y$ then $G_{\bar{y}} \subsetneq H$. Therefore, the same is true for the G -equivariant modification $X' \rightarrow X$, and we are done.

5. Proof of Theorem 1.1 — abelian inertia

5.1. Conventions. Throughout §5 we assume that (X, Z) and G satisfy all conditions achieved at Steps 1, 2, 3, and our aim is to construct a modification $f_{(G,X,Z)} : X' \rightarrow X$ as in Theorem 1.1. Unless specially mentioned, we do not assume that X is qe. This is done in order to isolate the only place where this assumption is needed (existence of rigidifications).

5.2. Outline of our method and other approaches.

5.2.1. Combinatorial nature of the problem. On the intuitive level it is natural to expect that "everything relevant to our problem" should be determined by the following "combinatorial" data: the log structure of X , the inertia stratification of X by $X_H := X^H \setminus \bigcup_{H' \subsetneq H} X^{H'}$ and the representations of the inertia groups on the tangent spaces (which are essentially constant along X_H). This combinatorial nature is manifested in both approaches to the problem that we describe below.

5.2.2. Combinatorial algorithm. A natural approach is to seek for a "combinatorial algorithm" that iteratively blows up disjoint unions of a few closures of connected components of **log-inertia strata** (i.e. intersections of a log stratum with an inertia stratum). For example, our (very simple) algorithms in §4 were of this type. The choice of the centers should be governed by the following combinatorial

data: the number of components of Z through a point x and the history of their appearance (similarly to the desingularization algorithms), and the representation of $G_{\bar{x}}$ on T_x plus the history of representations (i.e. the list of representations for all predecessors of x in the blow up tower).

It is natural to expect that building such an algorithm would lead to a relatively simple proof of Theorem 1.1. In particular, it would be non-sensitive to quasi-excellence issues. Unfortunately, despite partial positive results, we could not construct such an algorithm. Thus, the question whether it exists remains open.⁽ⁱⁱ⁾

5.2.3. Our method. A general plan of our method is as follows. In §5.3 we will show that such a modification f exists étale locally on the base if X is qe. A priori, our construction will be canonical up to an auxiliary choice, but then we will prove in §5.5 that actually it is independent of the choice and hence descends to a modification f as required. To prove independence we will show in §5.4 that the construction is functorial with respect to strict **inert** morphisms (i.e. morphisms that preserve both the log and the inertia structures, see 5.3.6). The latter is a manifestation of the "combinatorial nature" of our algorithm.

5.3. Local construction.

5.3.1. Very tame action and Zariski topology. Note that the log structure on (X, Z) is Zariski since Z is snc. Thus, it will be convenient to describe very tame action in terms of Zariski topology. We say that the action of G is **very tame** at a point $x \in X$ if for any geometric point $\bar{x}$ over x the action is very tame at $\bar{x}$. Clearly, the $G_{\bar{x}}$ -equivariant log scheme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \bar{x}})$ is independent of the choice of $\bar{x}$ up to an isomorphism. In particular, the action is very tame at x if and only if it is very tame at a single geometric point $\bar{x}$ above x .

LEMMA 5.3.2. *Assume that (G, X, Z) is as in §5.1, $x \in X$ is a point, and T is the set of points of X at which the action is very tame. Then*

(i) T is open,

(ii) $x \in T$ if and only if the local log stratification of X (see Remark 3.3.2) is finer than the inertia stratification in a neighborhood of x .

Proof. The first assertion follows from VI-3.9. To prove the second claim we note that the conditions (i) and (ii) from VI-3.1 are automatically satisfied at $\bar{x}$. Indeed, (i) is satisfied because the action is tame by assumption of 1.1 and (ii) is satisfied because Z is snc and G -strict. Since log and inertia stratifications are compatible with the strict henselization morphism, condition (iii) from VI-3.1 is satisfied at $\bar{x}$ if and only if the local log stratification is finer than the inertia stratification at x . This proves (ii). $\square$

5.3.3. Admissibility. In the sequel, by saying that X is **admissible** we mean that the action of G on X is admissible in the sense of [SGA 1 v 1.7] (e.g. X is affine). This is needed to ensure that X/G exists as a scheme. An alternative would be to allow X/G to be an algebraic space (and $(X/G, Z/G)$ to be a log algebraic space).

5.3.4. Rigidification. By a **rigidification** of X we mean a G -equivariant normal crossings divisor $\bar{Z}$ that contains Z and such that the action of G on the log regular log scheme $\bar{X} = (X, \bar{Z})$ is very tame. If $\bar{Z}$ is snc then we say that the rigidification is **strict**. Sometimes, by a rigidification of $X = (X, Z)$ we will mean the log scheme $\bar{X}$ itself. Our construction of a modification f uses a rigidification, so let us first establish local results on existence of the latter.

In the sequel, we say that μ_N is **split** over a scheme X if it is isomorphic to the discrete group $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ over X . This happens if and only if X admits a morphism to $\text{Spec}(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}, \mu_N])$, where we use the notation $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}, \mu_N] = \mathbf{Z}[\frac{1}{N}, x]/(x^N - 1)$.

LEMMA 5.3.5. *Let X, Z, G be as in §5.1. Assume that $X = \text{Spec}(A)$ is a local scheme with closed point x , and μ_N is split over X , where N is the order of $G = G_{\bar{x}}$. Then X possesses a strict rigidification.*

Proof. Choose $t_1, \dots, t_n \in A$ such that $Z_i = (t_i)$ are the components of Z . By G -strictness of Z , for any $g \in G$ we have that $Z_i = (gt_i)$ locally at x , in particular, the tangent space to each Z_i at x

⁽ⁱⁱ⁾ F. Pop told the second author that he has a plan for constructing such a combinatorial algorithm.

is G -invariant. Now, we can use averaging by the G -action to make the parameters G -equivariant. Namely, G acts on dt_i by a character χ_i and replacing t_i with $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{gt_i}{\chi_i(g)}$ we do not change dt_i and achieve that $gt_i = \chi_i(g)t_i$.

The action of G on the cotangent space at x is diagonalizable because G is abelian and μ_N is split over $k(x)$. In particular, we can complete the family $dt_1, \dots, dt_n$ to a basis $dt_1, \dots, dt_l$ such that $t_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ and G acts on each dt_i by a character χ_i . Then $t_1, \dots, t_l$ is a regular family of parameters of $\mathcal{O}_{X,x}$ and using the same averaging procedure as above we can make them G -equivariant. Take now $\bar{Z}$ to be the union of all divisors (t_i) with $1 \leq i \leq l$. The action of G on $(X, \bar{Z})$ is very tame at x because it is the only point of its log stratum and so Lemma 5.3.2 applies. $\square$

5.3.6. Inert morphisms. Let (X, Z) and G be as in §5.1. Our next aim is to find an étale cover $f : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ which "preserves" the log-inertia structure of (X, Z) and such that (Y, T) admits a rigidification. The condition on the log structure is obvious: we want f to be strict, i.e. $f^{-1}(Z) = T$. Let us introduce a restriction related to the inertia groups.

Assume that (Y, T) with an action of H is another such triple, and let $\lambda : H \rightarrow G$ be a homomorphism. A λ -equivariant morphism $f : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ will be called **inert** if for any point $y \in Y$ with $x \in X$ the induced homomorphism of inertia groups $H_{\bar{y}} \rightarrow G_{\bar{x}}$ is an isomorphism. In particular, the inertia stratification of Y is the preimage of the inertia stratification of X .

REMARK 5.3.7. When λ is an identity, inert morphisms are usually called "fixed point reflecting". We prefer to change the terminology since "inert" is brief and adequate.

LEMMA 5.3.8. *Let X, Z and G be as above, and assume that X is qc. Then there exists a G -equivariant surjective étale inert strict morphism $h : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ such that Y is affine and (Y, T) possesses a strict rigidification.*

Proof. First, we note that the problem is local on X . Namely, it suffices for any point $x \in X$ to find a $G_{\bar{x}}$ -equivariant étale inert strict morphism $h : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ such that Y is affine, $x \in h(Y)$, any point $x' \in h(Y)$ satisfies $G_{\bar{x}'} \subset G_{\bar{x}}$, and (Y, T) admits a strict rigidification. Indeed, h can be extended to a G -equivariant morphism $Y \times_X (X \times G/G_{\bar{x}}) = \coprod_{g \in G/G_{\bar{x}}} Y_g \rightarrow X$, where each Y_g is isomorphic to Y and the morphism $Y_g \rightarrow X$ is obtained by composing $Y \rightarrow X$ with $g : X \rightarrow X$. Clearly, the latter morphism is étale, inert, and strict, and by quasi-compactness of X we can combine finitely many such morphism to obtain a required cover of (X, Z) .

Now, fix $x \in X$ and consider the $G_{\bar{x}}$ -invariant neighborhood $X' = X \setminus \bigcup_{H \not\subset G_{\bar{x}}} X^H$ of x . We will work over X' , so the condition $G_{\bar{x}'} \subset G_{\bar{x}}$ will be automatic. Let N be the order of $G_{\bar{x}}$, and consider the $G_{\bar{x}}$ -equivariant morphism $f : Y = X' \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{N}], \mu_N) \rightarrow X$ (with $G_{\bar{x}}$ acting trivially on the second factor). Let $T = f^{-1}(Z)$ and let y be any lift of x . It suffices to show that (Y, T) admits a rigidification in an affine $G_{\bar{x}}$ -invariant neighborhood of y (such neighborhoods form a fundamental family of neighborhoods of y). By Lemma 5.3.5, the localization $Y_y = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ with the restriction T_y of T possesses a strict rigidification $\bar{T}_y$. Clearly, $\bar{T}_y$ extends to a divisor $\bar{T}$ with $T \hookrightarrow \bar{T} \hookrightarrow Y$ and we claim that it is a rigidification in a neighborhood of y . Indeed, $\bar{T}$ is snc at y , hence it is snc in a neighborhood of y by Remark 4.2.2, and it remains to use Lemma 5.3.2. $\square$

5.3.9. Main construction. Assume, now, that $X = (X, Z)$ is admissible and admits a rigidification $\bar{Z}$. We are going to construct a G -equivariant modification

$$f_{(G,X,Z,\bar{Z})} : (X', Z') \rightarrow (X, Z)$$

such that G acts very tamely on the target and $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ is independent of the rigidification. The latter is a subtle property (missing in the obvious modification $(X, \bar{Z}) \rightarrow (X, Z)$), and it will take us a couple of pages to establish it.

The quotient log scheme $\bar{Y} = (Y, \bar{T}) = (X/G, \bar{Z}/G)$ is log regular by Theorem VI-3.2, hence by Theorem 3.3.16 there exists a functorial saturated log blow up tower $\bar{h} = \widehat{\mathcal{F}}^{\log}(\bar{Y}) : \bar{Y}' = (Y', \bar{T}') \rightarrow \bar{Y}$ with a regular and log regular source. Let $\bar{f} : \bar{X}' = (X', \bar{Z}') \rightarrow \bar{X}$ be the pullback of $\bar{h}$ (as a saturated

log blow up tower, see 3.3.11), then $\alpha': \bar{X}' \rightarrow \bar{Y}'$ is a Kummer étale G -cover because $\alpha: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ is so by VI-3.2 as the square

$$\begin{array}{ccc} (X', \bar{Z}') & \xrightarrow{\bar{f}} & (X, \bar{Z}) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ (Y', \bar{T}') & \xrightarrow{\bar{h}} & (Y, \bar{T}) \end{array}$$

is cartesian in the category of fs log schemes.

Since G acts freely on $U = X - Z$, $V = U/G$ is regular and $\bar{T}|_V$ is snc. In particular, $\bar{h}$ is an isomorphism over V and hence $\bar{f}$ is an isomorphism over U . We claim that the Weil divisor $T = Z/G$ of Y is $\mathbf{Q}$ -Cartier (it does not have to be Cartier, as the orbifold case with $X = \mathbf{A}^2$, $Z = \mathbf{A}^1$ and $G = \{\pm 1\}$ shows). Indeed, it suffices to check this étale locally at a point $y \in Y$. In particular, we can assume that μ_N is split over $\mathcal{O}_{Y,y}$, where $N = |G|$. Then, as we showed in the proof of Lemma 5.3.5, Z can be locally defined by equivariant parameters, in particular, $Z = V(f)$ where G acts on f by characters. Therefore, f^N is G -fixed, and we obtain that T is the reduction of the Cartier divisor C of Y given by $f^N = 0$. (The same argument applied to $T \times_Y X$ shows that NT is Cartier, so T is $\mathbf{Q}$ -Cartier.) So, $C' = C \times_Y Y'$ is a Cartier divisor whose reduction is $T' = \bar{h}^{-1}(T)$. Since Y' is regular and T' lies in the snc divisor $\bar{T}'$, we obtain that T' is itself an snc divisor.

Let Z' denote the divisor $\alpha'^{-1}(T') = \bar{f}^{-1}(Z)$. Since $X' \rightarrow Y'$ is étale over $V = Y' - T'$, the morphism of log schemes $(X', Z') \rightarrow (Y', T')$ is a Kummer étale G -cover. This follows from a variant of the classical Abhyankar's lemma (IX-2.1), which is independent of the results of the present exposé.

In particular, $X' = (X', Z')$ is log regular and it follows that the action of G on X' is very tame. We define $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ to be the modification $X' \rightarrow X$.

REMARK 5.3.10. (i) Note that $X' \rightarrow X$ satisfies all conditions of Theorem 1.1 because the action is very tame and G acts freely on $X' \setminus f^{-1}(Z)$. So, we completed the proof in the case when (X, Z) admits a rigidification $\bar{Z}$. Our last task will be to get rid of the rigidification.

(ii) The only dependence of our construction on the rigidification is when we construct the resolution of $(Y, \bar{T})$. Conjecturally, it depends only on the scheme Y , and then (Y', T') , and hence also (X', Z') , would depend only on (X, Z) . Recall that we established in Theorem 3.4.15 the particular case of this conjecture when all maximal points of the log strata of $(Y, \bar{T})$ are of characteristic zero. Hence independence of the rigidification is unconditional in this case, and, fortunately, this will suffice.

5.3.11. *Finer structure of $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$.* Obviously, the saturated log blow up tower $\bar{f}: (X', \bar{Z}') \rightarrow (X, \bar{Z})$ depends on the rigidification, and this is the reason why we prefer to consider the modification $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}: (X', Z') \rightarrow (X, Z)$ instead. However, there is an additional structure on $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ that has a chance to be independent of $\bar{Z}$, and which should be taken into account. By §3.4.8, the modification of schemes $f: X' \rightarrow X$ has a natural structure of a normalized blow up tower $X_\bullet$ with $X = X_0$ and $X' = X_n$. Note also that the tower contains no empty blow ups because this is true for $\widehat{\mathcal{F}}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$ and $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ is its strict transform with respect to the surjective morphism $X \rightarrow X/G$.

Note also that the log structure on (X', Z') is reconstructed uniquely from f because $Z' = f^{-1}(Z)$ and (X', Z') is saturated and log regular. Therefore, it is safe from now on to view $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ as a normalized blow up tower of X , but the modification of log schemes $(X', Z') \rightarrow (X, Z)$ will also be denoted as $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$.

REMARK 5.3.12. Although we do not assume that X is qc, all normalizations in the tower $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ are finite. This happens because they underly saturations of fine log schemes, which are always finite morphisms.

5.4. Functoriality. Clearly, the construction of f depends canonically on $(G, X, Z, \bar{Z})$, i.e. is compatible with any automorphism of such quadruple. Our next aim is to establish functoriality with

respect to strict inert λ -equivariant morphisms $\phi: (H, Y, T, \bar{T}) \rightarrow (G, X, Z, \bar{Z})$ (i.e. morphisms that "preserve the combinatorial structure"). For this one has first to study the quotient morphism of log schemes $\tilde{\phi}: (Y/H, \bar{T}/H) \rightarrow (X/G, \bar{Z}/G)$.

5.4.1. Log structure of the quotients. Recall the following facts from Proposition VI-3.4(b) and its proof. Assume that $X = (X, M_X)$ is an fs log scheme provided with a very tame action of a group G . After replacing X with its strict localization at a geometric point $\bar{x}$, it admits an equivariant chart $X \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[Q])$, where $\Lambda = \mathbb{Z}[1/N, \mu_N]$ for the order N of $G_{\bar{x}}$, Q is an fs monoid and the action of $G_{\bar{x}}$ is via a pairing $\chi: G_{\bar{x}} \otimes Q \rightarrow \mu_N$. Moreover, if $P \subset Q$ is the maximal submonoid with $\chi(G_{\bar{x}} \otimes P) = 1$ then $\text{Spec}(\Lambda[Q]) \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[P])$ is a chart of $X \rightarrow X/G_{\bar{x}}$. Now, let us apply this description to the study of $\tilde{\phi}$.

PROPOSITION 5.4.2. *Assume that fs log schemes X, Y are provided with admissible very tame actions of groups G and H , respectively, $\lambda: H \rightarrow G$ is a homomorphism, and $\phi: Y \rightarrow X$ is a strict inert λ -equivariant morphism. Then the quotient morphism $\tilde{\phi}: Y/H \rightarrow X/G$ is strict.*

Proof. Fix a geometric point $\bar{y}$ of Y and let $\bar{x}$ be its image in X . It suffices to show that $\tilde{\phi}$ is strict at the image of $\bar{y}$ in Y/H . The morphism $Y/H_{\bar{y}} \rightarrow Y/H$ is strict (and étale) over the image of $\bar{y}$, and the same is true for X . Therefore we can replace H and G with $H_{\bar{y}} \xrightarrow{\sim} G_{\bar{x}}$, and then we can also replace X and Y with their strict localizations at $\bar{x}$ and $\bar{y}$. Now, the morphism $X \rightarrow \tilde{X} = X/G_{\bar{x}}$ admits an equivariant chart $h: \text{Spec}(\Lambda[Q]) \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[P])$ as explained before the proposition. Since ϕ is strict, the induced morphism $Y \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[Q])$ is also a chart and hence h is also a chart of $Y \rightarrow Y/G_{\bar{y}}$. Thus, $\tilde{\phi}$ is strict. $\square$

5.4.3. An application to functoriality of $f_\bullet$. Assume that $(G, X, Z, \bar{Z})$ is as earlier, and let $(H, Y, T, \bar{T})$ be another such quadruple (i.e. (Y, T) with the action of H satisfies conditions of Steps 1, 2, 3 and $(Y, \bar{T})$ is its rigidification).

COROLLARY 5.4.4. *Assume that $\lambda: H \rightarrow G$ is a homomorphism and $\phi: Y \rightarrow X$ is a λ -equivariant inert morphism underlying strict morphisms of log schemes $\psi: (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ and $\bar{\psi}: (Y, \bar{T}) \rightarrow (X, \bar{Z})$. Then $f_\bullet$ is compatible with ϕ in the sense that $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$ is the contraction of $\phi^{\text{st}}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})})$. In addition, $\phi^{\text{st}}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})}) = f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X Y$.*

Proof. Since $\bar{\psi}$ is strict its quotient is strict by Proposition 5.4.2, and by functoriality of saturated monoidal desingularization we obtain that $\mathcal{F}^{\log}(Y/H, \bar{T}/H)$ is the contracted pullback of $\mathcal{F}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$. So, both $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$ and $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ are obtained as the contraction of the strict transform of $\mathcal{F}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$. The first claim of the Corollary follows.

Furthermore, $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ underlies a log blow up tower of $(X, \bar{Z})$ which is the strict transform of $\mathcal{F}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$, and the same is true for $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$. Since $\bar{\psi}$ is strict it follows from Lemma 3.4.6(ii) that the strict transform is a pullback, i.e. $\phi^{\text{st}}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})}) = f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X Y$. $\square$

5.4.5. Localizations and completions. In particular, it follows that the construction of $f_\bullet$ is compatible with localizations and completions. Namely, if $x \in X$ is a point, $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$, $Z_x = Z \times_X X_x$ and $\bar{Z}_x = \bar{Z} \times_X X_x$, then $f_{(G_x, X_x, Z_x, \bar{Z}_x)}$ is the contraction of $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X X_x$. Similarly, if $\hat{X}_x = \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{X, x})$, $\hat{Z}_x = Z \times_X \hat{X}_x$ and $\hat{\bar{Z}}_x = \bar{Z} \times_X \hat{X}_x$, then $f_{(G_x, \hat{X}_x, \hat{Z}_x, \hat{\bar{Z}}_x)}$ is the contraction of $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X \hat{X}_x$.

5.5. Globalization. To complete the proof of Theorem 1.1 it suffices to show that $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ is independent of $\bar{Z}$, and hence the local constructions glue to a global normalized blow up tower. The main idea is to simultaneously lift two rigidifications to characteristic zero and apply Theorem 3.4.15.

5.5.1. Independence of rigidification. We start with the case of complete local rings. Then the problem is solved by lifting to characteristic zero and referencing to 3.4.15. The general case will follow rather easily.

LEMMA 5.5.2. *Keep assumptions on (X, Z) and G as in §5.1 and assume, in addition, that $X = \coprod_{i=1}^m \operatorname{Spec}(A_i)$ where each A_i is a complete noetherian regular local ring with a separably closed residue field. Then for any pair of rigidifications $\bar{Z}$ and $\bar{Z}'$ the equality $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} = f_{(G, X, Z, \bar{Z}')}$ holds.*

Proof. Almost the whole argument runs independently on each irreducible component, so assume first that $X = \operatorname{Spec}(A)$ is irreducible. Set $k = A/\mathfrak{m}_A$. By Remark 5.3.10(ii), it suffices to consider the case when $\operatorname{char}(k) = p > 0$, so let $C(k)$ be a Cohen ring of k . Note that we can work with $H = G_{\bar{x}}$ instead of G because $f_{(H, X, Z, \bar{Z})} = f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ by Corollary 5.4.4. Since H acts trivially on k , for any element $t \in A$ its H -averaging is an element of A^H with the same image in the residue field. Hence k is the residue field of A^H and the usual theory of Cohen rings provides a homomorphism $C(k) \rightarrow A^H$ that lifts $C(k) \rightarrow A^H/\mathfrak{m}_{A^H}$. Note that $\bar{Z}$ and $\bar{Z}'$ are snc because each A_i is strictly henselian. Using averaging on the action of H again, we can find regular families of H -equivariant parameters $\underline{z} = (z_1, \dots, z_d)$ and $\underline{z}' = (z'_1, \dots, z'_d)$ such that $Z = V(\prod_{i=1}^l z_i)$, $z'_i = z_i$ for $1 \leq i \leq l$, $\bar{Z} = V(\prod_{i=1}^n z_i)$ and $\bar{Z}' = V(\prod_{i=1}^{n'} z'_i)$. Explicitly, the action on z_i (resp. z'_i) is by a character $\chi_i: H \rightarrow \mu_N$ (resp. $\chi'_i: H \rightarrow \mu_N$).

Since the image of $\underline{z}$ is a basis of the cotangent space at x , we obtain a surjective homomorphism $f: B = C(k)[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow A$ taking t_i to z_i . Provide B with the action of H which is trivial on $C(k)$ and acts on t_i via χ_i , in particular, f is H -equivariant. Let us also lift each z'_i to an H -equivariant parameter $t'_i \in B$. For $i \leq l$ we take $t'_i = t_i$, and for $i > l$ we first choose any lift and then replace it with its χ_i -weighted H -averaging. Consider the regular scheme $Y = \operatorname{Spec}(B)$ with H -equivariant snc divisors $T = V(\prod_{i=1}^l t_i)$, $\bar{T} = V(\prod_{i=1}^n t_i)$ and $\bar{T}' = V(\prod_{i=1}^{n'} t'_i)$.

Since H acts vary tamely on $(X, \bar{Z})$, it acts trivially on $V(z_1, \dots, z_n) = \operatorname{Spec}(k[[z_{n+1}, \dots, z_d]])$ and we obtain that $\chi_i = 1$ for $i > n$. Therefore, H also acts trivially on $\operatorname{Spec}(B/(t_1, \dots, t_n)) = \operatorname{Spec}(C(k)[[t_{n+1}, \dots, t_d]])$ and we obtain that the action on $(Y, \bar{T})$ is very tame. Since the closed immersion $j: X \rightarrow Y$ is H -equivariant and strict, and $\bar{Z} = \bar{T} \times_Y X$, Corollary 5.4.4 implies that $f_\bullet$ is compatible with j , i.e., $f_{(H, X, Z, \bar{Z})}$ is the contracted strict transform of $f_{(H, Y, \bar{T}, \bar{T})}$. The same argument applies to the rigidifications $\bar{Z}'$ and $\bar{T}'$, so it now suffices to show that $f_{(H, Y, \bar{T}, \bar{T})} = f_{(H, Y, \bar{T}', \bar{T}')}$. For this we observe that maximal points of log strata of the log schemes $(Y/H, \bar{T}/H)$ and $(Y/H, \bar{T}'/H)$ are of characteristic zero, hence the latter equality holds by Theorem 3.4.15.

Finally, let us explain how one deals with the case of $m > 1$. First one finds an H -equivariant strict closed immersion $i: X \rightarrow Y$ such that $\bar{Z}$ and $\bar{Z}'$ extend to rigidifications $\bar{T}$ and $\bar{T}'$ of (Y, T) , and the maximal points of the log strata of $(Y/H, \bar{T}/H)$ and $(Y/H, \bar{T}'/H)$ are of characteristic zero. For this we apply independently the above construction to the connected components of X . Once i is constructed, the same reference to 3.4.15 shows that $f_{(H, Y, \bar{T}, \bar{T})} = f_{(H, Y, \bar{T}', \bar{T}')}$ and hence $f_{(H, X, Z, \bar{Z})} = f_{(H, X, Z, \bar{Z}')}$ $\square$

COROLLARY 5.5.3. *Let (X, Z) and G be as in §5.1 and assume that the action is admissible. Then for any choice of rigidifications $\bar{Z}$ and $\bar{Z}'$ we have that $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} = f_{(G, X, Z, \bar{Z}')}$.*

Proof. For a point $x \in X$ let $\widehat{\mathcal{O}}_{X, x}^{\text{sh}}$ denote the completion of the strict henselization of $\mathcal{O}_{X, x}$. It suffices to check that for any point x the normalized blow up towers $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ and $f_{(G, X, Z, \bar{Z}')}$ pull back to the same normalized blow up towers of $\widehat{X}_x^{\text{sh}} = \operatorname{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, x}^{\text{sh}})$ (with respect to the morphism $\widehat{X}_x^{\text{sh}} \rightarrow X$). Indeed, any normalized blow up tower $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$ is uniquely determined by its centers V_i . For each i the morphism $Y_i = \coprod_{x \in X} X_i \times_x \widehat{X}_x^{\text{sh}} \rightarrow X_i$ is faithfully flat, hence V_i is uniquely determined by $V_i \times_{X_i} Y_i$, which is the center of $\mathcal{X} \times_X \coprod_{x \in X} \widehat{X}_x^{\text{sh}}$.

By 5.4.5, $f_{(G_{\bar{x}}, \widehat{X}_x^{\text{sh}}, Z \times_X \widehat{X}_x^{\text{sh}}, \bar{Z} \times_X \widehat{X}_x^{\text{sh}})}$ is the contracted pullback of $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$, and an analogous result is true for $f_{(G, X, Z, \bar{Z}')}$. Thus the contracted pullbacks are equal by Lemma 5.5.2. We have, however, to worry also for the synchronization, i.e. to establish equality of non-contracted pullbacks. For this we will use the following trick. Consider the finite set $S = \operatorname{Ass}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})}) \cup \operatorname{Ass}(f_{(G, X, Z, \bar{Z}')})$ (see 2.2.11). Set $\widehat{X}_S^{\text{sh}} = \coprod_{s \in S} \widehat{X}_s^{\text{sh}}$, then the pullbacks of $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ and $f_{(G, X, Z, \bar{Z}')}$ to $\widehat{X}_S^{\text{sh}}$ are already contracted. Now,

in order to compare the pullbacks to $\widehat{X}_x^{\text{sh}}$, consider the pullbacks to $\widehat{X}_x^{\text{sh}} \coprod \widehat{X}_S^{\text{sh}}$. They are contracted, so Lemma 5.5.2 (which covers disjoint unions) implies that these pullbacks are equal. Restricting them onto $\widehat{X}_x^{\text{sh}}$ we obtain equality of non-contracted pullbacks to $\widehat{X}_x^{\text{sh}}$. $\square$

REMARK 5.5.4. (i) The above corollary implies that the modification $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$ depends only on (G, X, Z) , so it will be denoted $f_{(G,X,Z)}$ in the sequel. At this stage, $f_{(G,X,Z)}$ is defined only when X is admissible and (X, Z) admits a rigidification.

(ii) Corollaries 5.4.4 and 5.5.3 imply that $f_{(G,X,Z)}$ is functorial with respect to equivariant strict inert morphisms.

5.5.5. *Theorem 1.1 — end of proof.* Let $X = (X, Z)$ be as assumed in §5.1, and suppose that X is qe. By Lemma 5.3.8 there exists a surjective étale inert strict morphism $h: X_0 \rightarrow X$ such that X_0 is affine and possesses a rigidification. Then $X_1 = X_0 \times_X X_0$ is affine and also admits a rigidification (e.g. the preimage of that of X_0 by one of the canonical projections). By Remark 5.5.4(i), X_0 and X_1 possess normalized blow up towers $f_{(G,X_0,Z_0)}$ and $f_{(G,X_1,Z_1)}$, which are compatible with both projections $X_1 \rightarrow X_0$ by Remark 5.5.4(ii). It follows that $f_{(G,X_0,Z_0)}$ is induced from a unique normalized blow up tower of X that we denote as $f_{(G,X,Z)}$. This modification satisfies all assertions of Theorem 1.1 because $f_{(G,X_0,Z_0)}$ does so by Remark 5.3.10(i).

5.6. Additional properties of $f_{(G,X,Z)}$. Finally, let us formulate an addendum to Theorem 1.1 where we summarize additional properties of the constructed modification of (X, Z) . At this stage we drop any assumptions on (X, Z) beyond the assumptions of 1.1. By $f_{(G,X,Z)}$ we denote below the entire modification from Theorem 1.1 that also involves the modifications of Steps 1, 2, 3.

THEOREM 5.6.1. *Keep assumptions of Theorem 1.1. In addition to assertions of the theorem, the modifications $f_{(G,X,Z)}$ can be constructed uniformly for all triples (G, X, Z) such that the following properties are satisfied:*

(i) *Each $f_{(G,X,Z)}$ is provided with a structure of a normalized blow up tower and its centers are contained in the preimages of $Z \cup T$.*

(ii) *For any homomorphism $\lambda: H \rightarrow G$ the construction is functorial with respect to λ -equivariant inert strict regular morphisms $(Y, T) \rightarrow (X, Z)$.*

Proof. The total modification $f_{(G,X,Z)}$ is obtained by composing four modifications f_1, f_2, f_3 and f_4 : the modifications from Steps 1, 2, 3 and the modification we have constructed in §5. Recall that f_1 and f_4 are constructed as normalized blow up towers. Modifications f_2 and f_3 are permissible blow up towers, hence they are also normalized blow up towers with the same centers. This establishes the first part of (i).

Concerning claim (ii), recall that normalized blow ups are compatible with regular morphisms by Lemma 2.2.9, hence we should check that the centers of $f_{(H,Y,T)}$ are the pullbacks of the centers of $f_{(G,X,Z)}$. For f_1, f_2 and f_3 this is clear, so it remains to prove that if (G, X, Z) is as in §5.1 and $(Y, T) \rightarrow (X, Z)$ is λ -equivariant, inert, strict and regular then $f_{(H,Y,T)}$ is the pullback of $f_{(G,X,Z)}$. We can work étale locally on X (replacing Y with the base change). Thus, using Lemma 5.3.8 we can assume that X possesses a rigidification $\bar{Z}$. Since $Y \rightarrow X$ is regular and inert, the preimage $\bar{T}$ of $\bar{Z}$ is a rigidification of Y . Thus, $f_{(H,Y,T)} = f_{(H,Y,\bar{T})}$ and $f_{(G,X,Z)} = f_{(G,X,\bar{Z})}$ and it remains to use that $f_{(H,Y,\bar{T})}$ is the pullback of $f_{(G,X,\bar{Z})}$ by Lemma 5.4.4.

To prove the second part of (i) we use (ii) to restrict $f_{(G,X,Z)}$ onto $U = X \setminus Z \cup T$. Then U is a regular scheme with a trivial log structure which is acted freely by G . It follows from the definitions of f_1, f_2, f_3 and f_4 that they are trivial for such U . So, $f_{(G,U,\emptyset)}$ is the trivial tower, and hence all centers of $f_{(G,X,Z)}$ are disjoint from the preimage of U . $\square$

REMARK 5.6.2. One may wonder if the functoriality in Theorem 5.6.1(ii) holds for λ -equivariant strict inert morphisms which are not necessarily regular. In this case, the normalized blow up tower of X does not have to pullback to Y , but one can hope that $f_{(H,Y,T)}$ is the strict transform of $f_{(G,X,Z)}$. We indicate without proofs what can be done in this direction.

A careful examination of the argument shows that f_1 and f_2 are functorial with respect to all strict morphisms, while f_3 is functorial with respect to all schematically inert morphisms as defined below. A λ -equivariant morphism of separated schemes $Y_1 \rightarrow X_1$ is called **schematically inert** if for any subgroup $G' \subset G$ the pullback $X_1^{G'} \times_{X_1} Y_1$ of $X_1^{G'}$ is a disjoint union of $Y_1^{H'_i}$ with $\lambda(H'_i) = G'$. For example, if μ_2 acts on the coordinate x of $X_1 = \operatorname{Spec} \mathbf{Q}[x]$ by the non-trivial character then the μ_2 -equivariant morphism $X_1 \rightarrow X_1$ sending x to x^3 is inert but not schematically inert.

It remains to examine the construction of f_4 . Note that we only used the regularity of $h: Y \rightarrow X$ to construct compatible rigidifications of X and Y , since Lemma 5.4.4 holds for arbitrary strict inert morphisms. In fact, one can formulate a necessary and sufficient criterion guaranteeing that étale locally on X there exist compatible rigidifications $\bar{Z}$ and $\bar{T}$. Note that if $\bar{Z}$ and $\bar{T}$ exist then the inertia strata of X and Y are (set-theoretic) disjoint unions of connected components of log-strata of $\bar{Z}$ and $\bar{T}$. Since $\bar{T}^i = \bar{Z}^i \times_X Y$, this implies that h is schematically inert.

In addition, $\bar{Z}^i$ and $\bar{T}^i$ are of the same codimension hence the following condition holds: (*) for any connected component V of $X^{G'}$ with non-empty preimage in Y , the codimension of V in X equals to the codimension of $V \times_X Y$ in Y . This motivates a further strengthening of the notion of inertness: a schematically inert morphism $h_1: Y_1 \rightarrow X_1$ is called **derived inert** if the morphisms h_1 and $X_1^{G'} \rightarrow X_1$ are Tor-independent for any subgroup $G' \subset G$. One can show that in the case of regular X_1 and Y_1 this happens if and only if (*) is satisfied. For example, if μ_n acts on the coordinates of $X = \operatorname{Spec} \mathbf{Q}[x, y]$ by characters then the μ_n -equivariant closed immersion $\operatorname{Spec} \mathbf{Q}[x] \hookrightarrow X$ is always schematically inert, and it is derived inert if and only if the action on y is through the trivial character.

As we saw, existence of compatible rigidifications guarantees that $h: Y \rightarrow X$ is derived inert, and strengthening Lemma 5.3.8 one can show that, conversely, if h is derived inert then compatible rigidifications exist étale locally. In particular, functoriality holds for arbitrary morphisms which are equivariant, strict and derived inert.

EXPOSÉ IX

Uniformisation locale première à ℓ

Luc Illusie

1. Rappel de l'énoncé et premières réductions

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation locale première à ℓ (II-4.3.1, III-6.1) :

THÉORÈME 1.1. *Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X et ℓ un nombre premier inversible sur X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations (II-2.3) et telle que, pour tout $i \in I$:*

- (i) X_i soit régulier et intègre,
- (ii) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

Le premier ingrédient essentiel de la démonstration de 1.1 est le résultat suivant, forme faible d'un résultat de de Jong [de Jong, 1997, 2.4] :

THÉORÈME 1.2. *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre de schémas noethériens excellents intègres, et Z un sous-schéma fermé rare de X . Soit η le point générique de Y . On suppose que X_η est lisse, géométriquement irréductible et de dimension 1, et que Z_η est étale. Il existe alors un groupe fini G , un diagramme commutatif de G -schémas*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array},$$

un diviseur effectif G -équivariant D dans X' , et un fermé rare G -équivariant T' de Y' possédant les propriétés suivantes :

- (i) f' est projectif;
- (ii) G agit trivialement sur X et Y , librement sur $Y' - T'$;
- (iii) a et b sont des altérations projectives génériquement étales, et $Y'/G \rightarrow Y$ (resp. $X'/G \rightarrow X$) induit un isomorphisme en η (resp. au point générique de X_η);
- (iv) f' est une courbe nodale, lisse hors de T' ;
- (v) D est étale sur Y' , et contenu dans le lieu lisse de f' ;
- (vi) $Z' := a^{-1}(Z)$ est contenu dans $D \cup f'^{-1}(T')$.

Rappelons que dire que f' est une courbe nodale signifie que f' est plat, à fibres géométriques connexes de dimension 1, ayant pour seules singularités des points quadratiques ordinaires.

Il suffit en effet d'appliquer *loc. cit.* au couple (f, Z) , avec le groupe G de *loc. cit.* égal à $\{1\}$. Les hypothèses faites sur X_η et Z_η assurent que (f, Z) vérifie les conditions (2.1.1) et (2.1.5) de [de Jong, 1997], et donc que le couple (a, b) vérifie (2.2.1) et (2.2.5) de *loc. cit.*, ce qui implique (iii). Le fermé T' est donné par le fermé noté D dans (*loc. cit.*, 2.5), éventuellement agrandi pour que G opère librement sur $Y' - T'$. Noter que, si Y est séparé, il en est de même de Y' , et (ii) entraîne que G opère fidèlement sur X' et Y' .

1.3. Les premières réductions de la démonstration de 1.1 sont analogues à celles de la démonstration du théorème d'uniformisation locale faible. Il suffit de prouver 1.1 pour X de dimension finie. On raisonne par récurrence sur la dimension de X . Le théorème est connu en dimension ≤ 1 (normalisation). Soit d un entier ≥ 2 . Supposons le théorème établi en dimension $< d$. D'après (III-6.2),

on peut supposer X local noethérien complet, et même normal. D'après V-3.1.3, quitte à faire une extension finie de X de degré générique premier à ℓ , on peut supposer qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

avec Y local noethérien régulier complet de dimension $d - 1$ et f de type fini, à fibres de dimension 1, et un point fermé x' de X' et un fermé rare Z' de X' tels que $f(x')$ soit le point fermé de Y , g induise un isomorphisme de X sur le complété de X' en x' , et qu'enfin $Z = g^{-1}(Z')$. Comme X' est excellent, g est régulier. Le changement de base par g préserve régularité, diviseurs à croisements normaux, et familles couvrantes pour la topologie des ℓ' -altérations (II-2.3). On peut donc remplacer X par X' , donc, quitte à changer les notations, supposer X intègre de dimension d , muni d'un morphisme de type fini $f : X \rightarrow Y$, à fibres de dimension 1. Le problème étant local pour la topologie des ℓ' -altérations, donc *a fortiori* pour la topologie de Zariski, on peut supposer X affine. Compactifiant f , on se ramène à supposer f propre. Quitte à éclater dans X un sous-schéma fermé ayant Z pour espace sous-jacent, on peut supposer que Z est un diviseur dans X . Le morphisme f n'est plus nécessairement une courbe relative, mais sa fibre générique reste de dimension 1. Soit η le point générique de Y . D'après ([ÉGA IV 4.6.6]) il existe une extension radicielle finie η' de η telle que $(X_{\eta'})_{\text{red}}$ soit géométriquement réduit, et $(Z_{\eta'})_{\text{red}}$ étale sur η' . Quitte à remplacer Y par son normalisé dans η' , X par son normalisé dans le corps des fractions de $(X_{\eta'})_{\text{red}}$, et Z par son image inverse réduite, on peut donc supposer que X_{η} est lisse et que Z_{η} est étale. Le schéma Y n'est plus nécessairement régulier, mais reste affine, normal, intègre et excellent. Considérons la factorisation de Stein $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{q} Y$ de $f : q$ est fini surjectif, génériquement étale, f_1 est propre et surjectif, et ses fibres géométriques sont connexes. Comme $f_{1*} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y_1}$ et que X est intègre, Y_1 est intègre également. Quitte à remplacer Y par Y_1 (et f par f_1), on peut donc supposer que la fibre générique de f est lisse, géométriquement connexe, et que Z_{η} est étale. On se trouve alors dans la situation de 1.2, avec Z un diviseur, et Y affine.

1.4. Appliquons 1.2 à la situation que nous venons d'obtenir. D'après (iii), le morphisme $X'/G \rightarrow X$ est $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant. Remplaçant X par X'/G , Z par son image inverse, et Y par Y'/G , et changeant les notations, on peut donc supposer que $X = X'/G$, $Y = Y'/G$. Noter que, comme Y est affine et b, f' projectifs, les actions de G sur X' et Y' sont admissibles, et X'/G et Y'/G sont encore intègres et excellents. Soit H un sous-groupe de ℓ -Sylow de G . Considérons la factorisation

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{a_1} & X'/H & \xrightarrow{a_2} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b_1} & Y'/H & \xrightarrow{b_2} & Y \end{array}$$

Comme a_2 est $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant, on peut (utilisant l'admissibilité de l'action de H) remplacer X par X'/H , Z par son image inverse dans X'/H , Y par Y'/H , et enfin G par H , de sorte qu'on peut supposer que G est un ℓ -groupe.

Appliquons l'hypothèse de récurrence au couple $(Y = Y'/G, T := T'/G)$. Il existe une famille finie $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante $(Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$, avec Y_i régulier connexe, et (l'espace sous-jacent à) $T_i = Y_i \times_Y T$ le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Pour chaque $i \in I$, soient Y'_i le normalisé d'une composante irréductible de $Y' \times_Y Y_i$ et $G_i \subset G$ le groupe de décomposition de cette composante. Remplaçant Y par Y_i , Y' par Y'_i , G par G_i , et les autres données par leurs images inverses par $Y_i \rightarrow Y$, $Y'_i \rightarrow Y'$, et travaillant séparément sur chaque Y_i , on se ramène à supposer que, dans le diagramme de 1.2, on a les propriétés additionnelles suivantes :

(*) $Y = Y'/G$ est affine, régulier, connexe, $T = T'/G$ est un diviseur à croisements normaux strict dans Y , $Y' - T' = Y' \times_Y (Y - T)$ est un revêtement étale galoisien de $Y - T$ de groupe G , Y' est le normalisé de Y dans $Y' - T'$, $X = X'/G$.

2. Log régularité, fin de la démonstration

Nous aurons besoin du résultat suivant, cas particulier d'un théorème de Fujiwara-Kato [Fujiwara & Kato, 1995, 3.1] :

PROPOSITION 2.1. *Soient Y un schéma noethérien régulier, $T \subset Y$ un diviseur à croisements normaux strict, $V = Y - T$. Munissons Y de la log structure associée au couple (Y, T) (VI-1.4). Alors :*

(i) *Le foncteur de restriction de la catégorie des revêtements Kummer étales de Y dans celle des revêtements étales de V modérément ramifiés le long de T est une équivalence de catégories.*

(ii) *Si Y' est un revêtement Kummer étale de Y , Y' est le normalisé de Y dans $Y' \times_Y V$.*

(iii) *Si V' est un revêtement étale de V , modérément ramifié le long de T , il existe une unique log structure fs sur le normalisé Y' de Y dans V' faisant de Y' un revêtement Kummer étale de Y .*

Il suffit de prouver (i) et (ii). La question est locale pour la topologie étale sur Y . On peut donc supposer Y strictement local, $Y = \text{Spec } A$, de point fermé $y = \text{Spec } k$, et $T = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{div}(t_i)$, où les t_i font partie d'un système régulier de paramètres de A . Le log schéma Y admet la carte $(\overline{M}_y = \mathbf{N}^r \rightarrow A, e_i \mapsto t_i)$. D'après le théorème de structure locale des revêtements Kummer étales (VI-2.2), tout revêtement Kummer étale Y' de Y est somme de revêtements Kummer étale standard, de la forme $Z = Y \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[\mathbf{N}^r]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$, où $\mathbf{N}^r \rightarrow Q$ est un morphisme de Kummer tel que $nQ \subset \mathbf{N}^r$ pour un entier n premier à la caractéristique de k . On a donc $Q = \mathbf{N}^r \cap L$, pour un sous-groupe L de $\mathbf{Z}^r$ tel que $n[\mathbf{Z}^r : L] = 0$, et $Z = (\text{Spec } A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r))^G$, où $G = \text{Hom}(\mathbf{Z}^r/L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de μ_n^* opérant sur $\text{Spec } A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r)$ de la manière naturelle. Il en résulte que Z est le normalisé de Y dans le revêtement étale $Z \times_Y V$ de V . On en déduit (ii), et la pleine fidélité en (i), par la considération de graphes de morphismes entre revêtements Kummer étales de Y . L'essentielle surjectivité découle du lemme d'Abhyankar ([SGA 1 XIII 5.3]) donnant la structure du groupe fondamental modéré de V , qui implique que le normalisé de Y dans un revêtement étale modéré connexe de V est de la forme Z décrite précédemment.

2.2. Partons de la situation obtenue à la fin de 1.4. D'après 2.1, compte tenu de (*), il existe sur Y' une unique log structure faisant de Y' un revêtement Kummer étale de Y (muni de la log structure définie par T), galoisien de groupe G . En particulier, le couple (Y', T') est log régulier. D'après (VI-1.9), le couple $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$ est log régulier, et pour la log structure correspondante sur X' , f' est log lisse. De plus, l'image inverse Z' de Z dans X' est un diviseur contenu dans $D' = f'^{-1}(T') \cup D$.

L'action de G sur X' est modérée (G est un ℓ -groupe), mais pas nécessairement très modérée (VI-3.1). Si elle l'était, le couple $(X = X'/G, D'/G)$ serait alors log régulier (VI-3.2), et l'on pourrait terminer la démonstration de 1.1 comme dans (VII-4), à l'aide de la résolution des singularités des couples log réguliers. On se ramène à ce cas grâce au théorème de modification (VIII-1.1), dont nous rappelons l'énoncé :

THÉORÈME 2.3. *Soit (X, Z) un couple log régulier (VI-1.4), muni d'une action d'un groupe fini G . On suppose que X est noethérien, séparé, et que l'action de G sur X est modérée et génériquement libre. Soit T le complément du plus grand ouvert G -stable de X où G opère librement. Il existe alors une modification projective G -équivariante $f : X' \rightarrow X$ telle que, si $Z' = f^{-1}(Z \cup T)$, le couple (X', Z') soit log régulier, et l'action de G sur X' très modérée.*

2.4. Le couple (X', D') de 2.2 vérifie les hypothèses sur (X, Z) de 2.3 : (X', D') est log régulier, X' est séparé (car projectif sur Y), l'action de G sur X' est modérée, et libre sur $X' - f'^{-1}(T')$, en particulier génériquement libre. De plus, l'action de G sur X' est admissible. Il existe donc un diagramme commutatif G -équivariant

$$\begin{array}{ccc} (X'', D'') & \longrightarrow & (X''/G, D''/G) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ (X', D') & \longrightarrow & (X, D) = (X'/G, D'/G) \end{array} ,$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques, p est une modification projective (G -équivariante), (X'', D'') est log régulier, avec $X'' - D'' \subset p^{-1}(X' - D')$, et l'action de G sur (X'', D'') est très modérée. D'après VI-3.2, le couple $(X''/G, D''/G)$ est donc log régulier. Appliquons à ce couple le théorème de désingularisation de Kato-Nizioł ([Kato, 1994, 10.3, 10.4], [Nizioł, 2006, 5.7], [Gabber & Ramero, 2013, 9.6.32]) : il existe un morphisme log étale $e : \tilde{X} \rightarrow X''/G$, projectif, surjectif et birationnel sur les schémas sous-jacents, avec $\tilde{X}$ régulier, et un diviseur à croisements normaux strict $\tilde{D}$ tels que $\tilde{X} - \tilde{D} = e^{-1}(X''/G - D''/G)$. Alors $\tilde{Z} := (qe)^{-1}(Z)$ a pour support un diviseur contenu dans $\tilde{D}$, donc strictement à croisement normaux. Comme q est une modification, qe en est une également, et 1.1 est démontré.

Gabber's modification theorem (log smooth case)

Luc Illusie and Michael Temkin⁽ⁱ⁾

In this exposé we state and prove a variant of the main theorem of VIII (see VIII-1.1) for schemes X which are log smooth over a base S with trivial G -action. See 1.1 for a precise statement. The proof is given in §1 and in the remaining part of the exposé we deduce refinements of classical theorems of de Jong, for schemes of finite type over a field or a trait, where the degree of the alteration is made prime to a prime ℓ invertible on the base. Sections 2 and 3 are independent and contain two different proofs of such a refinement, so let us outline the methods briefly.

For concreteness, assume that k is a field, $S = \text{Spec}(k)$, and X is a separated S -scheme of finite type. Two methods to construct regular ℓ' -alterations of X are: (1) use a pluri-nodal fibration to construct a regular G -alteration $X' \rightarrow X$ and then factor X' by an ℓ -Sylow subgroup of G , and (2) construct a regular ℓ' -alteration by induction on $\dim(S)$ so that one factors by an ℓ -Sylow subgroup at each step of the induction. The first approach is presented in §2. It is close in spirit to the approach of [de Jong, 1997] and its strengthening by Gabber-Vidal, see [Vidal, 2004, §4]. The weak point of this method is that one uses inseparable Galois alterations. In particular, even when k is perfect, one cannot obtain a separable alteration of X .

The second approach is realized in §3, using [Temkin, 2010]; it outperforms the method of §2 when k is perfect. Moreover, developing this method the second author discovered Theorem 3.5 that generalizes Gabber's theorems 2.1 and 2.4 to the case of a general base S satisfying a certain resolvability assumption (see §3.3). In addition, if S is of characteristic zero then the same method allows to use modifications instead of ℓ' -alterations, see Theorem 3.9. As an application, in Theorem 3.10 we generalize Abramovich-Karu's weak semistable reduction theorem. Finally, we minimize separatedness assumptions in §3, and for this we show in §3.1 how to weaken the separatedness assumptions in Theorems 1.1 and VIII-1.1.

1. The main theorem

THEOREM 1.1. *Let $f : X \rightarrow S$ be an equivariant log smooth map between fs log schemes endowed with an action of a finite group G . Assume that:*

- (i) G acts trivially on S ;
- (ii) X and S are noetherian, qc, separated, log regular, and f defines a map of log regular pairs $(X, Z) \rightarrow (S, W)$ (see VI-1.4: (X, Z) and (S, W) are log regular pairs and $f(X - Z) \subset S - W$);
- (iii) G acts tamely and generically freely on X .

Let T be the complement of the largest open subset of X over which G acts freely. Then there exists an equivariant projective modification $h : X' \rightarrow X$ such that, if $Z' = h^{-1}(Z \cup T)$, the pair (X', Z') is log regular, the action of G on X' is very tame, and (X', Z') is log smooth over (S, W) as well as the quotient $(X'/G, Z'/G)$ when G acts admissibly on X ([SGA1 v 1.7]).

REMARK 1.1.1. (a) In the absence of the hypothesis (i) it may not be possible to find a modification h satisfying the properties of 1.1, as the example at the end of VIII-1.2 shows.

(b) By [Kato, 1994, 8.2] the log smoothness of f and the log regularity of S imply the log regularity of X . Conversely, according to Gabber (private communication), if X is log regular and f is log smooth and surjective, then S is log regular.

⁽ⁱ⁾The research of M.T. was partially supported by the European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) under grant agreement 268182.

(c) We will deduce Theorem 1.1 from Theorem VIII-1.1. Recall that in the latter theorem we assumed that X is *qe*, though Gabber has a subtler argument that works for a general X . This forces us to assume that S (and hence X) is *qe* in Theorem 1.1. However, our argument also shows that once one removes the quasi-excellence assumption from VIII-1.1, one also obtains the analogous strengthening of Theorem 1.1.

For the proof of 1.1 we will use the following result on the local structure of equivariant log smooth maps.

PROPOSITION 1.2 (Gabber's preparation lemma). *Let $f : X \rightarrow Y$ be an equivariant log smooth map between fine log schemes endowed with an action of a finite group G . Let x be a geometric point of X , with image y in Y . Assume that G is the inertia group at x and is of order invertible on Y . Assume furthermore that G acts trivially on $\overline{M}_x$ and $\overline{M}_y$ ⁽ⁱⁱ⁾ and we are given an equivariant chart $a : Y \rightarrow \operatorname{Spec} \Lambda[Q]$ at y , modeled on some pairing $\chi : G^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu = \mu_N(\mathbf{C})$ (in the sense of (VI-3.3)), where Q is fine, $\Lambda = \mathbf{Z}[1/N, \mu]$, with N the exponent of G . Then, up to replacing X by an inert equivariant étale neighborhood of x , there is an equivariant chart $b : X \rightarrow \operatorname{Spec} \Lambda[P]$ extending a , such that $Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}$ is injective, the torsion of its cokernel is annihilated by an integer invertible on X , and the resulting map $b' : X \rightarrow X' = Y \times_{\operatorname{Spec} \Lambda[Q]} \operatorname{Spec} \Lambda[P]$ is smooth. Moreover, up to further shrinking X around x , b' lifts to an inert equivariant étale map $c : X \rightarrow X' \times_{\operatorname{Spec} \Lambda} \operatorname{Spec} \operatorname{Sym}_{\Lambda}(V)$, where V is a finitely generated projective Λ -module equipped with a G -action. If X, Y , and Q are *fs*, with Q sharp, then P can be chosen to be *fs* with its subgroup of units P^* torsionfree.*

Proof of 1.2. This is an adaptation of the proof of [Kato, 1988, 3.5] to the equivariant case. Consider the canonical homomorphism of *loc. cit.*

$$(1.2.1) \quad k(x) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega_{X/Y,x}^1 \rightarrow k(x) \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}}$$

sending $1 \otimes d \log t$ to the class of $1 \otimes t$, where

$$\overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}} = M_{X/Y,x}^{\text{gp}} / (\mathcal{O}_{X,x}^* + \operatorname{Im} f^{-1}(M_{Y,y}^{\text{gp}})).$$

It is surjective, and as G fixes x , it is G -equivariant. As G is of order invertible in $k(x)$ and acts trivially on the right hand side, (1.2.1) admits a G -equivariant decomposition

$$(1.2.2) \quad k(x) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega_{X/Y,x}^1 = V_0 \oplus (k(x) \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}}),$$

where V_0 is a finite dimensional $k(x)$ -vector space, endowed with an action of G . Let $(t_i)_{1 \leq i \leq r}$ be elements of M_x^{gp} such that the classes of $1 \otimes t_i$ form a basis of $k(x) \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}}$. By the method of (VI-3.5) we can modify the t_i 's to make them eigenfunctions of G . More precisely, for $g \in G$, we have

$$gt_i = z_i(g)t_i,$$

with $z_i(g) \in \mathcal{O}_x^*$, and $g \mapsto z_i(g)$ is a 1-cocycle of G with values in $\mathcal{O}_x^*$. By reduction mod $\mathfrak{m}_x$, it gives a 1-cocycle $\psi_i \in Z^1(G, \mu) = \operatorname{Hom}(G, \mu)$, as μ is naturally embedded in $k(x)^*$ since X is over Λ . Lifting μ in $\mathcal{O}_x^*$, $g \mapsto z_i(g)/\psi_i(g)$ is a 1-cocycle of G with values in $1 + \mathfrak{m}_x$, hence a coboundary $\delta_i \in B^1(G, 1 + \mathfrak{m}_x)$, $g \mapsto \delta_i(g) = gu_i/u_i$, for $u_i \in 1 + \mathfrak{m}_x$. Replacing t_i by $t_i u_i^{-1}$, we may assume that $z_i = \psi_i$, *i.e.*

$$gt_i = \psi_i(g)t_i,$$

for characters

$$\psi_i : G \rightarrow \mu.$$

Let Z be the free abelian group with basis $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$, and $h : Z \rightarrow M_x^{\text{gp}}$ the homomorphism sending e_i to t_i . As in the proof of [Kato, 1988, 3.5], consider the homomorphism

$$u : Z \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}}$$

defined by h on Z and the composition $Q^{\text{gp}} \rightarrow M_y^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}}$ on the second factor. We have

$$gu(a) = \psi(g \otimes a)u(a)$$

⁽ⁱⁱ⁾If M is the sheaf of monoids of a log scheme, $\overline{M}$ denotes, as usual, the quotient $M/\mathcal{O}^*$.

for some homomorphism

$$\psi : G^{\text{ab}} \otimes (Z \oplus Q^{\text{gp}}) \rightarrow \mu$$

extending χ and such that $\psi(g \otimes e_i)u(e_i) = \psi_i(g)h(e_i)$. As in *loc. cit.*, if $\bar{u}$ denotes the composition

$$\bar{u} : Z \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_x^{\text{gp}} (= M_x^{\text{gp}} / \mathcal{O}_x^*)$$

we see that $k(x) \otimes \bar{u}$ is surjective, hence the cokernel C of $\bar{u}$ is killed by an integer m invertible in $k(x)$. Using that $\mathcal{O}_{X,x}^*$ is m -divisible, one can choose elements $a_i \in M_x^{\text{gp}}$ and $b_i \in Z \oplus Q^{\text{gp}}$ ($1 \leq i \leq n$) such that the images of the a_i 's generate $\overline{M}_x^{\text{gp}}$ and $a_i^m = u(b_i)$. Let E be the free abelian group with basis e_i ($1 \leq i \leq n$), and let F be the abelian group defined by the push-out diagram

$$(1.2.3) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{m} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \oplus Q^{\text{gp}} & \xrightarrow{w} & F \end{array}$$

where the left vertical arrow sends e_i to b_i . The lower horizontal map is injective and its cokernel is isomorphic to E/mE , in particular, killed by m . The relation $a_i^m = u(b_i)$ implies that u extends to a homomorphism

$$v : F \rightarrow M_x^{\text{gp}}$$

whose composition $\bar{v} : F \rightarrow M_x^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_x^{\text{gp}}$ is surjective. Associated with v is a morphism

$$\varphi : G^{\text{ab}} \otimes F \rightarrow \mu$$

extending ψ , such that $gv(a) = \varphi(g \otimes a)v(a)$ for $a \in F$. Let $P := v^{-1}(M_x) \subset F$. Then P is a fine monoid containing Q , $P^{\text{gp}} = F$, and v sends P to M_x . As in [VI-3.5](#), [VI-3.10](#) we get a G -equivariant chart of $X_{(x)}$ associated with φ , which, up to replacing X by an inert equivariant étale neighborhood at x , extends to an equivariant chart

$$b : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$$

extending the chart $a : Y \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$. The homomorphism $Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}$ is injective, and the torsion part of its cokernel injects into the cokernel of $w : Z \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow F$ in (1.2.3), which is killed by m . Consider the resulting map

$$b' : X \rightarrow X' = Y \times_{\text{Spec } \Lambda[Q]} \text{Spec } \Lambda[P].$$

This map is strict. Showing that the underlying schematic map is smooth at x is equivalent to showing that b' is log smooth at x . To do this, as X and X' are log smooth over Y , by the jacobian criterion [[Kato, 1988](#), 3.12] it suffices to show that the map

$$k(x) \otimes \Omega_{X'/Y}^1 \rightarrow k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1$$

induced by b' is injective. We have

$$k(x) \otimes \Omega_{X'/Y}^1 = k(x) \otimes P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}} = k(x) \otimes Z$$

(the last equality by the fact that $F/(Z \oplus Q^{\text{gp}})$ is killed by m), and by construction (cf. (1.2.2)), we have

$$k(x) \otimes Z = k(x) \otimes \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}},$$

which by the map induced by b' injects into $k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1$.

Let us now prove the second assertion. For this, as b' is strict, we may forget the log structures of X and X' , and by changing notations, we may assume that $X' = Y$ and the log structures of X and Y are trivial. In particular, we have

$$k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1 = V_0,$$

with the notation of (1.2.2). As the question is étale local on X , and closed points are very dense in the fiber X_y , in particular, any point has a specialization at a closed point of X_y , we may assume that

x sits over a closed point of X_y , and even, up to base changing Y by a finite radicial extension, that x is a rational point of X_y . We then have

$$k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1 = \mathfrak{m}_x / (\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x),$$

where $\mathfrak{m}$ denotes a maximal ideal. By a classical result in representation theory (see 1.3 below) there is a finitely generated projective $\Lambda[G]$ -module V such that $V_0 = k(x) \otimes V$. The homomorphism $V \rightarrow \mathfrak{m}_x / (\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x)$ therefore lifts to a homomorphism of $\Lambda[G]$ -modules

$$V \rightarrow \mathfrak{m}_x,$$

inducing an isomorphism $k(x) \otimes V \rightarrow k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1$. By the jacobian criterion, it follows that the (G -equivariant) map

$$X \rightarrow Y \times_{\text{Spec } \Lambda} \text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V)$$

is étale at x , and as in VI-3.10 can be made inert by shrinking X .

Let us prove the last assertion. Now X and Y are fs, and Q is fs and sharp. First of all, as M_x is saturated, $P = v^{-1}(M_x)$ is fs. Then (cf. [Gabber & Ramero, 2013, 3.2.10]) we have a split exact sequence

$$0 \rightarrow H \rightarrow P \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

with P_0^* torsionfree and H a finite group. As Q is fs and sharp, Q^{gp} is torsionfree, so the composition $Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}} \rightarrow P_0^{\text{gp}}$ is still injective, as well as the composition $H \rightarrow P^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}}$, hence H is contained in the torsion part of $P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}}$, and we have an exact sequence

$$0 \rightarrow H \rightarrow (P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})_{\text{tors}} \rightarrow (P_0^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})_{\text{tors}} \rightarrow 0,$$

where the subscript *tors* denotes the torsion part. Thus $(P_0^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})_{\text{tors}}$ is killed by an integer invertible on X . As $\overline{M}_x$ is torsionfree, the composition $P \rightarrow M_x \rightarrow \overline{M}_x$ factors through P_0 , into a map $v_0 : P_0 \rightarrow \overline{M}_x$. Consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_x & \longrightarrow & M_x^{\text{gp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_0 \xrightarrow{v_0} \overline{M}_x & \longrightarrow & \overline{M}_x^{\text{gp}} \end{array}$$

where the square is cartesian. As P_0^{gp} is torsionfree, the map $P_0^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_x^{\text{gp}}$ defined by the lower row admits a lifting $s : P_0^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}}$, sending P_0 to M_x . One can adjust s to make it compatible with the morphism $\tilde{a} : Q^{\text{gp}} \rightarrow M_y^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}}$ given by the chart $\alpha : Q \rightarrow M_Y$. Indeed, if $j : Q^{\text{gp}} \hookrightarrow P_0^{\text{gp}}$ is the inclusion, the homomorphisms $sj/\tilde{a} : Q^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^*$ can be extended to P_0^{gp} as the torsion part of $P_0^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}}$ is killed by an integer invertible on X . Assume that this adjustment is done. As v is a chart, $P/v^{-1}(\mathcal{O}_x^*) \rightarrow \overline{M}_x$ is an isomorphism, and since H is contained in $v^{-1}(\mathcal{O}_x^*)$, $P_0/s^{-1}(\mathcal{O}_x^*) \rightarrow \overline{M}_x$ is an isomorphism as well, hence $s : P_0 \rightarrow M_x$ is a chart at x compatible with α . A second adjustment is needed to make it G -equivariant. To do so, one can proceed as above, by considering the 1-cocycle z of G with values in $\text{Hom}(P_0^{\text{gp}}, \mathcal{O}_x^*)$ given by

$$gs(p) = z(g, p)s(p).$$

The image of z in $Z^1(G, \text{Hom}(P_0^{\text{gp}}, k(x)^*))$ is a homomorphism

$$\varphi_0 : G^{\text{ab}} \otimes P_0^{\text{gp}} \rightarrow \mu.$$

The quotient $g \mapsto (p \mapsto z(g, p)/\varphi_0(g, p))$ belongs to $B^1(G, \text{Hom}(P_0^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}}, 1 + \mathfrak{m}_x))$, hence can be written $g \mapsto (p \mapsto g\rho(p)/\rho(p))$ for $\rho : P_0^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}} \rightarrow 1 + \mathfrak{m}_x$. So, replacing z by $g \mapsto z(g, p)\rho(p)^{-1}$, we may assume that $z = \varphi_0$, in other words, the map

$$b_0 : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P_0]$$

defined by the pair (s, φ_0) is an equivariant chart of X at x (extending α).

One can give an alternate, shorter proof of the last assertion which does not use the above decomposition of P into $H \oplus P_0$. Consider again the cokernel C of the map $\bar{u}$ introduced a few lines

above diagram (1.2.3). Write C as a direct sum of cyclic groups of orders $m_i | m$. Choose $a_i \in M_x^{\text{gp}}$ and $b_i \in \mathbb{Z} \oplus Q^{\text{gp}}$ ($1 \leq i \leq n$) such that $a_i^{m_i} = u(b_i)$, and the a_i 's induce an isomorphism

$$\bigoplus_i \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} C.$$

Replace diagram (1.2.3) by the following push-out diagram

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_i \mathbb{Z} e_i & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathbb{Z}(\frac{1}{m_i} e_i), \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} \oplus Q^{\text{gp}} & \xrightarrow{w} & F \end{array}$$

where the upper horizontal map is the natural inclusion and the left vertical one sends e_i to b_i . In this way, we have $F = P^{\text{gp}} \supset \mathbb{Z} \oplus Q^{\text{gp}}$ and $P^{\text{gp}}/(\mathbb{Z} \oplus Q^{\text{gp}}) \xrightarrow{\sim} C$. As X is fs, $\overline{M}_x^{\text{gp}}$ is torsionfree, so the map $\bar{v} : F \rightarrow \overline{M}_x^{\text{gp}}$, defined similarly as above (using (1.2.4) instead of (1.2.3)), sends $(P^{\text{gp}})_{\text{tors}}$ to 0, hence

$$(P^{\text{gp}})_{\text{tors}} = (\mathbb{Z} \oplus Q^{\text{gp}})_{\text{tors}} = (Q^{\text{gp}})_{\text{tors}},$$

which finishes the proof. $\square$

LEMMA 1.3. *Let G be a finite group of exponent n , let $\Lambda = \mathbb{Z}[\mu_n][1/n]$, let k be a field over Λ , and let L be a finitely generated $k[G]$ -module. There exists a finitely generated projective $\Lambda[G]$ -module V such that $L = k \otimes_{\Lambda} V$.*

Proof. First, observe that since n is invertible in Λ , any $\Lambda[G]$ -module which is finitely generated and projective over Λ is projective over $\Lambda[G]$ [Serre, 1978, §14.4, Lemme 20].

Suppose first that $\text{char}(k) = 0$, and let $\bar{k}$ be an algebraic closure of k . Then, L descends to a $\mathbb{Q}[\mu_n][G]$ -module W , as $\bar{k} \otimes_k L$ descends [Serre, 1978, §12.3] and the homomorphism $R_k(G) \rightarrow R_{\bar{k}}(G)$ given by extension of scalars is injective [Serre, 1978, §14.6]. One can then take for V a G -stable Λ -lattice in W (projective over Λ), which is necessarily projective over $\Lambda[G]$ by the above remark.

Suppose now that $\text{char}(k) = p > 0$. Let $I \twoheadrightarrow k$ be a Cohen ring for k . As Λ is étale over $\mathbb{Z}$, $\Lambda \rightarrow k$ lifts (uniquely) to $\Lambda \rightarrow I$. On the other hand, as L is projective of finite type over $k[G]$, by [Serre, 1978, §14.4, Prop. 42, Cor. 3] L lifts to a finitely generated projective $I[G]$ -module E , free over I . Let K be the fraction field of I . Then $E \otimes K$ descends to a $\mathbb{Q}[\mu_n][G]$ -module E' . Choose a G -stable Λ -lattice V in E' (projective over Λ , hence, projective of finite type over $\Lambda[G]$). By [Serre, 1978, §15.2, Th. 32], $k \otimes_{\Lambda} V$ has the same class in $R_k(G)$ as L . But, as $k[G]$ is semisimple by Maschke's theorem, L and $k \otimes_{\Lambda} V$ are isomorphic as $k[G]$ -modules. $\square$

Proof of 1.1 (beginning).

The strategy is to check that, at each step of the proof of the absolute modification theorem (VIII-1.1), the log smoothness of X/S is preserved, and, at the end, that of the quotient $(X/G)/S$ as well. For some of them, this is trivial, as the modifications performed are log blow ups. Others require a closer inspection.

1.4. Preliminary reductions. We may assume that conditions (1) and (2) at the beginning of (VIII-4) are satisfied, namely:

- (1) X is regular,
- (2) Z is a G -strict snc divisor in X .

Indeed, these conditions are achieved by G -equivariant saturated log blow up towers (VIII-4.1.1, VIII-4.1.6).

We will now exploit Gabber's preparation lemma 1.2 to give a local picture of f displaying both the log stratification and the inertia stratification of X . We work étale locally at a geometric point x in X with image s in S . Up to replacing X by the G_x -invariant neighborhood X' constructed at the beginning of the proof of VIII-5.3.8, and G by G_x , where G_x is the inertia group at x , we may assume

that $G = G_x$. Indeed, the morphism $(X', G_x) \rightarrow (X, G)$ is strict and inert, and by **VIII-5.4.4** the tower $f_{(G, X, Z)}$ is functorial with respect to such morphisms.

We now apply **1.2**. Let N be the exponent of G . Assume S strictly local at s . We may replace $\Lambda = \mathbb{Z}[1/N, \mu]$ by its localization at the (Zariski) image of s , so that Λ is either the cyclotomic field $\mathbb{Q}(\mu)$ or its localization at a finite place of its ring of integers, of residue characteristic $p = \text{char}(k(s))$ not dividing n . Choose a chart

$$\alpha : S \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$$

with Q fs and the inverse image of $\mathcal{O}_{S,s}^*$ in Q equal to $\{1\}$, so that Q is sharp and $Q \xrightarrow{\sim} \overline{M}_s$. Let C denote $k(s)$ if $\mathcal{O}_{S,s}$ contains a field, and a Cohen ring of $k(s)$ otherwise. Let $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$ be a family of elements of $\mathfrak{m}_s$ such that the images of the y_i 's in $\mathcal{O}_{S,s}/I_s$ form a regular system of parameters, where $I_s = I(s, M_s)$ is the ideal generated by the image of $M_s - \mathcal{O}_{S,s}^*$ by the canonical map $\alpha : M_s \rightarrow \mathcal{O}_{S,s}$. By **[Kato, 1994, 3.2]**, the chart α extends to an isomorphism

$$(1.4.1) \quad C[[y_1, \dots, y_m]][[Q]]/(g) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{S,s},$$

where $g \in C[[y_1, \dots, y_m]][[Q]]$ is 0 if $C = k(s)$, and congruent to $p = \text{char}(k(s)) > 0$ modulo the ideal generated by $Q - \{1\}$ and $(y_1, \dots, y_m)$ otherwise. By **1.2**, up to shrinking X around x , we can find a G -equivariant commutative diagram (with trivial action of G on the bottom row)

$$(1.4.2) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{c} & X' & \xrightarrow{b} & \text{Spec}(\Lambda[P] \otimes_{\Lambda} \text{Sym}_{\Lambda}(V)) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & S & \xrightarrow{a} & \text{Spec } \Lambda[Q] \end{array}$$

where:

- (i) the square is cartesian;
- (ii) a , b , and c are strict, where the log structure on $\text{Spec } \Lambda[Q]$ (resp. $\text{Spec}(\Lambda[P] \otimes_{\Lambda} \text{Sym}_{\Lambda}(V))$) is the canonical one, given by Q (resp. P); P is an fs monoid, with P^* torsionfree; G acts on $\Lambda[P]$ by $g(\lambda p) = \lambda \chi(g, p)p$, for some homomorphism

$$\chi : G^{ab} \otimes P^{gp} \rightarrow \mu$$

- (iii) V is a free, finitely generated Λ -module, equipped with a G -action;
- (iv) the right vertical arrow is the composition of the projection onto the factor $\text{Spec } \Lambda[P]$ and $\text{Spec } \Lambda[h]$, for a homomorphism $h : Q \rightarrow P$ such that h^{gp} is injective and the torsion part of $\text{Coker } h^{gp}$ is annihilated by an integer invertible on X ;
- (v) c is étale and inert.
- (vi) Consider the map

$$v : P \rightarrow M_x$$

defined by the chart $X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$ induced by bc . Up to localizing on X' around x , we may assume that v factors through the localization $P_{(\mathfrak{p})}$ of P at the prime ideal $\mathfrak{p}$ complementary of the face $v^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$. Replacing P by $P_{(\mathfrak{p})}$, P decomposes into

$$(1.4.3) \quad P = P^* \oplus P_1,$$

with $P^* = v^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$ free finitely generated over $\mathbb{Z}$, and P_1 sharp, and the image of x by bc in the factor $\text{Spec } \Lambda[P_1]$ is the rational point at the origin. Then v induces an isomorphism $P_1 \xrightarrow{\sim} \overline{M}_x$. By the assumptions (1), (2), we have $\overline{M}_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^r$. One can therefore choose $(e_i \in P_1)$ ($1 \leq i \leq r$) forming a basis of P_1 . Then $v(e_i) = t_i \in M_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ is a local equation for a branch Z_i of Z at x , $(Z_i)_{1 \leq i \leq r}$ is the set of branches of Z at x , and G acts on t_i through the character $\chi_i = \chi(-, e_i) : G \rightarrow \mu$.

Furthermore:

- (vii) The square in **(1.4.2)** is tor-independent.

Indeed, by the log regularity of S and the choice of the chart a , we have, by **[Kato, 1994, 6.1]**, $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}[Q]}(\mathcal{O}_{S,s}, \mathbb{Z}[P]) = 0$ for $i > 0$.

Though this will not be needed, one can describe the local structure of (1.4.2) more precisely as follows. Let

$$(1.4.4) \quad Y := \operatorname{Spec} (\Lambda[P] \otimes_{\Lambda} \operatorname{Sym}_{\Lambda}(V)) = \operatorname{Spec} (\Lambda[P^*] \otimes_{\Lambda} \Lambda[P_1] \otimes_{\Lambda} \operatorname{Sym}_{\Lambda}(V))$$

and let $Y' := \operatorname{Spec} C[[y_1, \dots, y_m]][[Q]] \times_{\operatorname{Spec} \Lambda} Y$, with the notation of 1.4.1. We may assume that $X = X'$. Then the completion of X at x is either isomorphic to the completion of Y' at x , or a regular divisor in it, defined by the equation $g' = 0$, where g' is the image of g in $\widehat{\mathcal{O}}_{Y',x}$, with the notation of 1.4.1.

1.5. Step 3 and log smoothness (beginning). We will now analyze the modifications performed in the proof of Step 3 in VIII-4.1.9, VIII-4.2.13. The permissible towers used in *loc. cit.* are iterations of operations of the form: for a subgroup H of G , blow up the fixed point (regular) subscheme X^H , and replace Z by the union of its strict transform Z^{st} and the exceptional divisor E . Though such a blow up is not a log blow up in general, we will see that it still preserves the log smoothness of X over S .

We work étale locally around x , so we can assume $X = X'$ in 1.4.2. We then have a cartesian square

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{ccc} X^H & \xrightarrow{b^H} & Y^H \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

with Y as in (1.4.4). We also have cartesian squares

$$(1.5.2) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{b} & T \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

where $T \subset Y$ is the snc divisor $\sum T_i$, T_i defined by the equation $e_i \in P_1$ (1.4.3), and

$$(1.5.3) \quad \begin{array}{ccc} Z \times_X X^H & \longrightarrow & T \times_Y Y^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

LEMMA 1.6. *The squares (1.5.1), (1.5.2), and (1.5.3) are tor-independent.*

Proof. For (1.5.2), this is because Z (resp. T) is a divisor in X (resp. Y) (cf. [SGA 6 VII 1.2]). For (1.5.1), as the square (1.4.2) is tor-independent (by 1.4 (vii)), it is enough to show that the composite (cartesian) square

$$(1.6.1) \quad \begin{array}{ccc} X^H & \longrightarrow & Y^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \operatorname{Spec} \Lambda[Q] \end{array}$$

is tor-independent. We have a decomposition

$$(1.6.2) \quad Y^H = (\operatorname{Spec} \Lambda[P^*])^H \times (\operatorname{Spec} \Lambda[P_1])^H \times (\operatorname{Spec} \operatorname{Sym}_{\Lambda}(V))^H,$$

(products taken over $\operatorname{Spec} \Lambda$), and the map to $\operatorname{Spec} \Lambda[Q]$ is the composition of the projection onto $(\operatorname{Spec} \Lambda[P^*])^H \times (\operatorname{Spec} \Lambda[P_1])^H$ and the canonical map induced by $\operatorname{Spec} \Lambda[Q] \rightarrow \operatorname{Spec} \Lambda[P]$, which factors through the fixed points of H , G acting trivially on the base. Let us examine the three factors.

(a) We have

$$(\operatorname{Spec} \operatorname{Sym}_{\Lambda}(V))^H = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym}_{\Lambda}(V_H),$$

where V_H is the module of coinvariants, a free module of finite type over Λ , as H is of order invertible in Λ . Therefore $\text{Spec } \Lambda[Q] \times_{\text{Spec } \Lambda} (\text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V))^H$ is flat over $\text{Spec } \Lambda[Q]$, and it is enough to check that $(\text{Spec } \Lambda[P^*])^H \times (\text{Spec } \Lambda[P_1])^H$ is tor-independent of S over $\text{Spec } \Lambda[Q]$.

(b) The restriction to $P^* = v^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$ of the 1-cocycle $z(v) \in Z^1(H, \text{Hom}(P, k(x)^*))$ associated with $v : P \rightarrow M_x$ ($h v(a) = z(v)(h, a) v(a)$ for $h \in H$, $a \in P$, see the proof of 1.2 and (VI-3.5), is a 1-coboundary, hence trivial, as $B^1(H, \text{Hom}(P, k(x)^*)) = 0$. Therefore

$$(\text{Spec } \Lambda[P^*])^H = \text{Spec } \Lambda[P^*].$$

(c) Recall that

$$P_1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{N} e_i,$$

with e_i sent by v to a local equation of the branch Z_i of Z , and that G acts on $\Lambda[\mathbf{N} e_i]$ through the character $\chi_i : G \rightarrow \mu$. Let $A \subset \{1, \dots, r\}$ be the set of indices i such that $\chi_i|_H$ is trivial. Then

$$(\text{Spec } \Lambda[P_1])^H = \text{Spec } \Lambda[\bigoplus_{i \in A} \mathbf{N} e_i].$$

Let I be the ideal of P generated by $\{e_i\}_{i \notin A}$. It follows from (b) and (c) that

$$(\text{Spec } \Lambda[P])^H = \text{Spec } \Lambda[P]/(I),$$

where (I) is the ideal of $\Lambda[P]$ generated by I . By [Kato, 1994, 6.1], $\text{Tor}_i^{\Lambda[Q]}(\mathcal{O}_S, \Lambda[P]/(I)) = 0$ for $i > 0$, and therefore (1.6.1), hence (1.5.1) is tor-independent. It remains to show the tor-independence of (1.5.3). For this, again it is enough to show the tor-independence of

$$(1.6.3) \quad \begin{array}{ccc} Z \times_X X^H & \longrightarrow & T \times_Y Y^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[Q] \end{array}.$$

By (a), (b), (c), we have

$$T \times_Y Y^H = \sum_{i \in A} \text{Spec } \Lambda[P]/(J_i) \times \text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V_H),$$

where $J_i \subset P$ is the ideal generated by $e_i \in P_1$, and (J_i) the ideal generated by J_i in $\Lambda[P]$. The desired tor-independence follows from the vanishing of $\text{Tor}_i^{\Lambda[Q]}(\mathcal{O}_S, \Lambda[P]/(J_B))$, where for a subset B of A , J_B denotes the ideal generated by the e_i 's for $i \in B$. $\square$

LEMMA 1.7. Consider a cartesian square

$$(1.7.1) \quad \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

where the right vertical arrow is a regular immersion. If (1.7.1) is tor-independent, then the left vertical arrow is a regular immersion, and

$$\text{Bl}_{V'}(X') = X' \times_X \text{Bl}_V(X).$$

Let $W \rightarrow X$ be a second regular immersion, such that $V \times_X W \rightarrow W$ is a regular immersion, and let $W' = X' \times_X W$. If moreover the squares

$$(1.7.2) \quad \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

and

$$(1.7.3) \quad \begin{array}{ccc} V' \times_{X'} W' & \longrightarrow & V \times_X W, \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

are tor-independent, then the left vertical arrows are regular immersions, and

$$W'^{\text{st}} = X' \times_X W^{\text{st}},$$

where W^{st} (resp. W'^{st}) is the strict transform of W (resp. W') in $\text{Bl}_V(X)$ (resp. $\text{Bl}_{V'}(X')$).

Proof. Let I (resp. I') be the ideal of V (resp. V') in X (resp. X'). By the tor-independence of (1.7.1), if $u : E \rightarrow I$ is a local surjective regular homomorphism [SGA 6 VII 1.4], the Koszul complex $g^*K(u)$ is a resolution of $\mathcal{O}_{V'}$, hence $V' \rightarrow X'$ is a regular immersion. Moreover, by [SGA 6 VII 1.2], for any $n \geq 0$, the natural map $g^*I^n \rightarrow I'^n$ is an isomorphism, and therefore $\text{Bl}_{V'}(X') = X' \times_X \text{Bl}_V(X)$. The tor-independence of (1.7.2) and (1.7.3) imply that of

$$\begin{array}{ccc} V' \times_{X'} W' & \longrightarrow & V \times_X W, \\ \downarrow & & \downarrow \\ W' & \longrightarrow & W \end{array}$$

The second assertion then follows from the first one and the formulas (VIII-2.1.3 (ii))

$$\begin{aligned} W^{\text{st}} &= \text{Bl}_{V \times_X W} W, \\ W'^{\text{st}} &= \text{Bl}_{V' \times_{X'} W'} W'. \end{aligned}$$

□

1.8. Step 3 and log smoothness (end). As recalled at the beginning of 1.5, we have to show that, if H is a subgroup of G , then the log regular pair (X_1, Z_1) is log smooth over S , where $X_1 := \text{Bl}_{X^H}(X)$ and Z_1 is the snc divisor $Z^{\text{st}} \cup E$, Z^{st} (resp. E) denoting the strict transform of Z (resp. the exceptional divisor) in the blow-up $h : X_1 \rightarrow X$.

The question is again étale local above X around x , so we may assume that $X = X'$ and we look at the cartesian square (1.4.2)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[Q] \end{array},$$

with Y as in (1.4.4), and the associated cartesian squares (1.5.1), (1.5.2), and (1.5.3).

Claim. We have

$$(1.8.1) \quad \text{Bl}_{X^H}(X) = X \times_Y \text{Bl}_{Y^H}(Y),$$

$$(1.8.2) \quad Z^{\text{st}} = X \times_Y T^{\text{st}}.$$

Proof. In view of 1.6 and 1.7, (1.8.1) follows from the fact that the immersion $Y^H \rightarrow Y$ is regular. For (1.8.2) recall that

$$T = T_0 \times_{\text{Spec } \Lambda} \text{Spec } \text{Sym}_{\Lambda}(V),$$

where $T_0 \subset \text{Spec } \Lambda[P]$ is the snc divisor

$$T_0 = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{div}(z_i)$$

with $z_i \in \Lambda[P]$ the image of $e_i \in P_1$ as in 1.4.3. Hence

$$(1.8.3) \quad T = \sum_{1 \leq i \leq r} T_i,$$

where $T_i = \text{div}(z_i) \times_{\text{Spec } \Lambda} \text{Sym}_\Lambda(V)$, and $T^{\text{st}} = \sum_{1 \leq i \leq r} T_i^{\text{st}}$. We have (1.6.2)

$$Y^H = (\text{Spec } \Lambda[P])^H \times \text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V_H),$$

with $(\text{Spec } \Lambda[P])^H$ defined by the equations $(z_i = 0)_{i \notin A}$, with the notations of 1.6 (c). In particular, the immersion $Y^H \times_Y Z_i \rightarrow Z_i$ is regular, hence, by 1.7, we have $Z_i^{\text{st}} = X \times_Y T_i^{\text{st}}$, hence (1.8.2), which finishes the proof of the claim. $\square$

Since the map $S \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$ is strict, in order to prove the desired log smoothness, we may, by this claim, replace the triple (X, X^H, Z) over S by (Y, Y^H, T) over $\text{Spec } \Lambda[Q]$. We choose coordinates on P^* , $P_1 = \mathbf{N}^r$, V :

$$P^* = \bigoplus_{1 \leq i \leq t} \mathbf{Z} f_i, \quad P_1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{N} e_i, \quad V = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \Lambda y_i$$

$$\Lambda[P] = \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r], \quad \text{Sym}_\Lambda(V) = \Lambda[y_1, \dots, y_s],$$

with u_i (resp. z_i) the image of f_i (resp. e_i) in $\Lambda[P]$, in such a way that

$$\Lambda[P]^H = \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_{m+1}, \dots, z_r],$$

i.e. is defined in $\Lambda[P]$ by the equations $(z_1 = \dots = z_m = 0)$, for some m , $1 \leq m \leq r$, and

$$\Lambda[V_H] = \Lambda[y_{n+1}, \dots, y_s],$$

i.e. is defined in $\Lambda[V]$ by the equations $y_1 = \dots = y_n = 0$ for some n , $1 \leq n \leq s$. Then

$$Y^H \subset Y = \text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s]$$

is defined by the equations

$$z_1 = \dots = z_m = y_1 = \dots = y_n = 0.$$

Then

$$Y' := \text{Bl}_{Y^H}(Y)$$

is covered by affine open pieces:

$$U_i = \text{Spec } \Lambda[(u_j^{\pm 1})_{1 \leq j \leq t}, z'_1, \dots, z'_{i-1}, z_i, z'_{i+1}, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r, y'_1, \dots, y'_n, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

($1 \leq i \leq m$), with $U_i \rightarrow Y$ given by $z_j \rightarrow z_i z'_j$ for $1 \leq j \leq m$, $j \neq i$, $y_j \rightarrow z_i y'_j$, $1 \leq j \leq n$, and the other coordinates unchanged, and

$$V_i = \text{Spec } \Lambda[(u_j^{\pm 1})_{1 \leq j \leq t}, z'_1, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r, y'_1, \dots, y'_{i-1}, y_i, y'_{i+1}, \dots, y'_n, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

($1 \leq i \leq n$), with $V_i \rightarrow Y$ given by $z_j \mapsto y_i z'_j$ for $1 \leq j \leq m$, $y_j \mapsto y_i y'_j$, $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, and the other coordinates unchanged. Recall that Y has the log structure defined by the log regular pair (Y, T) , where T is the snc divisor

$$T = (z_1 \cdots z_r = 0),$$

and Y' is given the log structure defined by the log regular pair (Y', T') , where T' is the snc divisor

$$T' = F \cup T^{\text{st}},$$

where F is the exceptional divisor of the blow up of Y^H and T^{st} the strict transform of T . Consider the canonical morphisms

$$Y' \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{g} \Sigma := \text{Spec } \Lambda[Q].$$

They are both morphisms of log schemes. The morphism g is given by the homomorphism of monoids $\gamma : Q \rightarrow P$, i.e.

$$q \in Q \mapsto (\gamma_1(q), \dots, \gamma_t(q), \gamma_{t+1}(q), \dots, \gamma_{t+r}(q), 0, \dots, 0) \in \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s].$$

The blow up b has been described above in the various charts. Note that b is not log étale, or even log smooth, in general. However, the composition $gb : Y' \rightarrow \Sigma$ is log smooth. We will check this on the charts $(U_i), (V_i)$.

(a) *Chart of type U_i .* We have $F = (z_i = 0)$, $T^{\text{st}} = (\prod_{1 \leq j \leq r, j \neq i} z'_j = 0)$. Hence the log structure of U_i is given by the canonical log structure of $\Lambda[\mathbf{N}^r]$ in the decomposition

$$U_i = \text{Spec } \Lambda[\mathbf{Z}^t] \times \text{Spec } \Lambda[\mathbf{N}^r] \times \text{Spec } \Lambda[y'_1, \dots, y'_n, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

with the basis element e_k of $\mathbf{N}^r$ sent to the k -th place in $(z'_1, \dots, z'_{i-1}, z_i, z'_{i+1}, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r)$ (and the basis element f_k of $\mathbf{Z}^t$ sent to u_k), the third factor having the trivial log structure. Checking the log smoothness of $gb : U_i \rightarrow \Sigma$ amounts to checking the log smoothness of its factor $\text{Spec } \Lambda[P] \rightarrow \Sigma = \text{Spec } \Lambda(Q)$, which is defined by the composition of homomorphisms of monoids

$$Q \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^r \xrightarrow{\text{Id} \oplus \beta} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^r,$$

where β is the homomorphism $\mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}^r$ sending e_j to $e_j + e_i$ for $1 \leq j \leq m, j \neq i$, e_i to e_i , and e_j to e_j for $m+1 \leq j \leq r$. Recall ((1.4.2), (iv)) that γ^{gp} is injective and the torsion part of its cokernel is invertible in Λ . As β^{gp} is an isomorphism, the same holds for the composition $(\text{Id} \oplus \beta)\gamma$, hence $gb : U_i \rightarrow \Sigma$ is log smooth.

(b) *Chart of type V_i .* We have $F = (y_i = 0)$, $T^{\text{st}} = \prod_{1 \leq j \leq m} z'_j \prod_{j \geq m+1} z_i$. Hence the log structure of V_i is given by the canonical log structure of $\Lambda[\mathbf{N}^{r+1}]$ in the decomposition

$$V_i = \text{Spec } \Lambda[\mathbf{Z}^t] \times \text{Spec } \Lambda[\mathbf{N}^{r+1}] \times \text{Spec } \Lambda[(y'_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

with the basis element e_k of $\mathbf{N}^{r+1}$ sent to the k -th place in $(z'_1, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r)$ if $k \leq r$, and e_{r+1} sent to y_i (and the basis element f_k of $\mathbf{Z}^t$ sent to u_i), the third factor having the trivial log structure. Again, checking the log smoothness of $gb : V_i \rightarrow \Sigma$ amounts to checking the log smoothness of its factor $\text{Spec } \Lambda[\mathbf{Z}^t] \times \text{Spec } \Lambda[\mathbf{N}^{r+1}] \rightarrow \text{Spec } \Lambda(Q)$. This factor is defined by the composition of homomorphisms of monoids

$$Q \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^r \xrightarrow{\text{Id} \oplus \beta} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^{r+1}$$

where $\beta : \mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}^{r+1}$ sends e_j to $e_j + e_{r+1}$ for $1 \leq j \leq m$, and to e_j for $m+1 \leq j \leq r$. Then β^{gp} is injective, and its cokernel is isomorphic to $\mathbf{Z}$, hence $(\beta\gamma)^{\text{gp}}$ is injective, and we have an exact sequence

$$0 \rightarrow \text{Coker } \gamma^{\text{gp}} \rightarrow \text{Coker } (\beta\gamma)^{\text{gp}} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

In particular, the torsion part of $\text{Coker } (\beta\gamma)^{\text{gp}}$ is isomorphic to that of $\text{Coker } \gamma^{\text{gp}}$, hence of order invertible in Λ , which implies that $gb : V_i \rightarrow \Sigma$ is log smooth.

This finishes the proof that Step 3 preserves log smoothness.

1.9. End of proof of 1.1. We may now assume that in addition to conditions (1) and (2) of 1.4, condition (3) is satisfied as well, namely

(3) *G acts freely on $X - Z$ (i.e. $Z = Z \cup T$ in the notation of 1.1 or (VIII-1.1)), and, for any geometric point $x \rightarrow X$, the inertia group G_x is abelian.*

We have to check:

Claim. If $f_{(G, X, Z)} : (X', Z') \rightarrow (X, Z)$ is the modification of (VIII-5.4.4), then (X', Z') and $(X'/G, Z'/G)$ are log smooth over S .

Working étale locally around a geometric point x of X , we will first choose a strict rigidification $(X, \bar{Z})$ of (X, Z) such that $(X, \bar{Z})$ is log smooth over S . We will define $(X, \bar{Z})$ as the pull-back by $S \rightarrow \Sigma = \text{Spec } \Lambda[Q]$ of a rigidification $(Y, \bar{T})$ of (Y, T) which is log smooth over Σ , with the notation of (1.4.4). Using that $G (= G_x)$ is abelian, one can decompose V into a sum of G -stable lines, according to the characters of G :

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \Lambda y_i$$

with G acting on Λy_i through a character $\chi_i : G \rightarrow \mu_N$, i.e. $gy_i = \chi_i(g)y_i$. We define $\bar{T}$ to be the divisor $z_1 \cdots z_r y_1 \cdots y_s = 0$ in $Y = \text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s]$. The action of G on $(Y, \bar{T})$ is very tame at x because the log stratum at x is $\text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}]$, hence very tame in a neighborhood of x by (VIII-5.3.2) (actually on the whole of Y , cf. (VIII-4.6, VIII-4.7(a))). On the

other hand, $(\text{Spec } \Lambda[y_1, \dots, y_s], y_1 \cdots y_s = 0)$ is log smooth over $\text{Spec } \Lambda$, and as $\text{Spec } \Lambda[P]$ is log smooth over Σ , $(Y, \bar{T})$ is log smooth over Σ . Since $f_{(G, X, Z)}$ is compatible with base change by strict inert morphisms, it is enough to check that if $f_{(G, Y, T)} = f_{(G, Y, \bar{T})} : (Y', T') \rightarrow (Y, T)$ is the modification of (VIII-5.4.4) then (Y', T') is log smooth over Σ . Recall (VIII-5.3.9) that we have a cartesian G -equivariant diagram

$$(1.9.1) \quad \begin{array}{ccc} (Y', \bar{T}') & \xrightarrow{\bar{h}'} & (Y, \bar{T}) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ (Y'_1, \bar{T}'_1) & \xrightarrow{\bar{h}_1} & (Y_1, \bar{T}_1) \end{array}$$

where the horizontal maps are the compositions of saturated log blow up towers, and the vertical ones Kummer étale G -covers. From (1.9.1) is extracted the relevant diagram involving $h := f_{(G, Y, T)}$,

$$\begin{array}{ccc} (Y', T') & \xrightarrow{h} & (Y, T) \\ \downarrow \beta & & \\ (Y'_1, T'_1) & & \end{array}$$

where $T'_1 = \bar{h}_1^{-1}(T_1)$, with $T_1 = T/G$, $T' = \alpha'^{-1}(T'_1)$, and h (resp. β) is the restriction of $\bar{h}'$ (resp. α') over (Y, T) (resp. (Y'_1, T'_1)). In particular, β is a Kummer étale G -cover (as Kummer étale G -covers are stable under any fs base change). As G acts trivially on S , this diagram can be uniquely completed into a commutative diagram

$$(1.9.2) \quad \begin{array}{ccc} (Y', T') & \xrightarrow{h} & (Y, T) \\ \downarrow \beta & & \downarrow f \\ (Y'_1, T'_1) & \xrightarrow{g} & \Sigma \end{array}$$

Here f is log smooth and β is a Kummer étale G -cover. Though $\bar{h}'$ and $\bar{h}_1$ are log smooth, h and h_1 are not, in general. However, it turns out that:

(*) $g : (Y'_1, T'_1) \rightarrow \Sigma$, hence $g\beta = fh : (Y', T') \rightarrow \Sigma$, are log smooth,

which will finish the proof of the claim, hence of 1.1. We first prove

(**) With the notation of (1.9.2), $(Y_1, \bar{T}_1)$ is log smooth over Σ .

Let us write $Y = \text{Spec } \Lambda[\bar{P}]$, with

$$(1.9.3) \quad \bar{P} = P \times \mathbf{N}^s = \mathbf{Z}^t \times \mathbf{N}^r \times \mathbf{N}^s.$$

As G acts very tamely on $(Y, \bar{T})$, the quotient pair $(Y_1 = Y/G, \bar{T}_1 = \bar{T}/G)$ is log regular. More precisely, by the calculation in (VI-3.4(b)), this pair consists of the log scheme $Y_1 = \text{Spec } \Lambda[\bar{R}]$ with its canonical log structure, where

$$\bar{R} = \text{Ker}(\bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_N)) \cap \bar{P},$$

$\bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_N)$ being the homomorphism defined by the pairing $\chi : G \otimes \bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow \mu_N$. The inclusion $\bar{R} \subset \bar{P}$ is a Kummer morphism, and $\bar{P}^{\text{gp}}/\bar{R}^{\text{gp}}$ is annihilated by an integer invertible in Λ . As $Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}$ is injective, with the torsion part of its cokernel annihilated by an integer invertible in Λ , the same is true for $Q^{\text{gp}} \rightarrow \bar{P}^{\text{gp}}$, hence also for $Q^{\text{gp}} \rightarrow \bar{R}^{\text{gp}}$. Thus $(Y_1, \bar{T}_1) = \text{Spec } \Lambda[\bar{R}]$ is log smooth over Σ .

Finally, let us prove (*). It is enough to work locally on Y'_1 so we can replace the log blow up sequence $(Y'_1, \bar{T}'_1) \rightarrow (Y_1, \bar{T}_1)$ with an affine chart (i.e. we replace the first log blow up with a chart, then do the same for the second one, etc.). Then $Y'_1 = \text{Spec } \Lambda[\bar{R}']$, and $\bar{R}^{\text{gp}} \xrightarrow{\sim} \bar{R}'^{\text{gp}}$ by VIII-3.1.19. Note that $\bar{R}' \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^a \times \mathbf{N}^b$ where $D_1, \dots, D_b$ are the components of $\bar{T}'_1$. We can assume that $D_1, \dots, D_c \subset T'_1$ and $D_{c+1}, \dots, D_b$ are not contained in T'_1 . Let $R' \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^a \times \mathbf{N}^c$ denote the submonoid $\bar{R}'$ that defines

the log structure of (Y'_1, T'_1) . Note that R' consists of all elements $g' \in \bar{R}'$ such that $(g' = 0) \subset T'_1$ (as a set). Also, by $\nu : \bar{R} \rightarrow \bar{R}'$ we will denote the homomorphism that defines $(Y'_1, \bar{T}'_1) \rightarrow (Y_1, \bar{T}_1)$.

We showed in VIII-5.3.9 that $T_1 = T/G$ is a $\mathbf{Q}$ -Cartier divisor in Y_1 and observed that therefore T'_1 is a Cartier divisor in Y'_1 . Note that the inclusion $R \subset \bar{R}$, where

$$R = \text{Ker}(P^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_N)) \cap \bar{P}$$

defines a log structure on Y_1 . Denote the corresponding log scheme (Y_1, T_1) . We obtain the following diagram of log schemes (on the left). The corresponding diagram of groups is placed on the right; we will use it to establish log smoothness of g . Existence of dashed arrows requires an argument; we will construct them later.

$$(1.9.4) \quad \begin{array}{ccc} (Y'_1, \bar{T}'_1) & \xrightarrow{\bar{h}_1} & (Y_1, \bar{T}_1) \\ \downarrow & & \downarrow \searrow \\ (Y'_1, T'_1) & \dashrightarrow & (Y_1, T_1) \longrightarrow \Sigma \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{R}'^{\text{gp}} & \xleftarrow[\sim]{\nu^{\text{gp}}} & \bar{R}^{\text{gp}} \\ \uparrow & & \uparrow \swarrow \\ R^{\text{gp}} & \dashleftarrow & \bar{R}^{\text{gp}} \longleftarrow Q^{\text{gp}} \end{array}$$

Part (ii) of the following remark clarifies the notation (Y_1, T_1) . It will not be used so we only sketch the argument.

REMARK 1.10. (i) Note that (Y_1, T_1) may be not log smooth over Σ . For example, even when Σ is log regular, e.g. $\text{Spec } k$ with trivial log structure, (Y_1, T_1) does not have to be log regular, as T_1 may even be non-Cartier. Nevertheless, as $\bar{h}_1$ is log smooth (even log étale), $(Y'_1, \bar{T}'_1)$ is log smooth over Σ . Moreover, Y'_1 is regular, and $\bar{T}'_1$ an snc divisor in it.

(ii) Although T_1 may be bad, one does have that $R\mathcal{O}_{Y_1}^* = \mathcal{O}_{Y_1} \cap i_*\mathcal{O}_{Y_1 \setminus T_1}^*$ for the embedding $i : Y_1 \setminus T_1 \hookrightarrow Y_1$. This can be deduced from the formulas for R and $\bar{R}$ and the fact that $\bar{R}\mathcal{O}_{Y_1}^* = \mathcal{O}_{Y_1} \cap j_*\mathcal{O}_{Y_1 \setminus \bar{T}_1}^*$ by log regularity of $(Y_1, \bar{T}_1)$.

Note that $Q \rightarrow \bar{P}$ factors through P , hence $Q \rightarrow \bar{R}$ factors through $R = \bar{R} \cap P$. It follows from (1.9.3) that P consists of all elements $f \in \bar{P}$ whose divisor $(f = 0)$ is contained in T (as a set). Therefore $g \in \bar{R}$ lies in R if and only if $(g = 0) \subset T_1$ (as a set). This fact and the analogous description of R' observed earlier imply that $\nu : \bar{R} \rightarrow \bar{R}'$ takes R to R' . Thus, we have established the dashed arrows in (1.9.4).

Let $\varphi : Q \rightarrow \bar{R}'$ be the homomorphism defining the composition $(Y'_1, \bar{T}'_1) \rightarrow (Y_1, \bar{T}_1) \rightarrow \Sigma$. Since the latter is log smooth, φ is injective, and the torsion part of $\text{Coker}(\varphi^{\text{gp}})$ is annihilated by an integer m invertible in Λ . Note that $R^{\text{gp}} \hookrightarrow R'^{\text{gp}} \hookrightarrow \bar{R}'^{\text{gp}}$, and therefore we also have that $Q^{\text{gp}} \hookrightarrow R'^{\text{gp}}$ and the torsion of its cokernel is annihilated by m . Therefore, (Y'_1, T'_1) is log smooth over Σ , which finishes the proof of (*), hence of 1.1.

REMARK 1.11. In the proof of (*) above, we first proved that g is log smooth, and deduced that $g\beta$ is, too. In fact, as β is a Kummer étale G -cover, the log smoothness of $g\beta$ implies that of g . More generally, we have the following descent result, due to Kato-Nakayama ([Nakayama, 2009, 3.4]):

THEOREM 1.12. *Let $X' \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ be morphisms of fs log schemes. If g is surjective, log étale and exact, and fg is log smooth, then f is log smooth.*

The assumption on g is equivalent to saying that g is a Kummer étale cover (cf. [Illusie, 2002, 1.6]).

2. Prime to ℓ variants of de Jong's alteration theorems

Let X be a noetherian scheme, and ℓ be a prime number. Recall that a morphism $h : X' \rightarrow X$ is called an ℓ' -**alteration** if h is proper, surjective, generically finite, maximally dominating (i.e., (II-1.1.2) sends each maximal point to a maximal point) and the degrees of the residual extensions $k(x')/k(x)$ over each maximal point x of X are prime to ℓ . The next theorem was stated in Intro.3 (1):

THEOREM 2.1. *Let k be a field, ℓ a prime number different from the characteristic of k , X a separated and finite type k -scheme, $Z \subset X$ a nowhere dense closed subset. Then there exists a finite extension k' of k , of degree prime to ℓ , and a projective ℓ' -alteration $h : \tilde{X} \rightarrow X$ above $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$, with $\tilde{X}$ smooth and quasi-projective over k' , and $h^{-1}(Z)$ is the support of a relative strict normal crossings divisor.*

Recall that a relative strict normal crossings divisor in a smooth scheme T/S is a divisor $D = \sum_{i \in I} D_i$, where I is finite, $D_i \subset T$ is an S -smooth closed subscheme of codimension 1, and for every subset J of I the scheme-theoretic intersection $\bigcap_{i \in J} D_i$ is smooth over S of codimension $|J|$ in T .

We will need the following variant, due to Gabber-Vidal (proof of [Vidal, 2004, 4.4.1]), of de Jong's alteration theorems [de Jong, 1997, 5.7, 5.9, 5.11], cf. [Zheng, 2009, 3.8]:

LEMMA 2.2. *Let X be a proper scheme over $S = \text{Spec } k$, normal and geometrically reduced and irreducible, $Z \subset X$ a nowhere dense closed subset. We assume that a finite group H acts on $X \rightarrow S$, faithfully on X , and that Z is H -stable. Then there exists a finite extension k_1 of k , a finite group H_1 , a surjective homomorphism $H_1 \rightarrow H$, and an H_1 -equivariant diagram with a cartesian square (where $S = \text{Spec } k$, $S_1 = \text{Spec } k_1$)*

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying the following properties:

- (i) $S_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow S$ is a radicial extension;
- (ii) X_2 is projective and smooth over S_1 ;
- (iii) $\alpha : X_2 \rightarrow X_1$ is projective and surjective, maximally dominating and generically finite and flat, and there exists an H_1 -admissible dense open subset $W \subset X_2$ over a dense open subset U of X , such that if $U_1 = S_1 \times_S U$ and $K = \text{Ker}(H_1 \rightarrow \text{Aut}(U_1))$, $W \rightarrow W/K$ is a Galois étale cover of group K and the morphism $W/K \rightarrow U_1$ induced by α is a universal homeomorphism;
- (iv) $(ba)^{-1}(Z)$ is the support of a strict normal crossings divisor in X_2 .

Proof. We may assume X of dimension $d \geq 1$. We apply [Vidal, 2004, 4.4.3] to X/S , Z , and $G = H$. We get the data of *loc. cit.*, namely an equivariant finite extension of fields $(S_1, H_1) \rightarrow (S, H)$ such that $S_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow S$ is radicial, an H_1 -equivariant pluri-nodal fibration $(Y_d \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow S_1, \{\sigma_{ij}\}, Z_0 = \emptyset)$, and an H_1 -equivariant alteration $\alpha_1 : Y_d \rightarrow X$ over S , satisfying the conditions (i), (ii), (iii) of *loc. cit.* (in particular $\alpha_1^{-1}(Z) \subset Z_d$). Then, as in the proof of [Vidal, 2004, 4.4.1], successively applying [Vidal, 2004, 4.4.4] to each nodal curve $f_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$, one can replace Y_i by an H_1 -equivariant projective modification Y'_i of it such that Y'_i is regular, and the inverse image Z'_i of $Z_i := \bigcup_j \sigma_{ij}(Y_{i-1}) \cup f_i^{-1}(Z_{i-1})$ in Y'_i is an H_1 -equivariant strict snc divisor. Then, $X_2 := Y'_d$ is smooth over S_1 and Z'_d is a relative snc divisor over S_1 . This follows from the analog of the remark following [Vidal, 2004, 4.4.4] with “semistable pair over a trait” replaced by “pair consisting of a smooth scheme and a relative snc divisor over a field”. In particular, $(ba)^{-1}(Z)_{\text{red}}$ is a subdivisor of Z'_d , hence an snc divisor. After replacing H_1 by $H_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow \text{Aut}(X_2))$ the open subsets U and V of (iii) are obtained as at the end of the proof of [Vidal, 2004, 4.4.1]. $\square$

2.3. Proof of 2.1. There are three steps.

Step 1. Preliminary reductions. By Nagata's compactification theorem [Conrad, 2007], there exists a dense open immersion $X \subset \bar{X}$ with $\bar{X}$ proper over S . Up to replacing X by $\bar{X}$ and Z by its closure $\bar{Z}$, we may assume X proper over S . By replacing X by the disjoint sum of its irreducible components, we may further assume X irreducible, and geometrically reduced (up to base changing by a finite radicial extension of k). Up to blowing up Z in X we may further assume that Z is a (Cartier) divisor in X . Finally, replacing X by its normalization X' , which is finite over X , and Z by its inverse image in X' , we may assume X normal.

Step 2. Use of 2.2. Choose a finite Galois extension k_0 of k such that the irreducible components of $X_0 = X \times_S S_0$ ($S_0 = \text{Spec } k_0$) are geometrically irreducible. Let $G = \text{Gal}(k_0/k)$ and $H \subset G$ the

decomposition subgroup of a component Y_0 of X_0 . We apply 2.2 to $(Y_0/S_0, Z_0 \cap Y_0)$, where $Z_0 = S_0 \times_S Z$. We find a surjection $H_1 \rightarrow H$ and an H_1 -equivariant diagram of type 2.2.1:

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccccc} Y_0 & \xleftarrow{b'} & Y_1 & \xleftarrow{a'} & Y_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S_0 & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying conditions (i), (ii), (iii), (iv) with S replaced by S_0 , and $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$ by $Y_2 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0$. As G transitively permutes the components of X_0 , X_0 is, as a G -scheme over S_0 , the contracted product

$$X_0 = Y_0 \times^H G,$$

i.e. the quotient of $Y_0 \times G$ by H acting on Y_0 on the right and on G on the left (cf. proof of VIII-5.3.8), and similarly $Z = Z_0 \times^H G$. Choose an extension of the diagram $H_1 \xrightarrow{u} H \xrightarrow{i} G$ into a commutative diagram of finite groups

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ H & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

with i_1 injective and v surjective (for example, take i_1 to be the graph of iu and v the projection). Define

$$X_1 := Y_1 \times^{H_1} G_1, \quad X_2 := Y_2 \times^{H_1} G_1.$$

Then (2.3.1) extends to a G_1 -equivariant diagram of type 2.2.1

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S_0 & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying again (i), (ii), (iii), (iv). In particular, the composition $h : X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X$ is an alteration above the composition $S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S$, X_2 is projective and smooth over S_1 , and $h^{-1}(Z)$ is the support of an snc divisor. However, as regard to 2.1, the diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{h} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{\quad} & S_1 \end{array}$$

deduced from (2.3.2) has two defects:

- (a) the extension $S_1 \rightarrow S$ is not necessarily of degree prime to ℓ ,
- (b) the alteration h is not necessarily an ℓ' -alteration.

We will first repair (a) and (b) at the cost of temporarily losing the smoothness of X_2/S_1 and the snc property of $h^{-1}(Z)$. By (i), $S_1/\text{Ker}(G_1 \rightarrow G) \rightarrow S_0$ is a radicial extension, hence $S_1/G_1 \rightarrow S = S_0/G$ is a radicial extension, too. Similarly, by (iii), $X_2/G_1 \rightarrow X$ is an alteration over $S_1/G_1 \rightarrow S$, which is a universal homeomorphism over a dense open subset. Now let L be an ℓ -Sylow subgroup of G_1 . Then $S_1/L \rightarrow S_1/G_1$ is of degree prime to ℓ , and $X_2/L \rightarrow X_2/G_1$ is a finite surjective morphism of generic degree prime to ℓ . Let $S' := \text{Spec } k' = S_1/L$, $X' = S' \times_S X$. We get a commutative diagram with cartesian square

$$(2.3.3) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{\quad} & X' & \xleftarrow{\quad} & X_2/L & \xleftarrow{\quad} & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\ S & \xleftarrow{\quad} & S' & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

where $S' \rightarrow S$ is an extension of degree prime to ℓ , $S_1 \rightarrow S'$ a Galois extension of group L ,

$$h_2 : X_2/L \rightarrow X$$

an ℓ' -alteration, X_2/S_1 is projective and smooth, and if now h denotes the composition $X_2 \rightarrow X$, $Z_1 := h^{-1}(Z)$ is an snc divisor in X_2 . If X_2/L was smooth over S' and Z_1/L an snc divisor in X_2/L , we would be finished. However, this is not the case in general. We will use Gabber's theorem 1.1 to fix this.

Step 3. Use of 1.1. Let Y be a connected component of X_2 , $(Z_1)_Y = h^{-1}(Z) \cap Y$, D the stabilizer of Y in L , $I \subset D$ the inertia group at the generic point of Y . Then D acts on Y through $K := D/I$, and this action is generically free. As Y is smooth over S_1 and $(Z_1)_Y$ is an snc divisor in Y , $(Y, (Z_1)_Y)$ makes a log regular pair, log smooth over S_1 , hence over $S' = S_1/L$ (equipped with the trivial log structure). We have a K -equivariant commutative diagram

$$(2.3.4) \quad \begin{array}{ccc} (Y/K, (Z_1)_Y/K) & \longleftarrow & (Y, (Z_1)_Y) \\ \downarrow & \nearrow f & \\ S' & & \end{array}$$

where K acts trivially on S' , and f is projective, smooth, and log smooth (S' having the trivial log structure). We now apply 1.1 to $(f : (Y, (Z_1)_Y) \rightarrow S' = (S', \emptyset), K)$, which satisfies conditions (i) - (iii) of *loc. cit.* We get a D -equivariant projective modification $g : Y_1 \rightarrow Y$ (D acting through K) and a D -strict snc divisor E_1 on Y_1 , containing $Z_1 := g^{-1}((Z_1)_Y)$ as a subdivisor, such that the action of D on (Y_1, E_1) is very tame, and (Y_1, E_1) and $(Y_1/D, E_1/D)$ are log smooth over S' . Pulling back g to the orbit $Y \times^D L$ of Y under L , i.e. replacing g by $g \times^D L$, and working separately over each orbit, we eventually get an L -equivariant commutative square

$$(2.3.5) \quad \begin{array}{ccc} (Y_2/L, E_2/L) & \longleftarrow & (Y_2, E_2) \\ v \downarrow & & \downarrow u \\ (X_2/L, Z_1/L) & \longleftarrow & (X_2, Z_1) \end{array}$$

where u, v are projective modifications (and $Z_1 = h^{-1}(Z)$, $Z_1/L = h_2^{-1}(Z)$ as above), with the property that the pair $(Y_2/L, E_2/L)$ is an fs log scheme log smooth over $S' (= S_1/L)$, and $v^{-1}(h_2^{-1}(Z)) \subset E_2/L$. Let $w : (\tilde{X}, \tilde{E}) \rightarrow (Y_2/L, E_2/L)$ be a projective, log étale modification such that $\tilde{X}$ is regular, and $\tilde{E} = w^{-1}(E_2/L)$ is an snc divisor in $\tilde{X}$. For example, one can take for w the saturated monoidal desingularization $\mathcal{F}^{\log}$ of (VIII-3.4.9). We then apply 1.2 to the log smooth morphism $\tilde{X} \rightarrow S'$. By a special case of the (1.4.2), with $Q = \{1\}$, $G = \{1\}$, as P^* is torsion free, $\tilde{X}$ is not only regular, but smooth over S' , and $\tilde{E}$ a relative snc on $\tilde{X}$. Let

$$\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow X$$

be the composition

$$\tilde{X} \xrightarrow{w} Y_2/L \xrightarrow{v} X_2/L \xrightarrow{h_2} X.$$

This is a projective ℓ' -alteration, and it fits in the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\tilde{h}} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{} & S' \end{array}$$

where S' is an extension of S of degree prime to ℓ , $\tilde{X}$ is projective and smooth over S' , and $\tilde{h}^{-1}(Z)_{\text{red}}$ is a sub-divisor of the S' -relative snc divisor $\tilde{E}$, hence a relative snc divisor as well. This finishes the proof of 2.1.

Recall now the theorem stated in Intro.-3 (2):

THEOREM 2.4. *Let S be a separated, integral, noetherian, excellent, regular scheme of dimension 1, with generic point η , X a scheme separated, flat and of finite type over S , ℓ a prime number invertible on S , $Z \subset X$ a nowhere dense closed subset. Then there exists a finite extension η' of η of degree prime to ℓ and a projective ℓ' -alteration $h : \tilde{X} \rightarrow X$ above $S' \rightarrow S$, where S' is the normalization of S in η' , with $\tilde{X}$ regular and quasi-projective over S' , a strict normal crossings divisor $\tilde{T}$ on $\tilde{X}$, and a finite closed subset Σ of S' such that:*

- (i) *outside Σ , $\tilde{X} \rightarrow S'$ is smooth and $\tilde{T} \rightarrow S'$ is a relative divisor with normal crossings;*
- (ii) *étale locally around each geometric point x of $\tilde{X}_{s'}$, where $s' = \text{Spec } k'$ belongs to Σ , the pair $(\tilde{X}, \tilde{T})$ is isomorphic to the pair consisting of*

$$X' = S'[u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n] / (u_1^{b_1} \cdots u_s^{b_s} t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} - \pi),$$

$$T' = V(t_{r+1} \cdots t_m) \subset X'$$

around the point $(u_i = 1), (t_j = 0)$, with $1 \leq r \leq m \leq n$, for positive integers $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ satisfying $\gcd(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$, p the characteristic exponent of k' , π a local uniformizing parameter at s' ;

- (iii) $\tilde{h}^{-1}(Z)_{\text{red}}$ *is a sub-divisor of $\bigcup_{s' \in \Sigma} (\tilde{X}_{s'})_{\text{red}} \cup \tilde{T}$.*

The proof follows the same lines as that of 2.1. We need again a Gabber-Vidal variant of de Jong's alteration theorems (cf. [Zheng, 2009, 3.8]). This is essentially [Vidal, 2004, 4.4.1]), except for the additional data of $Z \subset X$ and the removal of the hypothesis that S is a strictly local trait:

LEMMA 2.5. *Let X be a normal, proper scheme over S , whose generic fiber is geometrically reduced and irreducible, $Z \subset X$ a nowhere dense closed subset. We assume that a finite group H acts on $X \rightarrow S$, faithfully on X , and that Z is H -stable. Then there exists a finite group H_1 , a surjective homomorphism $H_1 \rightarrow H$, and an H_1 -equivariant diagram with a cartesian square*

$$(2.5.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2, \\ & \downarrow & \downarrow & \swarrow & \\ S & \xleftarrow{} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying the following properties:

- (i) $S_1 \rightarrow S$ *is the normalization of S in a finite extension η_1 of η such that $\eta_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow \eta$ is a radicial extension (where η is the generic point of S);*
- (ii) X_2 *is projective and strictly semistable over S_1 (i.e. is strictly semistable over the localizations of S_1 at closed points [de Jong, 1996, 2.16]);*
- (iii) $\alpha : X_2 \rightarrow X_1$ *is projective and surjective, maximally dominating and generically finite and flat, and there exists an H_1 -admissible dense open subset $W \subset X_{2\eta_1}$ over a dense open subset U of X_η , such that if $U_1 = \eta_1 \times_\eta U$ and $K = \text{Ker}(H_1 \rightarrow \text{Aut}(U_1))$, $W \rightarrow W/K$ is a Galois étale cover of group K and the morphism $W/K \rightarrow U_1$ induced by α is a universal homeomorphism;*
- (iv) $(ba)^{-1}(Z)$ *is the support of a strict normal crossings divisor in X_2 , and $(X_2, (ba)^{-1}(Z))$ is a strict semistable pair over S_1 (i.e. over the localizations of S_1 at closed points [de Jong, 1996, 6.3]).*

Note that (ii) and (iv) imply that there exists a finite closed subset Σ of S_1 such that, outside Σ , the pair $(X_2, (ba)^{-1}(Z))$ consists of a smooth morphism and a relative strict normal crossings divisor.

Proof. Up to minute modifications the proof is the same as that of 2.2. We may assume the generic fiber X_η is of dimension $d \geq 1$. We apply [Vidal, 2004, 4.4.3] to $X/S, Z$, and $G = H$. We get the data of *loc. cit.*, namely an equivariant finite surjective morphism $(S_1, H_1) \rightarrow (S, H)$, with S_1 regular (hence equal to the normalization of S in the extension η_1 of the generic point η of S) such that $\eta_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow \eta$ is radicial, an H_1 -equivariant pluri-nodal fibration $(Y_d \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow S_1, \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$, and an H_1 -equivariant alteration $\alpha_1 : Y_d \rightarrow X$ over S , satisfying the conditions (i), (ii), (iii) of *loc. cit.* (in particular $\alpha_1^{-1}(Z) \subset Z_d$). Then, as in the proof of [Vidal, 2004, 4.4.1], successively applying [Vidal, 2004, 4.4.4] to each nodal curve $f_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$, one can replace Y_i by an H_1 -equivariant projective modification Y'_i of it such that Y'_i is regular, and the inverse image of $Z_i := \bigcup_j \sigma_{ij}(Y_{i-1}) \cup f_i^{-1}(Z_{i-1})$ in Y'_i is an

H_1 -equivariant strict snc divisor. Then, by the remark following [Vidal, 2004, 4.4.4] $X_2 := Y'_d$ is strict semistable over S_1 and (X_2, Z_d) is a strict semistable pair over S_1 . In particular, $(ba)^{-1}(Z)_{\text{red}}$ is a subdivisor of Z_d , hence an snc divisor, and $(X_2, (ba)^{-1}(Z)_{\text{red}})$ is a strict semistable pair over S_1 . The open subsets U and W as in (iii) are constructed as at the end of the proof of [Vidal, 2004, 4.4.1]. $\square$

2.6. Proof of 2.4. It is similar to that of 2.1. There are again three steps. We will indicate which modifications should be made.

Step 1. Preliminary reductions. Up to replacing X by the disjoint union of the schematic closures of the reduced components of its generic fiber, and working separately with each of them, we may assume X integral (and $X_\eta \neq \emptyset$). Applying Nagata's compactification theorem, we may further assume X proper and integral. Base changing by the normalization of S in a finite radicial extension of η and taking the reduced scheme, we reduce to the case where, in addition, X_η is irreducible and geometrically reduced. Then we blow up Z in X and normalize as in the previous step 1. Here we used the excellency of S to guarantee the finiteness of the normalizations.

Step 2. Use of 2.5. Let S_0 be the normalization of S in a finite Galois extension η_0 of η such that the irreducible components of the generic fiber of $X_0 = X \times_S S_0$ ($S_0 = \text{Spec } k_0$) are geometrically irreducible. Let $G = \text{Gal}(\eta_0/\eta)$ and $H \subset G$ the decomposition subgroup of a component Y_0 of X_0 . We apply 2.5 to $(Y_0/S_0, Z_0 \cap Y_0)$, where $Z_0 = S_0 \times_S Z$. We find a surjection $H_1 \rightarrow H$ and an H_1 -equivariant diagram of type (2.5.1) satisfying conditions (i), (ii), (iii), (iv) with S replaced by S_0 , and $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$ by $Y_2 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0$. We then, as above, extend $H_1 \rightarrow H$ to a surjection $G_1 \rightarrow G$ and obtain a G_1 -equivariant diagram of type (2.5.1)

$$(2.6.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S_0 & \xleftarrow{} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying again (i), (ii), (iii), (iv). In particular, the composition $h : X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X$ is an alteration above the composition $S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S$, X_2 is projective and strictly semistable over S_1 , and $h^{-1}(Z)$ is the support of an snc divisor forming a strict semistable pair with X_2/S_1 . It follows from (i) that $S_1/G_1 \rightarrow S = S_0/G$ is generically radicial, and by (iii) that $X_2/G_1 \rightarrow X$ is an alteration over $S_1/G_1 \rightarrow S$, which is a universal homeomorphism over a dense open subset. As above, choose an ℓ -Sylow subgroup L of G_1 . Then S_1/L is regular, $S_1/L \rightarrow S_1/G_1$ is finite surjective of generic degree prime to ℓ , and $X_2/L \rightarrow X_2/G_1$ is a finite surjective morphism of generic degree prime to ℓ . Putting $S' = S_1/L$, $X' = S' \times_S X$, we get a commutative diagram with cartesian square

$$(2.6.2) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{} & X' & \xleftarrow{} & X_2/L & \xleftarrow{} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\ S & \xleftarrow{} & S' & \xleftarrow{} & S_1 & & \end{array}$$

where S' is regular, $S' \rightarrow S$ is finite surjective of generic degree prime to ℓ , $S_1 \rightarrow S'$ generically étale of degree the order of L ,

$$h_2 : X_2/L \rightarrow X$$

an ℓ' -alteration, X_2/S_1 is projective and strictly semistable, and if h denotes the composition $X_2 \rightarrow X$, $Z_1 := h^{-1}(Z)_{\text{red}}$ is an snc divisor in X_2 , forming a strictly semistable pair with X_2/S_1 .

Step 3. Use of 1.1. Defining Y , $(Z_1)_Y$, $I \subset D$, $K = D/I$ as in the former step 3, K acts generically freely on Y . As the pair $(Y, (Z_1)_Y)$ is strictly semistable over S_1 , there exists a finite closed subset Σ_1 of S_1 such that $(Y, Y_{\Sigma_1} \cup (Z_1)_Y)$ forms a log regular pair, log smooth over S_1 equipped with the log structure defined by Σ_1 . As $S_1 \rightarrow S' = S_1/L$ is Kummer étale, $(Y, (Y_{\Sigma'} \cup (Z_1)_Y)_{\text{red}})$ (where Σ' is the image of Σ_1) is also log smooth over S' (equipped with the log structure given by Σ'), and we get a K -equivariant commutative diagram (2.3.4), with trivial action of K on S' and f projective and log smooth over S' . We then apply 1.1 to $f : (Y, (Y_{\Sigma'} \cup (Z_1)_Y)_{\text{red}}) \rightarrow S'$, and the proof runs as above. We

get a D -equivariant projective modification $g : Y_1 \rightarrow Y$ (D acting through K) and a D -strict snc divisor E_1 on Y_1 , containing $(g^{-1}((Z_1)_Y) \cup (Y_1)_{\Sigma'})_{\text{red}}$ as a subdivisor, such that the action of D on (Y_1, E_1) is very tame, and (Y_1, E_1) and $(Y_1/D, E_1/D)$ are log smooth over S' . After extending from D to L we get an L -equivariant commutative square of type (2.3.5), with $(Y_2/L, E_2/L)$ log smooth over $S' (= S_1/L)$, and $(v^{-1}(h_2^{-1}(Z)) \cup (Y_2/L)_{\Sigma'})_{\text{red}} \subset E_2/L$. As above, we take a projective, log étale modification such that $\tilde{X}$ is regular, and $\tilde{E} = w^{-1}(E_2/L)$ is an snc divisor in $\tilde{X}$.

We now apply 1.2 to the log smooth morphism $(\tilde{X}, \tilde{E}) \rightarrow S'$. It's enough to work étale locally on $\tilde{X}$ around some geometric point x of $\tilde{X}_{s'}$, with $s' \in \Sigma'$. We replace S' by its strict localization at the image of x , and consider (1.4.2), with $Q = \mathbf{N}$, $G = \{1\}$, $\Lambda = \mathbf{Z}_{(p)}$ if $p > 1$ and $\mathbf{Q}$ otherwise, and the chart $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow M_{S'}, 1 \mapsto \pi$, π a uniformizing parameter of S' . In (1.4.3) we have $P^* = \mathbf{Z}^v$, $P_1 = \mathbf{N}^\mu$, for nonnegative integers μ, v , hence

$$P = \mathbf{Z}^v \oplus \mathbf{N}^\mu.$$

Let $((b_i), (a_i))$ be the image of $1 \in \mathbf{N}$ in P in the above decomposition, and let $(a_1, \dots, a_r), (b_1, \dots, b_s)$ be the sets of those a_i 's and b_i 's which are $\neq 0$. We may assume $b_i > 0$ if $b_i \neq 0$. As the torsion part of $\text{Coker}(\mathbf{Z} \rightarrow P^{\otimes p})$ is annihilated by an integer invertible on $\tilde{X}$, we have $\gcd(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$, where p is the characteristic exponent of k . We have $P = \mathbf{Z}^s \oplus \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^{v-s} \oplus \mathbf{N}^{\mu-r}$. Choosing a basis $t_{\mu+1}, \dots, t_n$ of V , we get that étale locally around x , $\tilde{X}$ is given by a cartesian square

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[z] \end{array}$$

with x going to the point $(u_i = 1), (t_j = 0)$, and $z \mapsto \pi, z \mapsto u_1^{b_1} \dots u_s^{b_s} t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r}$, in other words,

$$\tilde{X} = S'[u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n] / (u_1^{b_1} \dots u_s^{b_s} t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r} - \pi),$$

Finally, $\tilde{E}$ is the union of the special fiber $\tilde{X}_{s'}$ and a horizontal divisor $\tilde{T}$, étale locally given by the equation $t_{r+1} \dots t_m = 0$, where $m = \mu$ and $1 \leq r \leq m \leq n$. As $\tilde{h}^{-1}(Z)_{\text{red}}$ is a sub-divisor of $(\tilde{X}_{s'})_{\text{red}} \cup \tilde{T}$, this finishes the proof of 2.4.

3. Resolvability, log smoothness, and weak semistable reduction

3.1. Elimination of separatedness assumptions. The main aim of §3.1 is to weaken the separatedness assumptions in Theorems 1.1 and VIII-1.1.

3.1.1. Recall, see VI-4.1, that if a finite group G acts on a scheme X then the fixed point subscheme X^G is the intersection of graphs of the translations $g : X \rightarrow X$. In particular, X^G is closed whenever X is separated. The definition obviously makes sense for non-separated schemes, and the only novelty is that X^G is a subscheme that does not have to be closed.

3.1.2. *Inertia specializing actions.* An action of a finite group G on a scheme X is **inertia specializing** if for any point $x \in X$ with a specialization $y \in X$ one has that $G_x \subset G_y$.

LEMMA 3.1.3. *An action of G on X is inertia specializing if and only if for each subgroup $H \subset G$ the subscheme X^H is closed.*

Proof. Note that a subscheme is closed if and only if it is closed under specializations. If X^H is not closed then there exists a point $x \in X^H$ with a specialization $y \notin X^H$. Thus, $H \subset G_x$ and $H \not\subset G_y$, and the action is not inertia specializing. The opposite direction is proved similarly. $\square$

REMARK 3.1.4. (i) A large class of examples of inertia specializing actions can be described as follows. The following conditions are equivalent and imply that the action is inertia specializing: (a) any G orbit is contained in an open separated subscheme of X , (b) X admits a covering by G -equivariant separated open subschemes X_i . In particular, any admissible action is inertia specializing.

(ii) If (G, X, Z) is as in Theorem VIII-1.1, but instead of separatedness of X one only assumes that it possesses a covering by G -equivariant separated open subschemes X_i , then the assertion of the

theorem still holds true. Indeed, the theorem applies to the G -equivariant log schemes $(X_i, Z_i = Z|_{X_i})$, and by Theorem VIII-5.6.1 the modifications $f_{(G, X_i, Z_i)}$ agree on the intersections and hence glue to a required modification $f_{(G, X, Z)}$ of X .

A quick analysis of the proof of VIII-1.1 is required to obtain the following stronger result.

THEOREM 3.1.5. (i) *Theorem VIII-1.1 and its complement VIII-5.6.1 hold true if the assumption that X is separated is weakened to the assumption that the action of G on X is inertia specializing.*

(ii) *Theorem 1.1 holds true if the assumptions that X and S are separated are replaced with the single assumption that the action of G on X is inertia specializing.*

Proof. The construction of modification $f_{(G, X, Z)}$ in the proof of VIII-1.1 runs in four steps. The first two steps are determined by X and Z , see VIII-4. These steps do not use any separatedness assumption. In Step 3, one blows up the inertia strata, see VIII-4.1.9. Here one only needs to know that the inertia strata are closed, and by Lemma 3.1.3 this happens if and only if the action is inertia specializing. Finally, let us discuss the main part of the construction, see VIII-5 and VIII-5.5.5. Using Lemma VIII-5.3.8, one finds an appropriate equivariant covering $(X', Z', G) \rightarrow (X, Z, G)$ with an affine X' and reduces the problem to studying the source. Thus, the separatedness assumption is only used in Lemma VIII-5.3.8. In fact, the only property of the G -action used in the proof of the latter is that for any $x \in X$ the set $X \setminus \bigcup_{H \not\subseteq G_x} X^H$ is open. Thus, in this case too, one only uses that the action is inertia specializing.

The proof of Theorem 1.1 runs as follows. One considers the modification $f_{(G, X, Z)}$ from VIII-1.1 and checks that it satisfies the additional properties asserted by 1.1. This check is local on X and hence applies to non-separated schemes as well. Since by part (i) of 3.1.5, $f_{(G, X, Z)}$ is well defined whenever G acts inertia specializing on X , we obtain (ii). $\square$

3.1.6. *Pseudo-projective morphisms and non-separated Chow's lemma.* We conclude §3.1 with recalling a non-separated version of Chow's lemma due to Artin-Raynaud-Gruson, see [Raynaud & Gruson, 1971, I 5.7.13]. It will be needed to avoid unnecessary separatedness assumptions in the future. We prefer to use the following non-standard terminology: a finite type morphism $f: X \rightarrow S$ is **pseudo-projective** if it can be factored into a composition of a **local isomorphism** $X \rightarrow \bar{X}$ (i.e. X admits an open covering $X = \bigcup_i X_i$ such that the morphisms $X_i \rightarrow \bar{X}$ are open immersions) and a projective morphism $\bar{X} \rightarrow S$.

REMARK 3.1.7. (i) We introduce pseudo-projective morphisms mainly for terminological convenience. Although pseudo-projectivity is preserved by base changes, it can be lost under compositions. Moreover, even if X is pseudo-projective over a field k , its blow up X' does not have to be pseudo-projective over k (thus giving an example of a projective morphism $f: X' \rightarrow X$ and a pseudo-projective one $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ so that the composition is not pseudo-projective). Indeed, let X be an affine plane with a doubled origin $\{o_1, o_2\}$, and let X' be obtained by blowing up o_1 . By η we denote the generic point of $C_1 = f^{-1}(o_1)$. The ring $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X', \eta})$ is a DVR and its spectrum has two different k -morphisms to X' : one takes the closed point to η and another one takes it to o_2 . It then follows from the valuative criterion of separatedness that any k -morphism $g: X' \rightarrow Y$ with a separated target takes o_2 and η to the same point of Y . In particular, such g cannot be a local isomorphism, and hence X' is not pseudo-projective over k .

(ii) Note that a morphism f is separated (resp. proper) and pseudo-projective if and only if it is quasi-projective (resp. projective). So, the following result extends the classical Chow's lemma to non-separated morphisms.

PROPOSITION 3.1.8. *Let $f: X \rightarrow S$ be a finite type morphism of quasi-compact and quasi-separated schemes, and assume that X has finitely many maximal points. Then there exists a projective modification $g: X' \rightarrow X$ (even a blow up along a finitely generated ideal with a nowhere dense support) such that the morphism $X' \rightarrow S$ is pseudo-projective.*

Proof. As a simple corollary of the flattening theorem, it is proved in [Raynaud & Gruson, 1971, I 5.7.13] that there exists a modification $X' \rightarrow X$ such that $X' \rightarrow S$ factors as a composition of an

étale morphism $X' \rightarrow \bar{X}$ that induces an isomorphism of dense open subschemes and a projective morphism $\bar{X} \rightarrow S$. (In loc.cit. one works with algebraic spaces and assumes that f is locally separated, but the latter is automatic for any morphism of schemes.) Our claim now follows from the following lemma (which fails for locally separated morphisms between algebraic spaces). $\square$

LEMMA 3.1.9. *Assume that $\phi: Y \rightarrow Z$ is an étale morphism of schemes that restricts to an open embedding on a dense open subscheme $Y_0 \hookrightarrow Y$. Then ϕ is a local isomorphism.*

Proof. Let us prove that if, in addition, ϕ is separated then ϕ is an open immersion. Since Y possesses an open covering by separated subschemes, this will imply the lemma. The diagonal $\Delta_\phi: Y \rightarrow Y \times_Z Y$ is an open immersion, and by the separatedness of ϕ , it is also a closed immersion. Thus, Y is open and closed in $Y \times_Z Y$, and since both Y and $Y \times_Z Y$ have dense open subschemes that map isomorphically onto Y_0 , Δ_ϕ is an isomorphism. This implies that ϕ is a monomorphism, but any étale monomorphism is an open immersion by [ÉGA IV₄ 17.9.1]. $\square$

3.2. Semistable curves and log smoothness.

3.2.1. *Log structure associated to a closed subset.* Let S be a reduced scheme. Any closed nowhere dense subset $W \subset S$ induces a log structure $j_* \mathcal{O}_U^* \cap \mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathcal{O}_S$, where $j: U \hookrightarrow S$ is the embedding of the complement of W . The associated log scheme will be denoted (S, W) . By VI-1.4, any log regular log scheme is of the form (S, W) , where W is the non-triviality locus of the log structure.

3.2.2. *Semistable relative curves.* Following the terminology of [Temkin, 2010], by a **semistable multipointed relative curve** over a scheme S we mean a pair (C, D) , where C is a flat finitely presented S -scheme of pure relative dimension one and with geometric fibers having only ordinary nodes as singularities, and $D \hookrightarrow C$ is a closed subscheme which is étale over S and disjoint from the singular locus of $C \rightarrow S$. We do not assume C to be neither proper nor even separated over S .

PROPOSITION 3.2.3. *Assume that (S, W) is a log regular log scheme and (C, D) is a semistable multipointed relative S -curve such that the morphism $f: C \rightarrow S$ is smooth over $S \setminus W$. Then the morphism of log schemes $(C, D \cup f^{-1}(W)) \rightarrow (S, W)$ is log smooth.*

Proof. See VI-1.9. $\square$

3.3. ℓ' -resolvability.

3.3.1. *Alterations.* Assume that S' and S are reduced schemes with finitely many maximal points and let $\eta' \subset S'$ and $\eta \subset S$ denote the subschemes of maximal points. Let $f: S' \rightarrow S$ be an **alteration**, i.e. a proper, surjective, generically finite, and maximally dominating morphism. Recall that f is an **ℓ' -alteration** if one has that $([k(x) : k(f(x))], l) = 1$ for any $x \in \eta'$. We say that f is **separable** if $k(\eta')$ is a separable $k(\eta)$ -algebra (i.e. $\eta' \rightarrow \eta$ has geometrically reduced fibers). If, in addition, S' and S are provided with an action of a finite group G such that f is G -equivariant, the action on S is trivial, the action on η' is free, and $\eta'/G \xrightarrow{\sim} \eta$, then we say that f is a **separable Galois alteration** of group G , or just **separable G -alteration**.

REMARK 3.3.2. We add the word "separable" to distinguish our definition from Galois alterations in the sense of de Jong (see [de Jong, 1997]) or Gabber-Vidal (see [Vidal, 2004, p. 370]). In the latter cases, one allows alterations that factor as $S' \rightarrow S'' \rightarrow S$, where $S' \rightarrow S''$ is a separable Galois alteration and $S'' \rightarrow S$ is purely inseparable.

3.3.3. *Universal ℓ' -resolvability.* Let X be a locally noetherian scheme and let ℓ be a prime invertible on X . Assume that for any alteration $Y \rightarrow X_{\text{red}}$ and nowhere dense closed subset $Z \subset Y$ there exists a surjective projective morphism $f: Y' \rightarrow Y$ such that Y' is regular and $Z' = f^{-1}(Z)$ is an snc divisor. (By a slight abuse of language, by saying that a closed subset is an snc divisor we mean that it is the support of an snc divisor.) If, furthermore, one can always choose such f to be a modification, separable ℓ' -alteration, ℓ' -alteration, or alteration, then we say that X is **universally resolvable**, **universally separably ℓ' -resolvable**, **universally ℓ' -resolvable**, or **universally $\mathbb{Q}$ -resolvable**, respectively.

REMARK 3.3.4. (i) Due to resolution of singularities in characteristic zero, any qc scheme over $\text{Spec}(\mathbb{Q})$ is universally resolvable. This is essentially due to Hironaka, [Hironaka, 1964], though an

additional work was required to treat *qe* schemes that are not algebraic in Hironaka's sense, see [Temkin, 2008] for the noetherian case and [Temkin, 2012] for the general case.

(ii) It is hoped that all *qe* schemes admit resolution of singularities (in particular, are universally resolvable). However, we are, probably, very far from proving this. Currently, it is known that any *qe* scheme of dimension at most two admits resolution of singularities (see [Cossart et al., 2009] for a modern treatment). In particular, any *qe* scheme of dimension at most two is universally resolvable.

(iii) One can show that any universally $\mathbf{Q}$ -resolvable scheme is *qe*, but we prefer not to include this proof here, and will simply add quasi-excellence assumption to the theorems below.

(iv) On the negative side, we note that there exist regular (hence resolvable) but not universally $\mathbf{Q}$ -resolvable schemes X . They can be constructed analogously to examples from I-11.5. For instance, there exists a discretely valued field K whose completion $\hat{K}$ contains a non-trivial finite purely inseparable extension K'/K (e.g. take an element $y \in k((x))$ which is transcendental over $k(x)$ and set $K = k(x, y^p) \subset K' = k(x, y) \subset k((x))$ with the induced valuation). The valued extension K'/K has a defect in the sense that $e_{K'/K} = f_{K'/K} = 1$. In other words, the DVR's A' and A of K' and K , have the same residue field and satisfy $m_{A'} = m_A A'$. Since A' is A -flat, it cannot be A -finite. On the other hand, A' is the integral closure of A in K' , and we obtain that A is not *qe*. In addition, although $X = \text{Spec}(A)$ is regular, any X -finite integral scheme X' with $K' \subset k(X')$ possesses a non-finite normalization and hence does not admit a desingularization. Thus, X is not universally $\mathbf{Q}$ -resolvable.

Our main goal will be to show that universal ℓ' -resolvability of a *qe* base scheme S is inherited by finite type S -schemes whose structure morphism $X \rightarrow S$ is maximally dominating (see Theorem 3.5 below, where a more precise result is formulated). The proof will be by induction on the relative dimension, and the main work is done when dealing with the case of generically smooth relative curves.

THEOREM 3.4. *Let S be an integral, noetherian, *qe* scheme with generic point $\eta = \text{Spec}(K)$, let $f: X \rightarrow S$ be a maximally dominating (II-1.1.2) morphism of finite type, and let $Z \subset X$ be a nowhere dense closed subset. Assume that S is universally ℓ' -resolvable (resp. universally separably ℓ' -resolvable), $X_\eta = X \times_S \eta$ is a smooth curve over K , and $Z_\eta = Z \times_S \eta$ is étale over K . Then there exist a projective ℓ' -alteration (resp. a separable projective ℓ' -alteration) $\alpha: S' \rightarrow S$, a projective modification $b: X' \rightarrow (X \times_S S')^{\text{Pr}}$, where $(X \times_S S')^{\text{Pr}}$ is the proper transform of X , i.e. the schematic closure of $X_\eta \times_S S'$ in $X \times_S S'$,*

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{b} & (X \times_S S')^{\text{Pr}} & \hookrightarrow & X \times_S S' & \longrightarrow & X \\ & \searrow f' & & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & & & S' & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array}$$

and divisors $W' \subset S'$ and $Z' \subset X'$ such that S' and X' are regular, W' and Z' are snc, the morphism $f': X' \rightarrow S'$ is pseudo-projective (§3.1.6), $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ is log smooth, and $Z' = c^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$, where c denotes the alteration $X' \rightarrow X$.

We also note if f is separated (resp. proper) then f' is even quasi-projective (resp. projective) by Remark 3.1.7(ii).

Proof. It will be convenient to represent Z as $Z_h \cup Z_v$, where the horizontal component Z_h is the closure of Z_η and the vertical component Z_v is the closure of $Z \setminus Z_h$. The following observation will be used freely: if $\alpha_1: S_1 \rightarrow S$ is a (resp. separable) projective ℓ' -alteration with an integral S_1 and $b_1: X_1 \rightarrow (X \times_S S_1)^{\text{Pr}}$ is a projective modification, then it suffices to prove the theorem for $f_1: X_1 \rightarrow S_1$ and the preimage $Z_1 \subset X_1$ of Z (note that the generic fiber of f_1 is smooth because it is a base change of that of f). So, in such a situation we can freely replace f by f_1 , and Z will be updated automatically without mentioning, as a rule. We will change S and X a few times during the proof. We start with some preliminary steps.

Step 1. *We can assume that f is quasi-projective.* By Proposition 3.1.8, replacing X with its projective modification we can achieve that f factors through a local isomorphism $X \rightarrow \bar{X}$, where $\bar{X}$ is S -projective. Let $X_1 \subset \bar{X}$ be the image of X . Then the induced morphism $X_1 \rightarrow S$ is quasi-projective

and with smooth generic fiber. If the theorem holds for f_1 and the image $Z_1 \subset X_1$ of Z , i.e., there exist $\alpha: S' \rightarrow S$ and $b_1: X'_1 \rightarrow (X_1 \times_S S')^{\text{pr}}$ that satisfy all assertions of the theorem, then the theorem also holds for f and Z because we can keep the same α and take $b = b_1 \times_{X_1} X$. This completes the step, and in the sequel we assume that f is quasi-projective. As we will only use projective modifications $b_1: X_1 \rightarrow (X \times_S S_1)^{\text{pr}}$, the quasi-projectivity of f will be preserved automatically.

Step 2. *We can assume that f and $Z_h \rightarrow S$ are flat.* Indeed, due to the flattening theorem of Raynaud-Gruson, see [Raynaud & Gruson, 1971, I 5.2.2], this can be achieved by replacing S with an appropriate projective modification S' , replacing X with the proper transform, and replacing Z with its preimage. From now on, the proper transforms of X will coincide with the base changes.

Step 3. *Use of the stable modification theorem.* By the stable modification theorem [Temkin, 2010, 1.5 and 1.1] there exist a separable alteration $\bar{\alpha}: \bar{S} \rightarrow S$ with an integral $\bar{S}$ and a projective modification $\bar{X} \rightarrow X \times_S \bar{S}$ such that $(\bar{X}, \bar{Z}_h)$ is a semistable multipointed $\bar{S}$ -curve (see §3.2.2), where $\bar{Z}_h \subset \bar{X}$ is the horizontal part of the preimage $\bar{Z}$ of Z . Enlarging $\bar{S}$ we can assume that it is integral and normal.

$$\begin{array}{ccccc} \bar{X} & \longrightarrow & X \times_S \bar{S} & \longrightarrow & X \\ & \searrow \bar{f} & \downarrow & & \downarrow f \\ & & \bar{S} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & S \end{array}$$

Step 4. *We can assume that $\bar{\alpha}$ is a separable projective G -alteration, where G is an ℓ -group.* Since semistable multipointed relative curves are preserved by base changes, we can just enlarge $\bar{S}$ by replacing it with any separable projective Galois alteration that factors through $\bar{S}$. Once $\bar{S} \rightarrow S$ is Galois, let $\bar{G}$ denote its Galois group and let $G \subset \bar{G}$ be any Sylow ℓ -subgroup. Since $\bar{S} \rightarrow \bar{S}/G$ is a separable G -alteration and $\bar{S}/G \rightarrow S$ is a separable projective ℓ' -alteration, we can replace S with $\bar{S}/G$, replace X with $X \times_S (\bar{S}/G)$, and update Z accordingly, accomplishing the step.

Step 5. *The action of G on $X \times_S \bar{S}$ via $\bar{S}$ lifts equivariantly to $\bar{X}$. In particular, $\bar{f}$ becomes G -equivariant and $\bar{X} \rightarrow X$ becomes a separable projective G -alteration.* This follows from [Temkin, 2010, 1.6].

Step 6. *The action of G on $\bar{X}$ is inertia specializing.* Indeed, any covering of X by separated open subschemes induces a covering of $\bar{X}$ by G -equivariant separated open subschemes. So, it remains to use Remark 3.1.4(i).

Step 7. *We can assume that $\bar{S} \rightarrow S$ is finite.* By Raynaud-Gruson there exists a projective modification $S' \rightarrow S$ such that the proper transform $\bar{S}'$ of $\bar{S}$ is flat over S' . Let η denote the generic point of S and S' and let η' denote the generic point of $\bar{S}$ and $\bar{S}'$. Since the morphisms $\bar{S} \times_S S' \rightarrow S'$ and $\eta' \rightarrow \eta$ are G -equivariant and $\bar{S}'$ is the schematic closure of η' in $\bar{S} \times_S S'$, we obtain that the morphism $\bar{S}' \rightarrow S'$ is a separable projective G -alteration. Replacing $\bar{S} \rightarrow S$ with $\bar{S}' \rightarrow S'$, and updating X and $\bar{X}$ accordingly, we achieve that $\bar{S} \rightarrow S$ becomes flat, and hence finite. All conditions of steps 1–6 are preserved with the only exception that $\bar{S}$ may be non-normal. So, we replace $\bar{S}$ with its normalization and update $\bar{X}$. This operation preserves the finiteness of $\bar{S} \rightarrow S$, so we complete the step.

Step 8. *Choice of W .* Fix a closed subset $W \subsetneq S$ such that $\bar{S} \rightarrow S$ is étale over $S \setminus W$, $\bar{f}(\bar{Z}_v) \subset \bar{W}$, where $\bar{Z}_v$ is the vertical part of $\bar{Z}$ and $\bar{W} = \bar{\alpha}^{-1}(W)$, and $\bar{f}$ is smooth over $\bar{S} \setminus \bar{W}$.

Step 9. *We can assume that S is regular and W is snc.* Indeed, by our assumptions on S there exists a projective ℓ' -alteration (resp. a separable projective ℓ' -alteration) $\alpha: S' \rightarrow S$ such that S' is regular and $\alpha^{-1}(W)$ is snc. Choose any preimage of η in $S' \times_S \bar{S}$ and let $\bar{S}'$ be the normalization of its closure. Then $\bar{S}' \rightarrow S'$ is a separable projective Galois alteration with Galois group $G' \subset G$, so we can replace $S, \bar{S}, G$ and X with $S', \bar{S}', G'$ and $X \times_S S'$, respectively, and update $W, \bar{W}$ and Z accordingly (i.e. replace them with their preimages). Note that step 9 is the only step where a non-separable alteration of S may occur.

Step 10. *The morphism $(\bar{S}, \bar{W}) \rightarrow (S, W)$ is Kummer étale.* Indeed, $\bar{S} \rightarrow S$ is an étale G -covering outside of W , and $\bar{S}$ is the normalization of S in this covering, so the assertion follows from IX-2.1.

Consider the G -equivariant subscheme $\bar{T} = \bar{Z} \cup \bar{f}^{-1}(\bar{W})$ of $\bar{X}$. The morphism $(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow (\bar{S}, \bar{W})$ is log smooth by Proposition 3.2.3, hence so is the composition $(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow (S, W)$ and we obtain that $(\bar{X}, \bar{T})$ is

log regular. The group G acts freely on $\bar{S} \setminus \bar{W}$ and hence also on $\bar{X} \setminus \bar{T}$. Also, its action on $\bar{X}$ is tame and inertia specializing (step 6), hence we can apply Theorem 1.1 to $(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow (S, W)$. As a result, we obtain a projective G -equivariant modification $(\bar{X}', \bar{T}') \rightarrow (\bar{X}, \bar{T})$ such that $\bar{T}'$ is the preimage of $\bar{T}$, G acts very tamely on $(\bar{X}', \bar{T}')$, and $(X', Z') = (\bar{X}'/G, \bar{T}'/G)$ is log smooth over (S, W) (the quotient exists as a scheme as f is quasi-projective by Step 1 and the morphisms $\bar{S} \rightarrow S$ and $\bar{X}' \rightarrow \bar{X} \rightarrow X \times_S \bar{S}$ are projective). Clearly, X' is a projective modification of X and Z' is the union of the preimages of W and Z , hence it only remains to achieve that X' is regular and Z' is snc. For this it suffices to replace (X', Z') with its projective modification $\widehat{\mathcal{F}}^{\log}(X', Z')$ introduced in VIII-3.4.9. $\square$

REMARK 3.4.1. It is natural to compare Theorem 3.4 and the classical de Jong's result recalled in IX-1.2. The main differences are as follows.

(i) One considers non-proper relative curves in 3.4, and this is the only point that requires to use the stable modification theorem instead of de Jong's result. The reason is that although the problem easily reduces to the case of a quasi-projective f (see Step 2), one cannot make f projective, as the compactified generic fiber $\bar{X}_\eta$ does not have to be smooth (i.e. *geometrically regular*) at the added points.

(ii) One uses ℓ' -alterations in 3.4. This is more restrictive than in IX-1.2, but the price one has to pay is that the obtained log smooth morphism $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ does not have to be a nodal curve (e.g. $X' \rightarrow S'$ may have non-reduced fibers). The construction of such $b: X' \rightarrow X$ involves a quotient by a Sylow subgroup, and is based on Theorem 1.1. (Note also that it seems probable that instead of 1.1 one could use the torification argument of Abramovich-de Jong, see [Abramovich & de Jong, 1997, §1.4.2].)

Now, we are going to use Theorem 3.4 to prove the main result of §3.

THEOREM 3.5. *Let $f: X \rightarrow S$ be a maximally dominating (II-1.1.2) morphism of finite type between noetherian qc schemes, let $Z \subset X$ be a nowhere dense closed subset, and assume that S is universally ℓ' -resolvable, then:*

(i) *X is universally ℓ' -resolvable.*

(ii) *There exist projective ℓ' -alterations $a: S' \rightarrow S$ and $b: X' \rightarrow X$ with regular sources, a pseudo-projective (§3.1.6) morphism $f': X' \rightarrow S'$ compatible with f*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{b} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

and snc divisors $W' \subset S'$ and $Z' \subset X'$ such that $Z' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$ and the morphism $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ is log smooth.

(iii) *If $S = \text{Spec}(k)$, where k is a perfect field, then one can achieve in addition to (ii) that a is an isomorphism and the alteration b is separable. In particular, X is universally separably ℓ' -resolvable in this case.*

Proof. Note that (i) follows from (ii) because any alteration X_1 of X is also of finite type over S , so we can apply (ii) to X_1 as well. Thus, our aim is to prove (ii) and its complement (iii). We will view Z both as a closed subset and a reduced closed subscheme. We start with a few preliminary steps, that reduce the theorem to a special case. We will tacitly use that if $S_1 \rightarrow S$ and $X_1 \rightarrow X$ are projective ℓ' -alterations, separable in case (iii), and $f_1: X_1 \rightarrow S_1$ is compatible with f , then it suffices to prove the theorem for f_1 and the preimage $Z_1 \subset X_1$ of Z . So, in such situation we can freely replace f with f_1 , and Z will be updated automatically without mentioning, as a rule.

Step 1. *We can assume that X and S are integral and normal.* For a noetherian scheme Y , let Y^{nor} denote the normalization of its reduction. Since f is maximally dominating, it induces a morphism $f^{\text{nor}}: X^{\text{nor}} \rightarrow S^{\text{nor}}$, and replacing f with f^{nor} we can assume that S and X are normal. Since we can work separately with the connected components, we can now assume that S and X are integral.

Step 2. *We can assume that f is projective.* By Proposition 3.1.8 there exists a projective modification $X_1 \rightarrow X$ such that the morphism $X_1 \rightarrow S$ factors into a composition of a local isomorphism $X_1 \rightarrow \bar{X}_1$

and a projective morphism $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow S$. Replacing X with X_1 we can assume that X itself admits a local isomorphism $g: X \rightarrow \bar{X}$ with an S -projective target. Let $\bar{Z}$ be the closure of $g(Z)$. Then it suffices to solve our problem for $\bar{f}$ and $\bar{Z}$, as the corresponding alteration of $\bar{X}$ will induce an alteration of X as required. Thus, replacing X and Z with $\bar{X}$ and $\bar{Z}$, we can assume that f is projective.

Step 3. *It suffices to find f' which satisfies all assertions of the theorem except the formula for Z' , while the latter is weakened as $b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W') \subset Z'$.* Given such an f' note that $Z'' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$ is a subdivisor of Z' , hence it is an snc divisor too. We claim that X', Z'', S', W' satisfy all assertions of the theorem, and the only thing one has to check is that the morphism $(X', Z'') \rightarrow (S', W')$ is log smooth. The latter follows from Lemma 3.5.3 whose proof will be given below.

Step 4. *In the situation of (iii) we can assume that the field k is infinite.* Assume that $S = \text{Spec}(k)$ where k is a finite field and fix an infinite algebraic ℓ' -prime extension $\bar{k}/k$ (i.e. it does not contain the extension of k of degree ℓ). We claim that it suffices to prove (ii) and (iii) for $\bar{S} = \text{Spec}(\bar{k})$ and the base changes $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$ and $\bar{Z} = Z \times_S \bar{S}$. Indeed, assume that $\alpha: \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ is a separable ℓ' -alteration with a regular source and such that $\bar{Z}' = \alpha^{-1}(\bar{Z})$ is an snc divisor (obviously, we can take $\bar{S}' = \bar{S}$ and $\bar{W}' = \emptyset$). Since $\bar{S} = \lim_i S_i$ where $S_i = \text{Spec}(k_i)$ and k_i/k run over finite subextensions of $\bar{k}/k$, [ÉGA IV₃ 8.8.2(ii)] implies that there exists i and a finite type morphism $X'_i \rightarrow X_i = X \times_S S_i$ such that $\bar{X}' \xrightarrow{\sim} X'_i \times_{S_i} \bar{S}$. For any finite subextension $k_i \subset k_j \subset \bar{k}$ set $X'_j = X'_i \times_{S_i} S_j$ and $X_j = X_i \times_{S_i} S_j$, and let $Z'_j \subset X'_j$ be the preimage of Z . Then it follows easily from [ÉGA IV₃ 8.10.5] and [ÉGA IV₄ 17.7.8] that $X'_j \rightarrow X_j$ is an ℓ' -alteration and $X'_j \rightarrow S_j$ is smooth for large enough k_j . In the same manner one achieves that Z'_j is an snc divisor. Now, it is obvious that $(X'_j, Z'_j) \rightarrow (S, \emptyset)$ is log smooth and $X'_j \rightarrow X_j \rightarrow X$ is an ℓ' -alteration.

Now we are in a position to prove the theorem. We will use induction on $d = \text{tr.deg.}(k(X)/k(S))$, with the case of $d = 0$ being obvious. Assume that $d \geq 1$ and the theorem holds for smaller values of d .

Step 5. *Factorizing f through a relative curve.* After replacing X by a projective modification, we can factor f as $h \circ g$, where $h: Y \rightarrow S$ is projective, Y is integral, $g: X \rightarrow Y$ is maximally dominating and $\text{tr.deg.}(k(X)/k(Y)) = 1$. Indeed, one can obviously construct such a rational map $g': X \dashrightarrow Y$ even without modifying X (i.e. g' is well defined on a non-empty open subscheme $U \subset X$). Let X' be the schematic image of the morphism $U \hookrightarrow X \times Y$. Then $X' \rightarrow X$ is a projective modification (an isomorphism over U), and the morphism $X' \rightarrow S$ factors through $g: X \rightarrow Y$.

Let $\eta = \text{Spec}(k(Y))$ denote the generic point of Y , $X_\eta = X \times_Y \eta$ and $Z_\eta = Z \times_Y \eta$. We claim that in addition to factoring f through Y one can achieve that the following condition is satisfied:

(*) X_η and Z_η are smooth over η .

In general, this is achieved by replacing X and Y by inseparable alterations. Pick up any finite purely inseparable extension $K/k(Y)$ such that $Z_K = (Z \times_\eta \text{Spec}(K))^{\text{nor}}$ (i.e. just the reduction) and $X_K = (X \times_\eta \text{Spec}(K))^{\text{nor}}$ are smooth, extend $K/k(Y)$ to a projective alteration $Y' \rightarrow Y$, and replace Y and X with Y' and the schematic closure of X_K in $X \times_Y Y'$, respectively. Clearly, (*) holds after this replacement.

It remains to deal with the case (iii). This time we should avoid inseparable alterations, so g and Y should be chosen more carefully. If $k = \bar{k}$ is algebraically closed and $S = \text{Spec}(k)$ then such g and Y exist by [de Jong, 1996, 4.11], and the general assertion of (iii) will be proven similarly. Let us recall the main line of the proof of [de Jong, 1996, 4.11]. Fix a closed immersion $X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^N$ and for each linear subspace L of dimension $N - d$ consider the classical projection $\text{Bl}_L(\mathbf{P}_k^N) \rightarrow Y = \mathbf{P}_k^{d-1}$. If L is general then it does not contain X and hence the strict transform $X'_L \hookrightarrow \text{Bl}_L(\mathbf{P}_k^N)$ is a modification of X . de Jong shows that if $k = \bar{k}$ then for a general choice of L the projection $X'_L \rightarrow Y$ satisfies (*).

In the general case, the schemes $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ and $\bar{Z} = Z \otimes_k \bar{k}$ are reduced since k is perfect. Hence a general $\bar{L} \hookrightarrow \mathbf{P}_{\bar{k}}^N$ induces a modification $\bar{X}'_{\bar{L}} \rightarrow \bar{X}$ and a curve fibration $g_{\bar{L}}: \bar{X}'_{\bar{L}} \rightarrow \mathbf{P}_{\bar{k}}^{d-1}$ that satisfies (*). Since k is infinite we can choose $\bar{L}$ to be defined over k , i.e. $\bar{L} = L \otimes_k \bar{k}$ for $L \hookrightarrow \mathbf{P}_k^N$. We obtain thereby a modification $X'_L \rightarrow X$ and a curve fibration $g_L: X'_L \rightarrow \mathbf{P}_k^{d-1}$. Since $g_{\bar{L}}$ is the flat base change of g_L , the latter satisfies (*) by descent.

Step 6. *Use of Theorem 3.4.* So far, we have constructed the right column of the following diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 (X', Z') & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}^{\log}(L, M_L)} & (L, M_L) & \longrightarrow & (X'', Z'') & \xrightarrow{b''} & X \\
 & \searrow f' & \downarrow g' & \square & \downarrow g'' & \downarrow g & \downarrow f \\
 & & (Y', V') & \xrightarrow{c'} & (Y'', V'') & \xrightarrow{c''} & Y \\
 & & \downarrow h' & & \downarrow h'' & \downarrow h & \\
 & & (S', W') & \xrightarrow{a} & S & = & S
 \end{array}$$

By Theorem 3.4 there exists a projective ℓ' -alteration $c'': Y'' \rightarrow Y$ with regular source, a projective modification $X'' \rightarrow (X \times_Y Y'')^{\text{pr}}$ with regular source, a projective morphism $g'': X'' \rightarrow Y''$ compatible with g , and snc divisors $V'' \subset Y''$ and $Z'' \subset X''$ such that $(X'', Z'') \rightarrow (Y'', V'')$ is log smooth and $b''^{-1}(Z) \subset Z''$. In case (iii), Y is universally separably ℓ' -resolvable by the induction assumption, hence we can take c'' to be separable, and then $b'': X'' \rightarrow X$ is also separable. In addition, by the induction assumption applied to $h'': Y'' \rightarrow S$ and $V'' \subset Y''$ there exist projective ℓ' -alterations $a: S' \rightarrow S$ and $c': Y' \rightarrow Y''$ with regular sources and snc divisors $W' \subset S'$ and $V' \subset Y'$ and a projective morphism $h': Y' \rightarrow S'$ compatible with h'' such that $(Y', V') \rightarrow (S', W')$ is log smooth, $c'^{-1}(V'') \subset V'$, and c' is separable if the assumption of (iii) is satisfied.

Set $(L, M_L) = (X'', Z'') \times_{(Y'', V'')}^{\text{fs}} (Y', V')$, where the product is taking place in the category of fs log schemes. To simplify notation we will write P^{sat} instead of $(\text{P}^{\text{int}})^{\text{sat}}$ for monoids and log schemes. Recall that $(L, M_L) = (F, M_F)^{\text{sat}}$, where (F, M_F) is the usual log fibered product, and $F = X'' \times_{Y''} Y'$ by [Kato, 1988, 1.6]. Furthermore, we have local Zariski charts for c' and g'' modeled, say, on $P_i \rightarrow P'_i$ and $P_i \rightarrow Q_i$. Hence (F, M_F) is a Zariski log scheme with charts modeled on $R_i = P'_i \oplus_{P_i} Q_i$, and (L, M_L) is a Zariski log scheme with charts modeled on R_i^{sat} . Furthermore, the saturation morphism $L \rightarrow F$ is finite hence the composition $L \rightarrow F \rightarrow X''$ is projective. The morphism $g': (L, M_L) \rightarrow (Y', V')$ is a saturated base change of the log smooth morphism $g'': (X'', Z'') \rightarrow (Y'', V'')$, hence it is log smooth. As (Y', V') is log regular, (L, M_L) is also log regular. Applying to (L, M_L) the saturated monoidal desingularization functor $\tilde{\mathcal{F}}^{\log}$ from VIII-3.4.9 we obtain a log regular Zariski log scheme (X', Z') with a regular X' . Then Z' is a normal crossings divisor, which is even an snc divisor since the log structure is Zariski.

We claim that (X', Z') and (S', W') are as asserted by the theorem except of the weakening dealt with in Step 3. Indeed, the morphism $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ is log smooth because it is the composition $(X', Z') \rightarrow (L, M_L) \rightarrow (Y', V') \rightarrow (S', W')$ of log smooth morphisms. The preimage of Z in X'' is contained in Z'' , which is the non-triviality locus of the log structure of (X'', Z'') , hence its preimage in X' is also contained in the non-triviality locus of the log structure of (X', Z') , which is Z' . Clearly, Z' also contains the preimage of W' . By the construction, $S' \rightarrow S$ is a projective ℓ' -alteration, and it remains to check that $X' \rightarrow X$ is also a projective ℓ' -alteration. Since $\tilde{\mathcal{F}}^{\log}(L, M_L)$ is a saturated log blow up tower and (L, M_L) is log regular, the underlying morphism of schemes $X' \rightarrow L$ is a projective modification by VIII-3.4.6(i). The projective morphism $L \rightarrow X''$ is an ℓ' -alteration because generically (where the log structures are trivial) it is a base change of the projective ℓ' -alteration $Y' \rightarrow Y''$. And $X'' \rightarrow X$ is a projective ℓ' -alteration by the construction. It remains to recall that in the situation of (iii) the alterations $c': Y' \rightarrow Y''$ and $b'': X'' \rightarrow X$ are separable, hence so are $(L, M_L) \rightarrow X''$ and the total composition $X' \rightarrow X$. $\square$

REMARK 3.5.1. The only place where inseparable alterations are used is the argument at step 5, where we had to choose an inseparable extension $K/k(Y)$ when X_η or Z_η is not geometrically regular.

REMARK 3.5.2. Analogs of Theorems 3.4 and 3.5 hold also for the class of universally $\mathbf{Q}$ -resolvable schemes. In a sense, this is the " $\ell = 1$ " case of these theorems. One can prove this by the same argument but with ℓ replaced by 1. In fact, few arguments become vacuous (though formally true); for example, in steps 4-6 in the proof of Theorem 3.4, an ℓ -group G should be replaced by the trivial group, so the steps 5 and 6 collapse.

LEMMA 3.5.3. *Assume that S and X are regular schemes, $W \subset S$ and $Z \subset X$ are snc divisors, and $f: X \rightarrow S$ is a morphism such that $f^{-1}(W) \subset Z$ and the induced morphism of log schemes $h: (X, Z) \rightarrow (S, W)$ is log smooth. Then for any intermediate divisor $f^{-1}(W) \subset Z' \subset Z$ the morphism $h': (X, Z') \rightarrow (S, W)$ is log smooth.*

Proof. We can work locally at a geometric point $\bar{x} \rightarrow X$. Let $x \in X$ and $s \in S$ be the images of $\bar{x}$, and let $q_1, \dots, q_r \in \mathcal{O}_{S,s}$ define the irreducible components of W through s . Set $Q = \bigoplus_{i=1}^r q_i^{\mathbb{N}}$. Shrinking S we obtain a chart $c: S \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[Q])$ of (S, W) . By Proposition 1.2 applied to c , h , and $G = 1$, after localizing X along $\bar{x}$ one can find an fs chart of h consisting of c , $X \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P])$, and $\phi: Q \rightarrow P$ such that the morphism $X \rightarrow S \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ is smooth, P^* is torsion free, ϕ is injective, and the torsion of $\operatorname{Coker}(\phi^{\otimes P})$ is annihilated by an integer n invertible on S .

Let $p_1, \dots, p_t \in \mathcal{O}_{X,x}$ define the irreducible components of Z through x . Our next aim is to adjust the chart similarly to 1.4.2(vi) to achieve that $\bar{P} \xrightarrow{\sim} N = \bigoplus_{j=1}^t p_j^{\mathbb{N}}$. Note that $\bar{M}_{X,x} \xrightarrow{\sim} N$, where $M_{X \hookrightarrow \mathcal{O}_X}$ is the log structure of (X, Z) . The homomorphism $\psi: P \rightarrow M_{X,x}$ factors through the fs monoid $R = P[T^{-1}]$ where $T = \psi^{-1}(M_{X,x}^*)$. Clearly, R^* is torsion free, $\bar{R} \xrightarrow{\sim} N$, and shrinking X around x we obtain a chart $X \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[R])$. Since $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[R])$ is open in $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ the morphism $X \rightarrow S \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[R])$ is smooth. So, we can replace P with R achieving that $\bar{P} \xrightarrow{\sim} N$, and hence $P \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^t \oplus \mathbb{Z}^u$.

Without restriction of generality Z' is defined by the vanishing of $\prod_{j=1}^{t'} p_j$ for $t' \leq t$. Since $f^{-1}(W) \subset Z'$, the image of Q in $\bar{P}$ is contained in $\bar{P}' = \bigoplus_{j=1}^{t'} p_j^{\mathbb{N}}$. Hence ϕ factors through a homomorphism $\phi': Q \rightarrow P' = \bar{P}' \oplus P^*$, and we obtain a chart of h' consisting of c , $X \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P'])$, and ϕ' . By [Kato, 1994, 3.5, 3.6], to prove that h' is log smooth it remains to observe that ϕ' is injective, the torsion of $\operatorname{Coker}(\phi'^{\otimes P'})$ is annihilated by n , and the morphism

$$X \rightarrow S \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P]) \rightarrow S \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P'])$$

is smooth because $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P]) \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[P'])$ is so. $\square$

3.5.4. *Comparison with Theorems 2.1 and 2.4.* Theorems 2.1 and 2.4 follow by applying Theorem 3.5(ii) to $X \rightarrow S$ and Z (where one takes $S = \operatorname{Spec}(k)$ in 2.1). Indeed, the main part of the proofs of 2.1 and 2.4 was to construct ℓ' -alterations $X' \rightarrow X$ and $S' \rightarrow S$ with regular sources, snc divisors $Z' \subset X'$ and $W' \subset S'$, and a log smooth morphism $f': (X', Z') \rightarrow (S', W')$ compatible with f . Then, in the last paragraphs of both proofs, Proposition 1.2 was used to obtain a more detailed description of X' , Z' , and f' . In particular, for a zero-dimensional base this amounted to saying that X' is S -smooth and Z' is relatively snc over S , and for a one-dimensional base this amounted to the conditions (i) and (ii) of 2.4.

Conversely, Theorem 2.1 (resp. 2.4) implies assertion (ii) of Theorem 3.5 under the assumptions of 2.1 (resp. 2.4) on X and S . Moreover, the non-separated Chow's lemma could be used in their proofs as well, so the separatedness assumption there could be easily removed. In such case, Theorems 2.1 and 2.4 would simply become the low dimensional (with respect to S) cases of Theorem 3.5(ii) plus an explicit local description of the log smooth morphism f' . The strengthening 3.5(iii), however, was not achieved in 2.1, and required a different proof of the whole theorem.

3.6. **Saturation.** In Theorems 3.4 and 3.5 we resolve certain morphisms $f: X \rightarrow S$ with divisors $Z \subset X$ by log smooth morphisms $f': (X', Z') \rightarrow (S', W')$. However, as we insisted to use only ℓ' -alterations and to obtain regular X' and snc Z' , we had to compromise a little on the "quality" of f' . For example, our f' may have non-reduced fibers. Due to de Jong's theorem, if the relative dimension is one, then one can make f' a nodal curve. We will see that a similar improvement of f' is possible in general if one uses arbitrary alterations and allows non-regular X' . The procedure reduces to saturating f' and is essentially due to Tsuji and Illusie-Kato-Nakayama ([Illusie et al., 2005, A.4.4 and A.4.3]).

3.6.1. *Saturated morphisms.* Recall that a homomorphism $P \rightarrow Q$ of fs (resp. fine) monoids is **saturated** (resp. **integral**) if for any homomorphism $P \rightarrow P'$ with fs (resp. fine) target the pushout

$Q \oplus_P P'$ is fs (resp. fine). A morphism of fs (resp. fine) log schemes $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ is **saturated** (resp. **integral**) if so are the homomorphisms $\overline{M}_{X, f(y)} \rightarrow \overline{M}_{Y, y}$.

REMARK 3.6.2. (i) Integral morphisms were introduced already by Kato in [Kato, 1988, §4]. Kato also introduced the notion of saturated morphisms, which was first seriously studied by Tsuji in [Tsuji, 1997]. Actually, one can define saturated morphisms for arbitrary fine log schemes, but the definition is more involved than we use. For fs log schemes our definition coincides with the usual one due to [Tsuji, 1997, II 2.13(2)].

(ii) The following two basic properties of saturated morphisms follow from the definition: (a) a composition of saturated morphisms between fs log schemes is saturated, (b) if $f: Y \rightarrow X$ is a saturated morphism between fs log schemes, then, for any morphism of fs log schemes $X' \rightarrow X$, the base change $f': Y' \rightarrow X'$ of f in the category of log schemes is a saturated morphism of fs log schemes. (Also, it is proved in [Tsuji, 1997, II 2.11] that analogous properties hold for saturated morphisms between arbitrary integral log schemes.)

(iii) Let $f: Y \rightarrow X$ be a morphism of fs log schemes. It is shown in [Tsuji, 1997, II 3.5] that if f can be modeled on charts corresponding to saturated homomorphisms of fs monoids $P_i \rightarrow Q_i$ then f is saturated. Let us remark that the converse is also true: if f is saturated then it can be modeled on charts corresponding to $P_i \rightarrow Q_i$ as above.

3.6.3. *Integrality and saturatedness for log smooth morphisms.* We recall the following result that relates the notions of integral and saturated morphisms to certain properties of the underlying morphisms of schemes.

PROPOSITION 3.6.4. *Let $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ be a log smooth morphism between fs log schemes and assume that f is integral. Then,*

- (i) *the morphism $Y \rightarrow X$ is flat,*
- (ii) *f saturated if and only if $Y \rightarrow X$ has reduced fibers.*

Proof. The first claim is proved in [Kato, 1988, 4.5] and the second one is proved in [Tsuji, 1997, II 4.2]. $\square$

One can also go in the opposite direction: from flatness to integrality.

PROPOSITION 3.6.5. *Let $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ be a log smooth morphism between fs log schemes and assume that the morphism $Y \rightarrow X$ is flat and (X, M_X) is log smooth over a field k with the trivial log structure. Then f is integral.*

Proof. It suffices to show that if $\bar{y} \rightarrow Y$ is a geometric point and $\bar{x} = f(\bar{y})$ then the homomorphism $\bar{\phi}: \overline{M}_{X, \bar{x}} \rightarrow \overline{M}_{Y, \bar{y}}$ is integral. By Proposition 1.2 and the argument in 1.4(vi), localizing X and Y along these points we can assume that X possesses a chart $\alpha: X \rightarrow X_0 = \text{Spec}(k[Q])$ with smooth α and f is modeled on a chart $Y_0 = \text{Spec}(k[P]) \rightarrow X_0$ corresponding to a homomorphism $\phi: Q \rightarrow P$ so that the morphism $g: Y \rightarrow Z = X \times_{X_0} Y_0$ is smooth (in particular, flat), and ϕ has the following properties: $Q = \overline{M}_{X, \bar{x}}$, P is fs, P^* is torsion free, the composition $Q \rightarrow P \rightarrow \bar{P} = P/P^*$ coincides with $\bar{\phi}$, the kernel of $\phi^{\otimes P}$ is finite, killed by an integer invertible at x , as well as the torsion part of its cokernel (but we will not need these last two properties). Since Q is sharp and saturated, $Q^{\otimes P}$ is torsion free, so ϕ is injective. We claim that $\bar{\phi}$ is integral if and only if ϕ is integral. To see this note that if $Q \rightarrow R$ is a homomorphism of monoids, then $R \oplus_Q \bar{P}$ is isomorphic to the quotient of $R \oplus_Q P$ by the image of P^* , and hence either both pushouts are integral or neither of them is integral. Thus, we only need to prove that ϕ is integral.

Note that the morphism $h: Z \rightarrow X$ is flat at the (Zariski) image $z \in Z$ of $\bar{y}$ because f and g are flat. Note that α takes $x = h(z)$ to the origin of X_0 and $Y_0 \rightarrow X_0$ is flat at the image $y_0 \in Y_0$ of z by flat descent with respect to α . In other words, if $I \subset k[P]$ is the ideal corresponding to y_0 then the homomorphism $k[Q] \rightarrow k[P]_I$ is flat. The preimage of m_{y_0} under $k[P] \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y_0}$ contains the set $m_P = P \setminus P^*$, hence $m_P \subset I$ and we obtain that I contains $J = k[m_P]$. Note that the ideal J is prime as $k[P]/J \xrightarrow{\sim} k[P^*]$ is a domain due to P^* being torsion free. Thus, the localization $k[P]_J$ makes sense, and we obtain a flat homomorphism $\psi: k[Q] \rightarrow k[P]_J$.

It is proved in [Kato, 1988, 4.1], that if the homomorphisms $K[\phi]: K[Q] \rightarrow K[P]$ are flat for any field K then ϕ is integral. The proof consists of two parts. First one checks that ϕ is injective, which is automatic in our case. This is the only argument in loc.cit. where a play with different fields is needed. We claim that the second part of the proof of the implication (iii) $\implies$ (v) in [Kato, 1988, 4.1] works fine with a single field k , and, moreover, it suffices to only use that $k[Q] \rightarrow k[P]_J$ is flat. Let us indicate how the argument in loc.cit. should be adjusted.

Assume that, as in the proof of [Kato, 1988, 4.1], we are given $a_1, a_2 \in Q$ and $b_1, b_2 \in P$ such that $\phi(a_1)b_1 = \phi(a_2)b_2$. Let S be the kernel of the homomorphism of $k[Q]$ -modules $k[Q] \oplus k[Q] \rightarrow k[Q]$ given by $(x, y) \mapsto a_1x - a_2y$. By the flatness, the kernel of $k[P]_J \oplus k[P]_J \rightarrow k[P]_J$, $(x, y) \mapsto \phi(a_1)x - \phi(a_2)y$ is generated by the image of S . Hence there exist representations $b_1 = \sum_{i=1}^r \phi(c_i) \frac{f_i}{s}$ and $b_2 = \sum_{i=1}^r \phi(d_i) \frac{f_i}{s}$ with $c_i, d_i \in k[Q]$, $f_i \in k[P]$, $s \in k[P] \setminus J$, and $a_1c_i = a_2d_i$. Moreover, multiplying s and f_i 's by an appropriate unit $u \in P^*$ we can assume that $s = 1 + s'$ for $s' \in \text{Span}_k(P \setminus \{1\})$. Then $b_1 + \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \lambda_\alpha t_\alpha = \sum_{1 \leq i \leq r} \phi(c_i) f_i$, with $\lambda_\alpha \in k^*$, and the $t_\alpha \in P$ pairwise distinct and distinct from b_1 , so we see that there exist $a_3 \in Q$, $b \in P$, and $1 \leq i \leq r$, such that a_3 appears in c_i , b appears in f_i , and $b_1 = \phi(a_3)b$. The remaining argument copies that of the loc.cit. verbatim, and one obtains in the end that ϕ satisfies the condition (v) from [Kato, 1988, 4.1]. Thus, ϕ is integral and we are done. $\square$

Before going further, let us discuss an incarnation of saturated morphisms in (more classical) toroidal geometry.

REMARK 3.6.6. In toroidal geometry an analog of saturated morphisms was introduced by Abramovich and Karu in [Abramovich & Karu, 2000]. In the language of log schemes toroidal morphisms can be interpreted as log smooth morphisms $f: (X, Z) \rightarrow (S, W)$ between log regular schemes (with the toroidal structure given by the triviality loci of the log structures). If f is a toroidal morphism as above then Abramovich-Karu called it weakly semistable when the following conditions hold: S is regular, f is locally equidimensional, and the fibers of f are reduced. Furthermore, they remarked that the equidimensionality condition is equivalent to flatness of f whenever S is regular, see [Abramovich & Karu, 2000, 4.6]. Thus, the weak semistability condition is nothing else but saturatedness of f and regularity of the target. In particular, saturated log smooth morphisms between log regular log schemes may be viewed as the generalization of weakly semistable morphisms to the case of an arbitrary log regular (or toroidal) base.

Now, we are going to prove our main result about saturation.

THEOREM 3.7. *Assume that $f: (X, Z) \rightarrow (S, W)$ is a log smooth morphism such that (S, W) is log regular and S is universally $\mathbf{Q}$ -resolvable (§3.3.3). Then there exists an alteration $h: S' \rightarrow S$ such that S' is regular, $W' = g^{-1}(W)$ is an snc divisor, and the fs base change $f': (X', Z') \rightarrow (S', W')$ is a saturated morphism.*

Recall that $(X', Z') = (X, Z) \times_{(S, W)}^{\text{fs}} (S', W')$ and f' is log smooth because the saturation morphism is log smooth.

Proof. By VIII-3.4.9, applying to (S, W) an appropriate saturated log blow up tower and replacing (X, Z) with the fs base change we can achieve that S is regular and W is normal crossings. By an additional sequence of log blow ups we can also make W snc (see VIII-4.1.6), so (S, W) becomes a Zariski log scheme. Now, we can étale-locally cover f by charts $f_i: (X_i, Z_i) \rightarrow (S_i, W_i)$ modeled on $P_i \rightarrow Q_i$ such that S_i are open subschemes in S . By [Illusie et al., 2005, A.4.4, A.4.3], for each i there exists a morphism $h_i: (S'_i, W'_i) \rightarrow (S_i, W_i)$ such that h_i is a composition of a Kummer morphism and a log blow up, and the fs base change of f_i is saturated. (Although the proof in loc.cit. is written in the context of log analytic spaces, it translates to our situation almost verbatim. The only changes are that we have to distinguish étale and Zariski topology on the base (in order to construct log blow ups), and h_i does not have to be log étale as there might be inseparable Kummer morphisms.)

Note that $W'_i = h_i^{-1}(W_i)$. In addition, $S'_i \rightarrow S_i$ is a projective alteration by VIII-3.4.6. Extend each h_i to a projective alteration $g_i: T_i \rightarrow S$, and let $h: S' \rightarrow S$ be a projective alteration that factors through each T_i . By the universal $\mathbf{Q}$ -resolvability assumption we can enlarge S' so that it becomes regular and $Z' = h^{-1}(Z)$ becomes snc. We claim that h is as claimed. It suffices to check that the fs base change

of each morphism $f'_i: (X_i, Z_i) \rightarrow (S, W)$ is saturated. However, already the fs base change of f'_i to $(T_i, g_i^{-1}(W))$ is saturated by the construction, hence so is its further base change to (S', W') . $\square$

REMARK 3.7.1. Our proof is an easy consequence of [Illusie et al., 2005, A.4.4 and A.4.3]. The first cited result shows that (locally) any log smooth morphism can be made exact by an appropriate log blow up of the base. This result is somewhat analogous to the flattening theorem of Raynaud-Gruson. The second cited result shows that by a Kummer extension of the base one can (locally) saturate an exact log smooth morphism. It is somewhat analogous to the reduced fiber theorem of Bosch-Lütkebohmert-Raynaud ([Bosch et al., 1995]) which implies that if $f: Y \rightarrow X$ is a finite type morphism between reduced noetherian schemes then there exists an alteration $X' \rightarrow X$ such that the normalized base change $f': (Y \times_X X')^{\text{nor}} \rightarrow X'$ has reduced fibers. Although the proof of the latter is far more difficult.

3.8. Characteristic zero case. Theorem 3.5 can be substantially strengthened when S is of characteristic zero, i.e., the morphism $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ factors through $\text{Spec}(\mathbb{Q})$.

THEOREM 3.9. *Assume that S is a reduced, noetherian, qe scheme of characteristic zero, $f: X \rightarrow S$ is a maximally dominating morphism of finite type with reduced source, and $Z \subset X$ is a nowhere dense closed subset. Then there exist projective modifications $\alpha: S' \rightarrow S$ and $\beta: X' \rightarrow X$ with regular sources, a pseudo-projective morphism $f': X' \rightarrow S'$ compatible with f , and snc divisors $W' \subset S'$ and $Z' \subset X'$ such that $Z' = \beta^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$ and the morphism $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ is log smooth.*

Proof. The proof is very close to the proof of Theorem 3.5, so we will just say which changes in that proof should be made. First, we note that any S -scheme Y of finite type is noetherian and qe. Thus, if Y is reduced and $T \subset Y$ is a nowhere dense closed subset then the pair (Y, T) can be desingularized by [Temkin, 2008] in the following sense: there exists a projective modification $h: Y' \rightarrow Y$ with regular source and such that $h^{-1}(T)$ is an snc divisor. This result replaces the ℓ' -resolvability assumption in Theorem 3.5, and it allows to apply the proof of that theorem to our situation with the only changes that one always uses projective modifications instead of projective ℓ' -alterations, and Theorem 3.4 is replaced with Lemma 3.9.1 below. (Note that Lemma 3.9.1 is weaker than Theorem 3.9, while Theorem 3.4 does not follow from Theorem 3.5.) $\square$

LEMMA 3.9.1. *Let S be an integral, noetherian, qe scheme with generic point $\eta = \text{Spec}(K)$, let $f: X \rightarrow S$ be a maximally dominating morphism of finite type, and let $Z \subset X$ be a nowhere dense closed subset. Assume that $X_\eta = X \times_S \eta$ is a smooth curve over K , and $Z_\eta = Z \times_S \eta$ is étale over K . Then there exist projective modifications $\alpha: S' \rightarrow S$ and $\beta: X' \rightarrow X$ with regular sources, a pseudo-projective morphism $f': X' \rightarrow S'$ compatible with f and snc divisors $W' \subset S'$ and $Z' \subset X'$ such that $Z' = \beta^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$ and the morphism $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ is log smooth.*

Proof. The proof copies the proof of Theorem 3.4 with the only difference that instead of an ℓ -Sylow subgroup $G \subset \overline{G}$ one simply takes $G = \overline{G}$. The latter is possible because the schemes are of characteristic zero and hence any action of $\overline{G}$ is tame. $\square$

Combining Theorem 3.9 and 3.7 we obtain the following weak semistable reduction theorem.

THEOREM 3.10. *Assume that S is a reduced, noetherian, qe scheme of characteristic zero, $f: X \rightarrow S$ is a maximally dominating morphism of finite type with reduced source, and $Z \subset X$ is a nowhere dense closed subset. Then there exists an alteration $S' \rightarrow S$, a modification $X' \rightarrow (X \times_S S')^{\text{pr}}$ of the proper transform of X , a pseudo-projective morphism $f': X' \rightarrow S'$ compatible with f , and divisors $W' \subset S'$ and $Z' \subset X'$ such that S' is regular, W' is snc, $Z' = \beta^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$, and the morphism $(X', Z') \rightarrow (S', W')$ is log smooth and saturated (i.e. $X' \rightarrow S'$ is weakly semistable).*

REMARK 3.10.1. (i) In the case when X and S are integral proper varieties over an algebraically closed field k of characteristic zero, this theorem becomes the weak semistable reduction theorem of Abramovich-Karu. Our proof has many common lines with their arguments. In particular, the first step of their proof was to make f toroidal, and it was based on de Jong's theorem. (Note also that in a recent work [Abramovich et al., 2013] of Abramovich-Denef-Karu, the toroidalization theorem was

extended to separated schemes of finite type over an arbitrary ground field of characteristic zero.) Our Theorem 3.9 can be viewed as a generalization of the toroidalization theorem of Abramovich-Karu.

(ii) The second stage in the proof of the weak semistable reduction theorem of Abramovich-Karu (the combinatorial stage) is analogous to Theorem 3.7. It obtains as an input a toroidal morphism $f: (X, Z) \rightarrow (S, W)$ between proper varieties of characteristic zero and outputs an alteration $h: S' \rightarrow S$ such that S' is regular, $W' = h^{-1}(W)$ is snc, and the saturated base change of f is weakly semistable. The proof is similar to the arguments used in the proofs of [Illusie et al., 2005, A.4.4 and A.4.3]. First, one constructs a toroidal blow up of the base that makes the fibers equidimensional (i.e. makes the log morphism integral), and then an appropriate normalized finite base change is used to make the fibers reduced.

EXPOSÉ XI

Produits orientés

Luc Illusie

On fixe un univers $\mathcal{U}$. Sauf mention du contraire, les sites (resp. topos) considérés seront des $\mathcal{U}$ -sites (resp. topos), et « petit » signifiera $\mathcal{U}$ -petit.

1. Construction des produits orientés

La construction suivante est due à Deligne [**Laumon, 1983**] :

1.1. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de topos. On suppose que X, Y, S ont des sites de définition C_1, C_2, D , admettant des limites projectives finies, et que f^*, g^* prolongent des foncteurs continus entre sites, et commutant aux limites projectives finies. Soit C le site suivant :

(i) C est la catégorie des couples de morphismes $U \rightarrow V \leftarrow W$ au-dessus de $X \rightarrow S \leftarrow Y$, où $U \rightarrow V$ (resp. $V \leftarrow W$) désigne un morphisme $U \rightarrow f^*V$ (resp. $g^*V \leftarrow W$) de C_1 (resp. C_2) et V est un objet de D .

(ii) C est muni de la topologie engendrée (cf. [**SGA 4 II** 1.1.6]) par les familles couvrantes $(U_i \rightarrow V_i \leftarrow W_i) \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ ($i \in I$) du type suivant :

- (a) $V_i = V$, $W_i = W$ pour tout i , et la famille $(U_i \rightarrow U)$ est couvrante ;
- (b) $U_i = U$, $V_i = V$ pour tout i , et la famille $(W_i \rightarrow W)$ est couvrante ;
- (c) $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$, où $U' = U$ et $W' \rightarrow W$ est déduit par changement de base d'un morphisme $V' \rightarrow V$ de D .

Remarquons que les limites projectives finies sont représentables dans C .

On note $\tilde{C}$ le topos des faisceaux sur C .

LEMME 1.2. Soit F un préfaisceau sur C . Pour que F soit un faisceau il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) pour toute famille couvrante $(Z_i \rightarrow Z)$ de C du type (a) ou (b), la suite $F(Z) \rightarrow \prod_{i \in I} F(Z_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} F(Z_i \times_Z Z_j)$ est exacte ;
- (ii) pour toute famille couvrante $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ du type (c), l'application

$$F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow F(U' \rightarrow V' \leftarrow W')$$

est bijective.

En particulier, si l'on note $(-)^a$ le foncteur faisceau associé, pour toute famille couvrante $(Z' \rightarrow Z)$ du type (c), le morphisme de faisceaux associés $Z'^a \rightarrow Z^a$ est un isomorphisme.

La nécessité est triviale pour (i), et pour (ii), il suffit d'observer que le morphisme diagonal

$$(U \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W')$$

est un morphisme couvrant (du type (c)), qui égalise la double flèche

$$(U \rightarrow V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W') \rightrightarrows (U \rightarrow V' \leftarrow W').$$

Pour la suffisance, on note que les familles couvrantes $(Z_i \rightarrow Z)$ de type (a), (b), ou (c) sont stables par changement de base $Z' \rightarrow Z$, et on applique [**SGA 4 II** 2.3].

1.3. Notons e_X (resp. e_Y, e_S) l'objet final de C_1 (resp. C_2, D). On a des projections naturelles

$$p_1 : \tilde{C} \rightarrow X, p_2 : \tilde{C} \rightarrow Y$$

données par

$$p_1^*(U) = (U \rightarrow e_S \leftarrow e_Y), p_2^*(W) = (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W).$$

On a par ailleurs un morphisme canonique

$$\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$$

donné par le morphisme de foncteurs $\tau : (gp_2)_* \rightarrow (fp_1)_*$ défini de la façon suivante : pour un faisceau F sur C , et un objet V de S ,

$$\tau : ((gp_2)_*F)(V) \rightarrow ((fp_1)_*F)(V)$$

est le composé

$$F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V) \rightarrow F(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow F(f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y),$$

où la première flèche est induite par la localisation $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)$, et la seconde est l'inverse de l'isomorphisme donné par 1.2, relativement au morphisme de type (c) $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)$.

THÉORÈME 1.4. Soit T un topos muni de morphismes $a : T \rightarrow X, b : T \rightarrow Y$ et d'un morphisme $t : gb \rightarrow fa$. Il existe alors un triplet $(h : T \rightarrow \tilde{C}, \alpha : p_1 h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2 h \xrightarrow{\sim} b)$, unique à isomorphisme unique près, tel que le composé

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2 h \xrightarrow{\tau} fp_1 h \xrightarrow{\alpha} fa$$

soit égal à t .

Nous aurons besoin, pour la démonstration, du lemme suivant :

LEMME 1.5. Soit $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$ un objet de C . Avec la notation de 1.2, le carré suivant est cartésien :

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{ccc} Z^a & \longrightarrow & (p_2^*W)^a \\ \downarrow & & \downarrow v \\ (p_1^*U)^a & \xrightarrow{u} & ((gp_2^*)V)^a \end{array}$$

Dans ce carré, v et les flèches issues de Z^a sont les flèches évidentes, et u est la flèche composée

$$(p_1^*U)^a \longrightarrow ((fp_1)^*V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2)^*V)^a,$$

où τ est le composé

$$(f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a \xrightarrow{r^{-1}} (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a \longrightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a,$$

r désignant l'isomorphisme $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a \xrightarrow{\sim} (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a$ de 1.2.

Soit $z : Z \rightarrow Z' = (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)$ la projection canonique. Le composé $Z \rightarrow p_1^*U \rightarrow (fp_1)^*V$ se factorise à travers z . Par suite, et par définition de τ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z^a & \xrightarrow{z} & Z'^a \\ \downarrow & & \downarrow r \\ (p_1^*U)^a & \longrightarrow & ((fp_1)^*V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2)^*V)^a \end{array}$$

est commutatif. Comme le composé $Z \rightarrow p_2^*W \rightarrow (gp_2)^*V$ se factorise aussi à travers z , le carré 1.5.1 est donc commutatif. Celui-ci est le pourtour du diagramme suivant, où les flèches autres que τ sont les flèches évidentes :

$$\begin{array}{ccccc}
 (U \rightarrow V \leftarrow W)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow V \leftarrow W)^a & \longrightarrow & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)^a \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (U \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a & \longrightarrow & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a \\
 \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \text{Id} \\
 (U \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a & \xrightarrow{\tau} & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a
 \end{array}$$

Chacun des carrés qui le composent est cartésien. Il en est donc de même de 1.5.1.

1.6. Prouvons 1.4. On peut supposer que a et b sont donnés par des morphismes de sites ([SGA 4 IV 4.9.4]). Par 1.5 l'unicité est claire : pour $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$ dans C , on doit avoir

$$(1.6.1) \quad h^*Z = a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W,$$

où $a^*U \rightarrow (gb)^*V$ est le composé $a^*U \longrightarrow (fa)^*V \xrightarrow{t} (gb)^*V$. Les isomorphismes α et β sont alors tautologiques, nous les négligerons dans le reste de la démonstration. Vérifions que le foncteur h^* donné par 1.6.1 définit un morphisme de topos h vérifiant la propriété énoncée en 1.4. Comme h^* commute aux limites projectives finies, pour vérifier que h^* induit un morphisme de topos, il suffit de vérifier que h^* est continu ([SGA 4 IV 4.9.1, 4.9.2]). Il est trivial que h^* transforme familles couvrantes du type (a) ou (b) en familles couvrantes. Par ailleurs, si $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ est une famille couvrante du type (c), le carré

$$\begin{array}{ccc}
 b^*W' & \longrightarrow & b^*W \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (gb)^*V' & \longrightarrow & (gb)^*V
 \end{array}$$

est cartésien, et par suite

$$a^*U \times_{(gb)^*V'} b^*W' \rightarrow a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W$$

est un isomorphisme. Il reste à vérifier que τ induit t . Mais par définition, le morphisme de faisceaux défini par $h^*(\tau)$ appliqué à V est le composé

$$((fa)^*V)^a \xrightarrow{r^{-1}} ((fa)^*V \times_{(gb)^*V} (gb)^*V)^a \longrightarrow ((gb)^*V)^a,$$

donc est égal à celui défini par t appliqué à $(fa)^*V$, ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION 1.7. Le topos $\tilde{C}$ construit en 1.1 s'appelle le **produit orienté (gauche) de X et Y au-dessus de S** , et se note $X \times_S^{\leftarrow} Y$. Les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_S^{\leftarrow} Y & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 X & & Y \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & S &
 \end{array}$$

sont reliés par la 2-flèche $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$. Il découle de 1.4 que le quadruplet $(X \times_S^{\leftarrow} Y, p_1, p_2, \tau)$ est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix des sites de définition C_1, C_2, D .

Pour un objet $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$ de $\mathcal{C}$, on notera parfois $U \overleftarrow{\times}_V W$ l'objet Z^a de $X \overleftarrow{\times}_S Y$.

On définit de même le **produit orienté droit** $X \overrightarrow{\times}_S Y$, avec ses projections canoniques $p_1 : X \overrightarrow{\times}_S Y \rightarrow X$, $p_2 : X \overrightarrow{\times}_S Y \rightarrow Y$ et la 2-flèche $\tau' : fp_1 \rightarrow gp_2$, qui possède la propriété universelle de 1.4, avec X et Y échangés.

1.8. Désignons par pt un topos ponctuel (catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace réduit à un point). Soient $x : \text{pt} \rightarrow X$, $y : \text{pt} \rightarrow Y$ des points de X et Y respectivement, et $u : gy \rightarrow fx$ une 2-flèche. Par 1.4, le triplet (x, y, u) définit un point $z : \text{pt} \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$ tel que $p_1 z \simeq x$, $p_2 z \simeq y$. Ce point sera noté (x, y, u) (ou parfois (x, y) s'il n'y a pas de confusion à craindre). Tout point de $X \overleftarrow{\times}_S Y$ est de cette forme.

1.9. Considérons un diagramme de 1-morphismes de topos

$$(1.9.1) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & S' & \xleftarrow{g'} & Y' \\ \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y \end{array}$$

et des 2-flèches $a : hf' \rightarrow fu$, $b : gv \rightarrow hg'$. Notons $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$, $T' = X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y'$, $p_1 : T \rightarrow X$, $p_2 : T \rightarrow Y$, $p'_1 : T' \rightarrow X'$, $p'_2 : T' \rightarrow Y'$ les projections canoniques, $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$, $\tau' : g'p'_2 \rightarrow f'p'_1$ les 2-flèches canoniques. Considérons la 2-flèche composée

$$c : gvp'_2 \xrightarrow{b} hg'p'_2 \xrightarrow{\tau'} hf'p'_1 \xrightarrow{a} fup'_1.$$

D'après 1.4, c définit un diagramme de 1-morphismes

$$(1.9.2) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{p'_1} & T' & \xrightarrow{p'_2} & Y' \\ \downarrow u & & \downarrow t & & \downarrow v \\ X & \xleftarrow{p_1} & T & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

et des 2-isomorphismes $\alpha : p_1 t \xrightarrow{\sim} up'_1$, $\beta : p_2 t \xrightarrow{\sim} vp'_2$ rendant commutatif le carré

$$(1.9.3) \quad \begin{array}{ccc} gp_2 t & \xrightarrow{\tau} & fp_1 t \\ \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ gvp'_2 & \xrightarrow{a\tau'b} & fup'_1 \end{array}$$

On dit que le triplet (t, α, β) (ou simplement $t : T' \rightarrow T$) de 1.9.2 est déduit de 1.9.1 par *fonctorialité*. On notera

$$t = u \overleftarrow{\times}_h v.$$

On a une compatibilité évidente pour un composé de deux données 1.9.1.

1.10. Voici quelques exemples.

(a) Dans la situation de 1.4, le triplet (a, b, t) définit un diagramme de type 1.9.1

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\text{Id}} & T & \xleftarrow{\text{Id}} & T \\ \downarrow a & & \downarrow fa & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y \end{array},$$

avec $t : gb \rightarrow fa$, d'où un morphisme

$$a \overleftarrow{\times}_{fa} b : T \overleftarrow{\times}_T T \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S T.$$

Par ailleurs, d'après 1.4, les flèches identiques de T définissent un morphisme canonique, dit **diagonal**

$$\Delta : T \rightarrow T \times_T T.$$

La 1-flèche h de 1.4 est la composée

$$h = (a \times_{fa} b) \Delta : T \rightarrow X \times_S Y.$$

En particulier, prenant pour T un topos ponctuel, de sorte que Δ est un isomorphisme, on a, avec les notations de 1.8

$$(x, y, u) = x \times_{fx} y : \text{pt} \rightarrow X \times_S Y.$$

(b) Dans la situation de 1.7, soient X', S', Y' des objets de X, S, Y respectivement, et $f' : X' \rightarrow S'$, (resp. $g' : Y' \rightarrow S'$) une flèche au-dessus de f (resp. g), i.e. une flèche $f' : X' \rightarrow f^*(S')$, (resp. $g' : Y' \rightarrow g^*(S')$). Notons $X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y'$ l'objet $(X' \rightarrow S' \leftarrow Y')^a = p_1^*(X') \times_{(gp_2)^*(S')} p_2^*Y'$ de $X \times_S Y$, cf. 1.5. On en déduit un diagramme 2-commutatif de 1-flèches naturelles

$$(1.10.1) \quad \begin{array}{ccccc} & (X \times_S Y)_{/(X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y')} & & & \\ & \swarrow p'_1 & & \searrow p'_2 & \\ X_{/X'} & \xrightarrow{f_{/S'}} & S_{/S'} & \xleftarrow{g_{/S'}} & Y_{/Y'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S & \longleftarrow & Y \end{array},$$

où la notation $(-)/_{-}$ désigne un topos localisé, et la 2-flèche $\tau' : g_{/S'} p'_2 \rightarrow f_{/S'} p'_1$ est déduite par localisation de la 2-flèche $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$. D'après 1.4, τ' définit donc un 1-morphisme

$$(1.10.2) \quad m : (X \times_S Y)_{/(X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y')} \rightarrow X_{/X'} \times_{S_{/S'}}^{\leftarrow} Y_{/Y'}.$$

On montre (cf. ([Abbes & Gros, 2011b, 3.15]) que m est une équivalence, par laquelle, dans la suite, nous identifierons les deux membres. D'autre part, les carrés 2-commutatifs de 1.10.1 définissent, d'après 1.9, une flèche de fonctorialité

$$X_{/X'} \times_{S_{/S'}}^{\leftarrow} Y_{/Y'} \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y,$$

Celle-ci, ou son composé avec m ,

$$(1.10.3) \quad (X \times_S Y)_{/(X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y')} \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$$

s'appelle **flèche de localisation**.

PROPOSITION 1.11. *Supposons que X' soit l'objet final de X et que g' soit cartésien au-dessus de g , i.e. $g' : Y' \xrightarrow{\sim} g^*(S')$. Alors la flèche 1.10.3 est une équivalence.*

En effet, avec les notations de 1.10.1, il résulte de 1.2 que la flèche $e_X \times_{S'}^{\leftarrow} Y' \rightarrow e_X \times_{e_S}^{\leftarrow} e_Y$ de $X \times_S^{\leftarrow} Y$ est un isomorphisme.

1.12. Considérons en particulier le cas où $S = Y$ est un schéma muni de la topologie étale, $g = \text{Id}$ et $f : X \rightarrow S = Y$ est l'inclusion d'un sous-schéma fermé de Y . Le topos $T = X \times_Y^{\leftarrow} Y$ joue le rôle d'un *voisinage tubulaire étale* de X dans Y . Les points de T sont les triplets (x, y, t) , où x (resp. y) est un point géométrique de X (resp. Y) et $t : y \rightarrow x$ une flèche de spécialisation (cf. [SGA 4 VIII 7.9]). En d'autres termes, (x, y, t) est la donnée d'un point géométrique x de X , d'une générisation y_0 du point fermé (noté encore par abus x) du localisé strict $X_{(x)}$ de X en x et d'un point géométrique de $Y_{(x)}$ localisé en

y_0 , ou encore d'une extension séparablement close $y \rightarrow y_0$ du point générique de $\overline{\{y_0\}}$. Par ailleurs, si $v : Y' \rightarrow Y$ est un voisinage étale de X dans Y , *i.e.* un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ \nearrow & \downarrow v & \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où v est étale, alors, d'après 1.11 le morphisme canonique

$$X \times_{Y'} Y' \rightarrow X \times_Y Y$$

est une équivalence. Ainsi, T ne dépend que du hensélisé de Y le long de X (lorsque celui-ci est défini, en particulier, pour Y affine, cf. [Raynaud, 1970]). Nous verrons au numéro suivant et dans l'exposé XII_A d'autres propriétés de T précisant cette analogie avec un voisinage tubulaire.

1.13. Voici un dernier exemple de fonctorialité de produits orientés, qui ne sera utilisé qu'en 2.7. Soit I une petite catégorie cofiltrante et soient

$$(X_i \xrightarrow{f_i} S_i \xleftarrow{g_i} Y_i)_{i \in I}$$

des morphismes de topos fibrés au-dessus de I . On en déduit un diagramme de topos limites projectives ([SGA 4 VI 8.1.3])

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Limproj } (X_i \times_{S_i} Y_i) & & & \\ & \swarrow p_1 & & \searrow p_2 & \\ \text{Limproj } X_i & & & & \text{Limproj } Y_i \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & \text{Limproj } S_i & & & \end{array}$$

où $f = \text{Limproj } f_i$, $g = \text{Limproj } g_i$, avec une 2-flèche $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ déduite des flèches $\tau_i : g_i p_1 \rightarrow f_i p_2$, et par suite, un morphisme

$$(1.13.1) \quad \text{Limproj } (X_i \times_{S_i} Y_i) \rightarrow \text{Limproj } X_i \times_{\text{Limproj } S_i} \text{Limproj } Y_i.$$

Il résulte des définitions que 1.13.1 est une équivalence.

2. Tubes et changement de base

2.1. Soit (S, s) un topos ponctué, *i.e.* un couple formé d'un topos S et d'un point $s : \text{pt} \rightarrow S$ de S . Si (S, s) et (T, t) sont des topos ponctués, un morphisme (ponctué) de (S, s) dans (T, t) est un couple (f, a) d'un morphisme $f : S \rightarrow T$ et d'une 2-flèche $a : fs \rightarrow t$. Une 2-flèche $c : (f, a) \rightarrow (g, b)$ est une 2-flèche $c : f \rightarrow g$ telle que $b(cs) = a$. Si (S, s) est un topos ponctué, on note $F \mapsto F_s = s^*F$ le foncteur fibre en s .

Rappelons qu'un topos ponctué (S, s) est dit **local de centre s** ([SGA 4 VI 8.4.6]) si, pour tout objet F de S , la flèche naturelle $\Gamma(S, F) \rightarrow F_s$ est bijective. Un morphisme $(f, a) : (S, s) \rightarrow (T, t)$ de topos ponctués est dit **local** si la 2-flèche $a : fs \rightarrow t$ est un isomorphisme.

2.2. La construction qui suit est due à Gabber. Soit (S, s) un topos local de centre s . Notons $\varepsilon : S \rightarrow \text{pt}$ la projection. Par définition la flèche canonique $\varepsilon_* \rightarrow s^*$ est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme

$$(2.2.1) \quad \varepsilon^* \varepsilon_* \xrightarrow{\sim} (s\varepsilon)^*.$$

La flèche d'adjonction $\varepsilon^* \varepsilon_* \rightarrow \text{Id}$ s'identifie donc, par 2.2.1, à un morphisme $(s\varepsilon)^* \rightarrow \text{Id}$, *i.e.* à une 2-flèche

$$(2.2.2) \quad c_s : \text{Id} \rightarrow s\varepsilon$$

entre les 1-morphismes $\text{Id} : S \rightarrow S$ et $s\varepsilon : S \rightarrow S$. Si F est un objet de S , $(s\varepsilon)^*F$ est le faisceau constant sur S de valeur $F_s = \varepsilon_*F = \Gamma(S, F)$. Si U est un objet connexe de S , le morphisme $(s\varepsilon)^*F \rightarrow F$ induit sur $\Gamma(U, -)$ le morphisme de restriction $\Gamma(S, F) \rightarrow \Gamma(U, F)$. Le composé $c_s s : s \rightarrow s$ est l'identité : $(s\varepsilon)^*F \rightarrow F$ induit l'identité sur les fibres en s .

Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de topos, $x : \text{pt} \rightarrow X$ un point de X , $s = fx : \text{pt} \rightarrow S$ son image dans S . Le diagramme

$$(2.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pt} & \xrightarrow{\text{Id}} & \text{pt} & \xleftarrow{\varepsilon g} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow s & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y \end{array},$$

(où le carré de gauche est 2-commutatif) et la 2-flèche

$$(2.2.4) \quad c_s g : g \rightarrow s\varepsilon g$$

sont une donnée de type 1.9.1. Pour un objet F de S , $(s\varepsilon g)^*F$ est le faisceau constant sur Y de valeur $F_s = \Gamma(S, F)$, et la flèche $(s\varepsilon g)^*F \rightarrow g^*F$ est la composée $\Gamma(S, F)_Y \rightarrow \Gamma(Y, g^*F)_Y \rightarrow g^*F$. Notons que, par 1.4, le produit orienté $\text{pt} \times_{\text{pt}} Y$ s'identifie canoniquement à Y , avec $p_1 = \text{Id} : Y \rightarrow Y$. De 2.2.3 et 2.2.4 on déduit donc un diagramme de type 1.9.2 :

$$(2.2.5) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pt} & \xleftarrow{\varepsilon g} & Y & \xrightarrow{\text{Id}} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow \sigma & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array},$$

en d'autres termes, une section $\sigma : Y \rightarrow X \times_S Y$ de p_2 telle que $p_1 \sigma = x\varepsilon g$. On peut voir cette section comme étant définie, via 1.4 par le couple de morphismes $x\varepsilon g : Y \rightarrow X$, $\text{Id} : Y \rightarrow Y$ et la 2-flèche $c_s g : g \rightarrow fx\varepsilon g = s\varepsilon g$. On dit que σ est la **section canonique** définie par le point x . Par composition avec p_{2*} , la flèche d'adjonction $\text{Id} \rightarrow \sigma_* \sigma^*$ donne une flèche canonique

$$(2.2.6) \quad \gamma : p_{2*} \rightarrow \sigma^*.$$

Le résultat suivant est dû à Gabber :

PROPOSITION 2.3. Soient $f : (X, x) \rightarrow (S, s)$ un morphisme local de topos locaux ($fx = s$), et $g : Y \rightarrow S$ un morphisme de topos. Soit $y : \text{pt} \rightarrow Y$ un point de Y . Pour tout objet F de $X \times_S Y$, γ (2.2.6) induit un isomorphisme

$$\gamma_y : (p_{2*}F)_y \xrightarrow{\sim} (\sigma^*F)_y.$$

Soit $t = \sigma y : \text{pt} \rightarrow T$ le point de $T = X \times_S Y$ image de y par σ . Ce point est défini (cf. 1.4) par le triplet (x, y, u) , où $u : gy \rightarrow fx = fx\varepsilon gy = s\varepsilon gy = s$ est déduit de 2.2.4. On a $(\sigma^*F)_y = F_t$. Choisissons des sites de définition C_1, C_2, D comme en 1.1. Par définition,

$$F_t = \text{colim}_z F(U \rightarrow V \leftarrow W),$$

où $z : \text{pt} \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ parcourt les voisinages de t dans T , avec $(U \rightarrow V \leftarrow W)$ dans C . Comme X et S sont locaux, les voisinages de t de la forme $\sigma w : \text{pt} \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)$, où $w : \text{pt} \rightarrow W$ est un voisinage de y dans Y forment un système cofinal. Donc

$$F_t = \text{colim}_w F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow W),$$

où $z = \sigma w : \text{pt} \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)$ parcourt les voisinages précédents, avec $U = e_X$, $V = e_S$. Par ailleurs,

$$(p_{2*}F)_y = \text{colim}_w F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow W),$$

où $w : \text{pt} \rightarrow W$ parcourt les voisinages de y dans Y . La flèche γ_y est la restriction naturelle. C'est donc un isomorphisme.

COROLLAIRE 2.3.1. *Sous les hypothèses de 2.3, si Y a assez de points, en particulier, si Y est localement cohérent ([SGA 4 VI 9.0]), γ (2.2.6) est un isomorphisme.*

Il est plausible que l'hypothèse d'existence d'assez de points soit superflue. Celle-ci sera cependant satisfaite dans les applications que nous avons en vue.

COROLLAIRE 2.3.2. *Sous les hypothèses de 2.3, supposons Y local de centre y . Alors $X \times_S^{\leftarrow} Y$ est local de centre $\sigma(y)$.*

En effet, on a alors $(p_{2*}F)_y = \Gamma(Y, p_{2*}F) = \Gamma(X \times_S^{\leftarrow} Y, F)$, et γ_y s'identifie à la restriction $\Gamma(X \times_S^{\leftarrow} Y, F) \rightarrow F_{\sigma(y)}$.

Notons que, si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme local de schémas strictement locaux, $g : Y \rightarrow S$ un morphisme de schémas strictement locaux, le produit fibré schématique $X \times_S Y$ n'est pas en général strictement local, ni même local, même si g est local.

Le résultat ci-après est dû également à Gabber :

THÉORÈME 2.4. *Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de topos, $T = X \times_S^{\leftarrow} Y$, $p_1 : T \rightarrow X$, $p_2 : T \rightarrow Y$ les projections canoniques, $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ la 2-flèche canonique. On suppose X, Y, S cohérents et f, g cohérents ([SGA 4 VI 2.3, 2.4.5, 3.1]). Soit Λ un anneau. Alors, pour tout $F \in D^+(Y, \Lambda)$, la flèche de changement de base, déduite de τ ,*

$$(2.4.1) \quad f^*Rg_*F \rightarrow Rp_{1*}p_2^*F$$

est un isomorphisme (de $D^+(X, \Lambda)$).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui généralise [Orgogozo, 2006, 9.1] :

LEMME 2.5. *Sous les hypothèses de 2.4, T est cohérent, et les projections p_1, p_2 sont des morphismes cohérents.*

Le topos X (resp. Y , resp. S) admet une (petite) famille génératrice C_1 (resp. C_2 , resp. D) formée d'objets cohérents, stable par limites projectives finies ([SGA 4 VI 2.4.5]). Comme f et g sont cohérents, f^*V (resp. g^*V) est cohérent si V est dans D ([SGA 4 VI 3.2]). On peut donc supposer que $f^*D \subset C_1$, $g^*D \subset C_2$. La sous-catégorie pleine de X (resp. Y , resp. S) correspondante, munie de la topologie induite, est un site de définition de X (resp. Y , resp. S). Soit C la catégorie définie comme en 1.1, munie de la topologie définie par la prétopologie $\mathcal{P}$ engendrée par les familles finies de type (a) et (b) et les familles de type (c). Elle est stable par limites projectives finies, et est un site de définition de T , puisque toute famille couvrante de C de type (a) ou (b) est raffinée par une famille couvrante finie. Il suffit donc de montrer que tout objet de C est quasi-compact ([SGA 4 VI 2.4.5]). Décrivons $\mathcal{P}$. Pour chaque objet $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$ de C , notons $\text{Cov}(Z)$ l'ensemble des familles $(Z_i \rightarrow Z)_{i \in I}$ obtenues par composition d'un nombre fini de familles de type (c) et de familles (finies) de type (a) et (b). En particulier, l'ensemble I est fini. Par définition, la donnée des $\text{Cov}(Z)$ vérifie les axiomes PT0, PT2 et PT3 de [SGA 4 II 1.3]. L'axiome PT1 (stabilité par changement de base) est également vérifié, les familles de type (c), ainsi que les familles finies de type (a) (resp. (b)) étant stables par changement de base, et le changement de base commutant à la composition des familles. La donnée des $\text{Cov}(Z)$ est donc une prétopologie, et par définition, c'est la prétopologie $\mathcal{P}$. Comme les familles appartenant à $\text{Cov}(Z)$ sont finies, tout objet de C est automatiquement quasi-compact, comme annoncé. La cohérence des projections p_1 et p_2 en découle.

REMARQUES 2.6. (a) Gabber sait montrer que la conclusion de 2.5 vaut sous les seules hypothèses que X, Y, S et g sont cohérents. Nous n'aurons pas besoin de cette généralisation. (b) Le lecteur trouvera dans XII_A-2.3.3 une autre application de 2.3 à des théorèmes de changement de base, dans le cadre des schémas et de la topologie étale.

2.7. Prouvons 2.4. Comme X est cohérent, donc possède assez de points, il suffit de vérifier que, pour tout point $x : \text{pt} \rightarrow X$ de X , la fibre en x de 2.4.1

$$(2.7.1) \quad (f^*Rg_*F)_x \rightarrow (Rp_{1*}p_2^*F)_x$$

est un isomorphisme. Soit $s : \text{pt} \rightarrow S$ l'image de x par f . Soit $X_{(x)}$ (resp. $S_{(s)}$) le localisé de X (resp. S) en x (resp. s). Rappelons ([SGA 4 VI 8.4.2]) que $X_{(x)}$ (resp. $Y_{(y)}$) (noté $\text{Loc}_x(X)$ (resp. $\text{Loc}_s(S)$) dans *loc. cit.*) est la limite projective

$$X_{(x)} = \text{Limtop}_{U \in \text{Vois}(x)} X/U$$

(resp.

$$S_{(s)} = \text{Limtop}_{V \in \text{Vois}(s)} S/V,$$

où U (resp. V) parcourt la catégorie cofiltrante $\text{Vois}(x)$ (resp. $\text{Vois}(s)$) des voisinages de x (resp. s) dans X (resp. S). Comme X (resp. S) est cohérent, on peut d'ailleurs se borner aux U (resp. V) qui sont cohérents, les morphismes de transition étant alors automatiquement cohérents. C'est ce que nous ferons dans la suite, notant encore $\text{Vois}(x)$ (resp. $\text{Vois}(s)$) la sous-catégorie pleine formée des U (resp. V) cohérents. Le topos $X_{(x)}$ (resp. $S_{(s)}$) est un topos local, au-dessus de X (resp. S), dont l'image du centre est x (resp. s) ([SGA 4 VI 8.4.6]). Le morphisme f induit un morphisme local $f_{(x)} : X_{(x)} \rightarrow S_{(s)}$. Définissons de même

$$T_{(x)} = \text{Limtop}_{U \in \text{Vois}(x)} T/p_1^*U,$$

$$Y_{(s)} = \text{Limtop}_{V \in \text{Vois}(s)} Y/g^*V,$$

de sorte qu'on obtient un carré

$$(2.7.2) \quad \begin{array}{ccc} T_{(x)} & \xrightarrow{p_2} & Y_{(s)} \\ \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ X_{(x)} & \xrightarrow{f} & S_{(s)} \end{array}$$

avec une 2-flèche $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$. Par la compatibilité de la formation des produits orientés à la localisation (1.10.2) et aux limites projectives (1.13.1), la flèche

$$(2.7.3) \quad T_{(x)} \rightarrow X_{(x)} \overset{\leftarrow}{\times}_{S_{(s)}} Y_{(s)},$$

déduite de ce carré par 1.4 est une équivalence. En fait, comme l'observe le rapporteur, pour tout $V \in \text{Vois}(s)$, la flèche $X_{(x)} \overset{\leftarrow}{\times}_{S/V} Y/g^*V \rightarrow X_{(x)} \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ est une équivalence, de sorte que la localisation sur S est superflue. D'après 2.5, les topos X/U , S/V , T/p_1^*U , Y/g^*V sont cohérents, les flèches de transition des systèmes projectifs X/U , S/V sont cohérentes, et les morphismes $g : Y/g^*V \rightarrow S/V$, $p_1 : T/p_1^*U \rightarrow X/U$ sont cohérents. On est donc dans les conditions d'application de [SGA 4 VI 8.7.3], qui, compte tenu de ce que $S_{(s)}$ et $X_{(x)}$ sont locaux, implique que les flèches canoniques

$$(2.7.4) \quad (Rg_*F)_s \rightarrow R\Gamma(S_{(s)}, Rg_*F) \rightarrow R\Gamma(Y_{(s)}, F),$$

$$(2.7.5) \quad (Rp_{1*}p_2^*F)_x \rightarrow R\Gamma(X_{(x)}, Rp_{1*}p_2^*F) \rightarrow R\Gamma(T_{(x)}, p_2^*F)$$

sont des isomorphismes. Avec les identifications 2.7.3, 2.7.4 et 2.7.5, la flèche 2.7.1 s'identifie à la fibre en x de la flèche de changement de base (déduite de τ) du carré 2.7.2. Cette flèche s'écrit

$$(2.7.6) \quad R\Gamma(Y_{(s)}, F) \rightarrow R\Gamma(T_{(x)}, p_2^*F).$$

On a :

(*) : La flèche 2.7.6 s'identifie canoniquement à la flèche de fonctorialité définie par p_2 .

Pour le vérifier, on peut supposer S et X locaux, de centres respectifs s et x , et f local. Par définition, 2.7.6 est la flèche composée

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(S, Rg_*F) & \xrightarrow{2.7.6} & R\Gamma(T, p_2^*F) \\ \downarrow \alpha & & \uparrow \beta \\ R\Gamma(S, Rg_*Rp_{2*}p_2^*F) & \xrightarrow{R\Gamma(S, \tau)} & R\Gamma(S, Rf_*Rp_{1*}p_1^*F) \end{array} ,$$

où la flèche α est définie par la flèche d'adjonction $\text{adj} : F \rightarrow \text{Rp}_{2*}p_2^*F$ (et donc est la flèche de fonctorialité $R\Gamma(Y, F) \rightarrow R\Gamma(T, p_2^*F)$ définie par p_2), et β est l'isomorphisme canonique de transitivité relatif à $\text{fp}_1 : T \rightarrow S$. Or, par définition de τ (1.3), pour tout faisceau G sur T , la flèche

$$\Gamma(S, \tau) : \Gamma(S, (\text{gp}_2)_*G) \rightarrow \Gamma(S, (\text{fp}_1)_*G)$$

est l'identité. Il en est donc de même de la flèche horizontale inférieure du diagramme ci-dessus, ce qui prouve (*). Il reste à prouver que 2.7.6 est un isomorphisme. En fait, la flèche

$$(2.7.7) \quad \text{adj} : F \rightarrow \text{Rp}_{2*}p_2^*F$$

est un isomorphisme. Pour le voir, il suffit d'observer que, compte tenu de la description de γ donnée en 2.3.2, le composé

$$F \xrightarrow{\text{adj}} \text{Rp}_{2*}p_2^*F \xrightarrow{\gamma} \sigma^*p_2^*F = F,$$

où σ est la section de p_2 définie en 2.2.5 et γ l'isomorphisme de 2.3.1, est l'identité. Ceci achève la démonstration de 2.4.

REMARQUES 2.8. (1) Supposons que les données de 2.4 proviennent de morphismes de schémas, munis de la topologie étale, avec X, S, Y cohérents et f et g cohérents. Les points x, s sont des points géométriques, et les localisés $X_{(x)}, S_{(s)}$ des localisés stricts. Si f est une immersion fermée, la flèche d'adjonction 2.7.7 est un isomorphisme (on peut en effet supposer S strictement local, et il en est alors de même de X). Supposons de plus que $Y = S, g = \text{Id}_S$ comme en 1.12. On a vu en *loc. cit.* que $T = X \times_S^{\leftarrow} S$ joue le rôle d'un voisinage tubulaire de X dans S . Soient $j : S^* = S - X \rightarrow S$ l'ouvert complémentaire de X , et $T^* = X \times_S^{\leftarrow} S^* = T_{/(e_X \rightarrow e_S \leftarrow S^*)}$ le topos induit. Alors T^* joue le rôle d'un *voisinage tubulaire épointé* de X dans S : pour $F \in D^+(S^*, \wedge)$, on a, par 2.4,

$$f^*Rj_*F \xrightarrow{\sim} \text{Rp}_{1*}p_2^*F.$$

- (2) Sans l'hypothèse de cohérence sur g , la conclusion de 2.4 peut être en défaut, comme le montre l'exemple suivant, dû à Gabber. Soient X un espace topologique connexe, non vide, $i : Y \rightarrow X$ l'inclusion d'un fermé non vide distinct de X , $j : U = X - Y \rightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Alors i^*j_*Z est non nul. Mais, si tout point de U a un voisinage dont l'adhérence dans X ne rencontre pas Y , alors le produit orienté $Y \times_X^{\leftarrow} U$ est vide. C'est le cas par exemple, si X est le segment $[0, 1]$ et Y le point $\{0\}$.
- (3) Sous les hypothèses de 2.4, on montre de manière analogue que :
- (a) Pour tout faisceau d'ensembles F sur Y , la flèche de changement de base

$$f^*g_*F \rightarrow p_{1*}p_2^*F$$

est un isomorphisme.

On peut espérer des variantes non abéliennes supérieures :

- (b) Pour tout faisceau en groupes F sur Y , la flèche de changement de base

$$f^*R^1g_*F \rightarrow R^1p_{1*}p_2^*F,$$

est un isomorphisme (de faisceaux d'ensembles pointés).

- (c) Plus généralement, pour tout champ F sur Y , la flèche de changement de base

$$f^*g_*F \rightarrow p_{1*}p_2^*F$$

est une équivalence.

La vérification de (b) et (c) semble requérir, outre les techniques de réduction des champs aux gerbes de [Giraud, 1971, III 2.1.5], des résultats de passage à la limite pour la cohomologie non abélienne analogues à ceux de [SGA 4 VI 8.7], pour lesquels nous ne connaissons pas de référence.

- (4) Gabber sait démontrer la généralisation suivante de 2.4. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de topos, $T = X \times_S^{\leftarrow} Y$. On suppose que Y et S sont localement cohérents, et que, pour tout objet cohérent algébrique V de S , g^*V est cohérent algébrique ([SGA 4 VI 2.1, 2.3]). Alors, pour tout $F \in D^+(Y, \wedge)$, la flèche de changement de base 2.4.1 est un isomorphisme, et on devrait avoir des résultats analogues dans le cas non abélien, comme en (3) (a), (b), (c) ci-dessus. Gabber déduit ces résultats d'un théorème général de changement de base pour certains topos fibrés.

3. Produits fibrés

Les compléments donnés dans ce numéro et le suivant ne seront pas utilisés dans le reste du volume.

3.1. Les produits fibrés de topos ont été construits par Giraud [Giraud, 1972, 3.4]. La construction suivante est due à Gabber. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de topos comme en 1.1. Soit D le site suivant :

- (i) La catégorie sous-jacente à D est la catégorie C considérée en 1.1 (i).
- (ii) D est munie de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes $(U_i \rightarrow V_i \leftarrow W_i) \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ ($i \in I$) de la forme (a), (b), (c) de 1.1 (ii) et de la forme
 - (d) $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$, où $W' = W$ et $U' \rightarrow U$ est déduit par changement de base d'un morphisme $V' \rightarrow V$ du site de définition de S .

En d'autres termes, la topologie sur D est la borne supérieure des topologies sur C définissant les produits orientés $X \times_S^{\leftarrow} Y$ et $X \times_S^{\rightarrow} Y$.

D'après 1.2, pour qu'un préfaisceau F sur D soit un faisceau, il faut et il suffit que F vérifie les conditions d'exactitude habituelles relatives aux familles couvrantes de type (a) et (b), et que, pour toute famille couvrante $Z' \rightarrow Z$ de type (c) ou (d), $F(Z) \rightarrow F(Z')$ soit un isomorphisme.

Soit $\tilde{D}$ le topos des faisceaux sur D . On a des projections naturelles

$$p_1 : \tilde{D} \rightarrow X, p_2 : \tilde{D} \rightarrow Y$$

données par les mêmes formules qu'en 1.3, et la construction de τ en *loc. cit.* donne un isomorphisme

$$(3.1.1) \quad \varepsilon : gp_2 \xrightarrow{\sim} fp_1.$$

THÉORÈME 3.2. Soit T un topos muni de morphismes $a : T \rightarrow X$, $b : T \rightarrow Y$ et d'un isomorphisme $t : gb \xrightarrow{\sim} fa$. Il existe alors un triplet $(h : T \rightarrow \tilde{D}, \alpha : p_1 h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2 h \xrightarrow{\sim} b)$, unique à isomorphisme unique près, tel que le composé

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2 h \xrightarrow{\varepsilon} fp_1 h \xrightarrow{\alpha} fa$$

soit égal à t .

La démonstration est analogue à celle de 1.4. Le foncteur h^* est encore donné par la formule 1.6.1. Comme t est un isomorphisme, on a

$$a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W = a^*U \times_{(fa)^*V} b^*W,$$

où $b^*V \rightarrow (fa)^*V$ est le composé $b^*V \longrightarrow (gb)^*V \xrightarrow{t^{-1}} (fa)^*V$. Il s'ensuit que h^* transforme famille couvrante de type (d) en famille couvrante, et l'on conclut comme dans 1.6.

DÉFINITION 3.3. Le topos $\tilde{D}$ s'appelle **produit fibré de X et Y au-dessus de S** , et se note $X \times_S Y$. Les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X \times_S Y & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

sont reliés par le 2-isomorphisme $\varepsilon : gp_2 \rightarrow fp_1$.

EXEMPLES 3.4. (1) *Espaces topologiques*. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des applications continues entre espaces topologiques. On a un morphisme canonique

$$(3.4.1) \quad \widetilde{X \times_S Y} \rightarrow \tilde{X} \times_{\tilde{S}} \tilde{Y},$$

où $\tilde{Z}$ désigne le topos des faisceaux sur un espace topologique Z . Si X, Y, S sont sobres, (3.4.1) induit une bijection sur les classes d'isomorphisme de points ([SGA 4 IV 4.2.3]). Si l'on suppose de plus que $\tilde{X} \times_{\tilde{S}} \tilde{Y}$ a assez de points (condition vérifiée par exemple si X, Y, S, f, g sont cohérents, cf. 2.5), alors, comme la famille des sous-objets de l'objet final de $\tilde{X} \times_{\tilde{S}} \tilde{Y}$ est génératrice, il résulte de [SGA 4 IV 7.1.9] que (3.4.1) est une équivalence de topos. On ignore si cette seconde hypothèse est nécessaire.

(2) *Schémas*. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de schémas. Désignons par l'indice zar (resp. ét) le topos zariskien (resp. étale) associé. Du fait de (1), le morphisme naturel $(X \times_S Y)_{\text{zar}} \rightarrow X_{\text{zar}} \times_{S_{\text{zar}}} Y_{\text{zar}}$ n'est pas une équivalence en général. De même, le morphisme naturel $(X \times_S Y)_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}} \times_{S_{\text{ét}}} Y_{\text{ét}}$ n'est pas une équivalence en général, même si X, Y, S sont les spectres de corps : si $S = \text{Spec } k$, $S_{\text{ét}}$ est équivalent au topos classifiant BG du groupe profini $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, où $\bar{k}$ est une clôture séparable de k , et la formation de BG commute aux produits fibrés.

4. Topos évanescents et co-évanescents

4.1. Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ des morphismes de topos comme en 1.1. Le produit orienté

$$(4.1.1) \quad X \overset{\leftarrow}{\times}_S S,$$

où $S \rightarrow S$ est le morphisme identique, s'appelle le **topos évanescent** de f . Il est étudié dans [Laumon, 1983] et [Orgogozo, 2006]. Le produit orienté

$$(4.1.2) \quad S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y,$$

où $S \rightarrow S$ est le morphisme identique, joue un rôle important dans les travaux de Faltings sur les théorèmes de comparaison p-adiques et la correspondance de Simpson p-adique (**topos de Faltings**) (cf. [Faltings, 2002], [Faltings, 2005], [Abbes & Gros, 2011a], [Deligne, 1995], [Abbes & Gros, 2011b]). On propose ici de l'appeler **topos co-évanescent** de g . Du topos évanescent de Id_S ,

$$(4.1.3) \quad \overleftarrow{S} = S \overset{\leftarrow}{\times}_S S,$$

qui est aussi le topos co-évanescent de Id_S , les produits orientés $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ se déduisent par changement de base. Considérons en effet le produit fibré itéré

$$(4.1.4) \quad Z = X \times_S \overleftarrow{S} \times_S Y,$$

où la flèche de gauche (resp. droite) de $\overleftarrow{S}$ vers S est p_1 (resp. p_2). On a des projections naturelles $q_1 : Z \rightarrow X$, $q_2 : Z \rightarrow Y$ et $m : Z \rightarrow \overleftarrow{S}$, avec des isomorphismes $p_1 m \xrightarrow{\sim} f q_1$, $g q_2 \xrightarrow{\sim} p_2 m$. Par

composition avec la flèche structurale $\tau : p_2 \rightarrow p_1$ de $\overleftarrow{S}$, on en déduit une flèche $z : gq_2 \rightarrow fp_1$. D'après 1.4, le triplet (q_1, q_2, z) définit donc une flèche

$$(4.1.5) \quad h : Z \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$$

et des isomorphismes $p_1 h \xrightarrow{\sim} q_1$, $p_2 h \xrightarrow{\sim} q_2$, par lesquels z s'identifie à τh , où p_1, p_2 désignent les projections canoniques de $X \times_S^{\leftarrow} Y$ sur X et Y .

PROPOSITION 4.2. *Le morphisme h (4.1.5) est un isomorphisme. En particulier, il définit des isomorphismes canoniques*

$$(4.2.1) \quad X \times_S^{\leftarrow} \overleftarrow{S} \xrightarrow{\sim} X \times_S^{\leftarrow} S,$$

$$(4.2.2) \quad \overleftarrow{S} \times_S Y \xrightarrow{\sim} S \times_S^{\leftarrow} Y.$$

Il suffit de montrer que Z , muni de (q_1, q_2, z) vérifie la propriété universelle du produit orienté. Soit T un topos muni de morphismes $a : T \rightarrow X$, $b : T \rightarrow Y$, et d'une 2-flèche $t : gb \rightarrow fa$. Par la propriété universelle de $\overleftarrow{S}$, on en déduit d'abord un unique triplet, formé d'un morphisme $k : T \rightarrow \overleftarrow{S}$ et d'isomorphismes $p_1 k \rightarrow fa$, $p_2 k \rightarrow gb$ tels que $t = \tau k$ modulo ces identifications. Puis, par la propriété universelle des produits fibrés, on en déduit un unique quadruplet formé d'un morphisme $s : T \rightarrow Z$ et d'isomorphismes $ms \xrightarrow{\sim} k$, $q_1 s \xrightarrow{\sim} a$, $q_2 s \xrightarrow{\sim} b$ tel que $zs = t$ modulo ces identifications.

4.3. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de topos. D'après 1.4, les morphismes Id_X et f définissent un morphisme

$$(4.3.1) \quad \Psi : X \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} S$$

tel que

$$(4.3.2) \quad p_1 \Psi = \text{Id}_X, p_2 \Psi = f, \tau \Psi = \text{Id}_f,$$

où $\tau : p_2 \rightarrow fp_1$ est la 2-flèche structurale de $X \times_S^{\leftarrow} S$:

(4.3.3)

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{Id}_X \swarrow & \downarrow \Psi & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times_S^{\leftarrow} S & \xrightarrow{p_2} & S \\ & \searrow f & & \swarrow \text{Id}_S & \\ & & S & & \end{array}$$

Le foncteur Ψ_* s'appelle **foncteur cycles proches**. Pour un objet $(U \rightarrow V \leftarrow W)$ du site $\mathcal{C}$ définissant $X \times_S^{\leftarrow} S$, on a $\Psi^*(U \rightarrow V \leftarrow W) = U \times_V W$, où $U \times_V W := U \times_{f^*(V)} f^*W$. Si Λ est un anneau et $F \in D^+(X, \Lambda)$, le complexe $R\Psi_* F \in D^+(X \times_S^{\leftarrow} S, \Lambda)$ (noté aussi $R\Psi F$) s'appelle **complexe des cycles proches** (de f relatif à F).

L'identité $p_{1*} \Psi_* = \text{Id}$ définit, par adjonction, un morphisme canonique

$$(4.3.4) \quad p_1^* \rightarrow \Psi_*.$$

Pour $F \in D^+(X, \Lambda)$, le cône du morphisme $p_1^* F \rightarrow R\Psi F$ qui s'en déduit s'appelle le **complexe des cycles évanescents** (de f relatif à F) et se note $R\Phi F$. Dans le cas des schémas (munis de la topologie étale), ces foncteurs, qui généralisent les foncteurs $R\Psi$ et $R\Phi$ de Grothendieck ([SGA 7 XIII]), sont étudiés dans [Laumon, 1983] et [Orgogozo, 2006].

Considérons le morphisme de changement de base

$$(4.3.5) \quad p_{1*} \rightarrow \Psi^*$$

déduit de l'identité $p_1 \Psi = \text{Id}_X$, en d'autres termes, le morphisme déduit, par application de p_{1*} , de la flèche d'adjonction $\text{Id} \rightarrow \Psi_* \Psi^*$, compte tenu de ce que $p_{1*} \Psi_* = \text{Id}$. Le résultat suivant est donné sans démonstration dans [Laumon, 1983] :

PROPOSITION 4.4. *Le morphisme 4.3.5 est un isomorphisme.*

On va définir un morphisme

$$(4.4.1) \quad \Psi^* \rightarrow p_{1*},$$

dont on montrera qu'il est inverse de 4.3.5. Pour cela, on définit un morphisme

$$(4.4.2) \quad \text{Id} \rightarrow \Psi_* p_{1*}$$

de la façon suivante. Pour un faisceau F sur $X \times_S^{\leftarrow} S$ et un objet $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$ du site C de 1.1, la flèche $F(Z) \rightarrow (\Psi_* p_{1*} F)(Z)$ est la composée

$$(4.4.3) \quad F(Z) \rightarrow F(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow W \leftarrow W) \rightarrow F(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow e_S \leftarrow e_S),$$

où $W \rightarrow W$ est l'identité, la première flèche est la restriction et la seconde, l'inverse de l'isomorphisme relatif au recouvrement de type (c)

$$(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow W \leftarrow W) \rightarrow (U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow e_S \leftarrow e_S).$$

Le morphisme 4.4.1 est adjoint de 4.4.2. Notons u (resp. v) le morphisme 4.3.5 (resp. 4.4.1). On va montrer que u et v sont inverses l'un de l'autre. L'argument qui suit est dû à Orgogozo. Il s'agit de montrer que, pour tout faisceau F sur $X \times_S^{\leftarrow} S$ et tout faisceau G sur X , les applications $\alpha(F, G) = \text{Hom}(u(F), G) : \text{Hom}(\Psi^* F, G) \rightarrow \text{Hom}(p_{1*} F, G)$ et $\beta(F, G) = \text{Hom}(v(F), G) : \text{Hom}(p_{1*} F, G) \rightarrow \text{Hom}(\Psi^* F, G)$ sont inverses l'une de l'autre.

L'application

$$\alpha(F, G) : \text{Hom}(\Psi^* F, G) = \text{Hom}(F, \Psi_* G) \rightarrow \text{Hom}(p_{1*} F, G)$$

envoie $a : F \rightarrow \Psi_* G$ sur $p_{1*} a : p_{1*} F \rightarrow p_{1*} \Psi_* G = G$. L'application a est la donnée d'une famille compatible d'applications $a_{(U \rightarrow V \leftarrow W)} : F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow G(U \times_V W)$, pour $(U \rightarrow V \leftarrow W)$ parcourant les objets de C , "compatible" voulant dire compatible aux flèches de restriction. L'application $\alpha(a)$ est la famille $a_{(U \rightarrow e_S \leftarrow e_S)} : F(U \rightarrow e_S \leftarrow e_S) \rightarrow G(U)$, U parcourant les objets de X .

L'application

$$\beta(F, G) : \text{Hom}(p_{1*} F, G) \rightarrow \text{Hom}(\Psi_* F, G) = \text{Hom}(F, \Psi_* G)$$

envoie $b : p_{1*} F \rightarrow G$ sur le composé $F \rightarrow \Psi_* p_{1*} F \rightarrow \Psi_* G$, où la première flèche est 4.4.2 et la seconde $\Psi_* b$. L'application $\beta(b)$ est la famille des $\beta(b)_{(U \rightarrow V \leftarrow W)} : F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow G(U \times_V W)$, où $\beta(b)_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}$ est la composée de 4.4.3 et de

$$(\Psi_* b)(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) : F(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) = (p_{1*} F)(U \times_V W) \rightarrow G(U \times_V W).$$

Pour chaque $a : F \rightarrow \Psi_* G$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(U \rightarrow V \leftarrow W) & \xrightarrow{a_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}} & G(U \times_V W) \\ \downarrow & & \uparrow a_{(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S)} \\ F(U \times_V W \rightarrow W \leftarrow W) & \longrightarrow & F(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) \end{array},$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme figurant dans 4.4.3. Dans ce diagramme, le composé des flèches autres que la flèche horizontale supérieure est $\beta \alpha(a)_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}$, donc $\beta \alpha = \text{Id}$. La vérification de $\alpha \beta = \text{Id}$ est triviale également.

REMARQUE 4.5. Lorsque les topes X et S sont localement cohérents et $f : X \rightarrow S$ est localement cohérent, donc en particulier dans le cas des schémas, on peut prouver 4.4 plus simplement, en se ramenant au cas local. Comme X a assez de points, il suffit de montrer que, pour tout point $x : \text{pt} \rightarrow X$, et tout faisceau F sur $X \times_S^{\leftarrow} S$, la fibre en x de 4.3.5, est un isomorphisme. Quitte à remplacer X par son localisé en x (cf. 1.10.2 et 1.13.1), on peut supposer X local de centre x . Soit $s : \text{pt} \rightarrow S$ l'image de x par f . Soit F un faisceau sur $T = X \times_S^{\leftarrow} S$. On doit montrer que

$$(p_{1*} F)_x = \Gamma(T, F) \rightarrow (\Psi_* F)_x = F_{(x, s)}$$

est un isomorphisme. Soient $S_{(s)}$ le localisé de S en s et $T_{(s)} = X \times_{S_{(s)}}^{\leftarrow} S_{(s)}$. D'après les résultats de passage à limite invoqués dans 2.7, on a

$$\Gamma(T_{(s)}, F) = \operatorname{colim} \Gamma(T_U, F),$$

où U parcourt les voisinages cohérents de s et $T_U = X \times_{S/U}^{\leftarrow} S/U$. D'après 1.11, les flèches de restriction $\Gamma(T, F) \rightarrow \Gamma(T_U, F)$ sont des isomorphismes (en fait, $T_U \rightarrow T$ est une équivalence). On peut donc supposer S local de centre s . D'après 2.3.2, T est alors local, de centre (x, s) , et $\Gamma(T, F) = F_{(x,s)} = (\Psi^* F)_x$.

4.6. Soit $g : Y \rightarrow S$ un morphisme de topos. Les faisceaux sur le topos co-évanescant $T = S \times_S^{\leftarrow} Y$ (4.1.2) ont une description simple, due à Deligne [Deligne, 1995]. Pour un faisceau F sur T , la flèche de restriction $F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow F(U \rightarrow U \rightarrow U \times_V W)$ est un isomorphisme. Cela suggère de considérer le site C_0 suivant. La catégorie C_0 est celle des flèches $(V \leftarrow W)$ au-dessus de g , i.e. des flèches $W \rightarrow g^*V$ de Y . On munit C_0 de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes des types (a) et (b) ci-après :

- (a) $(V \leftarrow W_i)_{i \in I} \rightarrow (V \leftarrow W)$, où la famille $(W_i \rightarrow W)_{i \in I}$ est couvrante,
- (b) $(V_i \leftarrow W_i)_{i \in I} \rightarrow (V \leftarrow W)$, où la famille $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ est couvrante, et $W_i = V_i \times_V W$.

On montre ([Abbes & Gros, 2011b, 4.10]) que C_0 est un site de définition de T . Un objet F de $S \times_S^{\leftarrow} Y$, décrit comme un faisceau sur C_0 , s'interprète comme la donnée d'une famille de faisceaux $F_V : W \mapsto F(V \leftarrow W)$ sur g^*V et de flèches de restriction $F_V \rightarrow j_{V'/V*} F_{V'}$ pour $V' \rightarrow V$, définissant $j_{V'/V} : g^*V' \rightarrow g^*V$, satisfaisant la condition de descente que, pour une famille couvrante $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$, la suite

$$F_V \rightarrow \prod_i j_{V_i/V*} F_{V_i} \rightrightarrows \prod_{ii'} j_{V_{ii'}/V*} F_{V_{ii'}}$$

soit exacte, où $V_{ii'} = V_i \times_V V_{i'}$. D'après 1.4, les morphismes $g : Y \rightarrow S$ et Id_Y définissent un morphisme

$$(4.6.1) \quad \Psi : Y \rightarrow S \times_S^{\leftarrow} Y$$

tel que

$$(4.6.2) \quad p_1 \Psi = g, p_2 \Psi = \operatorname{Id}_Y, \tau \Psi = \operatorname{Id}_g,$$

où $\tau : gp_2 \rightarrow p_1$ est la 1-flèche structurale de $S \times_S^{\leftarrow} Y$:

$$(4.6.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & g \swarrow & \downarrow \Psi & \searrow \operatorname{Id}_Y & \\ S & \xleftarrow{p_1} & S \times_S^{\leftarrow} Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \searrow \operatorname{Id}_S & & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array} .$$

Le foncteur Ψ_* , qu'on pourrait appeler **foncteur cycles co-proches**, se comporte de manière très différente du foncteur cycles proches de 4.3.1. En effet, de l'identité $p_2 \Psi = \operatorname{Id}_Y$ on déduit, par adjonction, un morphisme canonique

$$(4.6.4) \quad p_2^* \rightarrow \Psi_*,$$

analogue de 4.3.4, et l'on a :

PROPOSITION 4.7. *Le morphisme 4.6.4 est un isomorphisme.*

En particulier, le foncteur Ψ_* est exact. Ici, c'est la flèche de changement de base, déduite de l'identité $p_2 \Psi = \operatorname{Id}_Y$,

$$(4.7.1) \quad p_{2*} \rightarrow \Psi^*,$$

analogue de 4.3.5, qui n'est pas, en général, un isomorphisme. On peut donner de 4.7 une démonstration analogue à celle de 4.4. Il est plus simple de déduire ce résultat des descriptions

explicites suivantes des foncteurs p_1^* , p_2^* , Ψ et du morphisme τ . Ces descriptions sont dues à Deligne [Deligne, 1995] (voir [Abbes & Gros, 2011b, 4.12, 4.14] pour les détails).

4.8. (a) *Description de p_1^* .* On a $p_1^*V = (V \leftarrow g^*V)$ (l'objet $(V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)$ de C correspondant à l'objet $(V \leftarrow g^*V)$ de C_0). Si F est un faisceau sur S , p_1^*F est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en $(V \leftarrow W)$ est la limite inductive des $F(V')$ suivant la catégorie des flèches $(V \leftarrow W) \rightarrow p_1^*V'$. Cette catégorie ayant $(V \leftarrow W) \rightarrow (V \leftarrow g^*V)$ pour objet initial, cette limite est égale à $F(V)$. En d'autres termes, p_1^*F est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en $(V \leftarrow W)$ est $F(V)$. Dans la description donnée plus haut d'un faisceau sur $S \times_S^{\leftarrow} Y$ en termes d'une famille de faisceaux sur les g^*V , p_1^*F est le faisceau associé à la famille des faisceaux constants G_V sur g^*V de valeur $F(V)$.

(b) *Description de p_2^* .* On a $p_2^*W = (e_S \leftarrow W)$. Si F est un faisceau sur Y , p_2^*F est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en $(V \leftarrow W)$ est la limite inductive des $F(W')$ suivant la catégorie des flèches $(V \leftarrow W) \rightarrow p_2^*W'$. Cette catégorie ayant $(V \leftarrow W) \rightarrow (e_S \leftarrow W)$ pour objet initial, cette limite est égale à $F(W)$. En d'autres termes, p_2^*F est le faisceau associé à la famille des faisceaux H_V sur g^*V , où H_V est le faisceau $W \mapsto F(W)$ (en fait, cette famille est déjà un faisceau, la condition de descente étant automatiquement satisfaite).

(c) *Description de τ .* Si F est un faisceau sur S , le morphisme $\tau : p_1^*F \rightarrow (gp_2)^*F$ est déduit du morphisme de préfaisceaux qui, pour $(V \leftarrow W)$ dans C_0 , envoie $F(V)$ dans $(gp_2)^*F(V \leftarrow W) = (g^*F)(W)$ par le morphisme composé $F(V) \rightarrow (g^*F)(g^*V) \rightarrow (g^*F)(W)$. On le voit à l'aide de (a) et (b), en explicitant le morphisme $(fp_1)^* \rightarrow (gp_2)^*$ adjoint du morphisme τ décrit en 1.3.

(d) *Description de Ψ_* .* Si F est un faisceau sur Y , et $(U \rightarrow V \leftarrow W)$ un objet de C , on a $(\Psi_*F)(U \rightarrow V \leftarrow W) = F(U \times_V W)$. Dans la description de $S \times_S^{\leftarrow} Y$ à l'aide du site C_0 , on a donc

$$(\Psi_*F)(V \leftarrow W) = F(W).$$

Compte tenu de (b), on a donc

$$\Psi_*F = p_2^*F$$

Cette identification est celle donnée par 4.6.4, ce qui prouve 4.7.

Notons encore que les points de $T = S \times_S^{\leftarrow} Y$ sont les flèches $s \leftarrow y$, où s (resp. y) est un point de S (resp. Y), et que, pour un faisceau F sur Y , si $(s \leftarrow y)$ est un point de T , on a

$$(p_2^*F)_{(s \leftarrow y)} = F_y = (\Psi_*F)_{(s \leftarrow y)}.$$

REMARQUE 4.9. Comme l'observe Gabber, l'isomorphisme 4.6.4 implique le théorème de changement de base 2.4 pour $X = S$, $f = \text{Id}_S$ sans hypothèse de cohérence sur S , Y , et g (voir [Abbes & Gros, 2011b, 4.15]).

Descente cohomologique orientée

Fabrice Orgogozo

1. Acyclicité orientée des morphismes propres

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 1.1.2 ci-dessous, qui généralise l'invariance cohomologique du voisinage tubulaire, défini à l'aide du produit fibré orienté, par éclatement admissible (cf. XI-1.7 et XI-2.8).

1.1. Notations et énoncé.

1.1.1. Considérons un diagramme commutatif

$$(1.1.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{r'} & X' & & \\ f \downarrow & \square & \downarrow f' & & \\ S & \xleftarrow{r} & S' & \xleftarrow{g'} & Y \\ & & \searrow g & & \end{array}$$

de schémas cohérents — à morphismes nécessairement cohérents ([ÉGA I' 6.1.10 (i),(iii)]) —, auquel on associe un morphisme de topos

$$\begin{array}{c} T' = X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y \\ \downarrow \overleftarrow{r} \\ T = X \times_S^{\leftarrow} Y \end{array}$$

par fonctorialité du produit orienté (XI-1.9). (Abus de notations : X pour $X_{\text{ét}}$, etc.)

THÉORÈME 1.1.2. *Si le morphisme r est propre, le morphisme $\overleftarrow{r}$ est acyclique pour les faisceaux de torsion : pour tout entier $n \geq 1$, l'unité d'adjonction $\eta_{\overleftarrow{r}} : \text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_* \overleftarrow{r}^*$ est un isomorphisme entre endofoncteurs de $D^+(T, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.*

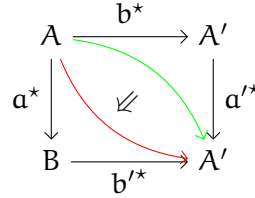
1.2. Rappels sur les flèches de changement de base. Nous conseillons au lecteur de ne lire ce paragraphe qu'en cas de nécessité. Rappelons que si

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{b'} & B' \\ a \downarrow & \curvearrowright \tau & \downarrow a' \\ A & \xleftarrow{b} & A' \end{array}$$

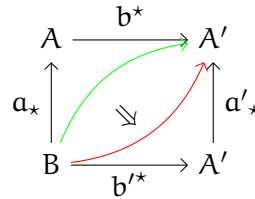
est un diagramme de topos muni d'une 2-flèche $\tau : ab' \Rightarrow ba'$, correspondant à des flèches de transitivité $\tau_* : a_* b'_* \Rightarrow b_* a'_*$ et $\tau^* : a'^* b^* \Rightarrow b'^* a^*$, la flèche de changement de base $b^* a_* \rightarrow a'_* b'^*$ est la composée $\text{cb}_{BAA'B'}^\tau = (a'_* b'^* \star \varepsilon_a) \odot (a'_* \star \tau^* \star a_*) \odot (\eta_{a'} \star b^* a_*)$, où $\eta_?$ (resp. $\varepsilon_?$) désigne l'unité (resp. la coïunité) de l'adjonction $?^* \dashv ?_*$. La variante dérivée est définie de même. Notons que dans

[**SGA 4** XII § 4] — où le diagramme considéré est essentiellement commutatif —, la flèche de changement de base est définie comme le composé $(\varepsilon_b \star a'_\star b'^\star) \odot (b^\star \star \tau_\star \star b'^\star) \odot (b^\star a_\star \star \eta_{b'})$; d'après P. Deligne, la « *perplexité d'Artin* » n'a pas lieu d'être : ces deux définitions coïncident ([**SGA 4** XVII § 2.1]).

Dans le langage de Joseph Ayoub ([**Ayoub**, 2007, 1.1.10]), cette 2-flèche de changement de base est *obtenue de $\tau^\star$ par adjonction suivant $(a'^\star, a'_\star)$ et $(a^\star, a_\star)$* . Il montre (*op. cit.*, 1.1.9) que, donné un diagramme



dans une 2-catégorie quelconque, la flèche de changement de base définie par la formule ci-dessus est l'unique 2-flèche du diagramme obtenu par retournement des flèches verticales

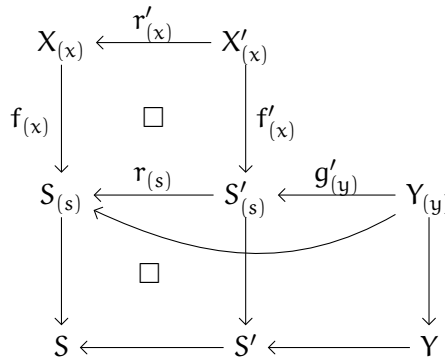


satisfaisant l'une des deux égalités (écrites sous forme simplifiée) $\tau^\star \odot \eta_a = cb \odot \eta_{a'}$ et $\varepsilon_{a'} \odot \tau^\star = \varepsilon_a \odot cb$. Il montre également (*op. cit.*, 1.1.11 et 1.1.12), que l'on a la compatibilité attendue avec les compositions horizontales et verticales. (Un cas particulier est énoncé sans démonstration en [**SGA 4** XII 4.4]; voir aussi [**Lipman & Hashimoto**, 2009, 3.7.2]).

1.3. La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème 1.1.2.

1.3.1. Réduction au cas local. Soit $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(T, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dont on note $\mathcal{K}'$ le tiré en arrière par $\overleftarrow{r}$ sur T' . Rappelons ([**SGA 4** VI 2.9.2, 3.10]) que le topos étale d'un schéma quelconque (resp. cohérent) est localement cohérent (resp. cohérent) et qu'un morphisme cohérent de schémas induit un morphisme cohérent entre les topos étales. Il en résulte (XI-2.5) que le topos T est cohérent et par conséquent qu'il suffit de vérifier que la fibre en chaque point $t \rightarrow T$ de l'unité $\mathcal{K} \rightarrow R\overleftarrow{r}_\star \mathcal{K}'$ est un isomorphisme. (Localement cohérent suffirait, cf. [**SGA 4** VI 9.0]). D'après XI-1.8, tout tel point t provient d'une paire de points (géométriques) x, y de X et Y , munis d'un morphisme de spécialisation $g(y) \rightsquigarrow f(x) = s$. D'autre part, on vérifie comme en XI-2.7 que si $\alpha : (X_2 \rightarrow S_2 \leftarrow Y_2) \rightarrow (X_1 \rightarrow S_1 \leftarrow Y_1)$ est un morphisme de diagrammes de schémas cohérents, le morphisme induit $\overleftarrow{\alpha} : X_2 \times_{S_2} Y_2 \rightarrow X_1 \times_{S_1} Y_1$ est un morphisme cohérent de topos cohérents et que la fibre en un point t_1 d'une image directe dérivée par $\overleftarrow{\alpha}$ est naturellement isomorphe au complexe des sections globales dérivées du topos $X_{2(x_1)} \times_{S_{2(s_1)}} Y_{2(y_1)}$, où x_1 et y_1 (resp. s_1) sont les points géométriques de X_1 et Y_1 (resp. S_1) déduits de t_1 (resp. est l'image de x_1), et où l'on pose $X_{2(x_1)} = X_2 \times_{X_1} X_{1(x_1)}$, etc.

Ceci nous amène à considérer les localisés stricts $X_{(x)}$, $S_{(s)}$ et $Y_{(y)}$ ainsi que le diagramme



au-dessus de 1.1.1.1. Le morphisme $f_{(x)}$ est *local* tandis que $r_{(s)}$ est *propre*. Comme énoncé ci-dessus, la fibre en t de l'unité $\eta_{\overleftarrow{\tau}}$ considérée s'identifie au morphisme de fonctorialité de la cohomologie :

$$\mathcal{K}_t = R\Gamma(T_{(t)}, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T'_{(t)}, \mathcal{K}')$$

où $T_{(t)}$ est le topos $X_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S_{(s)}} Y_{(y)}$ — local (au sens de XI-2.1) par *loc. cit.*, 2.3.2 — et $T'_{(t)}$ est le produit orienté $X'_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S'_{(s)}} Y'_{(y)}$. Quitte à remplacer X (resp. S , Y) par $X_{(x)}$ (resp. $S_{(s)}$, $Y_{(y)}$), on peut donc supposer les schémas X, Y, S strictement locaux ainsi que le morphisme f et le topos T locaux. Nous le faisons pour simplifier les notations dans la démonstration ci-dessous. On a vu de plus qu'il est suffisant, sous ces hypothèses supplémentaires, de vérifier que le morphisme de complexes

$$\eta : R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T', \mathcal{K}')$$

est un isomorphisme.

1.3.2. *Cas d'un complexe provenant du second facteur.* Dans ce paragraphe, on montre que la flèche $\eta : R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T', \mathcal{K}')$ est un isomorphisme lorsqu'il existe un complexe $\mathcal{K}_Y \in D^+(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ tel que $\mathcal{K} = p_2^* \mathcal{K}_Y$. Cela revient à montrer que la flèche de fonctorialité $R\Gamma(T, p_2^* -) = R\Gamma(X, Rp_{1*} p_2^* -) \rightarrow R\Gamma(T', p_2'^* -) = R\Gamma(X', Rp_{1'*} p_2'^* -)$ est un isomorphisme (pour tout objet $\mathcal{K}_Y \in \text{Ob } D^+(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$). Les différents morphismes sont représentés dans le diagramme cubique suivant :

(1.3.2.1)

Pour montrer que $R\Gamma(X, Rp_{1*} p_2^* -) \rightarrow R\Gamma(X', Rp_{1'*} p_2'^* -)$ est un isomorphisme, il suffit d'établir le résultat *a priori* plus fort suivant : le diagramme

(1.3.2.2)

est un diagramme *commutatif d'isomorphismes*, où $\tau : gp_2 \Rightarrow fp_1$ et $\tau' : g'p'_2 \Rightarrow f'p'_1$ sont comme en XI-1.3. On sait déjà que les flèches verticales sont des isomorphismes (XI-2.4) ; par propriété de r , il en est de même de la flèche horizontale inférieure.

1.3.3. *Commutativité.* Faute d'un métathéorème (à énoncer) garantissant la commutativité du diagramme 1.3.2.2, nous allons procéder de manière *ad hoc* pour démontrer un résultat un peu plus général. Pour alléger les notations, nous omettons dorénavant les compositions avec les 1-flèches.

Soit

(1.3.3.1)

un diagramme cubique de topos dont quatre faces sont (essentiellement) commutatives et deux (celles dans le plan du texte) munies de 2-flèches τ et τ' . On suppose que ces flèches sont compatibles au sens suivant : les deux 2-flèches induites par τ et τ' dans le carré diagonal en traits pleins $Y'SXT'$ coïncident. Cela revient à dire que l'on a l'égalité $r \star \tau' = \tau \star h'$; sous les hypothèses du paragraphe précédent (voir diagramme 1.3.2.1), on la vérifie directement sur les sites de définition des topos.

Par compatibilité avec les compositions verticales des flèches de changement de base, rappelée en 1.2, les deux triangles ci-dessous sont commutatifs, où la flèche horizontale est la flèche de changement de base induite par le carré diagonal :

(1.3.3.2)

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{cb}_{YSXT} & \xrightarrow{p_{1*}p_{2*}h_*} \\
 f^*r_*g'_* = f^*g_*h_* & \xrightarrow{\text{cb}_{Y'SXT'}} & r'_*p'_{1*}p'^*_2 = p_{1*}h'_*p'^*_2 \\
 & \text{cb}_{X'S'SX} & \xrightarrow{r'_*f'^*g'_*}
 \end{array}$$

est commutatif⁽ⁱ⁾. Notons que lorsque h est l'identité, la 2-flèche en pointillé n'est autre que (la 2-flèche induite par) la coïunité $\eta_{h'}$. La commutativité de 1.3.2.2 en résulte.

1.3.4. Dans ce paragraphe, on montre que la flèche $\eta : R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T', \mathcal{K}')$ considérée à la fin du paragraphe 1.3.1 — dont on conserve les hypothèses — est un isomorphisme. On procède par réduction au cas précédent (1.3.2). Le morphisme p_2 a une section, que nous noterons σ , définie en XI-2.2. Posons $\mathcal{K}_Y = \sigma^*\mathcal{K}$ — cette notation est compatible avec celle du paragraphe précédent —, et $\widetilde{\mathcal{K}} = p_2^*\mathcal{K}_Y$. D'après XI-2.3 et XI-2.3.2, le morphisme de changement de base $\text{cb}_{TY\gamma} : R p_{2*} \rightarrow \sigma^*$ déduit du diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xleftarrow{\sigma} & Y \\
 p_2 \downarrow & & \parallel \\
 Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array}$$

est un isomorphisme et la coïunité $\widetilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ induit un isomorphisme $R\Gamma(T, \widetilde{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(T, \mathcal{K})$. (On rappelle que T est local.) Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le morphisme de functorialité $R\Gamma(T, \widetilde{\mathcal{K}}) \rightarrow R\Gamma(T', \widetilde{\mathcal{K}}')$ est un isomorphisme, où $\widetilde{\mathcal{K}}'$ désigne le tiré en arrière par $\overleftarrow{\tau}$ de $\widetilde{\mathcal{K}}$ (ou encore, par p'_2 de $\mathcal{K}_Y$) sur le topos T' . Pour conclure, il nous faut montrer que la flèche $R\Gamma(T', \widetilde{\mathcal{K}}') \rightarrow$

⁽ⁱ⁾ Le rédacteur remercie Joseph Ayoub de son aide sur cette question.

$R\Gamma(T', \mathcal{H}')$ déduite de $\widetilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$ est un isomorphisme. Calculant ces complexes par projection sur le premier facteur X' et utilisant le théorème de changement de base propre pour le morphisme $X' \rightarrow X$, il nous suffit de montrer que le morphisme $Rp_{1*}' \mathcal{H}' \rightarrow Rp_{1*} \mathcal{H}$ de complexes sur X' est un isomorphisme au-dessus du point fermé x de X . L'évaluation en un point géométrique $x' \rightarrow X'_x$ est

$$R\Gamma(T'_{(x')}, \mathcal{H}') \rightarrow R\Gamma(T_{(x')}, \mathcal{H}),$$

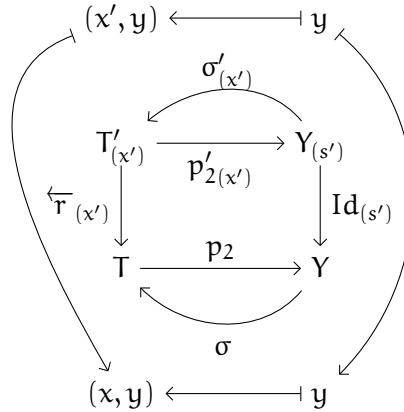
où $T'_{(x')} = X'_{(x')} \times_{S'_{(s')}}^{\leftarrow} Y_{(s')}$, avec $s' \rightarrow S'$ l'image de $x' \rightarrow X'$ et $Y_{(s')} := Y \times_{S'} S'_{(s')}$. Comme rappelé ci-dessus, cette flèche s'identifie par projection sur le second facteur à la flèche

$$R\Gamma(Y_{(s')}, \sigma'_{(x')}^* \mathcal{H}') \rightarrow R\Gamma(Y_{(s')}, \sigma'_{(x')}^* \mathcal{H}),$$

où $\sigma'_{(x')} : Y_{(s')} \rightarrow X'_{(x')} \times_{S'_{(s')}}^{\leftarrow} Y_{(s')}$ est la section définie en **XI-2.2**. Nous allons montrer plus précisément que la coïunité $\widetilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$ induit un isomorphisme $\sigma'_{(x')}^* \mathcal{H}' \rightarrow \sigma'_{(x')}^* \mathcal{H}$. Par fonctorialité des images inverses, il suffit de montrer que l'on a les égalités

$$\sigma \circ p_2 \circ \overleftarrow{r}_{(x')} \circ \sigma'_{(x')} = \overleftarrow{r}_{(x')} \circ \sigma'_{(x')} = \sigma \circ \text{Id}_{(s')},$$

— la seconde entraînant la première —, où les morphismes sont comme dans le diagramme ci-dessous :



L'identité $\overleftarrow{r}_{(x')} \circ \sigma'_{(x')} = \sigma \circ \text{Id}_{(s')}$ est conséquence du fait que le morphisme $X'_{(x')} \rightarrow X$ est *local*.

1.4. Remarques sur le cas non abélien. En utilisant le théorème de changement de base propre non abélien (**XX-7.1**), la même démonstration devrait permettre de montrer que, sous les hypothèses de **1.1.2**, le morphisme $\overleftarrow{r}$ est **1-asphérique** : pour tout champ ind-fini $\mathcal{C}$ sur T , l'unité d'adjonction $\mathcal{C} \rightarrow \overleftarrow{r}_* \overleftarrow{r}^* \mathcal{C}$ est une équivalence de catégories. Signalons cependant que, comme signalé en **XI-2.8** (3), nous n'avons pas connaissance d'une référence publiée permettant de justifier le passage à la limite nécessaire au calcul des fibres.

2. Descente cohomologique orientée

2.1. Topologie h-orientée.

2.1.1. Notons $\mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les diagrammes de schémas $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ et les morphismes sont les triplets de morphismes $(X' \rightarrow X, S' \rightarrow S, Y' \rightarrow Y)$ rendant commutatifs les deux carrés associés. Les limites (projectives) finies existent dans $\mathcal{B}$ et se calculent « terme à terme ». Par exemple, le produit fibré de $X_1 \rightarrow S_1 \leftarrow Y_1$ et $X_2 \rightarrow S_2 \leftarrow Y_2$ au-dessus de $X \rightarrow S \leftarrow Y$ est $(X_1 \times_X X_2) \rightarrow (S_1 \times_S S_2) \leftarrow (Y_1 \times_Y Y_2)$.

2.1.2. Notons $\overleftarrow{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ la catégorie bifibrée en duals de topos induite par le pseudo-foncteur « produit orienté des topos étales » de $\mathcal{B}$ vers la 2-catégorie des topos, $(X \rightarrow S \leftarrow Y) \rightsquigarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$. La condition **[SGA 4 v^{bis} 3.0.0]** est satisfaite. Enfin, notons que si $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ est annelé par des coefficients constants, toutes les flèches de $\mathcal{B}$ sont *plates* au sens de *loc. cit.*, § 1.3.

2.1.3. Nous munissons la catégorie des schémas de la **topologie** h , engendrée par les morphismes propres et surjectifs ainsi que les recouvrements de Zariski. Dans la définition précédente, on peut se restreindre aux morphismes propres et surjectifs entre schémas *cohérents*, comme il résulte des faits suivants : tout schéma est Zariski-localement cohérent ; tout schéma cohérent sur un schéma cohérent est cohérent (voir [ÉGA I' 6.1.10 (ii)] pour la quasi-séparation, l'analogie pour la quasi-compactité étant tautologique) ; un morphisme universellement fermé (resp. propre) est quasi-compact (resp. cohérent). Rappelons que la topologie h est plus fine que la topologie étale (cf. par exemple II-3.1.1).

2.1.4. On considère la **topologie** h -orientée sur $\mathcal{B}$ engendrée par les familles ci-dessous :

- (i). $((X_\alpha \rightarrow S \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{\alpha \in A}$, où $(X_\alpha \rightarrow X)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante pour la topologie h ;
- (ii). $((X \rightarrow S \leftarrow Y_\alpha) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{\alpha \in A}$, où $(Y_\alpha \rightarrow Y)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante pour la topologie h ;
- (iii). $((X \times_S S_\alpha \rightarrow S_\alpha \leftarrow Y \times_S S_\alpha) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{\alpha \in A}$, où $(S_\alpha \rightarrow S)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante pour la topologie h ;
- (iv). $((X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))$, où $S' \rightarrow S$ est un morphisme *propre* ;
- (v). $((X \rightarrow S' \leftarrow Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))$, où $S' \rightarrow S$ est un morphisme *étale*.

Remarquons que les propriétés des familles de morphismes (i)–(v) sont stables par changement de base dans la catégorie $\mathcal{B}$.

2.1.5. Il est formel de vérifier que la topologie h -orientée est engendrée par :

- les familles de type (i)–(iii), où les familles h -couvrantes sont des recouvrements de Zariski ;
- les familles de type (i)–(iii), où les familles h -couvrantes sont données par un seul morphisme propre et surjectif ;
- les familles de type (iv) et (v).

On peut également observer que les familles de type (iii) avec $(S_\alpha \rightarrow S)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de Zariski (resp. un morphisme propre et surjectif) s'obtiennent par composition à partir des types (i) et (v) (resp. des types (iv) et (ii)).

2.2. Énoncés.

2.2.1. Fixons un objet $B = (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de $\mathcal{B}$. Conformément aux définitions générales, on dit qu'un objet simplicial augmenté $(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet) \rightarrow B$ de $\mathcal{B}$ est un **hyperrecouvrement pour la topologie** h -orientée si tout entier $i \geq -1$, le morphisme canonique $(X_{i+1} \rightarrow S_{i+1} \leftarrow Y_{i+1}) \rightarrow (\cosq_i(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet))_{i+1}$ de la catégorie $\mathcal{B}/B$ est couvrant pour la topologie h -orientée définie en 2.1.4 ci-dessus. Les termes du cosquelette, qui sont des limites finies, existent et sont calculés dans $\mathcal{B}/B$.

2.2.2. Aux données précédentes est associé un topos simplicial — c'est-à-dire fibré sur Δ , cf. [SGA 4 v^{bis} § 1.2] —, que nous notons $X_\bullet \times_{S_\bullet}^{\leftarrow} Y_\bullet$, et son topos total $\text{Tot}(X_\bullet \times_{S_\bullet}^{\leftarrow} Y_\bullet)$. Nous renvoyons le lecteur à [Illusie, 1972, VI, § 5.1] et [SGA 4 VI § 7] pour des définitions générales sur le topos total, ainsi que [Deligne, 1974, § 5.1] pour un résumé dans le cas particulier des espaces topologiques simpliciaux. On a le résultat suivant de descente cohomologique.

THÉORÈME 2.2.3. Soit $(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ un hyperrecouvrement pour la topologie h -orientée et soit $\overleftarrow{\varepsilon} : \text{Tot}(X_\bullet \times_{S_\bullet}^{\leftarrow} Y_\bullet) \rightarrow X \times_S Y$ le morphisme d'augmentation associé. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(X \times_S Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, l'unité d'adjonction $\mathcal{K} \rightarrow R\overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{K}$ est un isomorphisme.

REMARQUE 2.2.4. Prendre garde au fait que, contrairement au cas usuel (non orienté), un objet cartésien de $\text{Tot}(X_\bullet \times_{S_\bullet}^{\leftarrow} Y_\bullet)$ ne provient pas nécessairement d'un objet de $X \times_S Y$: le morphisme $\overleftarrow{\varepsilon}$ n'est en général pas de 2-descente cohomologique au sens de [SGA 4 v^{bis} 2.2.6].

La principale application que nous ferons du théorème précédent est la formule de changement de base suivante, dont on trouvera une autre démonstration dans XII_B-2.1.

THÉOREME 2.2.5 (« hyper-changement de base »). Soient $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ un objet de $\mathcal{B}$ avec g cohérent, et $S_\bullet \rightarrow S$ un hyperrecouvrement pour la topologie h . Notons respectivement $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow S_\bullet$ et $g_\bullet : Y_\bullet \rightarrow S_\bullet$ les morphismes déduits de f et g par le changement de base $S_\bullet \rightarrow S$, et $X_\bullet \rightarrow X$ l'hyperrecouvrement de X pour la topologie h déduit de $S_\bullet \rightarrow S$. Enfin, notons ε_X le morphisme de topos $\text{Tot}(X_\bullet) \rightarrow X$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, le morphisme

$$f^*Rg_*\mathcal{K} \rightarrow R\varepsilon_{X*}(f_\bullet^*Rg_{\bullet*}\mathcal{K}_{|Y_\bullet})$$

est un isomorphisme.

On note $f_\bullet$, etc., pour ce que l'on aurait pu noter $\text{Tot}(f_\bullet)$, etc. Cela ne devrait pas prêter à confusion.

L'hypothèse de cohérence sur g est faite pour pouvoir appliquer le théorème **XI-2.4**, qui peut être mis en défaut sans cette hypothèse⁽ⁱⁱ⁾. (Par exemple, si S est un schéma de Dedekind possédant une infinité de points fermés $\xi_0, \xi_1, \dots$, si l'on pose $X = \xi_0$ et $Y = \coprod_{i>0} \xi_i$, le topos $X \times_S Y \leftarrow$ où f et g sont les morphismes évidents — est le topos vide tandis que le faisceau $f^*g_*\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est non nul pour tout $n > 1$.)

Démonstration. Admettant le théorème de descente précédent (2.2.3), il n'est pas difficile de démontrer la formule de changement de base ci-dessus. Soit $\mathcal{K}$ un complexe sur Y comme dans l'énoncé dont on note $\overleftarrow{\mathcal{K}}$ le tiré en arrière par la seconde projection $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$. Il résulte du théorème 2.2.3 (i) que l'unité $\mathcal{K} \rightarrow R\varepsilon_*\overleftarrow{\varepsilon^*\mathcal{K}}$ est un isomorphisme, où $\overleftarrow{\varepsilon}$ désigne le morphisme d'augmentation $\text{Tot}(X_\bullet \times_{S_\bullet} Y_\bullet) \rightarrow X \times_S Y$. La conclusion résulte de la chaîne d'isomorphismes ci-dessous, les premier et dernier résultant de **XI-2.4**, le troisième de la fonctorialité des images directes, et le second — comme on l'a vu — de la descente cohomologique h -orientée.

$$\begin{aligned} f^*Rg_*\mathcal{K} &\xrightarrow{\sim} Rp_{1*}\overleftarrow{\mathcal{K}} \\ Rp_{1*}\overleftarrow{\mathcal{K}} &\xrightarrow{\sim} Rp_{1*}R\overleftarrow{\varepsilon}_*\overleftarrow{\varepsilon^*\mathcal{K}} \\ Rp_{1*}R\overleftarrow{\varepsilon}_*\overleftarrow{\varepsilon^*\mathcal{K}} &= R\varepsilon_{X*}Rp_{1\bullet*}\overleftarrow{\mathcal{K}}_\bullet, \text{ où } \overleftarrow{\mathcal{K}}_\bullet = \overleftarrow{\varepsilon^*\mathcal{K}} \\ R\varepsilon_{X*}Rp_{1\bullet*}\overleftarrow{\mathcal{K}}_\bullet &\xleftarrow{\sim} R\varepsilon_{X*}f_\bullet^*Rg_{\bullet*}\overleftarrow{\mathcal{K}}_\bullet. \end{aligned}$$

□

2.2.6. Remarques.

2.2.6.1. Dans les deux théorèmes précédents, on pourrait remplacer l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par un anneau de torsion Λ quelconque ; la démonstration donnée ci-dessous s'applique sans changement. Plus généralement, on pourrait considérer des complexes de $D^+(X \times_S Y, \Lambda)$ ou $D^+(Y, \Lambda)$ à cohomologie de torsion⁽ⁱⁱⁱ⁾ lorsque Λ est un anneau quelconque. Dans ce cadre, l'hypothèse [**SGA 4** v^{bis} 2.4.1.1] de stabilité par image directe n'est pas toujours satisfaite ; ceci explique pourquoi il semble parfois utile de se restreindre à la catégorie des schémas à morphismes cohérents (cf. **XII_B-1** et [**SGA 4** v^{bis} 4.3.1]). Il est cependant vraisemblable qu'une analyse précise des démonstrations de *op. cit.* permette de s'affranchir de cette hypothèse et par conséquent de démontrer les théorèmes précédents avec des hypothèses de torsion plus faibles.

2.2.6.2. Utilisant 1.4 et [**Orgozo, 2003**, 2.5, 2.8] il est vraisemblable que l'on puisse adapter les démonstrations données ci-dessous pour obtenir les énoncés de cohomologie non abélienne suivants :

- (sous les hypothèses de 2.2.3) l'unité d'adjonction $\mathcal{C} \rightarrow \overleftarrow{\varepsilon}_*\overleftarrow{\varepsilon^*}\mathcal{C}$ est une équivalence pour tout champ $\mathcal{C}$ ind-fini sur $X \times_S Y$;

⁽ⁱⁱ⁾ Il est vraisemblable que les techniques de l'exposé **XII_B** permettent de démontrer le théorème précédent sans supposer g cohérent.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Un faisceau abélien $\mathcal{F}$ est de torsion si la flèche $\text{colim}_n \text{Ker}([n] : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme, où n parcourt les entiers non nuls ordonnés par divisibilité ; voir ([**SGA 4** IX § 1]).

- (sous les hypothèses de 2.2.5) $f^*g_*\mathcal{C} \rightarrow \varepsilon_{X*}(f_*g_*\mathcal{C}|_{Y_\bullet})$ est une équivalence pour tout champ ind-fini $\mathcal{C}$ sur Y .

Pour le sens à donner à ces énoncés voir [Giraud, 1971] (spécialement chap. VII, §2.2) et [Orgogozo, 2003, §2]. Voir aussi XII_B-2.2 pour une autre esquisse de démonstration du second énoncé.

2.3. Le reste de cet exposé est consacré à la démonstration du théorème 2.2.3.

2.3.1. *Réductions.*

2.3.1.1. D'après la théorie générale de la descente — cf. [SGA 4 v^{bis} §3.3] ou [Deligne, 1974, 5.3.5] pour un résumé —, il suffit de démontrer qu'un morphisme $B' = (\coprod X_\alpha \rightarrow \coprod S_\alpha \leftarrow \coprod Y_\alpha) \rightarrow B$ déduit d'une famille de type (i) à (v) est de descente cohomologique. (Par stabilité par changement de base, on aura automatiquement descente cohomologique *universelle*.) De plus, et pour la même raison, on peut se contenter du cas particulier où les familles h-couvrantes de X, Y et S considérées en (i)–(iii) sont, soit un recouvrement de Zariski, soit un morphisme propre et surjectif.

2.3.1.2. Soient $\mathcal{S}$ un site, de topos associé $\mathcal{T}$ et le pseudo-foncteur $V \mapsto \mathcal{T}_V$. Pour tout recouvrement $V \rightarrow U$, on a descente cohomologique pour $\text{Tot } \mathcal{T}_V \rightarrow \mathcal{T}_U$, où $\mathcal{T}_V$ est le topos simplicial déduit du cosquelette de V sur U . Ceci résulte par exemple de l'existence locale d'une section au morphisme $V \rightarrow U$. Appliquant cette observation à notre catégorie $\mathcal{B}$, on constate que l'on a descente cohomologique (universelle) pour les familles de type (i), (ii), (iii) et (v) lorsque l'on suppose les morphismes $X_\alpha \rightarrow X, Y_\alpha \rightarrow Y$ et $S_\alpha \rightarrow S$ étales. D'après l'observation 2.1.5, ceci nous permet de nous ramener au cas où les familles h-couvrantes de 2.1.4 sont données par un seul morphisme, propre et surjectif. Ceci nous permet aussi de supposer les schémas cohérents et, par conséquent, d'utiliser le théorème 1.1.2 dont la démonstration donnée utilise des hypothèses de finitude (permettant le calcul de fibres d'images directes).

2.3.1.3. Dans les paragraphes suivants, on fixe un objet $B = (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de $\mathcal{B}$ à objets (et morphismes) cohérents, et on note T le topos $X \times_S^\leftarrow Y$. Donnée un objet simplicial $B_\bullet = (X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet)$ augmenté vers B , on note $T_\bullet$ le topos total du topos simplicial $X_\bullet \times_{S_\bullet}^\leftarrow Y_\bullet$: pour alléger les notations, nous omettons dorénavant le « Tot ». On fixe également un entier $n \geq 1$ et un complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(T, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, dont on note $\mathcal{K}_\bullet$ le tiré en arrière par le morphisme de topos $\varepsilon^\leftarrow : T_\bullet \rightarrow T$. On souhaite montrer que si $B_\bullet$ est le 0-cosquelette d'une flèche $B' \rightarrow B$ comme en 2.3.1.1 ci-dessus et à objets cohérents, l'unité d'adjonction

$$\mathcal{K} \rightarrow R\varepsilon^\leftarrow_* \mathcal{K}_\bullet$$

est un isomorphisme.

2.3.2. *Famille de type (i) :* $(X' \rightarrow S \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$. Soit $r' : X' \rightarrow X$ un morphisme cohérent couvrant pour la topologie h, et $X_\bullet = \text{cosq}_0^X(X')$ son cosquelette. (Comme expliqué en 2.3.1, on pourrait supposer r' propre et surjectif ; ce n'est pas nécessaire.) Par cohérence et passage aux fibres en les points du topos T , il suffit de montrer que le morphisme de functorialité

$$R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T_\bullet, \mathcal{K}_\bullet)$$

est un isomorphisme, lorsque les schémas Y, X, S , et le morphisme $f : X \rightarrow S$, sont locaux (pour la topologie étale). Comme en § 1, calculons l'unité d'adjonction par projection sur le premier facteur, c'est-à-dire sur la ligne horizontale inférieure du diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\varepsilon^\leftarrow} & T_\bullet \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_{1\bullet} \\ X & \xleftarrow{\varepsilon_X} & X_\bullet \end{array}$$

On veut montrer que la flèche

$$R\Gamma(X, R p_{1*} \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(X_\bullet, R p_{1\bullet*} \mathcal{K}_\bullet)$$

est un isomorphisme. Comme, par descente cohomologique usuelle, le morphisme $R\Gamma(X, \mathrm{Rp}_{1*}\mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(X_\bullet, (\mathrm{Rp}_{1*}\mathcal{K})_\bullet)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que la flèche de changement de base $\varepsilon_X^* \mathrm{Rp}_{1*}\mathcal{K} \rightarrow \mathrm{Rp}_{1\bullet*} \varepsilon^* \mathcal{K}$ induit un isomorphisme sur les sections globales (sur $X_\bullet$). Les images directes et inverses simpliciales se calculant étage par étage, il suffit donc de montrer que, pour chaque $i \geq 0$, les morphismes de changement de base $\varepsilon_i^* \mathrm{Rp}_{1*}\mathcal{K} \rightarrow \mathrm{Rp}_{1i*} \varepsilon_i^* \mathcal{K}$ associés aux diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\varepsilon_i} & T_i = X_i \times_S Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_{1i} \\ X & \xleftarrow{\varepsilon_i} & X_i \end{array}$$

sont des isomorphismes. Cela résulte du lemme ci-dessous (i), appliqué à $\varepsilon_i : X_i \rightarrow X$.

LEMME 2.3.3. *Considérons un objet $X \rightarrow S \leftarrow Y$ de $\mathcal{B}$ et un complexe $\mathcal{K}$ comme en 2.3.1.3.*

- (i) *Soit $\gamma : Z \rightarrow X$ un morphisme cohérent, faisant de Z un S -schéma. Notons $\overleftarrow{\gamma} : Z \times_S Y \rightarrow X \times_S Y$ le morphisme induit entre les topos orientés. Le morphisme de changement de base*

$$\gamma^*(\mathrm{Rp}_{1*}^X \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{Rp}_{1*}^Z \overleftarrow{\gamma}^* \mathcal{K}$$

associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xleftarrow{\overleftarrow{\gamma}} & Z \times_S Y \\ p_1^X \downarrow & & \downarrow p_1^Z \\ X & \xleftarrow{\gamma} & Z \end{array}$$

est un isomorphisme.

- (ii) *Soit $\delta : Z \rightarrow Y$ un morphisme cohérent, faisant de Z un S -schéma. Notons $\overleftarrow{\delta} : X \times_S Z \rightarrow X \times_S Y$ le morphisme induit entre les topos orientés. Sous l'hypothèse supplémentaire que $X \rightarrow S$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux, le morphisme de changement de base*

$$\delta^*(\mathrm{Rp}_{2*}^Y \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{Rp}_{2*}^Z \overleftarrow{\delta}^* \mathcal{K}$$

associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xleftarrow{\overleftarrow{\delta}} & X \times_S Z \\ p_2^Y \downarrow & & \downarrow p_2^Z \\ Y & \xleftarrow{\delta} & Z \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. (i) Par passage aux fibres en un point géométrique de Z et son image par γ , il suffit de montrer que le morphisme $\overleftarrow{\gamma}$ induit un isomorphisme sur les sections globales lorsque $Z \rightarrow X$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux. Soit s le point géométrique de S image des points centraux de Z et X ; les morphismes de topos $Z \times_{S(s)} Y_{(s)} \rightarrow Z \times_S Y$ et $X \times_{S(s)} Y_{(s)} \rightarrow X \times_S Y$ étant des équivalences (XI-1.11), on peut supposer de plus que les morphismes $Z \rightarrow S$ et $X \rightarrow S$ sont locaux (entre schémas strictement locaux). Notons σ_X et σ_Z les sections canoniques des secondes projections $Z \times_S Y \rightarrow Y$ et $X \times_S Y \rightarrow Y$. Pour conclure, on observe que les flèches verticales de restriction du diagramme ci-dessous sont des isomorphismes par les égalités $p_{2*} = \sigma^*$ déjà utilisées.

$$\begin{array}{ccc}
R\Gamma(X \times_S^{\leftarrow} Y, \mathcal{K}) & \xrightarrow{R\Gamma(\overleftarrow{\gamma}, \mathcal{K})} & R\Gamma(Z \times_S^{\leftarrow} Y, \mathcal{K}) \\
R\Gamma(\sigma_X, \mathcal{K}) \downarrow & & \downarrow R\Gamma(\sigma_Y, \mathcal{K}) \\
R\Gamma(Y, \mathcal{K}) & \xlongequal{\quad} & R\Gamma(Y, \mathcal{K})
\end{array}$$

(ii) Par passage aux fibres en un point géométrique de Z et son image par δ , il suffit de montrer que le morphisme $\overleftarrow{\delta}$ induit un isomorphisme sur les *sections globales* lorsque $Z \rightarrow Y$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux. Comme on suppose d'autre part que le morphisme $X \rightarrow S$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux, les topos $X \times_S^{\leftarrow} Y$ et $X \times_S^{\leftarrow} Z$ sont locaux et le morphisme $X \times_S^{\leftarrow} Z \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$ est local. La conclusion est alors immédiate. $\square$

2.3.4. *Famille de type (ii)* : $(X \rightarrow S \leftarrow Y') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$. Même argument, quitte à échanger p_1 et p_2 . Plus précisément : on peut supposer T local, et on projette sur Y et $Y_\bullet$ pour se ramener à montrer, par la descente cohomologique usuelle pour $Y_\bullet = \text{cosq}_0^Y(Y') \rightarrow Y$, que le morphisme

$$(\text{Rp}_{2*} \mathcal{K})_\bullet \rightarrow \text{Rp}_{2*} \mathcal{K}_\bullet$$

induit un isomorphisme par application du foncteur $R\Gamma(Y_\bullet, -)$. On utilise alors le (ii) du lemme ci-dessus dont il résulte que le morphisme de changement de base $(\text{Rp}_{2*} \mathcal{K})_\bullet \rightarrow \text{Rp}_{2*} \mathcal{K}_\bullet$ est un isomorphisme.

2.3.5. *Famille de type (iii)* : $(X' = X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y' = Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$. Notons $S_\bullet = \text{cosq}_0^S(S')$ le cosquelette du morphisme propre et surjectif $S' \rightarrow S$ et $Y_\bullet \rightarrow Y$, $X_\bullet \rightarrow X$ les schémas simpliciaux augmentés qui s'en déduisent. (La réduction au cas d'un morphisme propre et surjectif $S' \rightarrow S$ résulte de 2.1.5.) Factorisons $\overleftarrow{\varepsilon}$ en

$$\begin{array}{ccccc}
X_\bullet \times_{S_\bullet} Y_\bullet & \xrightarrow{\overleftarrow{r}_\bullet} & X \times_S Y_\bullet & \xrightarrow{\overleftarrow{\varepsilon}_Y} & X \times_S Y \\
& & \searrow \overleftarrow{\varepsilon} & & \nearrow
\end{array}$$

On a vu au paragraphe précédent (2.3.4) que le morphisme $\mathcal{K} \rightarrow R\overleftarrow{\varepsilon}_{Y*} \overleftarrow{\varepsilon}_Y^* \mathcal{K}$ est un isomorphisme. Pour conclure, il suffit de montrer que l'unité $\text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_{\bullet*} \overleftarrow{r}_\bullet^*$ est un isomorphisme, évalué en un complexe de $D^+(X \times_S Y_\bullet, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Les images directes et inverses simpliciales se calculant étage par étage, il suffit de montrer que, pour chaque $i \geq 0$, le morphisme

$$\text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_{i*} \overleftarrow{r}_i^*$$

associé aux morphismes

$$\begin{array}{ccc}
X \xleftarrow{r'_i} X_i & & X_i \times_{S_i}^{\leftarrow} Y_i \\
\downarrow & \square & \downarrow \overleftarrow{r}_i \\
S \xleftarrow{r_i} S_i & \xleftarrow{\quad} & Y_i \\
& & \downarrow \overleftarrow{\varepsilon} \\
& & X \times_S Y_i
\end{array}$$

est un isomorphisme. C'est ce qu'affirme le théorème 1.1.2.

2.3.6. *Famille de type (iv)* : $(X' = X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$. On suppose ici que le morphisme $Y \rightarrow S$ se factorise à travers un morphisme *propre* $S' \rightarrow S$, et on définit $S_\bullet$ et $X_\bullet$ comme ci-dessus. Notons que le cosquelette sur $B = (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de $(X' \rightarrow S' \leftarrow Y)$ est, à l'étage i , l'objet $X_i \rightarrow S_i \leftarrow Y$, où $Y \rightarrow S_i$ est le morphisme évident se factorisant à travers la diagonale. Décomposons le morphisme $\overleftarrow{\varepsilon}$ en

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{\bullet} \times_{S_{\bullet}}^{\leftarrow} Y & \xrightarrow{\overleftarrow{r}_{\bullet}} & (X \times_S^{\leftarrow} Y)_{\bullet} & \longrightarrow & X \times_S^{\leftarrow} Y \\
 & \searrow \overleftarrow{\varepsilon} & & & \nearrow
 \end{array}$$

où $(X \times_S^{\leftarrow} Y)_{\bullet}$ est le topos total associé à l'objet simplicial constant de valeur $(X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de $\mathcal{B}$. (Il s'agit du topos des faisceaux cosimpliciaux sur $X \times_S^{\leftarrow} Y$.) La descente cohomologique est triviale pour $(X \times_S^{\leftarrow} Y)_{\bullet} \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$: l'identité a une section. (Alternativement : le foncteur image directe se dérive en le foncteur complexe simple associé, $\text{Tot} : D^+((X \times_S^{\leftarrow} Y)_{\bullet}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow D^+(X \times_S^{\leftarrow} Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.) La conclusion résulte du fait que l'unité $\text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_{\bullet*} \overleftarrow{r}_{\bullet}^*$ est un isomorphisme, par une nouvelle application du théorème 1.1.2.

2.3.7. *Famille de type (v) :* $(X \rightarrow S' \leftarrow Y' = Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$. On suppose ici que le morphisme $X \rightarrow S$ se factorise à travers un morphisme *étale* $S' \rightarrow S$. Nous avons déjà donné en 2.3.1 une démonstration du résultat souhaité. On peut également procéder comme précédemment ; voici brièvement un argument. Notons à nouveau $S_{\bullet}$ le 0-cosquelette du morphisme $S' \rightarrow S$, et $Y_{\bullet} = Y \times_S S_{\bullet}$ le schéma simplicial augmenté vers Y qui s'en déduit. Le cosquelette de $(X \rightarrow S' \leftarrow Y')$ sur B est, à l'étage i , l'objet $X \rightarrow S_i \leftarrow Y_i$, où $X \rightarrow S_i$ est le morphisme évident se factorisant à travers la diagonale. Le morphisme $X \times_{S_i}^{\leftarrow} Y_i \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$ étant une équivalence, le topos simplicial $X \times_{S_{\bullet}}^{\leftarrow} Y_{\bullet}$ est constant : son topos total est équivalent au topos (total de) $(X \times_S^{\leftarrow} Y)_{\bullet}$. Comme au paragraphe précédent, on est ramené au cas trivial où $S' = S$.

On hyper base change

Weizhe Zheng

In this note, we sketch a short proof of Gabber's hyper base change theorem [XII_A-2.2.5](#) without using oriented products. We will first treat the Abelian case and then briefly comment on the non-Abelian case. We also include an analogue, due to Gabber, for topological spaces.

1. A descent formalism

We let $\mathcal{S}$ denote the category of schemes. We fix a diagram $X \rightarrow S \leftarrow Y$ in $\mathcal{S}$ and a complex $K \in D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z})$ whose cohomology sheaves are torsion (see [\[SGA 4 IX 1.1\]](#) for the definition of torsion sheaves).

We regard $X \rightarrow S \leftarrow Y$ as an object of the category of functors $\text{Fun}(V, \mathcal{S})$, where V denotes the diagram category $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$. We let $\mathcal{B}$ denote the full subcategory of $\text{Fun}(V, \mathcal{S})$ spanned by diagrams $X' \rightarrow S' \leftarrow Y'$ such that $Y' \rightarrow S'$ is coherent (namely, quasi-compact quasi-separated). We let $\mathcal{C}$ denote the overcategory $\mathcal{B}/(X \rightarrow S \leftarrow Y)$. We will drop the letter R in derived direct image functors.

DEFINITION 1.1. (i) We say that an augmented simplicial object $f_\bullet$ in $\mathcal{C}$ corresponding to the diagram

$$(1.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_\bullet & \xrightarrow{a_\bullet} & S_\bullet & \xleftarrow{b_\bullet} & Y_\bullet \\ f_{X_\bullet} \downarrow & & \downarrow f_{S_\bullet} & & \downarrow f_{Y_\bullet} \\ X_{-1} & \xrightarrow{a_{-1}} & S_{-1} & \xleftarrow{b_{-1}} & Y_{-1} \\ x \downarrow & & \downarrow & & \downarrow y \\ X & \longrightarrow & S & \longleftarrow & Y \end{array}$$

is **of descent** (relative to K) if the composite map

$$(1.1.2) \quad x_\star a_{-1}^\star b_{-1\star} y^\star K \xrightarrow{\Lambda_Y} x_\star a_{-1}^\star b_{-1\star} f_{Y_\bullet}^\star f_{Y_\bullet}^\star y^\star K \simeq x_\star a_{-1}^\star f_{S_\bullet}^\star b_{\bullet\star} f_{Y_\bullet}^\star y^\star K \xrightarrow{C_X} x_\star f_{X_\bullet}^\star a_\bullet^\star b_{\bullet\star} f_{Y_\bullet}^\star y^\star K$$

is an isomorphism in $D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z})$, where Λ_Y is the adjunction map induced by $f_{Y_\bullet}$ and C_X is the base change map induced by the top left square of (1.1.1).

- (ii) We say that a morphism $f: T_0 \rightarrow T_{-1}$ in $\mathcal{C}$ is **of descent** if its Čech nerve $(\text{cosk}_0^{T_{-1}} T_0)_\bullet \rightarrow T_{-1}$ is of descent. We say that f is **of universal descent** if it is of descent after arbitrary base change in $\mathcal{C}$.
- (iii) We say that an augmented simplicial object $T_\bullet \rightarrow T_{-1}$ in $\mathcal{C}$ is a **hypercovering for universal descent** if for every $n \geq 0$, the morphism $T_n \rightarrow (\text{cosk}_{n-1}^{T_{-1}} T_\bullet)_n$ is of universal descent.

REMARK 1.2. The map (1.1.2) is equal to the composite map

$$x_\star a_{-1}^\star b_{-1\star} y^\star K \xrightarrow{\Lambda_X} x_\star f_{X_\bullet}^\star f_{X_\bullet}^\star a_{-1}^\star b_{-1\star} y^\star K \simeq x_\star f_{X_\bullet}^\star a_\bullet^\star f_{S_\bullet}^\star b_{-1\star} y^\star K \xrightarrow{C_Y} x_\star f_{X_\bullet}^\star a_\bullet^\star b_{\bullet\star} f_{Y_\bullet}^\star y^\star K,$$

where A_X is the adjunction map induced by $f_{X\bullet}$ and C_Y is the base change map induced by the transpose of the top right square of (1.1.1). In fact, the diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x_* a_{-1}^* b_{-1*} f_{Y\bullet}^* f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{\sim} & x_* a_{-1}^* f_{S\bullet}^* b_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K \\
 & \nearrow A_Y & & \nearrow C_Y & \\
 x_* a_{-1}^* b_{-1*} y^* K & \xrightarrow{A_S} & x_* a_{-1}^* f_{S\bullet}^* f_{S\bullet}^* b_{-1*} y^* K & & \\
 & \searrow A_X & & \searrow C_X & \\
 & & x_* f_{X\bullet}^* f_{X\bullet}^* a_{-1}^* b_{-1*} y^* K & \xrightarrow{\sim} & x_* f_{X\bullet}^* a_{\bullet}^* f_{S\bullet}^* b_{-1*} y^* K \\
 & & & \nearrow C_X & \\
 & & & & x_* f_{X\bullet}^* a_{\bullet}^* b_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K
 \end{array}$$

is commutative, where A_S is the adjunction map induced by $f_{S\bullet}$.

We say that a morphism $g: Z_0 \rightarrow Z$ in $\mathcal{S}$ is **of cohomological descent relative to** $L \in D^+(Z_{\text{ét}}, \mathbf{Z})$ if the adjunction map $L \rightarrow g_{\bullet*} g_{\bullet}^* L$ is an isomorphism, where $g_{\bullet}$ is the Čech nerve of g . By classical cohomological descent [SGA 4 v^{bis} 4.3.2, 4.3.3], g is of cohomological descent relative to L if either g is proper surjective and the cohomology sheaves of L are torsion or g is flat surjective locally of finite presentation.

PROPOSITION 1.3. *Let f be a morphism in $\mathcal{C}$ corresponding to the diagram*

$$(1.3.1) \quad \begin{array}{ccccc}
 X_0 & \xrightarrow{a_0} & S_0 & \xleftarrow{b_0} & Y_0 \\
 f_X \downarrow & & \downarrow f_S & & \downarrow f_Y \\
 X_{-1} & \xrightarrow{a_{-1}} & S_{-1} & \xleftarrow{b_{-1}} & Y_{-1} \\
 x \downarrow & & \downarrow & & \downarrow y \\
 X & \longrightarrow & S & \longleftarrow & Y.
 \end{array}$$

Then f is of descent if it satisfies either of the following conditions:

- (i) f_Y is of cohomological descent relative to $y^* K$, f_S is proper, and the top left square of (1.3.1) is Cartesian;
- (ii) f_X is of cohomological descent relative to $a_{-1}^* b_{-1*} y^* K$, f_S is étale, and the top right square of (1.3.1) is Cartesian.

Note that the assumption that b_n is coherent implies that $b_{n*} f_{Y,n}^* y^* K$ has torsion cohomology sheaves.

Proof. In case (i), A_Y is an isomorphism by assumption and C_X is an isomorphism by the proper base change theorem [SGA 4 XII 5.1]. In case (ii), A_X is an isomorphism by assumption and C_Y is an isomorphism by étale base change, and we conclude by Remark 1.2. $\square$

The following lemma on comparison of augmentations is similar to [SGA 4 v^{bis} 3.1.1].

LEMMA 1.4. *Let $f_{\bullet}: T_{\bullet} \rightarrow T_{-1}$, $f'_{\bullet}: T'_{\bullet} \rightarrow T_{-1}$ be augmented simplicial objects of $\mathcal{C}$ and let $\alpha_{\bullet}: T_{\bullet} \rightarrow T'_{\bullet}$ be a morphism over T_{-1} . Then the diagram*

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_* a_{-1}^* b_{-1*} y^* K & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 x_* f'_{X\bullet}^* a_{\bullet}^* b'_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{A_Y} & x_* f'_{X\bullet}^* a_{\bullet}^* b'_{\bullet*} \alpha_{Y\bullet}^* f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{\sim} & x_* f'_{X\bullet}^* a_{\bullet}^* \alpha_{S\bullet}^* b_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{C_X} & x_* f_{X\bullet}^* a_{\bullet}^* b_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K
 \end{array}$$

where the vertical and oblique arrows are given by (1.1.2), is commutative. Moreover, the composite $\eta_{\alpha_{\bullet}}$ of the horizontal arrows depends only on the simplicial homotopy class of $\alpha_{\bullet}$.

Proof. The first assertion is trivial: the diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 x_{\bullet} a_{-1}^* b_{-1*} y^* K & & & & \\
 \downarrow A_{f'_{Y\bullet}} & \searrow A_{f_{Y\bullet}} & & & \\
 x_{\bullet} a_{-1}^* b_{-1*} f'_{Y\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{A_{\alpha_{Y\bullet}}} & x_{\bullet} a_{-1}^* b_{-1*} f_{Y\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K & & \\
 \downarrow C_{f'_{X\bullet}} & & \downarrow C_{f_{X\bullet}} & \searrow C_{f_{X\bullet}} & \\
 x_{\bullet} f'_{X\bullet*} a_{\bullet}^* b_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{A_{\alpha_{Y\bullet}}} & x_{\bullet} f'_{X\bullet*} a_{\bullet}^* b_{\bullet*} \alpha_{Y\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K & \xrightarrow{C_{\alpha_{X\bullet}}} & x_{\bullet} f_{X\bullet*} a_{\bullet}^* b_{\bullet*} f_{Y\bullet}^* y^* K
 \end{array}$$

is commutative. To show the second assertion, let $\beta_{\bullet}: T_{\bullet} \rightarrow T'_{\bullet}$ be a morphism over T_{-1} and let $h: \alpha_{\bullet} \rightarrow \beta_{\bullet}$ be a simplicial homotopy over T_{-1} . As in the proof of [SGA 4 v^{bis} 3.1.1.9], consider the category D whose objects are objects of $[1] \times \Delta$ and whose morphisms are pairs $(\xi, \delta): (m, [n]) \rightarrow (m', [n'])$, where $\xi: [n] \rightarrow [m, m']$ and $\delta: [n] \rightarrow [n']$. Here $[m, m']$ denotes the subset of $[1]$ spanned by i with $m \leq i \leq m'$. The homotopy h defines a functor $\text{Th}T': D^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$, augmented over T_{-1} . Let J be a resolution of $(aha')^*(bhb')_*(fhf')^* y^* K$ such that the sheaves $J_{m, [n]}^k$ are flabby. We let $r_m: \Delta \rightarrow D$ denote the functor carrying $[n]$ to $(m, [n])$. Then J induces a cosimplicial homotopy between the maps $f'_{X\bullet*} r_0^* J \rightrightarrows f_{X\bullet*} r_1^* J$ of cosimplicial complexes on X_{-1} , which give rise to $\eta_{\alpha_{\bullet}}$ and $\eta_{\beta_{\bullet}}$. Therefore, $\eta_{\alpha_{\bullet}} = \eta_{\beta_{\bullet}}$. $\square$

The proof of the following proposition is similar to [SGA 4 v^{bis} 3.3.1 a), b)] (see also Remark 2.5 below).

PROPOSITION 1.5. (i) *A morphism f in $\mathcal{C}$ is of universal descent if it admits a section.*
(ii) *Let*

$$\begin{array}{ccc}
 T' & \xrightarrow{f'} & U' \\
 g' \downarrow & & \downarrow g \\
 T & \xrightarrow{f} & U
 \end{array}$$

be a Cartesian square in $\mathcal{C}$ such that the base change of f by $(U'/U)^n \rightarrow U$ is of descent for all $n \geq 1$ and the base change of g by $(T/U)^n \rightarrow U$ is of descent for all $n \geq 0$. Then f is of descent.

In (ii), the assumptions on f and g are satisfied if g is of descent and f', g' are of universal descent. In particular, if in (ii) f' and g are of universal descent, then f is of *universal* descent.

The following corollary is similar to [SGA 4 v^{bis} 3.3.1 c), d)].

COROLLARY 1.6. *Let $T \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} W$ be a sequence of morphisms in $\mathcal{C}$.*

- (i) *If gf is of universal descent, then g is of universal descent.*
- (ii) *If f is of universal descent and g is of descent, then gf is of descent.*

Proof. Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 T & & & & \\
 \searrow f & & & & \\
 & T \times_W U & \xrightarrow{h} & U & \\
 \text{id} \searrow & \downarrow g' & & \downarrow g & \\
 & T & \xrightarrow{gf} & W &
 \end{array}$$

Since g' admits a section, g' is of universal descent by Proposition 1.5 (i). Case (i) then follows from Proposition 1.5 (ii). In case (ii), h is of universal descent by (i), and the assertion follows again from Proposition 1.5 (ii). $\square$

The following analogue of [SGA 4 v^{bis} 3.3.1 f)] is obvious.

PROPOSITION 1.7. *Let $(f_\alpha: T_\alpha \rightarrow U_\alpha)_{\alpha \in A}$ be a family of morphisms of $\mathcal{C}$ of descent. Then $\coprod_{\alpha \in A} f_\alpha: \coprod_{\alpha \in A} T_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha$ is of descent.*

The following is a consequence of Corollary 1.6 and Proposition 1.7, applied to constant diagrams of the form $Z \rightarrow Z \leftarrow Z$.

COROLLARY 1.8. *Let $(Z_\alpha \rightarrow Z)_{\alpha \in A}$ be a covering family for the h -topology (XII_A-2.1.3) on $\mathcal{S}$. Then the morphism $\coprod_{\alpha \in A} Z_\alpha \rightarrow Z$ is of cohomological descent relative to every $L \in D^+(Z_{\text{ét}}, Z)$ whose cohomology sheaves are torsion.*

We consider the oriented h -topology on $\mathcal{B}$ generated by families of types (i) through (v) (XII_A-2.1.4).

COROLLARY 1.9. *Let $(T_\alpha \rightarrow T)_{\alpha \in A}$ be a family of morphisms in $\mathcal{C}$ that is covering for the oriented h -topology on $\mathcal{B}$. Then the morphism $\coprod_{\alpha \in A} T_\alpha \rightarrow T$ is of universal descent. In particular, if f is a morphism in $\mathcal{C}$ corresponding to the diagram (1.3.1) such that both top squares are Cartesian and f_S is a covering morphism for the h -topology, then f is of universal descent.*

Proof. The second assertion follows from the first one, as f is a covering family of type (iii) for the oriented h -topology. To show the first assertion, we may assume, by Corollary 1.6 and Proposition 1.7, that the family $(T_\alpha \rightarrow T)_{\alpha \in A}$ is of one of the five types in the definition of the oriented h -topology. Moreover, for type (iii), we may assume that the family is induced by either a proper surjective morphism or an étale covering. The case of a proper surjective morphism being a composition of types (ii) and (iv), we may further restrict to the case of an étale covering. We write $T_\alpha = (X_\alpha \rightarrow S_\alpha \leftarrow Y_\alpha)$, $T = (X' \rightarrow S' \leftarrow Y')$. For type (ii), localizing on S' , we may assume that A is finite, because every h -covering of a quasi-compact scheme admits a finite subfamily that is an h -covering. The finiteness of A implies that $\coprod_{\alpha \in A} S_\alpha = \coprod_{\alpha \in A} S' \rightarrow S'$ is proper. We conclude by Proposition 1.3 (ii) for types (i), (iii), (v), and by Proposition 1.3 (i) for types (ii) and (iv). $\square$

The proof of the following proposition is similar to [SGA 4 v^{bis} 3.3.3].

PROPOSITION 1.10. *A hypercovering for universal descent in $\mathcal{C}$ is an augmentation of descent.*

2. Variants and counterexamples

REMARK 2.1. Let Λ be a ring annihilated by a positive integer. For $K \in D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, Section 1 holds with $\mathcal{B}$ replaced by the larger category $\text{Fun}(V, \mathcal{S})$, and the oriented h -topology in the first assertion of Corollary 1.9 replaced by the **restricted oriented h -topology** on $\text{Fun}(V, \mathcal{S})$, generated by families of types (i) through (v), where for type (ii) we restrict to families of finite index sets. In view of the second assertion of Corollary 1.9, Proposition 1.10 in this setting implies the hyper base change theorem XII_A-2.2.5 (without the assumption that g is coherent).

REMARK 2.2. In Section 1, we may replace K by an ind-finite stack on $Y_{\text{ét}}$. For proper base change and proper cohomological descent in this setting, we refer to XX-7.1 and [Orgogozo, 2003, Proposition 2.5] (the latter extends easily to stacks not necessarily in groupoids). Thus we obtain another proof of the non-Abelian hyper base change theorem (see XII_A-2.2.6.2).

REMARK 2.3 (Gabber). Section 1 also holds with $\mathcal{S}$ replaced by the category of topological spaces, $\mathcal{B}$ replaced by the category $\text{Fun}(V, \mathcal{S})$, K replaced by either a complex in $D^+(Y, \mathbf{Z})$ (not necessarily of torsion cohomology sheaves), or a stack on Y (not necessarily ind-finite), and the oriented h -topology replaced by the *restricted oriented h -topology*. Proper morphisms are defined to be separated and universally closed, and étale morphisms are defined to be local homeomorphisms. The analogue of the proper base change theorem for topological spaces in the Abelian case is shown in [SGA 4 v^{bis} 4.1.1]. See Section 3 for the case of stacks.

Note that the first assertion of Corollary 1.9 in this setting does not hold for the oriented h -topology. Indeed, the family $(T_i \rightarrow T)_{i>0}$, where $T_i = (\{0\} \rightarrow [0, 1] \leftarrow \xi_i)$, $T = (\{0\} \rightarrow [0, 1] \leftarrow \coprod_{i>0} \xi_i)$, $\xi_i = \{1/i\}$, is covering for the oriented h -topology, but the morphism $\coprod_{i>0} T_i \rightarrow T$ is not of descent for general K .

REMARK 2.4. Classical cohomological descent and the descent formalism in this note can be dealt with uniformly using the language of ∞ -categories. In fact, Proposition 1.5, Corollary 1.6, and Proposition 1.10 (resp. their non-Abelian analogues in Remark 2.2) incarnate abstract descent properties in ∞ -categories ([Liu & Zheng, 2012, Lemma 3.1.2], [Liu & Zheng, 2014, Section 4.1]) applied to the functor from the nerve of $\mathcal{C}$ to the derived ∞ -category $\mathcal{D}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z})$ (resp. to the 2-category of stacks on $X_{\text{ét}}$) sending an object of $\mathcal{C}$ corresponding to the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{a} & S' & \xleftarrow{b} & Y' \\ \downarrow x & & \downarrow & & \downarrow y \\ X & \longrightarrow & S & \longleftarrow & Y \end{array}$$

to $x_* a^* b_* y^* K$.

REMARK 2.5. We conclude this section by making corrections to [SGA 4 v^{bis} 3.2.1, 3.3.1 b)]. As the referee points out, [SGA 4 v^{bis} 3.3.1 b)] would imply, by taking $g = f$ and applying [SGA 4 v^{bis} 3.3.1 a)] to f' , that every morphism of cohomological G-descent is of universal cohomological G-descent. We have the following counterexample. We define a category B by taking for objects the pairs (M, w) , where M is a set and $w: M \rightarrow \{0, 1, 2\}$ is a function, and for morphisms $(M, w) \rightarrow (M', w')$ the maps $\mu: M \rightarrow M'$ such that $w(m) \leq w'(\mu(m))$ for all $m \in M$. The category B admits small limits and small colimits. Small coproducts in B are disjoint and universal. Consider the functor $F: B \rightarrow \mathbf{Ens}$ to the category of sets carrying (M, w) to $M \amalg w^{-1}(1)$ and carrying $\mu: (M, w) \rightarrow (M', w')$ to the map $M \amalg w^{-1}(1) \rightarrow M' \amalg w'^{-1}(1)$ induced by the maps $M \xrightarrow{\mu} M' \rightarrow M' \amalg w'^{-1}(1)$ and $w^{-1}(1) \xrightarrow{\iota} w'^{-1}(2) \amalg w'^{-1}(1) \xrightarrow{\text{inl}} M' \amalg w'^{-1}(1)$, where $\iota: w^{-1}(2) \rightarrow M'$ is the inclusion. For $i \in \{0, 1, 2\}$, we let $\bar{i}$ denote the object $(\{\star\}, i)$ of B , where $\{\star\}$ denotes a singleton. By construction, $F(\bar{0}) = F(\bar{2}) = \{\star\}$ and $F(\bar{1}) = \{\star\} \amalg \{\star\}$. We define a category $\mathcal{E}$ bifibered in duals of topoi over $\mathbf{Ens}$ by taking for objects the pairs $(N, \mathcal{F})$, where N is a set and $\mathcal{F}$ is a presheaf on the discrete category N , and for morphisms the pairs $(\nu, \phi): (N, \mathcal{F}) \rightarrow (N', \mathcal{F}')$, where $\nu: N \rightarrow N'$ is a map and $\phi: \mathcal{F}' \rightarrow \nu_* \mathcal{F}$ is a morphism of presheaves. Let Λ be a nonzero ring. We consider the category $\mathcal{E} \times_{\mathbf{Ens}} B$ bifibered in duals of topoi over B and the corresponding category G bifibered in the categories of Λ -modules over the opposite of B . Then, in the Cartesian square

$$\begin{array}{ccc} \bar{0} & \xrightarrow{f'} & \bar{0} \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ \bar{1} & \xrightarrow{f} & \bar{2} \end{array}$$

f' is of universal effective cohomological G-descent, g is of effective cohomological G-descent, but neither f nor g' is of cohomological G-descent. The constant simplicial objects associated to $\bar{0}$ and $\bar{1}$ augmented over $\bar{2}$ also provide a counterexample to [SGA 4 v^{bis} 3.2.1].

In [SGA 4 v^{bis} 3.2.1], one should make the additional assumption that ν remains an augmentation of cohomological G-descent after every base change $X_n \rightarrow S$, $n \geq 0$. In [SGA 4 v^{bis} 3.3.1 b)], g should be assumed to be of *universal* cohomological G-i-descent.

3. Appendix: Proper base change for stacks on topological spaces

The results and proofs in this section are completely due to Gabber. Recall that a continuous map $f: X \rightarrow Y$ between topological spaces is said to be **separated** if the diagonal embedding $X \rightarrow X \times_Y X$ is closed. We say that a continuous map between topological spaces is **proper** if it is separated and universally closed, or, equivalently, separated and closed with compact fibers. We do *not* assume stacks to be in groupoids.

THEOREM 3.1. *Consider a Cartesian square*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

in the category of topological spaces with f proper. Then, for every stack $\mathcal{C}$ on X , the base change morphism

$$g^* f_* \mathcal{C} \rightarrow f'_* g'^* \mathcal{C}$$

is an equivalence.

For a generalization to higher stacks in the case of locally compact Hausdorff spaces, we refer to [Lurie, 2009, Corollary 7.3.1.18].

The first reduction steps for Theorem 3.1 are similar to the Abelian case [SGA 4 v^{bis} 4.1.1]. Theorem 3.1 is equivalent to Corollary 3.2 below. We obtain the corollary by taking Y' to be a point in the theorem. By [Giraud, 1971, III.2.1.5.8], to show the theorem, it suffices to show that the base change morphism is an equivalence after taking stalks, which follows from the corollary applied to f and f' by considering the sequence $(f_* \mathcal{C})_y \rightarrow (f'_* g'^* \mathcal{C})_{y'} \rightarrow (j^* \mathcal{C})(f^{-1}(y))$, where y' is a point of Y' and $y = g(y')$.

COROLLARY 3.2. *Let $f: X \rightarrow Y$ be a proper map between topological spaces and let y be a point of Y . Then, for every stack $\mathcal{C}$ on X , the functor $(f_* \mathcal{C})_y \rightarrow (j^* \mathcal{C})(f^{-1}(y))$ is an equivalence. Here $j: f^{-1}(y) \rightarrow X$ denotes the inclusion.*

We have (cf. [Giraud, 1971, VII.2.1.5.2]) $(f_* \mathcal{C})_y \simeq \operatorname{colim}_V \mathcal{C}(f^{-1}(V))$, where colim means 2-colimit, and V runs through open neighborhoods of y in Y . Since f is closed, the $f^{-1}(V)$ form a fundamental system of neighborhoods of $f^{-1}(y)$. Therefore, Corollary 3.2 follows from case (i) of the following theorem.

THEOREM 3.3. *Let X be a topological space and let K be a topological subspace satisfying any of the following conditions:*

- (i) K is compact and every pair of distinct points of K have disjoint neighborhoods in X ;
- (ii) X is paracompact Hausdorff and K is closed in X ;
- (iii) X is metrizable.

We let $j: K \rightarrow X$ denote the inclusion. Then, for every stack $\mathcal{C}$ on X , the functor

$$\alpha: \operatorname{colim}_{\mathcal{U}} \mathcal{C}(\mathcal{U}) \rightarrow (j^* \mathcal{C})(K),$$

induced by the restriction functors $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \rightarrow (j^* \mathcal{C})(K)$, where $\mathcal{U}$ runs through open neighborhoods of K in X , is an equivalence.

The Abelian analogue of the theorem was proved in [SGA 4 v^{bis} 4.1.3] for case (i) and in [Godement, 1973, Théorème II.4.11.1] for cases (ii) and (iii).

Proof. The theorem holds for sheaves of sets: for cases (ii) and (iii), this is [Godement, 1973, Théorème II.3.3.1, Corollaire 1]; for case (i), the proof for H^0 of Abelian sheaves given in [SGA 4 v^{bis} 4.1.3] works in general. Since taking sheaves of morphisms commutes with direct and inverse images [Giraud, 1971, II.3.1.5.3, II.3.2.8] and filtered colimits, it follows that α is fully faithful. Thus it suffices to show that α is essentially surjective.

Next we perform two reduction steps similar to XX-6.2. A given section s of $j^* \mathcal{C}$ generates a maximal subgerbe, corresponding to a section of the sheaf of maximal subgerbes $\operatorname{Ger}(j^* \mathcal{C})$. By [Giraud, 1971, III.2.1.5.5], $\operatorname{Ger}(j^* \mathcal{C}) \simeq j^* \operatorname{Ger}(\mathcal{C})$. By the known case of sheaves of sets of the theorem, the section of $j^* \operatorname{Ger}(\mathcal{C})$ extends to a section of $\operatorname{Ger}(\mathcal{C})$ on an open neighborhood $\mathcal{U}$, corresponding to a maximal subgerbe $\mathcal{G}$ of the restriction of $\mathcal{C}$ to $\mathcal{U}$ such that s is a section of the restriction of $\mathcal{G}$ to K . If the theorem holds for $\mathcal{G}$, then we obtain the desired extension of s . Therefore, we may assume that $\mathcal{C}$ is a gerbe.

We claim that if $\beta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ is a faithful morphism of stacks on X and the theorem holds for $\mathcal{C}'$, then the theorem holds for $\mathcal{C}$. Let $s \in (j^*\mathcal{C})(K)$ be a section. By the theorem for $\mathcal{C}'$, the image of s in $(j^*\mathcal{C}')(K)$ extends to a section of $\mathcal{C}'$ on an open neighborhood U . The stack of liftings $U \times_{\mathcal{C}'} \mathcal{C}$ is a sheaf by the faithfulness of β . Thus, by the known case of sheaves of the theorem, the section of $j^*(U \times_{\mathcal{C}'} \mathcal{C}) \simeq K \times_{j^*\mathcal{C}'} j^*\mathcal{C}$ defined by s extends to a section of $U \times_{\mathcal{C}'} \mathcal{C}$ on an open neighborhood of K in U , which gives an extension of s as claimed.

Let X^δ be X with the discrete topology and let $\varepsilon: X^\delta \rightarrow X$ be the identity map. For any sheaf of sets $\mathcal{F}$ on X , the adjunction map $\mathcal{F} \rightarrow \varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{F}$ is a monomorphism. Since taking sheaves of morphisms commutes with ε_* and ε^* , the adjunction morphism $\mathcal{C} \rightarrow \varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{C}$ is faithful. By the above claim, it is enough to prove the theorem for $\varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{C}$. The gerbe $\varepsilon^*\mathcal{C}$ on X^δ is necessarily equivalent to the gerbe of G -torsors for a sheaf of groups G on X^δ . Then $\varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{C}$ is equivalent to the gerbe of ε_*G -torsors, and it suffices to show that every $j^*\varepsilon_*G$ -torsor on K is trivial. Since ε_*G is flabby, $j^*\varepsilon_*G$ is soft in cases (i) and (ii) by [SGA 4 v^{bis} 4.1.5] and [Godement, 1973, Théorème II.3.4.2] and flabby in case (iii) by [Godement, 1973, Théorème II.3.3.1, Corollaire 2]. We conclude by the following lemma. $\square$

LEMMA 3.4. *Let G be a flabby sheaf of groups on a topological space X , or a soft sheaf of groups on a paracompact Hausdorff space X . Then any G -torsor P on X has a section.*

Proof. Consider an open covering $(U_i)_{i \in I}$ such that $P(U_i)$ is nonempty for all $i \in I$.

In the flabby case, consider the set of pairs (J, σ) , where $J \subset I$ and $\sigma \in P(\bigcup_{i \in J} U_i)$, ordered by extension. By Zorn's lemma, there exists a maximal element (J_0, σ_0) . Let $U_0 = \bigcup_{i \in J_0} U_i$. Let $i \in I$. Choose $\sigma_i \in P(U_i)$. The element of $G(U_0 \cap U_i)$ carrying the restriction of σ_i to the restriction of σ_0 extends to an element $g_i \in G(U_i)$. Patching σ_0 and $\sigma_i g_i$ produces an extension of σ_0 to $U_0 \cup U_i$. By the maximality of J_0 , we get $i \in J_0$. Therefore, $J_0 = I$ and $\sigma_0 \in P(X)$.

The soft case is similar. Since X is paracompact, we may assume $(U_i)_{i \in I}$ locally finite. By a usual lemma on normal spaces, there exists an open covering $(V_i)_{i \in I}$ with $\overline{V_i} \subset U_i$ for all $i \in I$. Consider the set of pairs (J, σ) , where $J \subset I$ and σ is a section of P restricted to $\bigcup_{i \in J} \overline{V_i}$, ordered by extension. By local finiteness, the hypothesis of Zorn's lemma is verified. Thus there exists a maximal element (J_0, σ_0) . Let $V = \bigcup_{i \in J_0} \overline{V_i}$, which is closed in X . Let $i \in I$. Choose $\sigma_i \in P(\overline{V_i})$. The element of $G(V \cap \overline{V_i})$ carrying the restriction of σ_i to the restriction of σ_0 extends to an element $g_i \in G(\overline{V_i})$. Patching σ_0 and $\sigma_i g_i$ produces an extension of σ_0 to $V \cup \overline{V_i}$. By the maximality of J_0 , we get $i \in J_0$. Therefore, $J_0 = I$ and $\sigma_0 \in P(X)$. $\square$

Le théorème de finitude

Fabrice Orgogozo

1. Introduction

1.1. L'objet de cet exposé est de démontrer le théorème suivant (**Intro.-1**).

THÉORÈME 1.1.1. *Soient X un schéma noethérien quasi-excellent (I-2.10), $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini, $n \geq 1$ un entier inversible sur X et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur Y . Alors :*

- (i) *Pour tout entier $q \geq 0$, le faisceau $R^q f_* \mathcal{F}$ est constructible.*
- (ii) *Il existe un entier N tel que $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ pour $q \geq N$.*

1.1.2. De façon équivalente, le morphisme $Rf_* : D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ induit un morphisme $D_{\mathbf{c}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow D_{\mathbf{c}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ entre les sous-catégories de complexes à cohomologie bornée et constructible.

1.2. Remarques.

1.2.1. Organisation de l'exposé. L'énoncé ci-dessus est la conjonction d'un résultat de *constructibilité* (i) et d'un résultat d'*annulation* (ii). Dans le § 2, nous présentons une démonstration de la constructibilité qui ne requiert pas la forme forte du théorème d'uniformisation mais seulement la forme faible (VII-1.1). Les ingrédients clefs supplémentaires sont le théorème de pureté absolu, le théorème de constructibilité générique (dû à P. Deligne) et la formule d'hyper-changement de base. Au paragraphe 2.3, nous donnons une démonstration d'un résultat d'annulation pour les schémas *de dimension finie*, qui complète la démonstration du théorème 1.1.1 pour ces schémas. Le cas général est traité en § 3, en s'appuyant sur le théorème d'uniformisation premier à ℓ (IX-1.1), où ℓ est un nombre premier divisant n . Enfin, nous esquissons des extensions de ce résultat d'abord au cas des coefficients ℓ -adiques, où ℓ est un nombre premier inversible sur les schémas considérés, puis au cas des champs (comme coefficients).

1.2.2. Terminologie et notations. Nous dirons d'un complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, où Λ est un anneau fini, est **constructible** s'il appartient à $\text{Ob } D_{\mathbf{c}}^b(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, c'est-à-dire si ses faisceaux de cohomologie sont constructibles, nuls en grands degrés. Lorsque $n \geq 1$ est fixé et que cela ne semble pas créer de confusion nous notons Λ l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. De même, un complexe $\mathcal{K}$ sur un schéma X étant donné, nous noterons souvent encore $\mathcal{K}$ ses images inverses sur différents X -schémas.

2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible

Dans cette section, on démontre 1.1.1 (i), dont on reprend les notations.

2.1. Réductions. Les réductions suivantes sont classiques : cf. p. ex. [SGA 4 XVI 4.5].

2.1.1. Réduction au cas où le faisceau $\mathcal{F}$ est constant. D'après [SGA 4 IX 2.14 (ii)], le faisceau $\mathcal{F}$ s'injecte dans une somme finie $\mathcal{G} = \bigoplus_{i \in I} g_{i*} C_i$ d'images directes par des morphismes finis g_i de faisceaux en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules constants constructibles C_i . On peut supposer $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Cela résulte d'une part du fait qu'un sous-quotient d'un faisceau constructible est constructible⁽ⁱ⁾ et d'autre part de la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle

$$Rf_* \mathcal{F} \rightarrow Rf_* \mathcal{G} \rightarrow Rf_*(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \xrightarrow{+1}.$$

⁽ⁱ⁾Pour le voir, on peut utiliser le fait qu'un faisceau est constructible si et seulement si il est noethérien, cf. [SGA 4 IX 2.9 (i)].

Enfin, on peut supposer $\mathcal{F}$ constant constructible car on peut supposer l'ensemble d'indices I être un singleton et l'égalité $Rf_*(g_*C) = R(f \circ g)_*C$, où g est un morphisme fini, nous permet de supposer $g = \text{Id}$. Décomposant n en produit, on se ramène au cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau constant F_ℓ , le nombre premier ℓ étant inversible sur X (cf. p. ex. [SGA 4½ [Th. finitude] 2.2 b)).

2.1.2. *Réduction au cas où le morphisme f est une immersion ouverte.* Un faisceau sur le schéma X étant constructible si et seulement si il l'est localement pour la topologie de Zariski ([SGA 4 IX 2.4 (ii)]), on peut supposer X affine. On utilise ici le fait trivial que la formation des images directes commute au changement de base par un ouvert de Zariski. On peut également supposer Y affine ; cela résulte par exemple de l'analogue faisceutique

$$E_1^{p,q} = R^q f_{p*}(\mathcal{F}|_{Y_p}) \Rightarrow R^{p+q} f_* \mathcal{F}$$

de la suite spectrale de Leray ([Deligne, 1974, 5.2.7.1]), où les $f_p : Y_p \rightarrow X$ sont déduits de f et d'un hyperrecouvrement Zariski $Y_\bullet \rightarrow Y$. Le morphisme $f : Y \rightarrow X$ est alors affine donc quasi-projectif, et le théorème de constructibilité étant connu pour les morphismes propres ([SGA 4 XIV 1.1]), on peut supposer que f est une *immersion ouverte* dominante. (On pourrait également utiliser le théorème de compactification de Nagata lorsque f est séparé.) Conformément à l'usage, nous noterons dorénavant $j : U \rightarrow X$ le morphisme f .

2.2. Fin de la démonstration du théorème 1.1.1 (i).

2.2.1. Soit $q \geq 0$ un indice pour lequel on souhaite montrer que le faisceau $R^q j_* F_\ell$ est constructible. On rappelle que j est une immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ et ℓ est un nombre premier inversible sur X . Il résulte du critère de constructibilité [SGA 4 IX 2.4(v)] qu'il suffit de démontrer que pour toute immersion fermée $g : Z \hookrightarrow X$, le faisceau $g^* R^q j_* F_\ell$ est constructible *sur un ouvert dense* de Z . Le théorème d'uniformisation locale (VII-1.1), joint à la méthode classique de construction d'hyperrecouvrements ([Deligne, 1974, § 6.2]), a pour corollaire immédiat le fait suivant.

THÉORÈME 2.2.2. *Il existe un hyperrecouvrement pour la topologie h sur les X -schémas de type fini $\varepsilon_\bullet : X_\bullet \rightarrow X$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- (i) *pour chaque $i \geq 0$, le schéma X_i est régulier ;*
- (ii) *pour chaque $i \geq 0$, l'image inverse de U dans chaque composante connexe de X_i est soit le complémentaire du support d'un diviseur à croisements normaux strict, soit vide.*

La topologie h sur la catégorie des X -schémas de type fini est définie de façon semblable à XII_A-2.1.3. (Voir aussi XV-2.2.1 et [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001].) On utilise le fait que, par II-3.2.1, un morphisme dans alt/X qui est couvrant pour la topologie des altérations est un h -recouvrement.

2.2.3. Notons $Z_\bullet$, $g_\bullet$ et $j_\bullet$ le schéma et les morphismes simpliciaux qui se déduisent de Z , g et j respectivement par le changement de base $X_\bullet \rightarrow X$. Il résulte du théorème de pureté absolue (XVI-3.1.1) que le complexe $g_\bullet^* Rj_\bullet \wedge$ sur $Z_\bullet$ est à cohomologie constructible. Par ailleurs, il résulte du théorème de constructibilité générique [SGA 4½ [Th. finitude] 1.9 (i)] — appliqué aux morphismes $\varepsilon_p : Z_p \rightarrow Z$ et aux complexes $g_p^* Rj_p F_\ell$ — et de la suite spectrale rappelée ci-dessus qu'il existe un ouvert dense de Z au-dessus duquel le tronqué en degrés inférieurs ou égaux à q de l'image directe $R\varepsilon_{Z,\bullet}(g_\bullet^* Rj_\bullet F_\ell)$ est *constructible*. D'après le théorème d'hyper-changement de base (XII_A-2.2.5 ou XII_B-1.10), cette image directe est isomorphe à $g^* Rj_* F_\ell$. Le faisceau $g^* R^q j_* F_\ell$ est donc constructible sur un ouvert dense de Z . CQFD.

2.3. Compléments.

THÉORÈME 2.3.1. *Soient S un schéma noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini entre S -schémas de type fini et n un entier inversible sur S . Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaite :*

- (i) *le schéma S est de dimension 1 ;*
- (ii) *le schéma S est local de dimension 2.*

Alors, pour faisceau de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules constructible $\mathcal{F}$ sur X , les faisceaux image directe $R^q f_* \mathcal{F}$ sont constructibles et nuls pour $q \gg 0$.

REMARQUE 2.3.2. On verra en XIX-2.5 qu'il existe un contre-exemple à la constructibilité lorsque S est noëthérien de dimension 2 (non local). Ceci résulte de l'existence d'une surface régulière et d'un diviseur possédant une infinité de points doubles. Il serait intéressant de construire un contre-exemple à l'énoncé de constructibilité précédent lorsque S est *local* (noëthérien) de dimension 3, ou bien de montrer qu'il n'en existe pas.

Esquisse de démonstration. (i) D'après le théorème de constructibilité générique ([SGA 4½ [Th. finitude] 1.9 (i)]), il existe un ouvert dense de S au-dessus duquel le résultat est acquis. On peut donc supposer le schéma S *local*. Il est également loisible de le supposer strictement hensélien. Par restriction à ses composantes irréductibles, on peut finalement supposer S local *intègre* (de dimension 1). Soit $S' \rightarrow S$ le morphisme de normalisation. C'est un homéomorphisme universel de sorte que l'on peut remplacer S par S' . Or, ce dernier schéma est noëthérien régulier, de dimension 1. La conclusion résulte alors du théorème de constructibilité [SGA 4½ [Th. finitude] 1.1] et du théorème de finitude de la dimension cohomologique [SGA 4 x 3.2, 4.4]. (Voir aussi [Illusie, 2003, 2.4] et XVIII_A-1.1.)

(ii) Soit s le point fermé de S . Le schéma $S - \{s\}$ étant de dimension 1 le résultat est acquis au-dessus de cet ouvert. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -Module constructible sur X et considérons un triangle distingué

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathrm{R}j_* j^* \mathcal{F},$$

où j est l'immersion ouverte $X - X_s \hookrightarrow X$. Notons que $\mathcal{H}$ est à support dans X_s et constructible si $\mathrm{R}j_* j^* \mathcal{F}$ l'est. Appliquant le foncteur $\mathrm{R}f_*$ au triangle précédent et utilisant la finitude sur $X - X_s$ (resp. X_s), on est ramené à montrer la constructibilité des images directes par les immersions ouvertes $X - X_s \hookrightarrow X$ et $Y - Y_s \hookrightarrow Y$. On utilise alors le morphisme de complétion $\hat{S} \rightarrow S$ et le théorème de comparaison de Gabber-Fujiwara ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]) pour se ramener au cas où le schéma local S est complet, donc excellent. $\square$

2.3.3. Reprenons les notations du théorème 1.1.1 et supposons le schéma X de dimension finie. Le (i) de *loc. cit.* joint au théorème de Lefschetz affine XV-1.1.2⁽ⁱⁱ⁾ entraînent le complément suivant, qui sera amélioré dans la section suivante.

PROPOSITION 2.3.4. Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent de dimension finie et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini. Pour tout entier $n \geq 1$ inversible sur X , le foncteur $\mathrm{R}f_* : D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est de dimension cohomologique finie. En particulier, il induit un foncteur de $D^b(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dans $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.

Démonstration. On peut supposer X affine. Il résulte de la suite spectrale de Čech alternée ([Gabber & Ramero, 2013, 7.2.20]) associée à un recouvrement fini par des ouverts affines de Y que l'on peut supposer f séparé puis — par une nouvelle application de cette suite spectrale — affine (voir aussi XVIII_A-1.4). Soit maintenant N un majorant de la dimension des fibres de f . La dimension cohomologique du foncteur image directe par f est au plus $d + N$, où $d = \dim(X)$. En effet, si $\bar{x}$ est un point géométrique de X , et $\mathcal{F}$ un $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -faisceau constructible sur Y , on a $(\mathrm{R}f_* \mathcal{F})_{\bar{x}} = \mathrm{R}\Gamma(Y \times_X X_{(\bar{x})}, \mathcal{F})$. Les schémas $X' = X_{(\bar{x})}$ et $Y' = Y \times_X X_{(\bar{x})}$ admettent respectivement les fonctions de dimension $\delta_{X'} : x' \mapsto \dim(\overline{\{x'\}})$ et la fonction induite $\delta_{Y'}$ définie en XIV-2.5.2. Notons que $\delta_{X'}$ est bornée par d et $\delta_{Y'}$ par $d + N$. Il résulte donc du théorème de Lefschetz affine (sous la forme XV-1.2.4) que $H^q(Y', \mathcal{F}) = 0$ pour $q > d + N$. $\square$

REMARQUE 2.3.5. On verra en XVIII_A-1.1 que l'on a un résultat d'annulation sous la seule hypothèse que X est noëthérien de dimension finie : si X est un schéma noëthérien strictement local hensélien de dimension $d > 0$ et n est inversible sur X , alors tout ouvert de X est de n -dimension cohomologique au plus $2d - 1$.

2.3.6. *Constructibilité des images directes dans le cas non abélien.* Quitte à remplacer la réduction 2.1.1 par [SGA 1 XIII §3, 4], l'usage de [SGA 4 XIV 1.1] en 2.1.2 par [SGA 1 XIII 6.2], le théorème de pureté absolu par [SGA 1 XIII 2.4], le théorème de finitude [SGA 4½ [Th. finitude] 1.9 (i)] par [Orgogozo, 2003, 2.2] et enfin XII_A-2.2.5 par les résultats énoncés en XII_A-2.2.6.2 ou XII_B-2.2, on obtient essentiellement par la même méthode une démonstration du théorème suivant.

⁽ⁱⁱ⁾Le lecteur constatera que cette référence à un exposé ultérieur ne génère pas de cercle vicieux.

THÉORÈME 2.4 (XXI-1.2). Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini, et L l'ensemble des nombres premiers inversibles sur X . Pour tout champ en groupoïdes constructible $\text{ind-}L\text{-fini}$ sur $Y_{\text{ét}}$ le champ $f_*\mathcal{C}$ est constructible.

3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à ℓ

Dans cette section, on démontre le théorème 1.1.1. Constructibilité (i) et annulation (ii) sont établis simultanément.

3.1. Réduction au cas d'une immersion ouverte et à la finitude hors d'un lieu de codimension donnée.

3.1.1. Comme en 1.2.2, posons $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où n est l'entier inversible sur X de l'énoncé. Pour chaque entier $c \geq 0$, considérons la propriété (P_c) suivante :

Pour tout schéma quasi-excellent noëthérien X , toute immersion ouverte dominante $j : U \hookrightarrow X$ et tout complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, il existe un fermé $T \hookrightarrow X$ de codimension strictement supérieure à c tel que $(Rj_*\mathcal{K})|_{X-T}$ appartienne à $\text{Ob } D_c^b((X-T)_{\text{ét}}, \Lambda)$.

3.1.2. Vérifions que la conjonction des énoncés (P_c) pour chaque $c \geq 0$, entraîne le théorème. On peut supposer le schéma but, disons Y , affine. Procédant ensuite comme dans la démonstration de 2.3.4, on se ramène au cas où le morphisme $f : X \rightarrow Y$ considéré est séparé de type fini. D'après le théorème de compactification de Nagata, il existe une immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ et un morphisme propre $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow Y$ tels que $f = \bar{f}j$. La formule de composition $Rf_* = R\bar{f}_*Rj_*$ et le théorème de finitude pour les morphismes propres nous ramènent à démontrer la constructibilité du complexe $\mathcal{K} = Rj_*\mathcal{F}$. La conclusion résulte alors du lemme suivant.

LEMME 3.1.3. Soient X un schéma noëthérien et $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Supposons que pour tout entier $c \geq 0$, il existe un fermé T_c de codimension strictement supérieure à c tel que $\mathcal{K}|_{X-T_c} \in \text{Ob } D^+((X-T_c)_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Démonstration. Le schéma X étant noëthérien, ses localisés sont de dimension finie et pour toute suite de fermés $(T_c)_{c \in \mathbf{N}}$ comme dans l'énoncé, on a $X = \bigcup_c (X - T_c)$. D'autre part, le schéma X étant quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini des ouverts $X - T_c$. La conclusion résulte alors du fait que si U, U' sont deux ouverts de X tels que $\mathcal{K}|_U \in \text{Ob } D_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, $\mathcal{K}|_{U'} \in \text{Ob } D_c^b(U'_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a également $\mathcal{K}|_{U \cup U'} \in \text{Ob } D_c^b((U \cup U')_{\text{ét}}, \Lambda)$. $\square$

3.1.4. Nous allons démontrer la propriété (P_c) ci-dessus par récurrence sur c . Insistons sur le fait que le schéma X et le complexe $\mathcal{K}$ sont variables. Pour $c = 0$, cette propriété est triviale : prendre $T = X - U$. Soit $c \geq 1$ et supposons la propriété établie au cran $c - 1$. On souhaite la démontrer au cran c .

3.2. Récurrence : l'ingrédient clef et une première réduction.

3.2.1. Supposons, comme on peut le faire, le schéma X réduit. D'après le théorème d'uniformisation première à ℓ (IX-1.1) et le théorème de la forme standard (II-3.2.3) il existe une famille finie, indexée par un ensemble I d'éléments i , de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} X_i''' & \xrightarrow{\quad} & Y = \coprod_{j \in J} Y_j & & \\ \text{fini, plat, surjectif} \downarrow \text{degré premier à } \ell & & \downarrow & & \\ X_i'' & \xrightarrow{\quad} & X' & \xrightarrow[p \text{ propre, birationnel}]{\quad} & X \xleftarrow{j} U \end{array}$$

où, en plus des propriétés indiquées ci-dessus,

- la famille $(X_i'' \rightarrow X')$ est couvrante pour la topologie étale complètement décomposée ;
- les schémas Y_j , $j \in J$, sont réguliers ;
- l'image inverse de U dans Y_j est le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux.

3.2.2. Soit $(j, \mathcal{K})$ une paire comme dans l'énoncé de la propriété (P_c) (3.1). Nous verrons seulement plus tard que l'on peut supposer $\mathcal{K} = \Lambda$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux paires $(j, \mathcal{K})$ et $(j', \mathcal{K})$, où j' est l'immersion ouverte de $U' = U \times_X X'$ dans X' , il existe deux fermés $T \hookrightarrow X$ et $T' \hookrightarrow X'$ de codimension $\geq c$ tels que les complexes $Rj_{\star}\mathcal{K}$ et $Rj'_{\star}\mathcal{K}$ soient constructibles sur les ouverts complémentaires correspondants. Le fermé T n'ayant qu'un nombre fini de points maximaux et l'énoncé à démontrer — la constructibilité hors d'un fermé de codimension $> c$ — étant un problème local au voisinage de ces points, on peut supposer T irréductible, de codimension c , de point générique noté η_T . Soit η' un point maximal de T' . Si l'image par p de η' n'est pas égale à η_T , la composante irréductible correspondante de T' disparaît après localisation (Zariski) au voisinage de η_T . (Il résulte en effet de la formule des dimensions [ÉGA IV₁ 5.5.8.1] que $p(\eta')$ ne peut être une générisation stricte de η_T .) Compte tenu du fait que T est de codimension c et T' de codimension au moins égale, toute composante irréductible T'_α de T' dominant T est nécessairement de codimension égale à celle de T — en vertu de la formule des dimensions (*loc. cit.*) —, et le morphisme induit $T'_\alpha \rightarrow T$ est génériquement fini. Quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de η_T dans X , on peut finalement supposer que T' est une somme $\coprod_\alpha T'_\alpha$, où les T'_α sont irréductibles et les morphismes $T'_\alpha \rightarrow T$ sont *finis*, surjectifs.

3.3. Notation : le complexe $\psi_f(g, \mathcal{K})$.

3.3.1. Pour tout X -schéma $f : X_1 \rightarrow X$ et tout X_1 -schéma $g : X_2 \rightarrow X_1$, notons h le morphisme composé $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$ et j_1 l'immersion ouverte $U_1 = X_1 \times_X U \hookrightarrow X_1$ déduite de j par changement de base. Pour tout complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(\mathcal{U}_{\text{ t}}, \Lambda)$, considérons le complexe de faisceaux sur X ,

$$\psi_f(g, \mathcal{K}) := Rh_{\star}(g^*(Rj_{1\star}\mathcal{K}))$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X_2 & & \\ & & \downarrow g & & \\ & & X_1 & \xleftarrow{j_1} & U_1 \\ & & \downarrow f & \square & \downarrow \\ & & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

(Le morphisme h est indiqué par une accolade courbe à gauche de $X_2 \rightarrow X$.)

où l'on note abusivement $\mathcal{K}$ pour son image inverse sur U_1 . Ci-dessous, le morphisme g sera le plus souvent une immersion fermée, qui sera parfois supprimée de la notation, ainsi que f , si cela ne semble pas induire de confusion. Par exemple, $\psi(X, \mathcal{K}) = Rj_{\star}\mathcal{K}$.

3.3.2. La formation du complexe ψ est fonctorielle en le sens suivant : pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_2 & \xleftarrow{m} & X'_2 & & \\ & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \\ U_1 & \xleftarrow{j_1} & X_1 & \xleftarrow{n} & X'_1 & \xleftarrow{j'_1} & U'_1 = n^{-1}(U_1) \\ & & \searrow f & & \swarrow f' & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

le morphisme de changement de base (adjonction) $n^*Rj_{1\star}\mathcal{K} \rightarrow Rj_{1'\star}\mathcal{K}$ induit un morphisme

$$\psi_f(g, \mathcal{K}) \rightarrow \psi_{f'}(g', \mathcal{K}).$$

3.4. Seconde localisation.

3.4.1. Nous dirons qu'un morphisme d'une catégorie dérivée $D^+(\mathcal{T}, \Lambda)$, où $\mathcal{T}$ est le topos étale d'un schéma, est un D^b_c -**isomorphisme** ou **isomorphisme modulo** D^b_c , s'il a un cône dans $D^b_c(\mathcal{T}, \Lambda)$. Cela revient d'après [Neeman, 2001, 2.1.35] à supposer que la flèche induite dans la catégorie triangulée quotient $D^+(\mathcal{T}, \Lambda)/D^b_c(\mathcal{T}, \Lambda)$ est un *isomorphisme*. Notons que dans la terminologie d'*op. cit.*, la sous-catégorie $D^b_c(\mathcal{T}, \Lambda)$ est * paisse*. La localisation considérée ici (due à J.-L. Verdier) est l'analogue triangulé de celle considérée par J.-P. Serre dans le cas des catégories abéliennes.

PROPOSITION 3.4.2. *Quitte à se restreindre au voisinage de η_T , on peut supposer que le morphisme d'adjonction*

$$\psi_{\text{Id}}(T \hookrightarrow X, \mathcal{K}) \rightarrow \psi_p(T' \hookrightarrow X', \mathcal{K})$$

est un D_c^b -isomorphisme.

Notons que le terme de droite, $\psi_p(T' \hookrightarrow X', \mathcal{K})$, est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{\alpha} \psi_p(T'_{\alpha} \hookrightarrow X', \mathcal{K})$.

Démonstration. Soit p_U le morphisme induit par p au-dessus de l'ouvert U de X ; c'est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense W de U . Notons i l'immersion fermée du complémentaire $Z = U - W$ dans U . On a sur U un triangle distingué

$$\mathcal{K} \rightarrow \text{Rp}_{U*} p_U^* \mathcal{K} \rightarrow i_* \mathcal{H} \xrightarrow{+1},$$

où $\mathcal{H}$ est constructible sur Z , d'après le théorème de finitude pour le morphisme propre p_U . Il résulte du théorème de changement de base propre pour p que le triangle distingué précédent devient, après application du foncteur $\psi_{\text{Id}}(T \hookrightarrow X, -)$, le triangle distingué de complexes supportés sur T suivant :

$$\psi_{\text{Id}}(T \hookrightarrow X, \mathcal{K}) \rightarrow \psi_p(p^{-1}(T) \hookrightarrow X', \mathcal{K}) \rightarrow \psi_{\text{Id}}(T \hookrightarrow X, i_* \mathcal{H}) \xrightarrow{+1}.$$

Première étape. Nous allons commencer par montrer que la première flèche est génériquement sur T un D_c^b -isomorphisme. (« Génériquement sur T » : quitte à se restreindre à un voisinage Zariski convenable de η_T .) Soient en effet $\bar{Z}$ l'adhérence de Z dans X , $\bar{j} : Z \hookrightarrow \bar{Z}$ l'immersion ouverte et $\bar{i} : \bar{Z} \hookrightarrow X$ l'immersion fermée, représentés dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{i} & Z = U - W \\ \downarrow j & & \downarrow \bar{j} \\ X & \xleftarrow{\bar{i}} & \bar{Z} \end{array}$$

La restriction à T du complexe $\psi(T, i_* \mathcal{H})$ — dont on veut montrer qu'elle est génériquement D_c^b -nulle — est isomorphe à la restriction du complexe $\bar{i}_* R\bar{j}_* \mathcal{H}$. Le fermé $\bar{Z}$ étant de codimension ≥ 1 dans X , car W est partout dense dans X , l'hypothèse de récurrence pour la paire $(\bar{j}, \mathcal{H})$ entraîne immédiatement le résultat.

Deuxième étape. Pour conclure, il nous faut maintenant montrer que le morphisme d'adjonction $\psi_p(p^{-1}(T), \mathcal{K}) \rightarrow \psi_p(T', \mathcal{K})$, à travers lequel le morphisme $\psi_{\text{Id}}(T, \mathcal{K}) \rightarrow \psi_p(T', \mathcal{K})$ de l'énoncé se factorise est, génériquement sur T , un D_c^b -isomorphisme. Sur le fermé $T'_p = p^{-1}(T)$ de X' , considérons la restriction $\mathcal{L} = (Rj'_* \mathcal{K})|_{T'_p}$ de l'image directe par j' de $\mathcal{K}$, et le triangle distingué

$$(T'_p - T' \hookrightarrow T'_p)_! \mathcal{L}|_{T'_p - T'} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow (T' \hookrightarrow T'_p)_* \mathcal{L}|_{T'} \xrightarrow{+1}$$

constitué de ses prolongements par zéro. Rappelons que j' désigne l'immersion ouverte de U' dans X' . Par définition de T' , le premier complexe est constructible; il en est donc de même de son image directe (dérivée) par le morphisme propre p_T . Or, l'image directe de la seconde flèche par p_T n'est autre que le morphisme d'adjonction $\psi_p(T'_p, \mathcal{K}) \rightarrow \psi_p(T', \mathcal{K})$. CQFD. $\square$

3.5. Construction d'une rétraction.

3.5.1. Quitte à rétrécir X un peu plus encore, on peut supposer que pour tout α — on rappelle que $T' = \coprod_{\alpha} T'_{\alpha}$ —, il existe un indice i_{α} tel que le morphisme étale $X''_{i_{\alpha}} \rightarrow X'$ ait une section σ_{α} au-dessus de T'_{α} . Cela résulte du fait que la famille $(X''_i \rightarrow X')_i$ est complètement décomposée, de sorte qu'une section existe au voisinage du point générique de T'_{α} (II-2.2.3). La propriété du morphisme dominant $X' \rightarrow X$ permet de déduire l'existence d'un ouvert convenable de X de celle d'un ouvert de X' .

3.5.2. Pour simplifier les notations, on pose pour chaque indice α , $X''_\alpha = X''_{i_\alpha}$, $X'''_\alpha = X'''_{i_\alpha}$ et on note $T''_\alpha \subset X''_\alpha$ l'image de T'_α par une section σ_α comme ci-dessus, et enfin $T'''_\alpha \subset X'''_\alpha$ l'image inverse de T''_α par le morphisme fini $X'''_\alpha \rightarrow X''_\alpha$.

PROPOSITION 3.5.3. *Le morphisme d'adjonction $\psi(T'_\alpha \hookrightarrow X'_\alpha, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathcal{K})$ est un isomorphisme.*

Bien entendu, les complexes ci-dessus sont calculés en munissant les schémas X'_α et X''_α de la structure de X -schéma évidente. Nous nous autoriserons dorénavant cet abus de notation.

Démonstration. Résulte du fait que le morphisme $X'''_\alpha \rightarrow X'_\alpha$ est étale. $\square$

PROPOSITION 3.5.4. *Le morphisme d'adjonction $\psi(T''_\alpha \hookrightarrow X'_\alpha, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T'''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathcal{K})$ a un inverse à gauche.*

Démonstration. Considérons le diagramme à carrés cartésiens suivant :

$$\begin{array}{ccccc} T'''_\alpha & \longrightarrow & X'''_\alpha & \xleftarrow{j'''_\alpha} & U'''_\alpha \\ \pi_T \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_U \\ T''_\alpha & \longrightarrow & X''_\alpha & \xleftarrow{j''_\alpha} & U''_\alpha \end{array}$$

où $U''_\alpha = U \times_X X''_\alpha$, de même pour U'''_α , et $\pi : X'''_\alpha \rightarrow X''_\alpha$ est comme en 3.2.1. En particulier, le morphisme π_U est fini, plat, et de degré générique premier à ℓ , de sorte que le morphisme composé

$$\mathcal{K} \rightarrow \pi_{U*} \pi_U^* \mathcal{K} \xrightarrow{\text{Tr}} \mathcal{K}$$

est la multiplication par le degré, donc inversible. Appliquons le foncteur $\text{Rj}''_{\alpha*}$. Par composition des images directes, le terme du milieu est $\pi_* \text{Rj}''_{\alpha*} \mathcal{K}$, où l'on omet le foncteur image inverse de la notation (1.2.2). D'après le théorème de changement de base pour les morphismes finis, sa restriction au fermé T''_α est isomorphe à $\pi_{T*}((\text{Rj}''_{\alpha*} \mathcal{K})|_{T'''_\alpha})$. En poussant les faisceaux sur X par le morphisme $T''_\alpha \rightarrow X$, la suite précédente devient donc

$$\psi(T''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T'''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathcal{K})$$

et la composition de ces flèches est un isomorphisme. $\square$

3.6. Cas des coefficients constants : utilisation du théorème de pureté.

3.6.1. Posons $T''' = \coprod T'''_\alpha$, $X''' = \coprod X'''_\alpha$ et considérons le diagramme commutatif de morphismes d'adjonction, complété du morphisme trace :

$$\begin{array}{ccccccc} \psi(T \hookrightarrow X, \mathcal{K}) & \dashrightarrow & \psi(T' \hookrightarrow X', \mathcal{K}) & \dashrightarrow & \psi(T'' \hookrightarrow X'', \mathcal{K}) & \longrightarrow & \psi(T''' \hookrightarrow X''', \mathcal{K}) \xrightarrow{\text{Tr}} \psi_p(T'' \hookrightarrow X'', \mathcal{K}). \\ & & & & & \uparrow & \\ & & & & & \psi(T''' \hookrightarrow Y, \mathcal{K}) & \end{array}$$

D'après les trois propositions précédentes, les flèches en tirets deviennent des isomorphismes modulo D_c^b . Si le complexe $\psi(T''' \hookrightarrow Y, \mathcal{K})$ est *constructible*, c'est-à-dire nul modulo D_c^b , il en résulte que $\psi(T \hookrightarrow X, \mathcal{K})$ — ou, de façon équivalente, $(\text{Rj}_* \mathcal{K})|_T$ — est également constructible.

PROPOSITION 3.6.2. *Le complexe $\psi(T''' \hookrightarrow Y, \Lambda)$ est constructible.*

Démonstration. Le morphisme composé $T''' \rightarrow X$ étant fini, il suffit de démontrer que le complexe $\text{Rj}_{Y*} \Lambda$ est constructible. Cela résulte des hypothèses faites en 3.2.1 et du théorème de pureté XVI-3.1.1. $\square$

3.7. Réduction au cas des coefficients constants.

3.7.1. Pour achever la démonstration du théorème 1.1.1, il nous faut maintenant montrer que la propriété (P_c) de § 3.1, où c est fixé, résulte du cas particulier où $\mathcal{K} = \Lambda$ et de (P_{c-1}) .

3.7.2. Commençons par observer que l'on peut supposer $\mathcal{K}$ concentré en degré 0, c'est-à-dire être un *faisceau* constructible, que nous noterons dorénavant $\mathcal{F}$. L'ensemble des faisceaux constructibles satisfaisant la propriété à établir au rang c est, à X fixé, stable par extension et facteur direct. D'après [SGA 5 I 3.1.2], on peut supposer $\mathcal{F} = \pi_* k_! \Lambda$ où $\pi : U' \rightarrow U$ est un morphisme *fini* et $k : W \hookrightarrow U'$ une immersion ouverte, avec U' *intègre*. D'après le théorème principal de Zariski ([ÉGA IV₃ 8.12.6]), le morphisme composé $U' \rightarrow X$, *quasi-fini*, se factorise en une immersion ouverte $j' : U' \hookrightarrow X'$ suivie d'un morphisme fini $\pi : X' \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{k} & U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ & & \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ & & U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Le complexe $Rj_* \pi_* k_! \Lambda$, dont on s'interroge sur la constructibilité, est isomorphe au complexe $\bar{\pi}_* Rj'_* k_! \Lambda$. En vertu du lemme suivant, on peut supposer $X' = X$.

LEMME 3.7.3. Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini de schémas, T_Y un fermé de Y et $T_X = f(T_Y)$ son image.

- (i) On a l'inégalité : $\text{codim}(T_X, X) \geq \text{codim}(T_Y, Y)$.
- (ii) Soit $K \in \text{Ob } D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ tel que $K_{|Y-T_Y} \in \text{Ob } D_c^b((Y-T_Y)_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $(Rf_* K)_{|X-T_X} \in \text{Ob } D_c^b((X-T_X)_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Démonstration. Le premier énoncé est bien connu. Le second est un corollaire immédiat de la préservation de la constructibilité par le morphisme composé, fini, $Y - f^{-1}(T_X) \hookrightarrow Y - T_Y \rightarrow X - T_X$. $\square$

3.7.4. Soient $j : U \rightarrow X$ et $k : W \rightarrow U$ deux immersions ouvertes, avec U intègre. Nous souhaitons maintenant déduire la constructibilité du complexe $Rj_* k_! \Lambda$ hors d'un fermé de codimension au moins c de la propriété analogue pour les complexes $Rj_* \Lambda$. Admettant ce résultat pour ces derniers, il résulte du triangle distingué $k_! \Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow i_* \Lambda \xrightarrow{+1}$, où i est l'immersion fermée du complémentaire F de W dans U , qu'il suffit de démontrer la constructibilité de $Rj_* i_* \Lambda$ hors d'un fermé de codimension au moins c . Le schéma U étant intègre, l'adhérence $\bar{F}$ de F dans X est de codimension strictement positive X . Soit $m : F \hookrightarrow \bar{F}$ l'immersion ouverte correspondante et $n : \bar{F} \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. On a tautologiquement :

$$Rj_* i_* \Lambda = n_* Rm_* \Lambda,$$

par commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X \\ \uparrow i & & \uparrow n \\ F & \xrightarrow{m} & \bar{F}. \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence (P_{c-1}) , il existe un fermé $T_{\bar{F}}$ de $\bar{F}$, de codimension au moins c dans $\bar{F}$, tel que la restriction de $Rm_* \Lambda$ à l'ouvert $\bar{F} - T_{\bar{F}}$ de $\bar{F}$ soit constructible. L'image directe par l'immersion fermée n du complexe $Rm_* \Lambda$ est donc constructible sur l'ouvert $X - T_{\bar{F}}$ de X . La conclusion résulte maintenant du fait que la codimension de $T_{\bar{F}}$ dans X est *strictement supérieure* à c .

REMARQUE 3.7.5. O. Gabber sait également démontrer un résultat de *constructibilité uniforme*, dans l'esprit de ceux de [Katz & Laumon, 1985, §3] mais sans hypothèse sur la caractéristique. Cf. courriel à Luc Illusie, du 3 avril 2007 ; voir aussi [Orgogozo, 2011].

4. Coefficients ℓ -adiques

4.1. Définitions. On rappelle ici la construction, due à Torsten Ekedahl ([[Ekedahl](#),]), de la catégorie triangulée des complexes bornés constructibles ℓ -adiques. Voir aussi [[Fargues, 2009](#)], §5 pour un résumé et quelques améliorations. Pour d'autres approches, voir [[Bhatt & Scholze, 2013](#)] ou [[Liu & Zheng, 2014](#)] (pour les champs).

On fixe ici un schéma noëthérien X , sur lequel un nombre premier ℓ est inversible.

4.1.1. Systèmes projectifs. Notons X^N le topos des systèmes projectifs indicés par N de faisceaux étales sur X ; on en fait un topos annelé via $\mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z} := (\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})_n$. Un **système projectif ℓ -adique** de faisceaux sur X est un $\mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z}$ -module sur X^N , c'est-à-dire un système projectif de faisceaux abéliens $\mathcal{F} = (\dots \rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \dots)$ sur X , où $\mathcal{F}_n$ un $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ -modules sur X . Ils constituent une catégorie abélienne, dont on note $D(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ la catégorie dérivée et $D^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ sa sous-catégorie pleine des systèmes de complexes *uniformément* bornés. Un système projectif ℓ -adique est dit **essentiellement nul** si, pour tout n , il existe un entier $m \geq n$ tel que le morphisme de transition $\mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$ correspondant soit nul. De même, un complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ est essentiellement nul si chaque système projectif $H^i(\mathcal{K})$ de faisceaux l'est.

4.1.2. $\mathbf{Z}_\ell$ -complexes. Soit $D_c^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ constituée des complexes

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_n \in \text{Ob } D^b(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}))_n$$

dont la « réduction modulo ℓ »

$$\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z}} \mathcal{K} = (\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}} \mathcal{K}_n)_n \in \text{Ob } D^-(X^N, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

soit *essentiellement constante constructible*, c'est-à-dire isomorphe, modulo les complexes essentiellement nuls, à un système projectif provenant de $D_c^b(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Un tel objet est appelé un **$\mathbf{Z}_\ell$ -complexe borné constructible**; ils forment une catégorie triangulée.

Noter que les complexes $\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z}} \mathcal{K}$ ne sont pas nécessairement bornés inférieurement même si $\mathcal{K}$ est borné. En [[Fargues, 2009](#), 5.7] est définie une sous-catégorie notée $D^{e+}(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ préservée par le produit tensoriel ci-dessus; ceci repose sur le fait que le faisceau constant $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in \text{Ob } D(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ est de tor-dimension finie *modulo les essentiellement nuls*.

4.1.3. Catégorie triangulée des $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux. On note $\mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$ la catégorie triangulée obtenue à partir de la catégorie $D_c^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ en inversant les **isomorphismes essentiels**, c'est-à-dire les flèches à cône essentiellement nul. (D'après *op. cit.* 5.18, il revient au même d'inverser les flèches u telles que $\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z}} u$ ait un cône essentiellement nul.) De même, on peut définir des variantes non bornées et non constructibles.

4.1.4. Comme expliqué en [[Fargues, 2009](#), §5.9], lorsque X est de type fini sur un corps séparablement clos ou fini, la catégorie obtenue est équivalente à la catégorie $2\text{-}\lim_n D_{\text{ctf}}^b(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ considérée par P. Deligne dans Weil II. Notons que les constituants d'un $\mathbf{Z}_\ell$ -complexe borné constructible $(\mathcal{K}_n) \in \text{Ob } D_c^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z})$ ne sont pas nécessairement de tor-dimension finie mais il existe un représentant (par un « complexe normalisé », [[Fargues, 2009](#), 5.14]) pour lequel c'est vrai. On rappelle ([[SGA 4 XVII](#) 4.1.9]) qu'un complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^b(T, A)$, où T est un topos et A un Anneau commutatif, est dit de **tor-dimension** inférieure ou égale à n si pour tout complexe $\mathcal{L}$ de A -modules concentré en degrés positifs ou nuls, $H^i(\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}) = 0$ pour tout $i < -n$.

4.1.5. Un des points clefs de la théorie est le *lemme de Nakayama-Ekedahl* d'après lequel le foncteur triangulé noté $\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} -$, déduit du foncteur de réduction modulo ℓ ci-dessus, est *conservatif* : $\mathcal{K} \in \text{Ob } \mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul si et seulement si le complexe $\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ l'est. Nous renvoyons le lecteur à [[Ekedahl, 1984](#), prop. 1.1, p. 214] ou [[Illusie, 1983](#), 2.3.7, 2.4.5] pour une première apparition de ce lemme, et [[Ekedahl](#), 3.6 (ii)] pour le résultat précédent.

4.1.6. D'après ce lemme, et ces corollaires (*op. cit.*, th. 5.1 (ii) et th. 6.3), le théorème de finitude ℓ -adique ci-dessous résulte d'un théorème de finitude pour les coefficients finis.

4.2. Théorèmes : énoncés.

THÉORÈME 4.2.1. *Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent de dimension finie, ℓ un nombre premier inversible sur X et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini. Pour tout entier $n \geq 1$, le foncteur $Rf_* : D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z})$ envoie $D_{\text{ctf}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z})$ dans $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z})$.*

Démonstration. D'après le résultat du paragraphe § 2.3, le foncteur Rf_* est de dimension cohomologique finie. La conclusion résulte de [SGA4 XVII 5.2.11] (tor-dimension finie) et du théorème 1.1.1 (constructibilité). $\square$

REMARQUE 4.2.2. On devrait pouvoir montrer, par réduction au cas des schémas de type fini sur $\mathbf{Z}$, que pour tout morphisme cohérent f , le foncteur Rf_* envoie un faisceau plat constructible sur un complexe de tor-dimension au plus zéro.

D'après les résultats esquissés dans [Ekedahl, § 5-6], on peut déduire du théorème précédent le théorème ℓ -adique suivant.

THÉORÈME 4.2.3. *Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent de dimension finie, ℓ un nombre premier inversible sur X et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini. Le foncteur $Rf_* : D^+(Y^N, \mathbf{Z}/\ell^N \mathbf{Z}) \rightarrow D^+(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N \mathbf{Z})$, $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_n)_n \mapsto Rf_* \mathcal{K} = (Rf_* \mathcal{K}_n)_n$ induit un foncteur $Rf_* : \mathcal{D}_c^b(Y, \mathbf{Z}_\ell) \rightarrow \mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$.*

Fonctions de dimension

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Nous définissons la notion de fonction de dimension sur un schéma X et nous montrons l'existence de telles fonctions localement pour la topologie étale si X est quasi-excellent.

1. Universelle caténarité des schémas henséliens

Dans cette partie, nous rappelons les notions de *caténarité* et d'*universelle caténarité*. Le lecteur pourra consulter l'exposé I pour plus de détails.

1.1. Schémas universellement caténaires. Soient S un espace topologique et $X \subset Y$ des fermés irréductibles de S . Notons $\text{codim}(X, Y)$ la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles $X \subset Z \subset Y$ (cf. [ÉGA 0_{IV} 14.2.1 & 14.1.1]). Si S est un schéma, X et Y des sous-schémas fermés intègres et x le point générique de X , on a

$$\text{codim}(X, Y) = \dim(\mathcal{O}_{Y,x}).$$

DÉFINITION 1.1.1 ([ÉGA 0_{IV} 14.3.2]). Un schéma S est **caténaire** s'il est localement noethérien et si pour toute chaîne $X \subset Y \subset Z$ de fermés irréductibles de S , on a

$$\text{codim}(X, Z) = \text{codim}(Y, Z) + \text{codim}(X, Y).$$

Un schéma S est **universellement caténaire** si tout schéma de type fini sur S est caténaire.

La notion de caténarité est stable par localisation et par restriction à des sous-schémas fermés. Ainsi, S est universellement caténaire si et seulement si pour tout entier $n \geq 0$, le schéma $\mathbf{A}_S^n$ est caténaire.

LEMME 1.1.2. *Un schéma de Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

Démonstration. Si S est Cohen-Macaulay, il est caténaire d'après [Matsumura, 1980a, 16.B]. Comme pour tout $n \geq 0$, le schéma $\mathbf{A}_S^n$ reste Cohen-Macaulay, le schéma S est bien universellement caténaire. $\square$

EXEMPLE 1.1.3. Tout schéma régulier est universellement caténaire car Cohen-Macaulay. En particulier, le spectre d'un corps, un trait et le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un corps ou sur un anneau de valuation discrète sont universellement caténaires. Tout schéma de type fini sur un schéma régulier est universellement caténaire.

PROPOSITION 1.1.4 ([Matsumura, 1980a], 28.P). *Un schéma local complet noethérien est universellement caténaire.*

Démonstration. Le théorème de structure de Cohen [ÉGA 0_{IV} 19.8.8] permet d'écrire tout schéma local complet noethérien comme fermé dans le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un anneau de Cohen. L'universelle caténarité résulte de l'exemple précédent et de la stabilité de cette notion par passage à un fermé. $\square$

1.2. Un théorème de Ratliff. On dit qu'un schéma noëthérien est **équidimensionnel** si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension (finie). Soit S un schéma local noëthérien. On note $\widehat{S}$ le spectre du complété de l'anneau de S en son idéal maximal.

DÉFINITION 1.2.1. Le schéma local S est **formellement équidimensionnel** si $\widehat{S}$ est équidimensionnel. Il est **formellement caténaire** si pour tout $s \in S$, l'adhérence $\overline{\{s\}}$ est formellement équidimensionnelle.

PROPOSITION 1.2.2. Soit S un schéma local noëthérien. Le schéma S , son complété $\widehat{S}$, son hensélisé S^h et son hensélisé strict ont tous la même dimension.

Démonstration. Ceci résulte de l'énoncé général suivant : si $A \rightarrow A'$ est un morphisme local et plat entre anneaux locaux noëthériens d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ et que $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$, alors pour tout entier naturel n , les longueurs $\text{lg}_A(A/\mathfrak{m}^n)$ et $\text{lg}_{A'}(A'/\mathfrak{m}'^n)$ sont égales. L'égalité de ces fonctions de Hilbert-Samuel implique l'égalité $\dim A = \dim A'$ (cf. [Zariski & Samuel, 1975, chap. VIII, §9]). $\square$

D'après cette proposition, si S est un schéma local noëthérien intègre, les composantes irréductibles de $\widehat{S}$ sont de dimension $\leq \dim(S)$ et une d'entre elles est de dimension $\dim(S)$. Le schéma S est donc formellement équidimensionnel si et seulement si toutes les composantes irréductibles de $\widehat{S}$ sont de dimension $\dim(S)$.

Soit S un schéma local noëthérien. Ratliff a démontré le théorème fondamental suivant, qui a déjà été mentionné dans la proposition I-7.1.1.

THÉORÈME 1.2.3 ([Matsumura, 1989], 31.7). Pour un schéma local noëthérien S , les conditions suivantes sont équivalentes :

- S est formellement caténaire,
- S est universellement caténaire,
- A_S^1 est caténaire,
- S est caténaire et pour tout $s \in S$, tout schéma intègre S' muni d'une flèche finie et dominante $S' \rightarrow \overline{\{s\}}$ et tout point fermé s' de S' , on a $\dim(\mathcal{O}_{S',s'}) = \dim \overline{\{s\}}$.

On a ajouté une quatrième condition équivalente à l'énoncé [Matsumura, 1989, Theorem 31.7]. Il résulte de [ÉGA IV₂ 5.6.10] que les trois premières conditions équivalentes impliquent la quatrième. La réciproque est démontrée au cours de la démonstration de [Matsumura, 1989, Theorem 31.7] (au second paragraphe de la page 255).

COROLLAIRE 1.2.4 ([Matsumura, 1989], 31.2). Tout schéma noëthérien de dimension ≤ 2 est caténaire. Tout schéma noëthérien de dimension ≤ 1 est universellement caténaire.

1.3. Schémas henséliens et caténarité. Nous avons vu que tout schéma local complet noëthérien est universellement caténaire dans la proposition 1.1.4. Les schémas locaux henséliens jouissent également de bonnes propriétés de caténarité :

PROPOSITION 1.3.1. Tout schéma local hensélien caténaire est universellement caténaire.

Démonstration. Soit $S = \text{Spec}(A)$ un schéma local hensélien caténaire, soit P un idéal premier de A , soit L une extension finie de $\text{Frac}(A/P)$ et soit B une extension finie de A/P contenue dans L . D'après le théorème 1.2.3, il suffit de prouver que la dimension du localisé de B en chacun de ses idéaux maximaux est égale à la dimension de A/P . Toute algèbre finie sur un anneau hensélien est semi-locale d'après [ÉGA IV₄ 18.5] et [ÉGA IV₄ 18.6]. Comme le schéma B est intègre, il est local. Le théorème du « going-up » ([Matsumura, 1989, 9.3 et 9.4]) montre qu'on a bien $\dim(B) = \dim(A/P)$. $\square$

Rappelons également le résultat suivant, conséquence du corollaire I-6.3 (ii).

PROPOSITION 1.3.2. Tout schéma local hensélien quasi-excellent est universellement caténaire.

Ainsi, tout schéma local hensélien quasi-excellent est excellent.

2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension

2.1. Définitions. Soit X un schéma. Pour tout point x de X et tout point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x , on note $X_{(x)}$, $X_{(x)}^h$ et $\widehat{X}_{(x)}$ le localisé, l'hensélisé et le complété de X en x . De même, on note $X_{(\bar{x})}$ l'hensélisé strict de X en $\bar{x}$.

Soient x et y deux points de X , et $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux points géométriques au-dessus de x et y .

DÉFINITION 2.1.1 ([SGA 4 VII 7.2]). Un **morphisme de spécialisation** $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est la donnée d'un X -morphisme $X_{(\bar{x})} \rightarrow X_{(\bar{y})}$ entre hensélisés stricts.

D'après [SGA 4 VII 7.4], la donnée d'une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est équivalente à la donnée d'un X -morphisme $\bar{x} \rightarrow X_{(\bar{y})}$.

DÉFINITION 2.1.2. Soit $r \in \mathbf{N}$. On dit qu'une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est une **spécialisation de codimension** r si l'adhérence de l'image de $\bar{x}$ dans $X_{(\bar{y})}$ est un schéma de dimension r .

On dit que y est une **spécialisation étale immédiate** de x s'il existe une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ qui soit de codimension 1.

On dit que y est une **spécialisation Zariski immédiate** de x si $y \in \overline{\{x\}}$ et si le localisé en y de l'adhérence de x est de dimension 1.

2.1.3. Si y est une spécialisation étale immédiate de x , on dit également que x est une **générisation étale immédiate** de y . Désignons par $f : X_{(\bar{y})} \rightarrow X_{(\bar{y})}$ le morphisme d'hensélisation stricte. Les générisations étales immédiates de y sont alors les images par f des points $x' \in X_{(\bar{y})}$ tels que $\dim \overline{\{x'\}} = 1$.

Avant d'examiner plus en détail ces notions, on rappelle le fait facile suivant (II-1.1.3) que nous utiliserons implicitement plus bas : si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme plat, f envoie les points maximaux de X sur des points maximaux de S , autrement dit toute composante irréductible de X domine une composante irréductible de S .

2.1.4. Si x et y sont deux points d'un schéma noëthérien X tels que $y \in \overline{\{x\}}$ (au sens habituel, c'est-à-dire que y est une spécialisation de x ou encore que x est une générisation de y), alors y est une spécialisation Zariski (resp. étale) immédiate de x si et seulement si c'est le cas dans $\overline{\{x\}}_{(y)}$. Pour certaines considérations, ceci permet de supposer que X est local intègre de point générique x et de point fermé y . Dans ce cas, y est une spécialisation Zariski immédiate de x si et seulement si $\dim(X) = 1$. Dans le cas étale, cela se lit sur l'hensélisé strict :

PROPOSITION 2.1.5. Si x et y sont deux points d'un schéma noëthérien X , le point y est une spécialisation étale immédiate de x si et seulement si $y \in \overline{\{x\}}$ et l'hensélisé strict en un point géométrique au-dessus de y de l'adhérence de x possède une composante irréductible de dimension 1.

Démonstration. On se ramène au cas particulier $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$ envisagé plus haut. Le point y est une spécialisation étale immédiate si et seulement s'il existe un point $\bar{x}$ de $X_{(\bar{y})}$ au-dessus de x tel que l'adhérence de $\bar{x}$ dans $X_{(\bar{y})}$ soit de dimension 1. Comme énoncé ici, cela est équivalent au fait que $X_{(\bar{y})}$ possède une composante irréductible C de dimension 1. En effet, si on note $\tilde{x}$ le point générique de C , par l'argument de platitude énoncé plus haut, C domine X , c'est-à-dire que $\tilde{x}$ est au-dessus de x . Inversement, si $\tilde{x}$ est un point au-dessus de x dont l'adhérence dans $X_{(\bar{y})}$ soit de dimension 1, on peut noter C une composante irréductible de $X_{(\bar{y})}$ contenant $\tilde{x}$. Le point générique de C et $\tilde{x}$ étant tous les deux au-dessus de x , ils sont égaux puisque l'un est une générisation de l'autre et que les fibres de $X_{(\bar{y})} \rightarrow X$ sont discrètes. $\square$

PROPOSITION 2.1.6. Soit X un schéma noëthérien. Une spécialisation Zariski immédiate entre points de X est une spécialisation étale immédiate, et la réciproque est vraie si X est universellement caténaire.

On peut supposer que $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$ comme précédemment. Pour l'implication, on suppose que $\dim(X) = 1$ et on veut montrer que $X_{(\bar{y})}$ possède une composante irréductible de dimension 1. D'après la proposition 1.2.2, $X_{(\bar{y})}$ est de dimension 1 et il est évident que les composantes irréductibles d'un schéma local de dimension 1 sont toutes de dimension 1.

Pour la réciproque, nous utiliserons deux lemmes :

LEMME 2.1.7. *Soit X un schéma local noëthérien hensélien de point fermé y . Soit $\bar{y}$ un point géométrique au-dessus de y . Alors, X possède une composante irréductible de dimension 1 si et seulement si le hensélisé strict $X_{(\bar{y})}$ en possède une.*

Démonstration. Si C est une composante irréductible de dimension 1 de $X_{(\bar{y})}$, son image ensembliste dans X est fermée car $p: X_{(\bar{y})} \rightarrow X$ est entier. Comme p est plat, $p(C)$ est une composante irréductible de X contenant exactement deux points donc $\dim(p(C)) = 1$. Inversement, la surjectivité et la platitude de p impliquent que si $D \subset X$ est une composante irréductible de dimension 1, il existe une composante irréductible C de $X_{(\bar{y})}$ telle que $p(C) = D$. On a bien sûr $\dim(C) \geq 1$. Soit $z \in C$ un point qui ne soit pas le point générique de C . Le point $p(z)$ ne peut pas être le point générique de D car sinon la fibre générique de p ne serait pas discrète. C'est donc que $p(z)$ est le point fermé de D . Le fait que $p^{-1}(y)$ soit discret implique alors que z ne peut être que le point fermé de C . Le schéma local intègre C possède donc exactement deux points : $\dim(C) = 1$. $\square$

LEMME 2.1.8. *Soit X un schéma local noëthérien. Si X possède une composante irréductible de dimension 1, alors son complété $\hat{X}$ aussi et la réciproque est vraie si X est universellement caténaire.*

Démonstration. Commençons par le cas où X est intègre. Si $\dim(X) = 1$, de même qu'au début de la démonstration de la proposition 2.1.6, $\dim(\hat{X}) = \dim(X) = 1$ et toutes les composantes irréductibles de $\hat{X}$ sont de dimension 1. Inversement, si X est universellement caténaire, d'après le théorème 1.2.3, les composantes irréductibles de $\hat{X}$ ont toutes la même dimension. Si l'une d'entre elles est de dimension 1, le schéma $\hat{X}$ est lui aussi de dimension 1, et alors $\dim(X) = \dim(\hat{X}) = 1$.

Dans le cas général, notons X_i les composantes irréductibles de X . Pour tout i , le produit fibré $X_i \times_X \hat{X}$ s'identifie à $\hat{X}_i$ (voir [SGA 1 IV 3]). C'est un fait que les composantes irréductibles des différents $\hat{X}_i$ sont exactement les composantes irréductibles de $\hat{X}$: ce sont des parties fermées irréductibles recouvrant $\hat{X}$ et aucune d'entre elles n'est contenue dans une autre (ceci se déduit du fait que chaque composante irréductible de $\hat{X}_i$ domine X_i). Il est dès lors évident que l'énoncé pour X résulte de l'énoncé pour les schémas locaux intègres X_i . $\square$

Montrons la réciproque énoncée dans la proposition 2.1.6. Comme observé ci-dessus (2.1.4), il suffit de montrer que si X est un schéma local noëthérien intègre universellement caténaire de point fermé y et de point générique x (c'est-à-dire $X = \overline{\{x\}}$), et si x est une générisation étale immédiate de y , alors $\dim(X) = 1$. D'après la proposition 2.1.5, l'hensélisé strict de X en un point géométrique au-dessus de y possède une composante irréductible de dimension 1, ce qui équivaut d'après le lemme 2.1.7 à dire que le hensélisé X^h de X possède une composante irréductible de dimension 1. Le complété $\hat{X}$ de X étant aussi celui de X^h , le sens facile du lemme 2.1.8 appliqué à X^h montre que $\hat{X}$ possède une composante irréductible de dimension 1. La réciproque de ce lemme appliquée au schéma universellement caténaire X montre que X possède une composante irréductible de dimension 1 ; on a donc $\dim(X) = 1$ et y est une spécialisation Zariski immédiate de x .

On peut lire les spécialisations étales d'un point x de X dans le complété de X en x :

PROPOSITION 2.1.9. *Soit X un schéma noëthérien. Soient x et y deux points de X . On suppose que $y \in \overline{\{x\}}$. Notons $c: \hat{X}_{(y)} \rightarrow X_{(y)}$ le morphisme de complétion. Le point y est une spécialisation étale immédiate de x si et seulement si $c^{-1}(\overline{\{x\}})$ possède une composante irréductible de dimension 1.*

Démonstration. On peut supposer que $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$. Le point y est une spécialisation étale immédiate de X si et seulement si $X_{(y)}$ possède une composante irréductible de dimension 1, c'est-à-dire, d'après le lemme 2.1.7 que $X_{(y)}^h$ en possède une. On veut montrer que ceci équivaut à ce que le complété $\hat{X}$ en possède une.

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que X est quasi-excellent (donc universellement caténaire d'après la proposition 1.3.2), l'équivalence voulue résulte du lemme 2.1.8. Montrons cette équivalence sans l'hypothèse de quasi-excellence. Si $\dim(X) = 0$, $X_{(y)}$ et $\hat{X}$ sont aussi de dimension 0, donc aucun

de ces schémas ne possède de composante irréductible de dimension 1. Si $\dim(X) = 1$, toutes les composantes irréductibles de $X_{(\bar{y})}$ et de $\hat{X}$ sont de dimension 1. On peut donc supposer $\dim(X) = \dim(X_{(\bar{y})}) = \dim(\hat{X}) \geq 2$. L'inexistence d'une composante irréductible de dimension 1 de $X_{(\bar{y})}$ (resp. de $\hat{X}$) équivaut à dire que toutes les composantes irréductibles de $X_{(\bar{y})}$ (resp. de $\hat{X}$) sont de dimension ≥ 2 . L'équivalence voulue résulte alors de **XX-3.3** (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) appliqué à l'inclusion du point fermé de X . $\square$

DÉFINITION 2.1.10. On appelle **fonction de dimension** sur X toute fonction $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que pour toute spécialisation étale immédiate $x \rightsquigarrow y$ entre points de X , on ait

$$\delta(y) = \delta(x) - 1.$$

La notion de fonction de dimension ne voit pas les éléments nilpotents : δ est une fonction de dimension sur X si et seulement si elle induit une fonction de dimension sur le sous-schéma réduit X^{red} . De plus si $U \xrightarrow{i} X$ est un morphisme étale et δ est une fonction de dimension sur X , $\delta \circ i$ définit une fonction de dimension sur U . Plus précisément, l'ensemble des fonctions de dimension sur les X -schémas étales définit un faisceau étale sur X . La différence entre deux fonctions de dimension sur X est une fonction invariante par spécialisations quelconques, donc une fonction localement constante. Nous montrerons plus loin que si X est quasi-excellent, des fonctions de dimension existent localement pour la topologie étale sur X de sorte que les fonctions de dimension forment un $\mathbf{Z}$ -torseur étale.

PROPOSITION 2.1.11. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre schémas noëthériens. Supposons donnés $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ deux points géométriques de X . Notons $\bar{y}$ (resp. $\bar{y}'$) le point géométrique de Y au-dessus duquel $\bar{x}$ (resp. $\bar{x}'$) se trouve. À toute spécialisation étale $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x}'$ est canoniquement associée une spécialisation étale $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{y}'$. Si f est quasi-fini, les spécialisations $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x}'$ et $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{y}'$ ont la même codimension.

Démonstration. La première partie de l'énoncé est triviale (voir aussi **XVII-2.3**). Il n'y a qu'à montrer l'égalité des codimensions dans le cas où f est quasi-fini. Pour cela, d'après le Main Theorem de Zariski, on peut supposer que f est fini et que X et Y sont locaux strictement henséliens de points fermés respectifs $\bar{x}'$ et $\bar{y}'$. On peut supposer en outre que X et Y sont intègres de points génériques respectifs x et y où x et y sont les images respectives des points géométriques $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Énoncer l'égalité des codimensions de $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x}'$ et de $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{y}'$ revient alors à dire que X et Y sont de même dimension, ce qui résulte du « going-up » (cf. [Matsumura, 1980a, 13.C]). $\square$

COROLLAIRE 2.1.12. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-fini entre schémas noëthériens. Si $\delta : Y \rightarrow \mathbf{Z}$ est une fonction de dimension sur Y , alors $f^* \delta := \delta \circ f : X \rightarrow \mathbf{Z}$ est une fonction de dimension sur X .

2.2. Fonctions de dimension et universelle caténarité. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2.1. Un schéma noëthérien est universellement caténaire si et seulement s'il possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski.

Le théorème résulte de la conjonction du corollaire 2.2.4 et de la proposition 2.2.6 ci-dessous.

PROPOSITION 2.2.2. Soit X un schéma intègre universellement caténaire. La fonction $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension sur X .

Démonstration. En vertu de la proposition 2.1.6, comme X est universellement caténaire, il suffit de montrer que $\delta(y) = \delta(x) - 1$ pour toute spécialisation Zariski immédiate $x \rightsquigarrow y$. Comme X est caténaire intègre, on a

$$\dim(\mathcal{O}_{X,y}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) + \dim(\mathcal{O}_{\bar{y},x}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) + 1.$$

$\square$

REMARQUE 2.2.3. Si X n'est pas supposé intègre, la fonction $\delta(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ n'est pas forcément une fonction de dimension comme le montre l'exemple où X est obtenu par recollement en un point d'une droite et d'un plan.

COROLLAIRE 2.2.4. *Tout schéma universellement caténaire admet des fonctions de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. Soit X un schéma universellement caténaire. Soit $x \in X$. Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert de x pouvant être muni d'une fonction de dimension. L'espace topologique X est réunion de ses composantes irréductibles $X_1, \dots, X_n$. Quitte à remplacer X par l'ouvert complémentaire des composantes X_i ne contenant pas x , on peut supposer que x appartient à toutes les composantes X_i . Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons $\mathcal{F}_i$ l'ensemble des fonctions de dimension sur X_i . D'après la proposition 2.2.2, cet ensemble est non vide et est un tore sous $\mathbf{Z}$. On choisit un élément $\delta_i \in \mathcal{F}_i$ qui vaut 0 sur le point x . Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, la fonction $\delta_i - \delta_j$ est localement constante sur $X_i \cap X_j$ et vaut 0 au point x . Soit $F_{i,j}$ le fermé de X , réunion des composantes connexes de $X_i \cap X_j$ ne contenant pas x . Soit U le complémentaire dans X de la réunion des $F_{i,j}$. Les fonctions δ_i se recollent en une fonction de dimension sur U . $\square$

Démontrons une réciproque partielle du corollaire 2.2.4.

LEMME 2.2.5. *Un schéma noëthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est caténaire.*

Démonstration. Pour montrer la caténarité, on peut supposer que le schéma S possède une fonction de dimension δ . Supposons que $X \subset Y$ sont des fermés irréductibles de points génériques respectifs x et y . Choisissons une chaîne de spécialisations Zariski immédiates $y = x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow x_d = x$ de longueur maximale. Par définition de la codimension, on a $\text{codim}(X, Y) = d$ et par définition des fonctions de dimension, compte tenu du sens facile de la proposition 2.1.6, on obtient $\delta(x) = \delta(y) - d$, d'où $\text{codim}(X, Y) = \delta(y) - \delta(x)$.

Maintenant, si $X \subset Y \subset Z$ sont des fermés irréductibles, on a :

$$\begin{aligned}\delta(y) - \delta(x) &= \text{codim}(X, Y), \\ \delta(z) - \delta(y) &= \text{codim}(Y, Z), \\ \delta(z) - \delta(x) &= \text{codim}(X, Z).\end{aligned}$$

On en déduit $\text{codim}(X, Z) = \text{codim}(X, Y) + \text{codim}(Y, Z)$ d'où la caténarité. $\square$

Grâce au théorème 1.2.3, on peut remplacer « caténaire » par « universellement caténaire » dans le lemme 2.2.5 :

PROPOSITION 2.2.6. *Un schéma noëthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est universellement caténaire.*

Démonstration. On peut supposer que S est local et muni d'une fonction de dimension δ , laquelle induit une fonction de dimension δ^h sur le hensélisé S^h , qui est donc caténaire d'après le lemme 2.2.5, puis universellement caténaire grâce à la proposition 1.3.1 et enfin formellement caténaire d'après le théorème 1.2.3.

Montrons que S est formellement caténaire. Soit Z un sous-schéma fermé intègre de S . Il s'agit de montrer que Z est formellement équidimensionnel. Les schémas locaux Z et Z^h ayant le même complété, il suffit pour cela de montrer que les composantes irréductibles C de Z^h sont formellement équidimensionnelles et toutes de la même dimension. Comme Z^h est un sous-schéma fermé de S^h qui est formellement caténaire, toute composante irréductible C de Z^h est bien formellement équidimensionnelle. Exprimons maintenant la dimension de C en utilisant les fonctions de dimension. Notons s le point fermé de S , η_C (resp. η_Z) le point générique de C (resp. Z). On a $\dim(C) = \delta^h(\eta_C) - \delta^h(s) = \delta(\eta_Z) - \delta(s) = \dim(Z)$. La dimension $\dim(C)$ est donc indépendante de C . On a ainsi montré que

Z est formellement équidimensionnel. Finalement, S est formellement caténaire et le théorème 1.2.3 montre que S est universellement caténaire. $\square$

2.3. Existence locale pour la topologie étale. Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3.1. *Tout schéma quasi-excellent possède des fonctions de dimension localement pour la topologie étale.*

Une application répétée du lemme suivant (variante de l'argument du corollaire 2.2.4) permet de montrer que si l'énoncé du théorème est vrai pour les composantes irréductibles d'un schéma noethérien X , alors le théorème vaut aussi pour X . Plus loin, on pourra ainsi supposer que X est intègre.

LEMME 2.3.2. *Soit X un schéma noethérien dont l'espace topologique sous-jacent soit réunion de deux sous-schémas fermés X_1 et X_2 . Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $X_1 \cap X_2$. On suppose que pour tout $i \in \{1, 2\}$, il existe un voisinage étale U_i de $\bar{x}$ dans X_i tel que U_i admette une fonction de dimension. Alors, il existe un voisinage étale U de $\bar{x}$ dans X tel que U admette une fonction de dimension.*

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on choisit un voisinage étale U_i de $\bar{x}$ dans X_i tel que U_i admette une fonction de dimension δ_i . On se donne un point géométrique distingué $\bar{u}_i$ au-dessus de $\bar{x}$ et on peut supposer que $\delta_i(u_i) = 0$. D'après [ÉGA IV₄ 18.1.1], quitte à remplacer U_i par un voisinage ouvert de u_i , on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $\widetilde{U}_i \rightarrow X$ et un isomorphisme $\widetilde{U}_i \times_X X_i \simeq U_i$. On peut former le produit fibré $V = \widetilde{U}_1 \times_X \widetilde{U}_2$. Notons $\pi: V \rightarrow X$ la projection et $\bar{v}$ un point géométrique de V au-dessus de $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, la projection de V sur le facteur $\widetilde{U}_i$ induit un morphisme étale $\pi^{-1}(X_i) \rightarrow \widetilde{U}_i$. Par composition avec ce morphisme étale, la fonction de dimension δ_i sur U_i induit une fonction de dimension $\tilde{\delta}_i$ sur le sous-schéma fermé $\pi^{-1}(X_i)$ de V et elle vérifie $\tilde{\delta}_i(v) = 0$. Ces fonctions de dimensions $\tilde{\delta}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ se recollent sur l'ouvert U complémentaire dans V de la réunion des composantes connexes de $\pi^{-1}(X_1 \cap X_2)$ ne contenant pas v . $\square$

Avant de traiter le cas des schémas intègres, commençons par celui des schémas normaux :

PROPOSITION 2.3.3. *Soit X un schéma normal quasi-excellent. La fonction $\delta: X \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension.*

Démonstration. On peut supposer de plus que X est local. Notons Y son hensélisé et $h: Y \rightarrow X$ le morphisme de hensélisation. D'après le théorème I-8.1 et les commentaires subséquents, Y est lui aussi quasi-excellent. D'après la proposition 1.3.2, Y est universellement caténaire. Par ailleurs, comme le morphisme $Y \rightarrow X$ est régulier, la normalité de X implique celle de Y (cf. [ÉGA IV₂ 6.5.4]). Le schéma local Y est donc intègre et universellement caténaire, et l'opposé de la codimension définit une fonction de dimension $\delta': Y \rightarrow \mathbf{Z}$. Comme une spécialisation étale immédiate entre points de X se relève pour ainsi dire par définition en une spécialisation étale immédiate de points de Y , pour montrer que δ est une fonction de dimension sur X , il suffit de montrer que pour tout $y \in Y$, si on note $x = h(y)$, on a $\delta(x) = \delta'(y)$, ce qui résulte de la proposition 1.2.2. $\square$

Revenons au cas du théorème 2.3.1 où X est supposé intègre et quasi-excellent, et notons Y son normalisé. Le morphisme $p: Y \rightarrow X$ est fini et surjectif, donc de descente cohomologique universelle. Notons δ une fonction de dimension sur Y ; son existence est assurée par la proposition 2.3.3. Soient p_1 et p_2 les deux projections $Y \times_X Y \rightarrow Y$. D'après le corollaire 2.1.12 appliqué aux morphismes p_1 et p_2 , il vient que $p_i^* \delta := \delta \circ p_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ sont deux fonctions de dimension sur $Y \times_X Y$. La différence $p_1^* \delta - p_2^* \delta: Y \times_X Y \rightarrow \mathbf{Z}$ est une fonction localement constante qui définit un 1-cocycle de Čech, donc une classe $[p_1^* \delta - p_2^* \delta]$ dans $H_{\text{Čech}}^1(Y \rightarrow X, \mathbf{Z})$. D'après la théorie de la descente cohomologique, il existe une injection naturelle

$$H_{\text{Čech}}^1(Y \rightarrow X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{Z}).$$

La classe $[p_1^*\delta - p_2^*\delta]$ définit donc une classe d'isomorphisme de $\mathbf{Z}$ -torseurs étales sur X . Il résulte alors immédiatement de la proposition suivante que X admet une fonction de dimension localement pour la topologie étale :

PROPOSITION 2.3.4. *Soit U un schéma étale sur X (quasi-excellent). L'annulation de la classe $[p_1^*\delta - p_2^*\delta]_{|U}$ dans $H^1(U, \mathbf{Z})$ entraîne l'existence d'une fonction de dimension sur U .*

Démonstration. En utilisant la compatibilité des constructions au changement de base étale $U \rightarrow X$, on peut supposer que $U = X$. L'annulation de $[p_1^*\delta - p_2^*\delta]$ dans $H_{\text{Cech}}^1(Y \rightarrow X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{Z})$ signifie qu'il existe une fonction localement constante $\gamma : Y \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que $p_1^*\delta - p_2^*\delta = p_1^*\gamma - p_2^*\gamma$. Autrement dit, quitte à remplacer δ par $\delta - \gamma$, on peut supposer que $p_1^*\delta = p_2^*\delta$. Ainsi, $\delta : Y \rightarrow \mathbf{Z}$ se descend en une fonction $\delta' : X \rightarrow \mathbf{Z}$.

Pour conclure, il s'agit de montrer que si $p : Y \rightarrow X$ est un morphisme fini surjectif entre schémas quasi-excellents, que $\delta' : X \rightarrow \mathbf{Z}$ est une fonction et $\delta = \delta' \circ p$, alors δ' est une fonction de dimension sur X si δ est une fonction de dimension sur Y . Pour cet énoncé, on peut supposer que X est local hensélien quasi-excellent, donc universellement caténaire (cf. proposition 1.3.2). D'après le corollaire 2.2.4, il existe une fonction de dimension δ'' sur X . On dispose de deux fonctions de dimension δ et $p^*\delta'' := \delta'' \circ p$ sur Y . La différence $\delta - p^*\delta'' : Y \rightarrow \mathbf{Z}$ est donc une fonction localement constante. Comme $\delta - p^*\delta'' = (\delta' - \delta'') \circ p$ et que p est fini surjectif, on en déduit facilement que la fonction $\delta' - \delta'' : X \rightarrow \mathbf{Z}$ est localement constante. Comme δ'' est une fonction de dimension, on en déduit que δ' est une fonction de dimension. □

2.4. Existence globale de fonctions de dimension. Suivant [ÉGA 0_{IV} 14.2.1], on dit qu'un schéma noëthérien X est **équicodimensionnel** si ses points fermés ont tous la même codimension (qui est alors égale à $\dim(X)$).

EXEMPLE 2.4.1. Les schémas de type fini équidimensionnels sur un corps k ou sur $\mathbf{Z}$ sont équicodimensionnels : il est classique que dans cette situation, on a $\dim(X) = \dim(\mathcal{O}_{X,x})$ pour tout point fermé x . Les schémas locaux sont équicodimensionnels car ils possèdent un unique point fermé. Si $S = \text{Spec}(R)$ est un trait d'uniformisante π , le schéma $\mathbf{A}_S^1$ n'est pas équicodimensionnel. En effet, il existe un point fermé de $\mathbf{A}_S^1$ au-dessus du point générique de S : il suffit d'écrire $\mathbf{A}_S^1 = \text{Spec}(R[t])$ et de considérer $\mathfrak{m} = (\pi t - 1)$, qui est un idéal maximal de corps résiduel $\text{Frac}(R)$.

Le lemme suivant est inspiré de [ÉGA 0_{IV} 14.3.3]⁽ⁱ⁾.

LEMME 2.4.2. *Soit X un schéma noëthérien équidimensionnel caténaire dont les composantes irréductibles sont équicodimensionnelles. Pour tout $x \in X$, on a*

$$\dim(X) = \dim \overline{\{x\}} + \dim(\mathcal{O}_{X,x}).$$

REMARQUE 2.4.3. En particulier, cette égalité est vérifiée pour tout schéma intègre local caténaire. D'après [Matsumura, 1989, th. 31.4], si X est intègre local noëthérien et si pour tout $x \in X$, on a $\dim(X) = \dim \overline{\{x\}} + \dim(\mathcal{O}_{X,x})$, alors X est caténaire.

Le lemme 2.4.2 et la proposition 2.2.2 impliquent le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.4.4. *Soit X un schéma noëthérien intègre, équicodimensionnel et universellement caténaire. La fonction $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = \dim \overline{\{x\}}$ est une fonction de dimension sur X .*

Les conclusions du corollaire sont prises en défaut si X n'est pas équicodimensionnel. Soient par exemple $S = \text{Spec}(R)$ un trait d'uniformisante π et $X = \mathbf{A}_S^1 = \text{Spec}(R[t])$. Si l'on note x le point fermé de X correspondant à l'idéal maximal $(\pi t - 1)$ et η le point générique de $\mathbf{A}_S^1$, alors la spécialisation $\eta \rightsquigarrow x$ est immédiate et pourtant $\dim \overline{\{x\}} = 0$ et $\dim \overline{\{\eta\}} = 2$.

⁽ⁱ⁾Gabber remarque que la proposition [ÉGA 0_{IV} 14.3.3] est fautive. Les assertions a, c et d de *loc. cit.* sont équivalentes entre elles et impliquent b mais ne lui sont pas équivalentes. Il faut remplacer b par la condition « X est caténaire équidimensionnel et ses composantes irréductibles sont équicodimensionnelles ». Gabber donne comme contre-exemple le spectre du localisé de $k[x, y, z, w]/(xz, xw)$ en le complémentaire de l'union des idéaux premiers $(x - 1, y)$ et (x, z, w) avec k un corps. La même erreur a été relevée, indépendamment, par Huayi Chen (courrier à Luc Illusie du 2005-9-26).

COROLLAIRE 2.4.5. Soit X un schéma qui est soit de type fini sur un corps, soit de type fini sur $\mathbf{Z}$, ou soit local universellement caténaire. La fonction définie par $\delta(x) = \dim \{\bar{x}\}$ est une fonction de dimension sur X .

Démonstration. Le schéma X est universellement caténaire. D'après le corollaire 2.4.4, la fonction δ est une fonction de dimension sur chaque composante irréductible de X . Cette fonction est définie globalement donc est une fonction de dimension sur X . $\square$

2.5. Fonction de dimension induite. Soient $Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et δ_X une fonction de dimension sur X . Dans certains cas nous pouvons construire une fonction de dimension δ_Y induite sur Y . On admet la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5.1 ([Matsumura, 1980a], 14.C). Soient X un schéma noëthérien intègre universellement caténaire, Y un schéma intègre et $Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini dominant. Soient $k(X)$ et $k(Y)$ les corps de fractions respectifs de X et Y , soient y un point de Y et x son image dans X , et soient $k(y)$ et $k(x)$ leurs corps résiduels. On a

$$\dim(\mathcal{O}_{Y,y}) - \deg. \text{tr.}(k(Y)/k(X)) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \deg. \text{tr.}(k(y)/k(x)).$$

COROLLAIRE 2.5.2. Soient X un schéma noëthérien qui possède une fonction de dimension δ_X et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini. La fonction $\delta_Y : Y \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par

$$\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) + \deg. \text{tr.}(k(f(y))/k(y))$$

est une fonction de dimension sur Y .

Démonstration. On peut supposer que X et Y sont intègres et que f est dominant. D'après la proposition 2.2.6, X est universellement caténaire et d'après la proposition 2.2.2, $x \mapsto -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension sur X . Comme les fonctions de dimension forment un $\mathbf{Z}$ -torseur, on peut supposer que $\delta_X(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ pour tout $x \in X$.

Le corollaire 2.5.1 montre que $\delta_Y(y) = -\dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \deg. \text{tr.}(k(Y)/k(X))$ et la proposition 2.2.2 montre que $y \mapsto -\dim(\mathcal{O}_{Y,y})$ est une fonction de dimension sur Y . Ainsi, δ_Y est une fonction de dimension sur Y . $\square$

Avant d'établir la fonctorialité des fonctions de dimension vis-à-vis des morphismes réguliers entre schémas excellents, démontrons un énoncé de changement de base par un morphisme régulier en cohomologie étale. Ce lemme est une simple conséquence du théorème de Popescu I-10.3 et du théorème de changement de base par un morphisme lisse [SGA 4 XVI 1.2].

LEMME 2.5.3. Soient

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{g'} & T \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

un diagramme cartésien de schémas, n un entier inversible sur S et $\mathcal{F}$ un faisceau étale en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur T . Supposons que f est cohérent et que g est un morphisme régulier entre schémas noëthériens. La flèche naturelle de changement de base

$$g^* Rf_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} Rf'_* g'^*(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La question étant locale sur S et S' , on peut supposer que S et S' sont affines. D'après le théorème de Popescu, il existe un ensemble ordonné filtrant I (non vide) et une famille de schémas affines S_i indexée par I , tels que S_i soit lisse sur S pour tout $i \in I$ et que $S' = \lim_i S_i$. Il existe donc pour tout $i \in I$ un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} T' & \xrightarrow{h'_i} & T_i & \xrightarrow{g'_i} & T \\ f' \downarrow & & \downarrow f_i & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{h_i} & S_i & \xrightarrow{g_i} & S \end{array}$$

On conclut grâce à la suite d'isomorphismes suivante pour tout $q \geq 0$:

$$\begin{aligned} R^q f'_* g'^*(\mathcal{F}) &\xleftarrow{\sim} \operatorname{colim}_i h_i^* R^q f_{i*} g_i'^*(\mathcal{F}) \\ &\xleftarrow{\sim} \operatorname{colim}_i g^* R^q f_*(\mathcal{F}) \\ &\xleftarrow{\sim} g^* R^q f_*(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Le premier de ces isomorphismes résulte du théorème de passage à la limite [SGA 4 VII 5.11], et le second du théorème de changement de base par le morphisme lisse g_i [SGA 4 XVI 1.2]. $\square$

Nous prouvons à présent qu'un morphisme régulier entre schémas excellents permet d'induire des fonctions de dimension.

PROPOSITION 2.5.4. *Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre schémas quasi-excellents et δ_X une fonction de dimension sur X . La fonction $\delta_Y : Y \rightarrow \mathbf{Z}$ définie par*

$$\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) - \dim(\mathcal{O}_{Y_{f(y)}, y})$$

est une fonction de dimension sur Y .

Démonstration. Comme la vérification est locale, il n'y a pas de mal à supposer X et Y strictement locaux et f local. Les schémas quasi-excellents X et Y sont alors excellents (cf. proposition 1.3.2). Soit δ une fonction de dimension sur Y ; son existence est assurée par le théorème 2.2.1. Il suffit de montrer que $\delta_Y - \delta$ est une fonction constante sur Y . Les fibres de f sont régulières donc universellement caténaires d'après 1.1.3. La proposition 2.2.2 montre que la fonction qui à $y \in Y$ associe $-\dim(\mathcal{O}_{Y_{f(y)}, y})$ induit une fonction de dimension sur chacune des fibres de f . La fonction $\delta_Y - \delta$ est donc localement constante sur chaque fibre de f . Il résulte du lemme 2.5.3 que ces fibres sont connexes : en effet, on a $H^0(f^{-1}(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = H^0(x, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour tout $x \in X$ et tout entier n inversible sur X . La fonction $\delta_Y - \delta$ est donc constante sur les fibres de f et descend à X . Il suffit de montrer que $\gamma = \delta_Y - \delta$ est localement constante sur X . Une façon de calculer la valeur de γ en un point s de X consiste à considérer le point générique η_s du schéma régulier connexe $f^{-1}(s)$, de sorte que $\gamma(s) = \delta_X(s) - \delta(\eta_s)$. Soit $s' \rightsquigarrow s$ une spécialisation Zariski immédiate entre deux points de X . Il s'agit de montrer que $\gamma(s) = \gamma(s')$. Vu que δ_X et δ sont des fonctions de dimension sur X et Y respectivement, pour montrer cela, il suffit de savoir que $\eta_{s'}$ est une spécialisation immédiate de η_s . Pour montrer cela, quitte à remplacer X par le localisé en s de l'adhérence de s' , on peut supposer que X est local intègre de dimension 1, de point générique s' et de point fermé s . Il s'agit alors de montrer que la fibre $f^{-1}(s)$ est de codimension 1 dans Y , ce qui résulte facilement du *Hauptidealsatz*. $\square$

2.6. Contre-exemple.

2.6.1. Rappelons l'exemple de [ÉGA IV₂ 5.6.11] d'un schéma caténaire non universellement caténaire. Soient k_0 un corps et k une extension purement transcendante de k_0 de degré de transcendance infini. Notons $S = k[X]_{(X)}$ le localisé de l'anneau de la droite affine sur k en l'origine et $V = S[T]$. Les idéaux maximaux $\mathfrak{m} = (X, T)$ et $\mathfrak{m}' = (XT - 1)$ de V sont respectivement de hauteur 2 et 1, et il existe un isomorphisme $\phi : V/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} V/\mathfrak{m}'$. On note v et v' les points fermés de $\operatorname{Spec}(V)$ correspondant aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$. Posons $C = \{f \in V \mid \phi(f \bmod \mathfrak{m}) = f \bmod \mathfrak{m}'\}$. C'est un sous-anneau de V qui n'est pas de type fini sur k . Le morphisme $\operatorname{Spec}(V) \rightarrow \operatorname{Spec}(C)$ est fini et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense $\operatorname{Spec}(C) - \{c\}$ où c est le point fermé de C correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}' \subset C$. L'espace topologique $\operatorname{Spec}(C)$ s'identifie au quotient de $\operatorname{Spec}(V)$ pour la relation d'équivalence qui identifie v et v' .

PROPOSITION 2.6.2. *Le schéma $\operatorname{Spec}(C)$ est noëthérien, quasi-excellent, caténaire mais non universellement caténaire. Le point fermé correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de C est une spécialisation étale immédiate mais non Zariski immédiate du point générique de $\operatorname{Spec}(C)$.*

Démonstration. Le caractère noëthérien est montré dans [ÉGA IV₂ 5.6.11] et le caractère quasi-excellent dans [ÉGA IV₂ 7.8.4 (ii)]. Le schéma $\operatorname{Spec}(C)$ est caténaire d'après le corollaire 1.2.4 car il est de dimension 2. Les points v et v' s'identifient aux deux points fermés de $\operatorname{Spec}(V \otimes_C C_{\mathfrak{n}})$ et les

localisés correspondants $\text{Spec}(V_m)$ et $\text{Spec}(V_{m'})$ sont de dimensions respectives 2 et 1, ce qui met en défaut la dernière condition du théorème 1.2.3 : l'anneau local C_n n'est pas universellement caténaire.

L'anneau local C_n étant de dimension 2, le point $c \in \text{Spec}(C)$ n'est pas spécialisation Zariski immédiate du point générique. En revanche, c'en est une spécialisation étale immédiate grâce à la proposition 2.1.11 appliquée au morphisme fini $\text{Spec}(V) \rightarrow \text{Spec}(C)$ et à la spécialisation étale immédiate évidente $\bar{\eta}_{\text{Spec}(V)} \rightsquigarrow \bar{v}'$ de points géométriques de $\text{Spec}(V)$. $\square$

Théorème de Lefschetz affine

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

1. Énoncé du théorème et premières réductions

1.1. Énoncé.

1.1.1. Soient X un schéma muni d'une fonction de dimension δ_X (XIV-2.1.10) et n un entier inversible sur X . Pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur X ,

$$\delta_X(\mathcal{F}) = \sup \{ \delta_X(x), x \in X \mid \mathcal{F}_{\bar{x}} \neq 0 \}.$$

Rappelons (XIV-2.5.2) qu'un morphisme de type fini $f : Y \rightarrow X$ induit une fonction de dimension sur Y ; nous la noterons ici $f^*\delta_X$. Le théorème principal de cet exposé est le suivant (voir aussi Intro-7).

THÉORÈME 1.1.2. *Supposons le schéma X quasi-excellent et le morphisme $f : Y \rightarrow X$ affine de type fini. Alors, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur Y , on a :*

$$\delta_X(R^q f_* (\mathcal{F})) \leq f^* \delta_X(\mathcal{F}) - q.$$

REMARQUE 1.1.3. Ce théorème a été déjà démontré en 1994 par O. Gabber lorsque X est de type fini sur un trait, cf. [Illusie, 2003]. La démonstration du théorème précédent procède notamment par réduction à ce cas.

1.2. Reformulation et réductions.

1.2.1. Soient f et $\mathcal{F}$ comme ci-dessus. La conclusion du théorème signifie que pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X localisé en un point x et tout entier $q > f^* \delta_X(\mathcal{F}) - \delta_X(x)$, on a

$$(Rf_* \mathcal{F})_{\bar{x}} = H^q(Y_{(\bar{x})}, \mathcal{F}) = 0,$$

où l'on note $Y_{(\bar{x})}$ le produit fibré $Y \times_X X_{(\bar{x})}$. Rappelons (XIV-2.4.5) que le schéma strictement local $X_{(\bar{x})}$ peut être muni la fonction de dimension $\delta_{X_{(\bar{x})}} : t \mapsto \dim \overline{\{t\}}$ (XIV-2.4.5); c'est l'unique fonction de dimension nulle en x . Notons l'inégalité $f^* \delta_X(\mathcal{F}) - \delta_X(x) \geq f_{(\bar{x})}^* \delta_{X_{(\bar{x})}}(\mathcal{F})$, triviale dans le cas où $\delta_X(x) = 0$, auquel on peut se ramener. Ainsi, le théorème 1.1.2 est équivalent à l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 1.2.2. *Soit X un schéma quasi-excellent, strictement local, muni de la fonction de dimension $\delta_X : t \mapsto \dim \overline{\{t\}}$. Alors, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur Y , on a :*

$$H^q(Y, \mathcal{F}) = 0 \text{ si } q > f^* \delta_X(\mathcal{F}).$$

1.2.3. Procédant comme en [SGA 4 XIV 4.4] pour se ramener au cas d'une immersion ouverte affine puis utilisant la méthode de la trace ([SGA 4 IX 5.5] ou [SGA 5 I 3.1.2]) pour se ramener au cas des coefficients constants (voir aussi XIII-3.7), on montre que le théorème est également équivalent au corollaire suivant. (On pourrait d'ailleurs supposer l'entier n premier.)

COROLLAIRE 1.2.4. *Soient X un schéma strictement local quasi-excellent de dimension d , un ouvert affine U de X , et un entier inversible n sur X . Alors,*

$$H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \text{ si } q > d.$$

1.2.5. *Réduction au cas complet.* Supposons dorénavant X strictement local quasi-excellent, de complété $\widehat{X}$ en le point fermé, et fixons un ouvert affine U de X , dont on note $\widehat{U}$ l'image inverse sur $\widehat{X}$. Le morphisme naturel de $\widehat{X}$ dans X est régulier car X est quasi-excellent. En appliquant le lemme de changement de base par un morphisme régulier (XIV-2.5.3) au diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U} & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{X} & \longrightarrow & X \end{array}$$

on obtient $H^q(\widehat{U}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ pour tout $q \geq 0$. Voir également [Fujiwara, 1995, 7.1.1] pour une autre approche, ainsi que XX-4.4.

1.2.6. Dans les deux sections qui vont suivre, nous allons démontrer l'énoncé 1.2.4 dans le cas particulier où X est local noethérien complet à corps résiduel séparablement clos.

2. Pureté, combinatoire des branches et descente

2.1. Pureté : rappel et une application.

2.1.1. Nous rappelons le théorème de pureté absolue démontré par O. Gabber ([Fujiwara, 2002]). Par convention, on considère le schéma vide comme un diviseur à croisements normaux strict dont l'ensemble des branches est indexé par l'ensemble vide.

THÉORÈME 2.1.2 (XVI-3.1.1). Soient X un schéma régulier, Z un diviseur à croisements normaux strict de complémentaire $j : U = X - Z \hookrightarrow X$ et de branches $\{Z_i\}_{i \in I}$, et n un entier inversible sur X . Il existe des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} R^1 j_* (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{Z_i}(-1) \\ R^q j_* (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \bigwedge^q R^1 j_* (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

2.1.3. *Combinatoire des branches : définitions.* Soient $g : X' \rightarrow X$ un morphisme entre schémas, et U un ouvert rétrocompact de X . Notons $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte, $j' : U' \hookrightarrow X'$ l'immersion ouverte qui s'en déduit par changement de base, et Z et Z' les fermés complémentaires respectifs. Enfin on se donne un fermé $F \subset Z$ dont on note F' l'image inverse. (L'hypothèse de rétrocompacité de U — c'est-à-dire de quasi-compacité de j — est automatiquement satisfaite si X est localement noethérien ; elle permet le calcul des fibres des images directes $R^p j_*$ ci-dessous.)

DÉFINITION 2.1.4. On dit que $(Z \hookrightarrow X)$ et $(Z' \hookrightarrow X')$ ont **même combinatoire le long de F** si pour tout point géométrique $\bar{z}'$ de F' d'image le point géométrique $\bar{z}$ de F , les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) les schémas $X_{(\bar{z})}$ et $X'_{(\bar{z}')}$ sont réguliers ;
- (ii) (a) soit $X_{(\bar{z})} = Z_{(\bar{z})}$,
 (b) soit le fermé $Z_{(\bar{z})}$ est un diviseur à croisements normaux strict, dont les composantes sont définies par des équations $f_1, \dots, f_r$, et les fonctions $g^* f_1, \dots, g^* f_r$ forment une famille libre de m/m^2 , où m est l'idéal maximal de $X'_{(\bar{z}')}$.

2.1.5. Notons que, dans le second cas ($Z_{(\bar{z})}$ diviseur), le fermé $Z'_{(\bar{z}')}$ est un diviseur à croisements normaux dans $X'_{(\bar{z}')}$, ayant même nombre de branches.

2.1.6. Lorsque X est un schéma sur une base S , et F est un fermé de ce dernier, on s'autorise à dire « ... le long de F » pour « ... le long de l'image inverse $F \times_S X$ ».

PROPOSITION 2.1.7. Supposons que $(Z \hookrightarrow X)$ et $(Z' \hookrightarrow X')$ aient même combinatoire le long d'un fermé F de X . Alors, pour tout entier n inversible sur X , le morphisme d'adjonction

$$(Rj_* \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})|_{F'} \rightarrow (Rj'_* \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})|_{F'}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Quitte à localiser en des points géométriques $\bar{z}'$ et $\bar{z}$, on peut supposer les schémas strictement locaux et le morphisme $X' \rightarrow X$ local. Il faut alors montrer que $R\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow R\Gamma(U', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est un isomorphisme. D'après le théorème de pureté 2.1.2, il suffit de montrer que le morphisme induit sur le H^1 est un isomorphisme, ce qui résulte aussitôt de la structure de ces groupes et de ce que la classe associée à une branche $Z_i = V(f_i)$ de Z est envoyée par restriction sur la classe de la branche $g^{-1}(Z_i) = V(g^*f_i)$ (cf. XVI-2). $\square$

2.2. Application du théorème d'hyper-changement de base.

2.2.1. Soit X un schéma noëthérien. Dans cet exposé, on utilise une variante de la topologie h sur X définie en XII_A-2.1.3 : on ne veut considérer ici que des X -schémas de type fini (afin de pouvoir appliquer les résultats de III par exemple) tandis que dans XII_A il était nécessaire d'autoriser des coproduits infinis (afin de pouvoir appliquer le formalisme de la descente cohomologique ; voir [SGA 4 V^{bis} 3.0.0]).

On dira donc qu'un morphisme $Y' \rightarrow Y$ dans la catégorie $\text{Sch.tf}/X$ des X -schémas de type fini est **h-couvrant** s'il est dominé par une composition (finie, dans un ordre arbitraire) de familles couvrantes (dites « élémentaires ») d'un des deux types suivants (dans $\text{Sch.tf}/X$) :

- un morphisme propre et surjectif $Z' \rightarrow Z$;
- un recouvrement Zariski $(Z_i \rightarrow Z)_{i \in I}$, où I est un ensemble fini.

Observons qu'un h -hyperrecouvrement $X_\bullet \rightarrow X$ (au sens de la définition ci-dessus) est également un hyperrecouvrement pour la topologie h (sur Sch/X) de XII_A.

2.2.2. Supposons maintenant X strictement local (noëthérien) de point fermé x , dont on note $i_x : x \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Considérons une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ et $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ un h -hyperrecouvrement. La proposition suivante — où les morphismes obtenus par changement de base sont notés de façon évidente — est un corollaire immédiat du théorème d'hyper-changement de base (XII_A-2.2.5, ou XII_B-1.10) et du fait que la cohomologie de U est la fibre en x de l'image directe par j .

PROPOSITION 2.2.3. *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme d'adjonction*

$$R\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow R\varepsilon_{x*}(i_{x*}^* Rj_{\bullet*} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme.

2.2.4. Supposons maintenant donné un morphisme *local* $X' \rightarrow X$ de schémas strictement locaux noëthériens. Comme précédemment, on note U un ouvert de X , Z son complémentaire et x le point fermé de X . À tout h -hyperrecouvrement $X_\bullet \rightarrow X$ de X est associé par changement de base un hyperrecouvrement de X' . (On utilise ici la stabilité par changement de base des familles couvrantes élémentaires de 2.2.1 ci-dessus.)

PROPOSITION 2.2.5. *Supposons que pour chaque entier $q \geq 0$ les fermés $(Z_q \hookrightarrow X_q)$ et $(Z'_q \hookrightarrow X'_q)$ aient même combinatoire le long de la fibre spéciale $(X_q)_x$. Alors le morphisme d'adjonction*

$$R\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow R\Gamma(U', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme. De plus, si l'on fait l'hypothèse précédente pour les seuls entiers $q \leq N + 1$, où N est un entier quelconque, les morphismes $H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow H^q(U', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sont des isomorphismes pour chaque $q \leq N$.

Démonstration. Le premier point est conséquence immédiate des deux propositions précédentes. En effet, d'après 2.2.3 et l'invariance de la cohomologie par changement de corps séparablement clos, soit

$$\left(R\varepsilon_{x*}(i_{x*}^* Rj_{\bullet*} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \right)_{|_{x'}} = R\varepsilon'_{x'*} \left((i_{x*}^* Rj_{\bullet*} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|_{x'}} \right),$$

il suffit de démontrer que pour chaque q , l'adjonction $(Rj_{q*} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|_{X'_{q_x}}} \rightarrow (Rj'_{q*} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|_{X'_{q_x}}}$ est un isomorphisme. Cela résulte de l'hypothèse combinatoire et de 2.1.7. La variante tronquée est un corollaire de la démonstration précédente et du fait que la cohomologie en degré q ne dépend que des étages $\leq q + 1$. $\square$

REMARQUE 2.2.6. Dans ce critère, on ne fait d'hypothèses qu'en les points des fibres spéciales des hyperrecouvrements ; c'est ce qui en fait toute sa force.

3. Uniformisation et approximation des données

3.1. Notations.

3.1.1. Soient X, U, Z et n comme à la fin du paragraphe 1.2 : le schéma X est strictement local complet, U en est un ouvert *affine* strict (sans quoi il n'y a rien à démontrer), $Z = X - U$ (muni de la structure réduite), et n est un entier inversible sur X . On veut démontrer 1.2.4 dans ce cas. Fixons un entier N .

3.1.2. Il résulte du théorème d'uniformisation (VII-1.1), complété par XIII-2.2.2, qu'il existe un h -hyperrecouvrement $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ tel que chaque X_q soit régulier et, dans chaque composante connexe de X_q , le sous-schéma fermé $Z_q = Z \times_X X_q$ est soit tout, soit un diviseur à croisements normaux strict.

3.1.3. Soient k le corps résiduel de X , un anneau de Cohen C de corps résiduel k (IV-4.1.7) et $S = \text{Spec}(C)$. Il résulte du théorème de structure des anneaux locaux noëthériens ([ÉGA 0_{IV} 19.8.8]) qu'il existe un entier m et une immersion fermée de X dans le complété en l'origine (de la fibre spéciale sur S) de l'espace affine $\mathbf{A}_S^m$. Notons $\widehat{E}$ ce complété, E son analogue hensélien (hensélisé de l'espace affine en l'origine) et enfin e le point fermé de ce dernier.

3.1.4. Le schéma E étant quasi-excellent, le morphisme de complétion $\widehat{E} \rightarrow E$ est (local) régulier de sorte que, d'après le théorème de Popescu (I-10.3), on peut écrire :

$$\widehat{E} = \lim_{\alpha} E_{\alpha},$$

où les $E_{\alpha} \rightarrow E$ sont des morphismes essentiellement lisses entre schémas strictement locaux, la limite étant filtrante. Notons que les schémas E_{α} sont essentiellement de type fini sur S .

3.2. Passage à la limite.

3.2.1. Quitte à restreindre l'ensemble d'indices, c'est-à-dire à supposer $\alpha \geq \alpha_0$ pour α_0 convenable, les principes généraux de [ÉGA IV₃ § 8], joints au fait que les schémas X, Z, U et les X_q pour $q \leq N$ sont de présentation finie sur $\widehat{E}$, entraînent l'existence de diagrammes à carrés cartésiens de E_{α} -schémas de type fini

$$\begin{array}{ccccc} U_{\leq N, \alpha} & \longrightarrow & X_{\leq N, \alpha} & \longleftarrow & Z_{\leq N, \alpha} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_{\alpha} & \longrightarrow & X_{\alpha} & \longleftarrow & Z_{\alpha} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & E_{\alpha} & & \end{array}$$

déduits par changement de base $E_{\alpha} \rightarrow E_{\alpha_0}$ du diagramme pour α_0 , et dont l'analogue sur $\widehat{E}$ se déduit par changement de base $\widehat{E} \rightarrow E_{\alpha}$. De plus, on peut supposer que pour chaque $\alpha \geq \alpha_0$, $X_{\alpha} \rightarrow E_{\alpha}$ est une immersion fermée — de sorte que X_{α} est strictement local —, et $U_{\alpha} \rightarrow X_{\alpha}$ une immersion ouverte affine de complémentaire Z_{α} .

REMARQUE 3.2.2. Les schémas X_q et $X_{q\alpha}$ ont même fibre spéciale pour tout $q \leq N$.

3.2.3. Il résulte de [ÉGA IV₃ 8.10.5] et de la description (2.2.1) des morphismes h -couvrants que l'on peut supposer que les $X_{\leq N, \alpha} \rightarrow X_{\alpha}$ sont des h -hyperrecouvrements (tronqués) pour $\alpha \geq \alpha_0$.

3.2.4. Vérifions que l'on peut supposer que pour chaque α et chaque $q \leq N$, le « modèle » $X_{q\alpha}$ de X_q est régulier le long de sa fibre spéciale. Fixons q puis oublions le. Le schéma X est donc maintenant régulier, de type fini sur $\hat{E}$. Le problème étant local pour la topologie de Zariski on peut supposer, par quasi-compacité, que X est un sous-schéma de $Y = \mathbf{A}_{\hat{E}}^m$ de la forme $V(f_1, \dots, f_c) \cap D(g)$, où $f_1, \dots, f_c, g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, purement de codimension c dans $D(g)$ ⁽ⁱ⁾.

Pour α suffisamment grand, les fonctions $f_1, \dots, f_c, g$ se descendent en des fonctions $f_{i\alpha}, g_\alpha$ sur $Y_\alpha = \mathbf{A}_{E_\alpha}^m$. Soit x un point de Y appartenant à la fibre spéciale de X et soit x_α son image par $Y \rightarrow Y_\alpha$. Notons $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}_\alpha$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,x}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y_\alpha, x_\alpha}$). Par régularité de X en x , les images $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_c}$ des f_i dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sont linéairement indépendantes sur $\kappa(x) = \mathcal{O}_{Y,x}/\mathfrak{m}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_i & & \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ f_{i\alpha} & & \mathfrak{m}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \end{array}$$

étant commutatif, il résulte de l'égalité $\kappa(x) = \kappa(x_\alpha)$ que les images $\overline{f_{i\alpha}}$ des $f_{i\alpha}$ dans $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ sont linéairement indépendantes sur $\kappa(x_\alpha)$. Le sous-schéma localement fermé $X_\alpha = V(f_{1\alpha}, \dots, f_{c\alpha}) \cap D(g_\alpha)$ de Y_α est donc régulier en x_α .

3.2.5. On montre de même que l'on peut supposer que pour chaque α et chaque $q \leq N$, les immersions $(Z_q \hookrightarrow X_q)$ et $(Z_{q\alpha} \hookrightarrow X_{q\alpha})$ ont *même combinatoire* le long du point fermé $e \in E$, c'est-à-dire le long des fibres spéciales.

3.2.6. Il résulte de la proposition 2.2.5 que les morphismes d'adjonction

$$H^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes pour $q < N$. Nous allons montrer que si $q > d = \dim(X)$ et α est suffisamment grand, on a $H^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$. Ceci achèvera la démonstration du théorème de Lefschetz affine. Notons qu'en général les X_α sont de dimension bien plus grande que $d = \dim(X)$.

3.3. Utilisation d'une section.

3.3.1. Soient $\sigma : E \rightarrow E_\alpha$ une section de $E_\alpha \rightarrow E$ et X_α^σ (resp. $U_\alpha^\sigma, Z_\alpha^\sigma$) le E -schéma déduit de X_α (resp. U_α, Z_α) par changement de base. Notons également $X_{\leq N, \alpha}^\sigma$ le h -hyperrecouvrement de X_α^σ obtenu à partir de $X_{\leq N, \alpha} \rightarrow X_\alpha$ par changement de base. Enfin $\tilde{U}_{\leq N, \alpha}^\sigma$ (resp. $Z_{\leq N, \alpha}^\sigma$) est l'ouvert (resp. le fermé) simplicial évident.

3.3.2. Il résulte de III-5.1 et III-5.4 (voir aussi III-6.2, démonstration) que si α est suffisamment grand et σ est suffisamment proche de l'identité, alors les immersions fermées $(Z_{q\alpha}^\sigma \hookrightarrow X_{q\alpha}^\sigma)$ et $(Z_{q\alpha} \hookrightarrow X_{q\alpha})$ ont *même combinatoire* le long de la fibre spéciale au-dessus de E pour chaque $q \leq N$, et $\dim(X_\alpha^\sigma) = d$. Il en résulte comme ci-dessus que le morphisme

$$H^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow H^q(U_\alpha^\sigma, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour $q < N$. Comme l'ouvert U_α^σ est affine dans X_α^σ de dimension d et essentiellement de type fini sur S , il résulte par passage à la limite du théorème de Lefschetz sur S que

$$H^q(U_\alpha^\sigma, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \text{ si } d < q < N.$$

Si S est un *trait*, le théorème de Lefschetz utilisé est dû à O. Gabber ; voir [Illusie, 2003, 2.4]. Si S est le spectre d'un corps, voir [SGA 4 XIV]. Finalement, $H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ si $q > d = \dim(X)$. CQFD.

⁽ⁱ⁾Bien que cela ne soit pas utile ici, notons qu'un tel X a une immersion régulière de codimension $c + 1$ dans $\mathbf{A}_{\hat{E}}^{m+1}$, où il est défini par les équations $f_1, \dots, f_c, 1 - gT_{m+1}$.

Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue

Joël Riou

Dans ces notes, on présente la nouvelle démonstration par Ofer Gabber du théorème de pureté cohomologique absolue, annoncée dans [Gabber, 2005b]. La section 1 rappelle la construction des classes de Chern en cohomologie étale. Celles-ci servent dans la section 2 qui consiste en la construction et l'étude des propriétés des morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète lissifiables. Dans la section 3, ces morphismes de Gysin sont utilisés pour donner une formulation précise du théorème de pureté absolue (théorème 3.1.1). La démonstration du théorème de pureté (différente de celle rédigée dans [Fujiwara, 2002]) s'appuie notamment sur les résultats de géométrie logarithmique établis dans les exposés VI, VIII et X. On s'est efforcé de faire attention aux signes dans les calculs cohomologiques : les conventions utilisées et quelques remarques les concernant sont détaillées dans la section 4.

Dans tout cet exposé, on fixe un entier naturel $n \geq 1$. Tous les schémas seront supposés être des schémas sur $\text{Spec}(\mathbf{Z}[\frac{1}{n}])$. On note Λ le faisceau d'anneaux constant de valeur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\Lambda(1)$ le faisceau des racines n -ièmes de l'unité (pour la topologie étale) et $\Lambda(r)$ ses puissances tensorielles, auxquelles on peut donner un sens pour tout $r \in \mathbf{Z}$.

1. Classes de Chern

Dans cette section, on rappelle la construction des classes de Chern des fibrés vectoriels sur des schémas généraux à valeurs dans la cohomologie étale. On s'appuie sur le calcul de la cohomologie étale des fibrés projectifs de [SGA 5 VII 2] et sur la méthode de [Grothendieck, 1958a]. Les démonstrations sont parfois différentes de celles de [SGA 5 VII 3] : on s'est efforcé de donner une présentation aussi « économique » que possible.

À la différence de l'exposé oral qui utilisait un langage géométrique, dans ces notes, un fibré vectoriel est un Module $\mathcal{E}$ localement libre de rang fini et le fibré projectif de $\mathcal{E}$ est le fibré des hyperplans défini dans [ÉGA II 4.1.1] : $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj}(\mathbf{S}^*\mathcal{E})$ où $\mathbf{S}^*\mathcal{E}$ est l'Algèbre symétrique de $\mathcal{E}$.

DÉFINITION 1.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X . En faisant agir les fonctions inversibles par multiplication sur les sections inversibles de $\mathcal{L}$, on munit le faisceau des sections inversibles de $\mathcal{L}$ d'une structure de torseur sous le schéma en groupes $\mathbf{G}_m$. La classe d'isomorphisme de $\mathcal{L}$ définit donc un élément dans $H_{\text{ét}}^1(X, \mathbf{G}_m)$. On note $c_1(\mathcal{L}) \in H_{\text{ét}}^2(X, \Lambda(1))$ l'image de cet élément par le morphisme de bord $\delta: H_{\text{ét}}^1(X, \mathbf{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, \Lambda(1))$ déduit de la suite exacte courte de Kummer :

$$0 \rightarrow \Lambda(1) \rightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_m \rightarrow 0 \quad (\text{i}).$$

Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux fibrés en droites sur X , on a la relation d'additivité :

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{L}') \in H^2(X, \Lambda(1)) \quad (\text{ii}).$$

⁽ⁱ⁾ Les conventions de signes utilisées dans cet exposé sont précisées dans la section 4 (voir notamment 4.3 pour la classe de cohomologie associée à un torseur et 4.2 pour le morphisme δ).

⁽ⁱⁱ⁾ Il existe des théories cohomologiques « orientées » pour lesquelles cette propriété de la première classe de Chern n'est pas satisfaite, cf. [Morel & Levine, 2001].

Notons que les classes de Chern de fibrés en droites résident dans les degrés pairs de la cohomologie étale, elles commutent donc avec toutes les classes de cohomologie. Notons aussi que si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X , alors $f^*(c_1(\mathcal{L})) = c_1(f^*\mathcal{L})$.

THÉORÈME 1.2 (Formule du fibré projectif). *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang constant r sur X . On note $\pi: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ le fibré projectif de $\mathcal{E}$. On pose $\xi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(1))$ ⁽ⁱⁱⁱ⁾. Alors, les puissances $\xi^i \in H^{2i}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(i))$ de ξ définissent un isomorphisme dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$(1, \xi, \dots, \xi^{r-1}): \bigoplus_{i=0}^{r-1} \Lambda(-i)[-2i] \xrightarrow{\sim} R\pi_* \Lambda$$

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on peut supposer que X est le spectre d'un corps algébriquement clos k . On se ramène ainsi au calcul de l'algèbre de cohomologie étale des espaces projectifs sur k , cf. [SGA 5 VII 2].

THÉORÈME 1.3. *Il existe une unique manière de définir, pour tout $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X et tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$, des éléments $c_i(\mathcal{E}) \in H_{\text{ét}}^{2i}(X, \Lambda(i))$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ appelés classes de Chern de sorte que si l'on définit la série formelle $c_t(\mathcal{E}) = \sum_{i \geq 0} c_i(\mathcal{E}) t^i$, on ait les propriétés suivantes :*

- la série formelle $c_t(\mathcal{E})$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X ;
- si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme de $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X , alors $f^*(c_t(\mathcal{E})) = c_t(f^*\mathcal{E})$;
- si $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X , on a la relation de Cartan-Whitney :

$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}') c_t(\mathcal{E}'') ;$$

- si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X , la classe $c_1(\mathcal{L})$ est celle de la définition 1.1 et $c_t(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L})t$.

On a alors les relations $c_0(\mathcal{E}) = 1$ et $c_i(\mathcal{E}) = 0$ pour $i > \text{rang } \mathcal{E}$ pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X .

La démonstration utilise plusieurs constructions géométriques :

PROPOSITION 1.4 (Principe de scindage I). *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang r . On note $\pi: \mathbf{Drap}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ le fibré des drapeaux complets de $\mathcal{E}$. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- le fibré vectoriel $\pi^*\mathcal{E}$ admet une filtration (canonique) $0 = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_r = \pi^*\mathcal{E}$ par des fibrés vectoriels de sorte que pour tout entier $1 \leq i \leq r$, le quotient $\mathcal{L}_i = \mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i-1}$ soit un fibré en droites ;
- le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow R\pi_* \Lambda$ est un monomorphisme scindé dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

La seule propriété non triviale réside dans le fait que $\Lambda \rightarrow R\pi_* \Lambda$ soit un monomorphisme scindé. En remarquant que la projection $\mathbf{Drap}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ peut s'écrire comme un composé de r projections de fibrés projectifs, ceci se déduit de la formule du fibré projectif (théorème 1.2) ^(iv).

PROPOSITION 1.5 (Principe de scindage II). *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit $(E): 0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{E}'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur X . On note $\mathbf{Sect}(E)$ le X -schéma défini par le fait que pour tout X -schéma $f: Y \rightarrow X$, l'ensemble des X -morphisms $Y \rightarrow \mathbf{Sect}(E)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des sections de la surjection de fibrés vectoriels $f^*(p): f^*\mathcal{E} \rightarrow f^*\mathcal{E}''$ sur Y ^(v). Le Y -schéma $\mathbf{Sect}(E)$ est naturellement muni d'une structure de torseur sous le Y -schéma en groupes vectoriel d'homomorphismes $\mathbf{Hom}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$. Notons $\pi: \mathbf{Sect}(E) \rightarrow X$ la projection. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est le faisceau fondamental sur $\mathbf{P}(\mathcal{E})$: c'est le quotient inversible de $\pi^*\mathcal{E}$ par l'hyperplan universel.

^(iv) Plus précisément, Grothendieck a montré (cf. [Grothendieck, 1958b], ou [SGA 6 VI 4.6] pour le même argument dans le cas de la K -théorie algébrique) que la théorie des classes de Chern permettait de calculer l'algèbre de cohomologie des fibrés de drapeaux, fussent-ils incomplets.

^(v) Je remercie Dennis Eriksson de m'avoir signalé cette construction.

- l'image inverse par π : $\mathbf{Sect}(E) \rightarrow X$ de la suite exacte de fibrés vectoriels (E) est (canoniquement) scindée;
- le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda$ est un isomorphisme dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

L'existence de $\mathbf{Sect}(E)$ est évidente, la question étant de nature locale sur X . Localement pour la topologie de Zariski sur X , la projection π est la projection depuis un espace affine, l'isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} R\pi_*\Lambda$ résulte alors de l'invariance par homotopie de la cohomologie étale pour les $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas [SGA 4 xv 2.2].

Démontrons le théorème 1.3. Grâce aux propositions 1.4 et 1.5, l'unicité est évidente. Il s'agit donc de construire une théorie des classes de Chern satisfaisant les propriétés demandées. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel (que l'on peut supposer de rang constant r) sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X . On considère le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ sur X . On note $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$. D'après la formule du fibré projectif (théorème 1.2), il existe d'uniques éléments, notés $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(X, \Lambda(i))$ pour $1 \leq i \leq r$ tels que l'on ait la relation

$$\xi^r - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-1} + c_2(\mathcal{E})\xi^{r-2} + \cdots + (-1)^r c_r(\mathcal{E}) = 0 \in H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r)).$$

On pose $c_0(\mathcal{E}) = 1$ et $c_i(\mathcal{E}) = 0$ pour $i > r$. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un fibré en droites, $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \simeq X$ et $\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{E}$, ce qui montre que cette définition étend la précédente pour les fibrés en droites. La seule propriété non évidente est la formule de Cartan-Whitney. Par principe de scindage (propositions 1.4 et 1.5), il suffit d'établir la formule suivante :

LEMME 1.6. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit $(\mathcal{L}_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille finie de fibrés en droites sur X , soit $\mathcal{E} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{L}_i$ leur somme directe. Dans $H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))$, on a la relation :

$$\prod_{i=1}^r (\xi - c_1(\mathcal{L}_i)) = 0$$

où $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$. Autrement dit,

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r c_t(\mathcal{L}_i).$$

L'argument qui suit est inspiré de [Panin & Smirnov, 2003]. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $H_i \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E}/\mathcal{L}_i)$ l'hyperplan projectif de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ défini par l'inclusion $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{E}$. Notons $\pi: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ la projection. Le morphisme canonique $\pi^*\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{O}(1)$ induit un isomorphisme sur l'ouvert complémentaire de H_i dans $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. On en déduit que l'élément $\xi - c_1(\mathcal{L}_i)$ de $H^2(X, \Lambda(1))$ peut être relevé en un élément x_i du groupe de cohomologie à supports $H_{H_i}^2(X, \Lambda(1))$ ^(vi). Le produit des éléments x_i vit naturellement dans le groupe de cohomologie à support $H_{\bigcap_{1 \leq i \leq r} H_i}^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))$ qui est nul puisque l'intersection de ces r hyperplans est vide ; on en déduit la formule voulue par oubli du support.

PROPOSITION 1.7. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X . Pour tout entier naturel i , on a l'égalité :

$$c_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathcal{E}) ;$$

autrement dit, on a une formule de changement de variables :

$$c_t(\mathcal{E}^\vee) = c_{-t}(\mathcal{E}).$$

Grâce à la relation de Cartan-Whitney et au principe de scindage, on peut se ramener au cas où $\mathcal{E}$ est un fibré en droites. Cela résulte alors du fait que $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \Lambda(1))$ soit un homomorphisme de groupes.

^(vi) Pour le moment, peu importe de fixer un relèvement canonique.

2. Morphismes de Gysin

Étant donné un morphisme d'intersection complète $X \xrightarrow{f} S$ entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas vérifiant certaines hypothèses techniques, on va construire un morphisme de Gysin $\text{Cl}_f: \Lambda \rightarrow f^* \Lambda$ où $f^? = f^!(-d)[-2d]$ (d est la dimension relative virtuelle de f). Ces morphismes de Gysin seront compatibles à la composition des morphismes d'intersection complète.

L'essentiel de cette section est consacrée à la construction de ces morphismes de Gysin dans le cas des immersions régulières. Le morphisme trace permettra de faire la construction dans le cas des morphismes lisses. Ces deux définitions se recolleront pour donner la définition 2.5.11 dans le cas général et le théorème 2.5.12 établira la compatibilité à la composition de ces morphismes de Gysin.

2.1. Première classe de Chern d'un pseudo-diviseur. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma X , Z un fermé de X et U l'ouvert complémentaire. On suppose donnée une section inversible $s: \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U$. Au couple $(\mathcal{L}, s)$ est canoniquement associée une classe $c_1(\mathcal{L}, s) \in H_Z^2(X, \Lambda(1))$ induisant $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X, \Lambda(1))$ par oubli du support (construire un élément de $H_Z^1(X, \mathbf{G}_m)$ et utiliser la suite exacte de Kummer).

La classe $c_1(\mathcal{L}, s)$ correspond à un morphisme $\Lambda_Z = \Lambda_X / \Lambda_U \rightarrow \Lambda_X(1)[2]$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. En « composant » un tel morphisme avec une classe de cohomologie de Z représentée par un morphisme $\Lambda_Z \rightarrow \Lambda_Z(q)[p]$ (cf. 4.5.3), il vient que $c_1(\mathcal{L}, s)$ induit des morphismes de Gysin

$$\text{Gys}_{(\mathcal{L}, s)}: H^p(Z, \Lambda(q)) \rightarrow H_Z^{p+2}(X, \Lambda(q+1)).$$

DÉFINITION 2.1.1. Si $Z \rightarrow X$ est une immersion régulière de codimension 1 définie par un Idéal (inversible) $\mathcal{I}$, on pose $\text{Gys}_{Z \subset X} = -\text{Gys}_{(\mathcal{I}, 1_{X-Z})} = \text{Gys}_{-(\mathcal{I}, 1_{X-Z})}$.

On a noté ici $-(\mathcal{I}, 1_{X-Z})$ l'opposé du pseudo-diviseur $(\mathcal{I}, 1_{X-Z})$, cf. [Fulton, 1998, §2.2]. Via les identifications usuelles, $-(\mathcal{I}, 1_{X-Z})$ correspond au diviseur effectif Z .

2.2. Classes fondamentales généralisées. Pour étudier la compatibilité à la composition des classes fondamentales définies dans [Fujiwara, 2002, §1] dans le cas des immersions régulières (cf. [SGA 6 VII 1.4]), Ofer Gabber définit une classe fondamentale généralisée pour une immersion fermée $Y \rightarrow X$ définie par un Idéal de type fini $\mathcal{I}$. Cette construction n'est plus limitée aux immersions régulières et est compatible aux changements de bases arbitraires, mais elle dépend d'une donnée supplémentaire, à savoir celle d'un fibré vectoriel sur Y se surjectant sur le faisceau conormal $\mathcal{N}_{X/Y} = \mathcal{I} / \mathcal{I}^2$.

2.2.1. *Éclatement modifié.* Soit $Y \rightarrow X$ une immersion fermée entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas définie par un Idéal de type fini $\mathcal{I}$. On note U l'ouvert complémentaire. Soit $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$ un épimorphisme de Modules sur Y où $\mathcal{E}$ est un Module localement libre de rang fini. On définit une $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{A}_*$ par produit fibré de façon à avoir un carré cartésien de $\mathcal{O}_X$ -Modules, pour tout entier naturel n :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{I}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}^n_{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \end{array}$$

où l'algèbre symétrique $\mathbf{S}^*_{\mathcal{E}}$ est prise sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$.

DÉFINITION 2.2.1.1. On pose $\text{Écl}_{Y, \mathcal{E}}(X) = \text{Proj}(\mathcal{A}_*)$ et on note $\pi: \text{Écl}_{Y, \mathcal{E}}(X) \rightarrow X$ la projection.

REMARQUE 2.2.1.2. Si $Y \rightarrow X$ est une immersion fermée régulière et que $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$ est un isomorphisme, $\text{Écl}_{Y, \mathcal{E}}(X)$ s'identifie à l'éclaté de Y dans X . C'est ce cas particulier que l'on généralise ici en vue d'obtenir une construction compatible aux changements de base.

PROPOSITION 2.2.1.3. L'Algèbre $\mathcal{A}_0$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$, les Modules $\mathcal{A}_n$ sont de type fini, l'Algèbre graduée $\mathcal{A}_*$ est engendrée par $\mathcal{A}_1$ et on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées $\mathcal{A}_* \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X / \mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^*_{\mathcal{E}}$.

L'assertion concernant $\mathcal{A}_0$ est tautologique. Soit n un entier naturel. Comme $\mathcal{I}^n \rightarrow \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$ est un épimorphisme, la projection $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathbf{S}^n \mathcal{E}$ est aussi un épimorphisme et si on note $\mathcal{K}_n$ son noyau, on a un isomorphisme $\mathcal{K}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{n+1}$. Par dévissage, il en résulte que $\mathcal{A}_n$ est un Module de type fini.

Puisque $\mathbf{S}^n \mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ -Module, $\mathcal{K}_n$ contient $\mathcal{I} \cdot \mathcal{A}_n$. Comme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un épimorphisme, le morphisme $\mathbf{S}^n \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$ est aussi un épimorphisme, ce qui implique que la projection $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{I}^n$ est un épimorphisme. Le morphisme induit $\mathcal{I} \cdot \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{I} \cdot \mathcal{I}^n = \mathcal{I}^{n+1} \simeq \mathcal{K}_n$ est donc à la fois un monomorphisme et un épimorphisme : $\mathcal{K}_n = \mathcal{I} \cdot \mathcal{A}_n$. Ceci permet d'obtenir l'isomorphisme $\mathcal{A}_\star \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^\star \mathcal{E}$.

Pour montrer que le morphisme évident $\mathcal{A}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{A}_n$ de Modules est un épimorphisme, il suffit, d'après le lemme de Nakayama, de le tester après passage aux corps résiduels de X . Au-dessus de l'ouvert U , c'est évident ; au-dessus de Y , cela résulte de l'isomorphisme $\mathcal{A}_\star \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^\star \mathcal{E}$.

COROLLAIRE 2.2.1.4. *Le morphisme $\pi: \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \rightarrow X$ est projectif et on dispose d'isomorphismes canoniques $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ et $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E})$.*

L'isomorphisme au-dessus de U est évident. Compte tenu de [ÉGA II 3.5.3], celui décrivant $\pi^{-1}(Y)$ se déduit de l'isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées $\mathcal{A}_\star \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^\star \mathcal{E}$.

PROPOSITION 2.2.1.5. *Soit $p: X' \rightarrow X$ un morphisme. On pose $Y' = Y \times_X X'$ et $\mathcal{E}' = p^\star \mathcal{E}$. On dispose d'un épimorphisme évident $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{N}_{X'/Y'}$. Le morphisme canonique*

$$\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X') \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \times_X X'$$

est une nil-immersion.

Notons $\mathcal{A}'_\star$ la $\mathcal{O}_{X'}$ -Algèbre graduée quasi-cohérente donnant naissance à $\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X')$. On dispose d'un morphisme évident $p^\star \mathcal{A}_\star \rightarrow \mathcal{A}'_\star$ de $\mathcal{O}_{X'}$ -Algèbres graduées quasi-cohérentes. Pour tout entier, le morphisme $p^\star \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}'_n$ est un morphisme entre $\mathcal{O}_{X'}$ -Modules de type fini ; pour montrer qu'il s'agit d'un épimorphisme, d'après le lemme de Nakayama, il suffit de vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme d'une part au-dessus de $U' = X' - Y'$ (c'est évident) et d'autre part modulo l'idéal $\mathcal{I}'$ définissant Y' dans X' (cela résulte de la description donnée dans la proposition 2.2.1.3). Le morphisme

$$\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X') \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \times_X X'$$

s'identifie au X' -morphisme évident $\text{Proj}(\mathcal{A}'_\star) \rightarrow \text{Proj}(p^\star \mathcal{A}_\star)$ ([ÉGA II 3.5.3]) ; d'après ce qui précède, il s'agit d'une immersion fermée. Le fait que ce morphisme induise un isomorphisme au-dessus de $p^{-1}(U)$ et de $p^{-1}(Y)$ permet d'en déduire aussitôt que le morphisme induit au niveau des schémas réduits associés

$$\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X')_{\text{réd}} \rightarrow (\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \times_X X')_{\text{réd}}$$

est un isomorphisme.

2.2.2. Définition des classes. On se donne toujours une immersion fermée $i: Y \rightarrow X$ définie par un Idéal $\mathcal{I}$ de type fini. On note $j: U \rightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire ($\mathcal{I}$ étant de type fini, j est un morphisme de type fini). On suppose donné un épimorphisme de $\mathcal{O}_Y$ -Modules $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$ avec $\mathcal{E}$ est localement libre de rang fini. On note $\pi: \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \rightarrow X$ la projection de l'éclatement modifié, $j': U \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ l'immersion ouverte évidente et $i': \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ l'immersion fermée donnée par le corollaire 2.2.1.4. On note r le rang du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ que l'on suppose de rang constant pour simplifier et on suppose $r > 0$.

On a ainsi le diagramme suivant de schémas, où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{i'} & \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) & \xleftarrow{j'} & U \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

PROPOSITION 2.2.2.1. *Le morphisme évident $\Lambda \rightarrow R\pi'_\star \Lambda$ dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ est un monomorphisme scindé : la formule du fibré projectif identifie son conoyau à*

$$\bigoplus_{k=1}^{r-1} \Lambda(-k)[-2k] .$$

Les morphismes évidents définissent un triangle distingué :

$$\Lambda \rightarrow R\pi_\star \Lambda \rightarrow i_\star \text{Coker}(\Lambda \rightarrow R\pi'_\star \Lambda) \xrightarrow{0} \Lambda[1]$$

dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. On peut le récrire sous la forme

$$\Lambda \rightarrow R\pi_\star \Lambda \xrightarrow{p} \bigoplus_{k=1}^{r-1} i_\star \Lambda(-k)[-2k] \xrightarrow{0} \Lambda[1] ,$$

le morphisme p admettant une section canonique donnée par les éléments $c_1(\mathcal{O}(1), 1_U)^k$ de $H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2k}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(k))$, identifiés à des morphismes $i_\star \Lambda(-k)[-2k] \rightarrow R\pi_\star \Lambda$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

On note L une résolution injective du faisceau constant Λ vu comme faisceau de Λ -modules sur le grand site étale des schémas de type fini sur X . Pour tout morphisme de type fini $W \xrightarrow{p} X$, on note $L|_W$ le complexe de faisceau de Λ -modules sur $W_{\text{ét}}$ induit par L ; on peut le voir comme un objet de $D^+(W_{\text{ét}}, \Lambda)$ isomorphe à Λ .

LEMME 2.2.2.2. *Le carré commutatif évident de complexes de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ est homotopiquement bicartésien :*

$$\begin{array}{ccc} L|_X & \longrightarrow & i_\star L|_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_\star L|_{\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)} & \longrightarrow & \pi_\star i'_\star L|_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \end{array}$$

(ceci signifie par exemple que le complexe simple associé à ce diagramme, identifié à un complexe 3-uple, est acyclique).

Les complexes simples associés aux complexes doubles

$$j_! L|_U \rightarrow L|_X \rightarrow i_\star L|_Y$$

et

$$j'_! L|_U \rightarrow L|_{\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)} \rightarrow i'_\star L|_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$$

de faisceaux sur X et $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ respectivement sont acycliques. Choisissons un foncteur de résolution « flasque » additif r sur la catégorie des faisceaux de Λ -modules sur $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)_{\text{ét}}$ et notons abusivement $R\pi_\star$ le foncteur (additif) de la catégorie des complexes (bornés inférieurement) de faisceaux de Λ -modules sur $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ vers la catégorie des complexes de faisceaux de Λ -modules sur X défini par la formule $R\pi_\star K = \text{Tot}(\pi_\star rK)$, ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes et induit le foncteur $R\pi_\star : D^+(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ usuel.

On obtient ainsi un diagramme commutatif de complexes de faisceaux de Λ -modules sur X :

$$\begin{array}{ccccc} j_! L|_U & \longrightarrow & L|_X & \longrightarrow & i_\star L|_Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\pi_\star j_! L|_U & \longrightarrow & R\pi_\star L|_{\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)} & \longrightarrow & R\pi_\star i'_\star L|_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme constituent des complexes doubles dont les complexes simples associés sont acycliques. D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, le morphisme $j_! L|_U \rightarrow R\pi_\star j'_! L|_U$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit que le carré de droite est homotopiquement bicartésien, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition 2.2.2.1, la formule du fibré projectif pour $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ implique que l'on a un triangle distingué dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_*\Lambda \rightarrow R\pi_* i'_*\Lambda \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_*\Lambda(-i)[-2i] \xrightarrow{0} i_*\Lambda[1] .$$

En considérant les colonnes du carré homotopiquement bicartésien donné par le lemme, on peut conclure à l'existence d'un triangle distingué

$$\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_*\Lambda(-i)[-2i] \rightarrow \Lambda[1] .$$

Ce triangle est scindé par les puissances de l'élément $c_1(\mathcal{O}(1), 1_U)$; le morphisme de droite est donc nul, ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 2.2.2.3. *La suite suivante, dont les morphismes sont évidents, est exacte :*

$$0 \rightarrow H_Y^{2r}(X, \Lambda(r)) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r)) \rightarrow \text{Coker}(H^{2r}(Y, \Lambda(r)) \rightarrow H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))) \rightarrow 0$$

L'énoncé de ce corollaire vaut bien évidemment en tout bidegré (p, q) et pas seulement en bidegré $(2r, r)$, mais nous n'utiliserons pour ainsi dire que ce cas particulier.

On note $\text{Gys}: H^p(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q)) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{p+2}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(q+1))$ le morphisme de Gysin associé au pseudo-diviseur $-(\mathcal{O}(1), 1_U)$ sur $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ et $\xi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(1))$. Le lemme suivant est évident :

LEMME 2.2.2.4. *Le morphisme composé*

$$H^p(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q)) \xrightarrow{\text{Gys}} H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{p+2}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(q+1)) \rightarrow H^{p+2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q+1)) ,$$

où la flèche de droite est le morphisme de restriction, est la multiplication par $-\xi$.

DÉFINITION 2.2.2.5. On définit un élément $\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$ de $H^{2r-2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r-1))$ par la formule :

$$\text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = \xi^{r-1} - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-2} + \dots + (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathcal{E}) .$$

LEMME 2.2.2.6. *Dans $H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))$, on a l'égalité*

$$-\xi \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = (-1)^r c_r(\mathcal{E}) .$$

Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang r sur X , on peut introduire le polynôme $P_t(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i(\mathcal{E}) t^{r-i}$ en une indéterminée t à coefficients dans l'anneau commutatif $\oplus_n H^{2n}(X, \Lambda(n))$. On peut écrire :

$$P_t(\xi) = tG_t(\mathcal{E}) + (-1)^r c_r(\mathcal{E}) \text{ où } G_t(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i c_i(\mathcal{E}) t^{r-1-i} .$$

Quand on effectue la substitution $t := \xi \in H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(1))$, par définition de $\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$ on a $\text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = G_\xi(\mathcal{E})$ et la définition des classes de Chern donne la relation $0 = P_\xi(\mathcal{E}) = \xi \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} + (-1)^r c_r(\mathcal{E})$ de sorte que $-\xi \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = (-1)^r c_r(\mathcal{E})$.

DÉFINITION 2.2.2.7. Compte tenu du corollaire 2.2.2.3, les lemmes 2.2.2.4 et 2.2.2.6 montrent que l'élément $\text{Gys}(\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}) \in H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r))$ provient par restriction d'un unique élément de $H_Y^{2r}(X, \Lambda(r))$, noté $\text{Cl}_{i,\mathcal{E}}$.

2.2.3. Propriétés des classes généralisées.

PROPOSITION 2.2.3.1. *La formation des classes généralisées $\text{Cl}_{i,\mathcal{E}}$ et $\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$ est compatible à tout changement de base $X' \rightarrow X$.*

Compte tenu de la proposition 2.2.1.5, ceci résulte aussitôt des définitions.

PROPOSITION 2.2.3.2. *Soit $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ un épimorphisme de Modules localement libres sur Y . Soit $\mathcal{K}$ le noyau de cet épimorphisme. On suppose que $\mathcal{E}'$ est de rang constant r' . On a alors la relation*

$$\text{Cl}_{i,\mathcal{E}'} = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K}) \cdot \text{Cl}_{i,\mathcal{E}}$$

dans $H_Y^{2r'}(X, \Lambda(r'))$ où on a utilisé les accouplements canoniques

$$H^a(Y, \Lambda(b)) \otimes H_Y^{a'}(X, \Lambda(b')) \rightarrow H_Y^{a+a'}(X, \Lambda(b+b')) .$$

On dispose d'une immersion fermée de $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ dans $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}'}(X)$, ce qui permet de considérer la composition suivante de flèches de restriction :

$$H_Y^{2r'}(X, \Lambda(r')) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E}')}^{2r'}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}'}(X), \Lambda(r')) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r'}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r')) .$$

Cette composée étant injective, il s'agit de montrer que les images des deux éléments considérés dans $H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r'}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r'))$ sont égales, mais comme ces deux éléments sont naturellement définis comme étant des images d'éléments de $H^{2r'-2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r'-1))$ par le morphisme Gys associé au fibré en droites $\mathcal{O}(-1)$ sur $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$ canoniquement trivialisé sur $X - Y$, on se ramène à montrer l'égalité

$$\text{Clf}_{i,\mathcal{E}'|\mathbf{P}(\mathcal{E})} = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K}) \cdot \text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$$

dans $H^{2r'}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r'))$.

On reprend les notations du lemme 2.2.2.6. La formule de Cartan-Whitney appliquée à la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ donne la relation suivante : $P_t(\mathcal{E}') = P_t(\mathcal{K})P_t(\mathcal{E})$, ou encore :

$$tG_t(\mathcal{E}') + (-1)^{r'} c_{r'}(\mathcal{E}') = tG_t(\mathcal{K})P_t(\mathcal{E}) + (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K})(tG_t(\mathcal{E}) + (-1)^r c_r(\mathcal{E})) .$$

Ceci implique l'identité $G_t(\mathcal{E}') = G_t(\mathcal{K})P_t(\mathcal{E}) + (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K})G_t(\mathcal{E})$. En faisant la substitution $t := \xi \in H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(1))$, on obtient l'égalité $G_\xi(\mathcal{E}') = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K})G_\xi(\mathcal{E})$, qui n'est autre que la relation voulue.

2.3. Immersions régulières. On rappelle que la notion d'immersion régulière est définie dans [SGA 6 VII 1.4].

DÉFINITION 2.3.1. Soit $i: Y \rightarrow X$ une immersion régulière entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas. On pose $i^? = i^*(c)[2c]: D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ où c est la codimension de i . On définit un morphisme $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$ dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ de la façon suivante. Quitte à décomposer Y en réunion disjointe d'ouverts-fermés, on peut supposer que la codimension c de i est constante. Si $c = 0$, i est l'inclusion d'un ouvert, Cl_i est l'isomorphisme évident. Dans le cas où $c > 0$, choisissons un ouvert U de X dans lequel Y est un sous-schéma fermé, notons $i': Y \rightarrow U$ cette immersion fermée. Le faisceau conormal $\mathcal{N}_{X/Y}$ de Y dans X est un fibré vectoriel de rang c sur Y muni de l'épimorphisme tautologique $\mathcal{N}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$; on peut donc considérer la classe $\text{Cl}_{i'} = \text{Cl}_{i', \mathcal{N}_{X/Y}} \in H_Y^{2c}(U, \Lambda(c))$, que l'on identifie à un morphisme $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i'^? \Lambda \simeq i^? \Lambda$ dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$; il est évident que la construction ne dépend pas de l'ouvert intermédiaire U . Si l'immersion i est fermée, on note Gys_i ou $\text{Gys}_{Y \subset X}$ les morphismes $H^p(Y, \Lambda(q)) \rightarrow H_Y^{p+2c}(X, \Lambda(q+c))$ induits par la multiplication par $\text{Cl}_i \in H_Y^{2c}(X, \Lambda(c))$ ^(vii). On note de même les versions à supports $H_Z^p(Y, \Lambda(q)) \rightarrow H_Z^{p+2c}(X, \Lambda(q+c))$ définies de même pour tout sous-schéma fermé Z de Y .

Les propositions 2.2.3.1 et 2.2.3.2 impliquent immédiatement la « formule d'excès d'intersection » (analogue de [Fulton, 1998, theorem 6.3] où elle est énoncée dans la théorie de Chow) :

^(vii) Cette définition est bien sûr compatible avec celle déjà donnée en codimension 1 dans la définition 2.1.1.

PROPOSITION 2.3.2 (Formule d'excès d'intersection). *Supposons que l'on dispose d'un carré cartésien dans la catégorie des $\mathbf{Z} \left[\frac{1}{n} \right]$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ \downarrow q & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où $i: Y \rightarrow X$ est une immersion fermée régulière de codimension c . Supposons que $i': Y' \rightarrow X'$ soit une immersion régulière de codimension c' , notons $\mathcal{K} := \text{Ker}(q^* \mathcal{N}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{N}_{X'/Y'})$ le faisceau conormal d'excès. C'est un fibré vectoriel de rang $e := c - c'$ sur Y' . On a alors l'égalité $f^* \text{Cl}_i = (-1)^e c_e(\mathcal{K}) \cdot \text{Cl}_{i'} \in H_{Y', \text{ét}}^{2c}(X', \Lambda(c))$.

En particulier, si $i': Y' \rightarrow X'$ est une immersion fermée régulière de même codimension que $i: Y \rightarrow X$, alors $f^* \text{Cl}_i = \text{Cl}_{i'} \in H_{Y', \text{ét}}^{2c}(X', \Lambda(c))$.

Le théorème suivant généralise l'énoncé établi dans [Fujiwara, 2002, proposition 1.2.1] :

THÉORÈME 2.3.3. *Si $Z \xrightarrow{i} Y$ et $Y \xrightarrow{j} X$ sont deux immersions régulières composables, le diagramme suivant est commutatif dans $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow \text{Cl}_{j \circ i} & \downarrow i^?(\text{Cl}_j) \\ & & i^? j^? \Lambda \end{array}$$

On peut évidemment supposer que les immersions i et j sont des immersions fermées et que les codimensions de i et de j sont constantes, de valeurs respectives m et n . Si $m = 0$ ou $n = 0$, c'est trivial ; on suppose donc que $m > 0$ et $n > 0$.

LEMME 2.3.4. *On peut supposer que $n = 1$ (i.e. j est de codimension 1).*

On éclate Y dans X pour obtenir le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} P' & \xrightarrow{i'} & P & \xrightarrow{j'} & \text{Écl}_Y(X) \\ \downarrow p' & & \downarrow p & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

L'idée de la démonstration va être d'utiliser la formule d'excès d'intersection 2.3.2 pour les immersions $j \circ i: Z \rightarrow X$ et $j: Y \rightarrow X$ relativement au changement de base $\pi: \text{Écl}_Y(X) \rightarrow X$ qui va faire chuter la codimension de ces immersions fermées régulières.

On a des isomorphismes canoniques $P = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Y})$ et $P' = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Y|Z})$. On vérifie facilement que $P \rightarrow \text{Écl}_Y(X)$ est une immersion fermée régulière de codimension 1. Par changement de base lisse, $P' \rightarrow P$ est une immersion fermée régulière de codimension m . On suppose que $i'^?(\text{Cl}_{j'}) \circ \text{Cl}_{i'} = \text{Cl}_{j' \circ i'}$ et on veut montrer que $i^?(\text{Cl}_j) \circ \text{Cl}_i = \text{Cl}_{j \circ i}$. Les morphismes à comparer s'identifient à des éléments de $H_Z^{2(m+n)}(X, \Lambda(m+n))$ (on fera ce type d'identifications jusqu'à la fin de la démonstration). La proposition 2.2.2.1 implique que l'application

$$\pi^*: H_Z^{2(m+n)}(X, \Lambda(m+n)) \rightarrow H_{P'}^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$$

est injective, il suffit donc de comparer les classes après application de π^* .

D'après la formule d'excès d'intersection 2.3.2, on a l'égalité $\pi^*(\text{Cl}_{j \circ i}) = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot \text{Cl}_{j' \circ i'} \in H_{P'}^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$ où $\mathcal{E}'$ est le fibré vectoriel de rang $n - 1$ noyau de l'épimorphisme $p'^* \mathcal{N}_{X/Z} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P'}$.

La composition des classes admise provisoirement pour les immersions j' et i' donne l'égalité

$$\text{Cl}_{j' \circ i'} = \text{Cl}_{i'} \cdot \text{Cl}_{j'}$$

via l'accouplement

$$H_{P'}^{2m}(P, \Lambda(m)) \times H_P^2(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(1)) \rightarrow H_{P'}^{2(m+1)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(n+1)) .$$

On a ainsi obtenu :

$$\pi^* Cl_{joi} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot Cl_{i'} \cdot Cl_{j'} .$$

Notons $\mathcal{E}$ le noyau de l'épimorphisme $p^* \mathcal{N}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P}$. Il vient aussitôt que dans le diagramme évident de Modules sur P' qui suit, les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & i'^* \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & i'^* p^* \mathcal{N}_{X/Y} & \longrightarrow & p'^* \mathcal{N}_{X/Z} & \longrightarrow & p'^* \mathcal{N}_{Y/Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i'^* \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P'} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{P/P'} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

En particulier, on obtient un isomorphisme canonique $i'^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$, d'où $i'^* c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \in H^{2(n-1)}(P', \Lambda(n-1))$. On en déduit :

$$\pi^* Cl_{joi} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot Cl_{i'} \cdot Cl_{j'} = Cl_{i'} \cdot c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) \cdot Cl_{j'} .$$

On utilise implicitement dans ces notations l'associativité des structures multiplicatives permettant par exemple de définir une application

$$H_{P'}^{2m}(P, \Lambda(m)) \times H^{2(n-1)}(P, \Lambda(n-1)) \times H_P^2(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(1)) \rightarrow H_{P'}^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$$

sans qu'il y ait à s'inquiéter de l'ordre dans lequel les multiplications sont faites. La formule d'excès d'intersecion 2.3.2 implique l'égalité suivante :

$$\pi^* Cl_j = c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) \cdot Cl_{j'} \in H_{P'}^{2n}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(n)) .$$

Le morphisme p étant lisse, on a aussitôt $Cl_{i'} = \pi^* Cl_i$. On a ainsi obtenu l'égalité voulue :

$$\pi^* Cl_{joi} = \pi^* Cl_i \cdot \pi^* Cl_j ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ramené à établir le théorème 2.3.3 dans le cas où j est de codimension 1. On pose maintenant $P = P(\mathcal{N}_{X/Z})$ et $P' = P(\mathcal{N}_{Y/Z})$. Le diagramme suivant récapitule la situation :

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & \pi^{-1}(Y) & \longrightarrow & \text{Écl}_Z(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \pi \\ P' & \longrightarrow & \text{Écl}_Z(Y) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

On veut établir l'égalité suivante dans $H_Z^{2m+2}(X, \Lambda(m+1))$:

$$Cl_{joi} = Cl_i \cdot Cl_j .$$

D'après la proposition 2.2.2.1, il suffit de vérifier cette égalité dans $H_p^{2m+2}(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(m+1))$ après application de π^* .

Par définition, la classe $\text{Cl}_{\text{joi}} \in H_Z^{2m+2}(X, \Lambda(m+1))$ se « restreint » en un élément

$$\gamma := \pi^* \text{Cl}_{\text{joi}} = \text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)}(\text{Clf}_{\text{joi}})$$

dans $H_p^{2m+2}(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(m+1))$ où $\text{Clf}_{\text{joi}} \in H^{2m}(P, \Lambda(m))$.

Notons $\mathcal{I}$ l'Idéal de Y dans X , $\mathcal{I}_P$ celui de P dans $\text{Écl}_Z(X)$ et $\tilde{\mathcal{I}}$ celui de $\text{Écl}_Z(Y)$ dans $\text{Écl}_Z(X)$. On a un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur $\text{Écl}_Z(X)$:

$$\pi^* \mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_P \otimes \tilde{\mathcal{I}}.$$

Cet isomorphisme est compatible aux trivialisations données sur $\pi^{-1}(V)$ où $V = X - Y$. On obtient ainsi une égalité dans le groupe des classes d'équivalence de tels pseudo-diviseurs, ce qui permet de décomposer $\pi^* \text{Cl}_j = -\pi^*(c_1(\mathcal{I}, 1_{X-Y})) \in H_{\pi^{-1}(V)}^2(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(1))$ en une somme de deux composantes :

$$\begin{aligned} \pi^* \text{Cl}_j &= -\pi^*(c_1(\mathcal{I}, 1_{X-Y})) = -c_1(\pi^* \mathcal{I}, 1_{\pi^{-1}(X-Y)}) \\ &= -c_1(\mathcal{I}_P, 1_{\text{Écl}_Z(X)-P}) - c_1(\tilde{\mathcal{I}}, 1_{\text{Écl}_Z(X)-\text{Écl}_Z(Y)}). \end{aligned}$$

On en déduit une décomposition

$$\pi^* \text{Cl}_i \cdot \pi^* \text{Cl}_j = \alpha + \beta$$

dans $H_p^{2m+2}(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(m+1))$ où

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)}(\text{Cl}_{i|P}), \\ \beta &= \text{Gys}_{\text{Écl}_Z(Y) \subset \text{Écl}_Z(X)}(\text{Gys}_{P' \subset \text{Écl}_Z(Y)}(\text{Clf}_i)). \end{aligned}$$

Le calcul de Cl_k où k est l'inclusion de l'intersection de diviseurs de Cartier s'intersectant transversalement dans le schéma ambiant réalisé dans [Fujiwara, 2002, proposition 1.1.4] permet d'obtenir l'égalité d'opérateurs suivante :

$$\text{Gys}_{\text{Écl}_Z(Y) \subset \text{Écl}_Z(X)} \circ \text{Gys}_{P' \subset \text{Écl}_Z(Y)} = \text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)} \circ \text{Gys}_{P' \subset P}.$$

Notre but est d'établir l'égalité $\gamma = \alpha + \beta$. Les calculs précédents permettent d'écrire chacun des éléments α , β et γ comme des images par le morphisme $\text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)}$ de classes $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ dans $H^{2m}(P, \Lambda(m))$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \text{Cl}_{i|P}, \\ \tilde{\beta} &= \text{Gys}_{P' \subset P}(\text{Clf}_i), \\ \tilde{\gamma} &= \text{Clf}_{\text{joi}}. \end{aligned}$$

On est ainsi ramené à établir l'égalité $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ dans $H^{2m}(P, \Lambda(m))$.

D'après les lemmes 2.2.2.4 et 2.2.2.6, on a $\text{Cl}_{i|Z} = (-1)^m c_m(\mathcal{N}_{Y/Z})$. On en déduit l'égalité

$$\tilde{\alpha} = (-1)^m c_m(\mathcal{N}_{Y/Z}).$$

Pour calculer $\tilde{\beta}$, on observe que l'Idéal de P' dans P s'identifie au faisceau inversible $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}(-1)$ où $\mathcal{K} = \mathcal{N}_{X/Y|Z}$ est le noyau de l'épimorphisme $\mathcal{N}_{X/Z} \rightarrow \mathcal{N}_{Y/Z}$. On en déduit

$$\tilde{\beta} = (\xi - c_1(\mathcal{K})) \cdot \left[\xi^{m-1} - c_1(\mathcal{N}_{Y/Z}) \xi^{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} c_{m-1}(\mathcal{N}_{Y/Z}) \right].$$

Par ailleurs, la définition de $\tilde{\gamma}$ donne l'égalité :

$$\tilde{\gamma} = \xi^m - c_1(\mathcal{N}_{X/Z}) \xi^{m-1} + \dots + (-1)^m c_m(\mathcal{N}_{X/Z}).$$

La formule de Cartan-Whitney appliquée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Z} \rightarrow \mathcal{N}_{Y/Z} \rightarrow 0$$

de fibrés vectoriels sur Z permet d'obtenir aussitôt la relation voulue $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

LEMME 2.3.5. *Supposons que l'on dispose d'un carré cartésien dans la catégorie des $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y_{12} & \xrightarrow{i'_1} & Y_2 \\ i'_2 \downarrow & & \downarrow i_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{i_1} & X \end{array}$$

Supposons de plus que i_1 et i'_1 (resp. i_2 et i'_2) soient deux immersions fermées régulières de même codimension c_1 (resp. c_2). Alors, on a l'égalité suivante entre opérateurs $H^p(Y_{12}, \Lambda(q)) \rightarrow H^{p+2c_1+2c_2}_{Y_{12}}(X, \Lambda(q + c_1 + c_2))$:

$$\mathrm{Gys}_{Y_1 \subset X} \circ \mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset Y_1} = \mathrm{Gys}_{Y_2 \subset X} \circ \mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset Y_2} .$$

D'après la proposition 2.3.2, l'image de Cl_{i_1} par $i_2^* : H^{2c_1}_{Y_1}(X, \Lambda(c_1)) \rightarrow H^{2c_1}_{Y_{12}}(Y_2, \Lambda(c_1))$ est $\mathrm{Cl}_{i'_1}$. Ceci permet de montrer que l'opérateur $\mathrm{Gys}_{Y_2 \subset X} \circ \mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset Y_2}$ est induit par le produit $\mathrm{Cl}_{i_1} \cdot \mathrm{Cl}_{i_2} \in H^{2c_1+2c_2}_{Y_{12}}(X, \Lambda(c_1 + c_2))$. Par symétrie des rôles de Y_1 et Y_2 , on obtient l'identité énoncée dans le lemme.

REMARQUE 2.3.6. Une fois que le théorème 2.3.3 est connu, on peut observer que les deux opérateurs apparaissant dans le lemme précédent sont égaux à $\mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset X}$, ce qui signifie aussi que le produit $\mathrm{Cl}_{i_1} \cdot \mathrm{Cl}_{i_2} \in H^{2c_1+2c_2}_{Y_{12}}(X, \Lambda(c_1 + c_2))$ est égal à Cl_k où $k : Y_{12} \rightarrow X$ est l'inclusion de l'intersection de Y_1 et Y_2 dans X .

La classe que l'on a définie est compatible avec celle définie localement dans [SGA 4½ [Cycle] 2.2] :

PROPOSITION 2.3.7. *Soit $i : Y \rightarrow X$ une immersion régulière de codimension c entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas. Le morphisme de faisceaux $\Lambda \rightarrow \mathcal{H}^{2c}(i^! \Lambda(c))$ induit par le morphisme $\mathrm{Cl}_i : \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$ est donné par la classe $\mathrm{cl} Y$ de [SGA 4½ [Cycle] 2.2].*

Le lecteur intéressé par les questions de signes pourra consulter 4.8...

2.4. Morphismes lisses. Soit $p : X \rightarrow S$ un morphisme lisse compactifiable de $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas de dimension relative d . D'après [SGA 4 XVIII 2.9], on dispose d'un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_p : R^{2d} p_! \Lambda(d) \rightarrow \Lambda ,$$

que l'on peut réinterpréter sous la forme d'un morphisme

$$\mathrm{Rp}_! \Lambda(d) [2d] \rightarrow \Lambda$$

dans $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ (en effet, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et [SGA 4 X 4.3], les faisceaux $R^i p_! \Lambda$ sont nuls pour $i > 2d$).

DÉFINITION 2.4.1. Soit $p : X \rightarrow S$ un morphisme lisse compactifiable de $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas. Le morphisme $\mathrm{Cl}_p : \Lambda \rightarrow p^? \Lambda$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est le morphisme déduit par adjonction du morphisme $\mathrm{Rp}_! \Lambda(d) [2d] \rightarrow \Lambda$ défini ci-dessus.

D'après [SGA 4 XVIII 3.2.4], ce morphisme Cl_p est un isomorphisme : c'est la dualité de Poincaré.

PROPOSITION 2.4.2. *Si $f : Z \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ sont des morphismes lisses compactifiables composables, le diagramme suivant est commutatif dans $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\mathrm{Cl}_f} & f^? \Lambda \\ & \searrow \mathrm{Cl}_{g \circ f} & \downarrow f^? (\mathrm{Cl}_g) \\ & & f^? g^? \Lambda \end{array}$$

Ceci est énoncé en [SGA 4 XVIII 3.2.4] et résulte de la compatibilité des morphismes traces à la composition, cf. propriété (Var 3) dans [SGA 4 XVIII 2.9].

(viii) On rappelle que l'on a posé $p^? = p^!(-d)[-2d]$ où d est la dimension relative de p .

REMARQUE 2.4.3. Si cette théorie avait été à notre disposition, il eût peut-être été plus commode d'utiliser ici la construction des foncteurs $f^!$ pour f lissifiable mentionnée dans l'introduction de [SGA 4 XVIII 0.4]. Dans le cadre axiomatique des « foncteurs homotopiques stables », ceci est réalisé dans [Ayoub, 2007].

2.5. Morphismes d'intersection complète lissifiables.

DÉFINITION 2.5.1. Un morphisme d'**intersection complète** est un morphisme $X \xrightarrow{f} S$ admettant localement une factorisation sous la forme $X \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} S$ où p est lisse et i une immersion régulière (cf. [SGA 6 VII 1.4]). On pose $\dim. \text{rel. virt. } f = \dim p - \text{codim } i$: c'est la dimension relative virtuelle de f (cf. [SGA 6 VIII 1.9]). Il s'agit d'une fonction localement constante $X \rightarrow \mathbb{Z}$.

DÉFINITION 2.5.2. On note $\mathcal{S}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas quasi-compacts admettant un faisceau inversible ample et dont les morphismes sont les morphismes de type fini entre de tels schémas. On note $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{S}$ ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes d'intersection complète.

Dans $\mathcal{S}$, tout morphisme $X \rightarrow Y$ peut se factoriser sous la forme $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_Y^n \xrightarrow{\pi} Y$ où i est une immersion et π la projection canonique. Tous les morphismes de $\mathcal{S}$ sont donc compactifiables, on peut leur appliquer le formalisme des foncteurs $Rf_!$ et $f^!$.

Les morphismes de $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ admettent des factorisations globales dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ sous la forme d'une immersion fermée régulière suivie d'un morphisme lisse.

DÉFINITION 2.5.3. Pour tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$, on peut définir un foncteur

$$f^?: D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

par la formule $f^? = f^!(-d)[-2d]$ où $d = \dim. \text{rel. virt. } f$ ^(ix).

Les foncteurs $f^?$ sont les foncteurs image inverse pour une structure de catégorie fibrée convenable au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}^{\text{ic}}$: on utilisera implicitement les isomorphismes de transitivité $f^?g^? \simeq (gf)^?$ associés à la composition de deux morphismes composables dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$.

DÉFINITION 2.5.4. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$. On suppose donnée une factorisation de f dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ sous la forme $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$ où i est une immersion régulière et p un morphisme lisse. On définit un morphisme

$$\text{Cl}_{p,i}: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda$$

dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ comme étant le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow \text{Cl}_{p,i} & \downarrow i^?(\text{Cl}_p) \\ & & f^? \Lambda \end{array}$$

où Cl_i est le morphisme de la définition 2.3.1 et Cl_p celui de la définition 2.4.1.

THÉORÈME 2.5.5. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$. Si $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$ et $X \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{p'} S$ sont deux factorisations du type envisagé dans la définition 2.5.4, alors les deux morphismes suivants dans la catégorie $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ sont égaux :

$$\text{Cl}_{p,i} = \text{Cl}_{p',i'}: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda.$$

La notation suivante s'avère assez commode pour cette démonstration :

^(ix) On peut donner un sens à cette définition même si la dimension relative virtuelle n'est pas constante. On définit alors $f^?K$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ par recollement des objets $(f^!K)_{|U_i}(-i)[-2i]$ sur les ouverts-fermés disjoints $U_i := \{x \in X, d(x) = i\}$ où f est de dimension relative virtuelle i , pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

DÉFINITION 2.5.6. Si $f: Z \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow X$ sont des morphismes composables dans $\mathcal{S}^{ic}$, $a: \Lambda \rightarrow g^? \Lambda$ et $b: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda$ des morphismes dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ respectivement, on pose $a \star b = f^?(a) \circ b: \Lambda \rightarrow (g \circ f)^? \Lambda$.

Cette loi $\star$ vérifiant une propriété d'associativité évidente, on omettra les parenthèses.

Par définition, on a ainsi : $Cl_{p,i} = Cl_p \star Cl_i$. On veut vérifier l'égalité $Cl_p \star Cl_i = Cl_{p'} \star Cl_{i'}$. Quitte à introduire le produit fibré de Y et de Y' au-dessus de S , on peut supposer que « Y' coiffe Y », à savoir qu'il existe un morphisme lisse $q: Y' \rightarrow Y$ tel que $i = q \circ i'$ et $p' = p \circ q$:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y' & & \\ & i' \nearrow & \downarrow q & \searrow p' & \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

On a ainsi

$$Cl_{p',i'} = Cl_{p'} \star Cl_{i'} = Cl_p \star Cl_q \star Cl_{i'} ,$$

la dernière égalité résultant de la proposition 2.4.2. On est ramené à montrer l'égalité $Cl_i = Cl_q \star Cl_{i'}$. Pour cela, on introduit le produit fibré X' de X et Y' au-dessus de Y :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & Y' \\ \downarrow q' & \nearrow i' & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{dotted arrow } s \text{ from } X' \text{ to } X \end{array}$$

Le morphisme i' donne naissance à la section s de la projection $q': X' \rightarrow X$. Le morphisme q étant lisse, l'immersion $j: X' \rightarrow Y'$ est régulière. Admettons provisoirement les égalités suivantes :

$$Cl_{q'} \star Cl_s = Id_{\Lambda} , \quad Cl_q \star Cl_j = Cl_i \star Cl_{q'} .$$

Il vient :

$$\begin{aligned} Cl_i &= Cl_i \star Cl_{q'} \star Cl_s \\ &= Cl_q \star Cl_j \star Cl_s . \end{aligned}$$

On utilise alors la composition des morphismes de Gysin associés aux immersions régulières (cf. théorème 2.3.3). Celle-ci donne l'égalité $Cl_j \star Cl_s = Cl_{i'}$ qui permet de conclure que $Cl_i = Cl_q \star Cl_{i'}$. Les deux lemmes qui suivent permettent d'obtenir les deux égalités admises ci-dessus :

LEMME 2.5.7. Soit un diagramme cartésien dans $\mathcal{S}$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & Y' \\ \downarrow q' & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

On suppose que q est lisse et que i est une immersion régulière (donc j aussi). Alors on a l'égalité

$$Cl_q \star Cl_j = Cl_i \star Cl_{q'} .$$

On peut supposer que i est une immersion fermée. On identifie Cl_i (resp. Cl_j) à une classe dans $H_{X'}^{2d}(Y, \Lambda(d))$ (resp. $H_{X'}^{2c}(Y', \Lambda(c))$) où c est la codimension de l'immersion régulière i . D'après la proposition 2.3.2, on a $q^*(Cl_i) = Cl_j$.

On peut identifier $D^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ à la sous-catégorie pleine de $D^+(Y'_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée des complexes tels K que $K \xrightarrow{\sim} j_* j^* K$: le foncteur j_* s'interprète alors comme un foncteur d'inclusion. On identifie de même $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ à une sous-catégorie pleine de $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$. Le foncteur $q'_! : D^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$

est alors induit par $q_! : D^+(Y'_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $q'^!$ est également induit par $q^!$. Notons d la dimension relative de q . Le morphisme $\text{Tr}_q : q_! \Lambda_Y(d)[2d] \rightarrow \Lambda_Y$ s'étend *via* la formule de projection [SGA 4 XVII 5.2.9] en un morphisme fonctoriel en $K \in D^b(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\text{Tr}_q : q_! q^* K(d)[2d] \simeq q_! \Lambda_{Y'}(d)[2d] \otimes^L K \xrightarrow{\text{Tr}_q \otimes^L K} \Lambda_Y \otimes^L K \simeq K.$$

La compatibilité du morphisme trace au changement de base par i (propriété (Var 2) de [SGA 4 XVIII 2.9]) revient à dire que pour $K = \Lambda_X = i_* \Lambda_X \in D^b(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme $\text{Tr}_q : q_! q^* \Lambda_X(d)[2d] \rightarrow \Lambda_X$ est $\text{Tr}_{q'}$. La fonctorialité de la transformation naturelle Tr_q ci-dessus appliquée au morphisme $\text{Cl}_i : \Lambda_X \rightarrow \Lambda_Y(c)[2d]$ fournit alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} q_! q^* \Lambda_X(d)[2d] & \xrightarrow{\text{Tr}_{q'}} & \Lambda_X \\ \downarrow q_! q^* \text{Cl}_i & & \downarrow \text{Cl}_i \\ q_! q^* \Lambda_Y(d+c)[2d+2c] & \xrightarrow{\text{Tr}_q(c)[2c]} & \Lambda_Y(c)[2c] \end{array}$$

Compte tenu de l'identité $q^* \text{Cl}_i = \text{Cl}_j$ précédemment obtenue, la commutativité du diagramme ci-dessus signifie précisément que $\text{Cl}_q \star \text{Cl}_j = \text{Cl}_i \star \text{Cl}_{q'}$.

LEMME 2.5.8. *Soit $p : X \rightarrow S$ un morphisme lisse dans $\mathcal{S}$ admettant une section $s : S \rightarrow X$ (qui est une immersion régulière). Alors, $\text{Cl}_p \star \text{Cl}_s = \text{Id}_\Lambda$ dans $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Les endomorphismes de Λ dans $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ étant donnés par des sections du faisceau Λ dans S , il suffit de vérifier que les nombres obtenus en passant aux points génériques de S sont égaux à 1. Comme on peut supposer que S est réduit et que la construction est compatible avec le passage aux points génériques, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k . Notons x l'image de $\text{Spec}(k)$ dans X . Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $\pi : X \rightarrow \mathbf{A}_k^d$ identifiant x à l'image inverse de l'origine dans $\mathbf{A}_k^d$. En utilisant l'isomorphisme évident $H_{(0, \dots, 0)}^{2d}(\mathbf{A}_k^d, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H_X^{2d}(X, \Lambda(d))$, on se ramène au lemme suivant :

LEMME 2.5.9. *Pour tout entier naturel d et tout schéma $S \in \mathcal{S}$, si on note $p : \mathbf{A}_S^d \rightarrow S$ la projection et $s : S \rightarrow \mathbf{A}_S^d$ l'inclusion de l'origine, on a l'égalité*

$$\text{Cl}_p \star \text{Cl}_s = \text{Id}_\Lambda$$

dans $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$.

L'énoncé est évident pour $d = 0$. Une récurrence évidente s'appuyant sur le théorème 2.3.3 et la proposition 2.4.2 permet de se ramener au cas où $d = 1$, et comme précédemment, on peut supposer que $S = \text{Spec}(k)$ où k est un corps que l'on peut supposer séparablement clos. On se ramène finalement au lemme suivant :

LEMME 2.5.10. *Pour tout corps séparablement clos k , si on note $p : \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ la projection et $s : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ l'inclusion de 0, on a l'égalité*

$$\text{Cl}_p \star \text{Cl}_s = \text{Id}_\Lambda$$

dans $D^+(\text{Spec}(k)_{\text{ét}}, \Lambda)$.

L'idéal de l'immersion fermée s s'identifie au faisceau inversible $\mathcal{O}(-1)$ sur la droite projective. L'image $\text{Cl}_{s|_{\mathbf{P}_k^1}}$ de Cl_s dans $H^2(\mathbf{P}_k^1, \Lambda(1))$ est $-c_1(\mathcal{O}(-1)) = c_1(\mathcal{O}(1))$ (cf. définitions 2.1.1 et 2.3.1). Le degré du fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ étant 1, on peut conclure en utilisant la commutativité du diagramme suivant (cf. [SGA 4 XVIII 1.1.6]) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(\mathbf{P}_k^1) & \xrightarrow{c_1} & H^2(\mathbf{P}_k^1, \Lambda(1)) \\ & \searrow \text{deg} & \downarrow \sim \text{Tr}_p \\ & & \Lambda \end{array}$$

DÉFINITION 2.5.11. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$. On note $\text{Cl}_f: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda$ le morphisme $\text{Cl}_{p,i}$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ défini à partir d'une factorisation de f dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ sous la forme $f = p \circ i$ avec i une immersion régulière et p un morphisme lisse. D'après le théorème 2.5.5, cette définition est indépendante de la factorisation.

THÉORÈME 2.5.12. Si $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ sont des morphismes composables dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$, le diagramme suivant est commutatif dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_f} & f^? \Lambda \\ & \searrow \text{Cl}_{g \circ f} & \downarrow f^?(\text{Cl}_g) \\ & & (g \circ f)^? \Lambda \end{array}$$

Paraphrasant [SGA 6 VIII 2.6], on choisit une factorisation $Y \xrightarrow{j} V' \xrightarrow{p'} Z$ dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ avec j une immersion régulière et p' lisse, et une immersion régulière $X \xrightarrow{i} P_Y^n$, de façon à obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & P_Y^n & \xrightarrow{j'} & P_{V'}^n \\ & \searrow f & \downarrow p & & \downarrow p'' \\ & & Y & \xrightarrow{j} & V' \\ & & & \searrow g & \downarrow p' \\ & & & & Z \end{array}$$

En utilisant le théorème 2.3.3 et la proposition 2.4.2, on obtient

$$\text{Cl}_{g \circ f} = (\text{Cl}_{p'} \star \text{Cl}_{p''}) \star (\text{Cl}_j \star \text{Cl}_i) .$$

Le lemme 2.5.7 donne l'égalité :

$$\text{Cl}_{p''} \star \text{Cl}_j = \text{Cl}_j \star \text{Cl}_p ,$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\text{Cl}_{g \circ f} = (\text{Cl}_{p'} \star \text{Cl}_j) \star (\text{Cl}_p \star \text{Cl}_i) ,$$

où l'on reconnaît l'égalité $\text{Cl}_{g \circ f} = \text{Cl}_g \star \text{Cl}_f$.

PROPOSITION 2.5.13. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$. On suppose que f est plat de dimension relative d . Alors le morphisme $\text{Cl}_f: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda$ correspond par adjonction au morphisme $\text{Rf}_! \Lambda(d)[2d] \rightarrow \Lambda$ donné par le morphisme trace $\text{Tr}_f: R^{2d} f_! \Lambda(d) \rightarrow \Lambda$.

Compte tenu de la proposition 2.3.7, cela résulte de [SGA 4½ [Cycle] 2.3.8 (i)].

REMARQUE 2.5.14. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme propre dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ de dimension relative virtuelle (constante) d , le morphisme Cl_f permet de définir, pour tout $K \in D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, un morphisme $f_*: H^p(X, f^* K) \rightarrow H^{p-2d}(Y, K(-d))$, compatible à la composition. On peut aussi en définir une version à supports $f_*: H_Z^p(X, f^* K) \rightarrow H_{Z'}^{p-2d}(Y, K(-d))$ si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme dans $\mathcal{S}^{\text{ic}}$, que Z et Z' sont des sous-schémas fermés de X et Y respectivement, que $f(Z) \subset Z'$ et que morphisme induit $f|_Z: Z \rightarrow Z'$ est propre.

3. Théorème de pureté

3.1. Énoncés. L'objectif de cette section est de donner une démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier. Soit Y un sous-schéma (fermé) de X qui est aussi régulier. On note $i: Y \rightarrow X$ l'immersion, et c sa codimension. Alors, le morphisme de Gysin $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda = i^! \Lambda(c)[2c]$ est un isomorphisme dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.

COROLLAIRE 3.1.2. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme de type fini entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas réguliers. On suppose que X et S admettent un faisceau ample. Alors, le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_f(d)[2d]: \Lambda(d)[2d] \rightarrow f^! \Lambda$ est un isomorphisme dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, où d désigne la dimension relative virtuelle de f .

COROLLAIRE 3.1.3. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier. Soit D un diviseur régulier dans X . On note $j: X - D \rightarrow X$ l'inclusion de son complémentaire. Alors, on dispose d'isomorphismes canoniques $j_* \Lambda = \Lambda$, $R^1 j_* \Lambda = \Lambda_Z(-1)$ et $R^q j_* \Lambda = 0$ pour $q \geq 2$.

Ce corollaire résulte du théorème 3.1.1 appliqué à l'immersion fermée $i: D \rightarrow X$ et de la suite exacte longue de cohomologie appliquée au triangle distingué canonique suivant dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_* i^* \Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow Rj_* \Lambda \xrightarrow{\delta} i_* i^! \Lambda[1]$$

L'isomorphisme $\Lambda_Z(-1) \simeq R^1 j_* \Lambda_Z(-1)$ est normalisé de façon à ce que le composé $\Lambda_Z(-1) \simeq R^1 j_* \Lambda_Z(-1) \xrightarrow{\delta} i_* R^2 i^! \Lambda$ soit donné par la classe Cl_i . Alternativement, cette identification est induite par une section globale du faisceau $R^1 j_* \Lambda(1)$ qui est donnée localement par l'opposé de la classe du μ_n -torseur des racines n -ièmes de f où f est une équation locale de D dans X . (Voir la démonstration du lemme 3.4.8 pour plus de détails sur cette compatibilité.)

COROLLAIRE 3.1.4. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier. Soit D un diviseur à croisements normaux dans X . On note $j: X - D \rightarrow X$ l'inclusion de son complémentaire. Alors, $Rj_* \Lambda$ appartient à $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Plus précisément, si $D = D_1 + \dots + D_n$ est un diviseur à croisements normaux strict, alors $R^1 j_* \Lambda$ s'identifie à $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \Lambda_{D_i}(-1)$ et $R^* j_* \Lambda$ est l'algèbre extérieure sur $R^1 j_* \Lambda$.

Ce corollaire mérite une démonstration. Pour la première assertion, on peut travailler localement pour la topologie étale sur X ; il suffit donc d'établir la deuxième assertion. On suppose que $D = D_1 + \dots + D_n$ est un diviseur à croisements normaux strict. On note $j_i: X - D_i \rightarrow X$ l'inclusion du complémentaire de D_i pour tout i . Nous allons montrer que le morphisme de Künneth

$$Rj_{1*} \Lambda \overset{L}{\otimes} \dots \overset{L}{\otimes} Rj_{n*} \Lambda \rightarrow Rj_* \Lambda$$

est un isomorphisme dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui impliquera le résultat vu que les faisceaux $R^q j_{i*} \Lambda$ sont connus par pureté (corollaire 3.1.3) et qu'ils sont plats.

On procède par récurrence sur n . Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont évidents. On suppose $n \geq 2$, on pose $D' = D_2 + \dots + D_n$ et on fait l'hypothèse que le résultat est connu pour D' . Il s'agit donc de montrer que si on note $j': X - D' \rightarrow X$ l'inclusion du complémentaire de D' , alors le morphisme de Künneth

$$Rj_{1*} \Lambda \overset{L}{\otimes} Rj'_* \Lambda \rightarrow Rj_* \Lambda$$

est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme canonique

$$R\mathbf{Hom}(\Lambda_{X-D_1}, \Lambda) \overset{L}{\otimes} R\mathbf{Hom}(\Lambda_{X-D'}, \Lambda) \rightarrow R\mathbf{Hom}(\Lambda_{X-D_1} \otimes \Lambda_{X-D'}, \Lambda)$$

est un isomorphisme dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. À K (resp. L) fixé dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, la famille des L (resp. K) tels que le morphisme

$$R\mathbf{Hom}(K, \Lambda) \overset{L}{\otimes} R\mathbf{Hom}(L, \Lambda) \rightarrow R\mathbf{Hom}(K \overset{L}{\otimes} L, \Lambda)$$

soit un isomorphisme, propriété que nous appellerons (Kü), est une sous-catégorie triangulée de $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Pour $K = \Lambda$ ou $L = \Lambda$, la condition (Kü) est évidemment vérifiée, la montrer pour $(\Lambda_{X-D_1}, \Lambda_{X-D'})$ revient donc, par dévissage, à la montrer pour $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{X-D'})$ ou encore pour $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D'})$. Il résulte aussitôt du théorème de pureté et des compatibilités obtenues (cf. remarque 2.3.6) que si Y et Z sont deux sous-schémas fermés réguliers de X s'intersectant transversalement (i.e. $Y \cap Z$ est régulier de codimension la somme des codimensions de Y et de Z), alors (Λ_Y, Λ_Z) vérifie (Kü). En particulier, $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_i})$ vérifie (Kü) pour $i \geq 2$ et plus généralement, pour tout sous-ensemble non vide I de

$\{2, \dots, n\}$, $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_1})$ vérifie (Kü) où D_1 est l'intersection des D_i pour $i \in I$. En utilisant la suite exacte standard

$$0 \rightarrow \Lambda_{D'} \rightarrow \bigoplus_{2 \leq i \leq n} \Lambda_{D_i} \rightarrow \bigoplus_{2 \leq i < j \leq n} \Lambda_{D_{ij}} \rightarrow \dots,$$

on en déduit par dévissage la condition (Kü) pour $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D'})$, ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITION 3.1.5. Un **couple régulier** est un couple (X, Y) où X est un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier et Y un sous-schéma fermé de X qui est régulier. On dit que (X, Y) est **pur** si la conclusion du théorème 3.1.1 est vraie pour l'inclusion de Y dans X . Si $\bar{y} \rightarrow Y$ est un point géométrique de Y , on dira que (X, Y) est **pur en** $\bar{y}$ si après passage aux germes en $\bar{y}$, le morphisme $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$ induit un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{D}^+(\bar{y}_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Le théorème 3.1.1 peut ainsi se reformuler en disant que tout couple régulier est pur. Dans la sous-section 3.2 sera introduite la notion de pureté ponctuelle qui consiste à étudier les couples réguliers de la forme (X, x) où X est un schéma local régulier de point fermé x . Pour démontrer le théorème de pureté, il suffira de savoir que les couples réguliers de cette forme sont purs. Dans la sous-section 3.3, on se ramènera au cas où l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec ℓ un nombre premier inversible sur les schémas réguliers considérés. Dans la sous-section 3.4, on établira quelques propriétés utiles concernant la pureté des couples réguliers donnés par des diviseurs. Comme dans la démonstration de [Fujiwara, 2002], la démonstration de la pureté ponctuelle pour des schémas réguliers arbitraires se ramènera à celle des schémas réguliers qui sont de type fini sur un trait S (d'inégale caractéristique). Dans la sous-section 3.5, on obtiendra des conditions suffisantes pour montrer que des schémas réguliers de type fini sur S sont ponctuellement purs. La sous-section 3.6 donnera les énoncés de géométrie logarithmique permettant d'établir que si (X, M) est un log-schéma log-lisse sur un trait (muni de sa log-structure canonique) et que le schéma X est régulier, alors X est ponctuellement pur. La démonstration du théorème 3.1.1 sera donnée dans la sous-section 3.7. Elle utilisera les résultats des sous-sections précédentes ainsi que trois théorèmes de résolution des singularités que l'on peut résumer ainsi :

- utilisation d'altérations pour obtenir un schéma à réduction semi-stable à partir d'un schéma (normal) sur S (cf. [Vidal, 2004, proposition 4.4.1]) ;
- modification d'une action modérée d'un groupe fini sur un log-schéma log-régulier de façon à obtenir une action très modérée (cf. X-1.1) ;
- résolution des singularités des log-schémas log-réguliers (théorème de Kato-Nizioł, cf. [Kato, 1994, 10.3, 10.4] et [Nizioł, 2006, 5.7]).

3.2. Pureté ponctuelle.

DÉFINITION 3.2.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma local régulier. On dit que X est **ponctuellement pur en son point fermé** x si le morphisme $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$ est un isomorphisme dans $\mathbf{D}^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ où $i: x \rightarrow X$ est l'inclusion du point fermé de X .

Un schéma local régulier est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si son hensélisé (resp. son hensélisé strict) l'est.

DÉFINITION 3.2.2. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Si $x \in X$, on dit que X est **ponctuellement pur au point** x si le localisé de X en x est ponctuellement pur en son point fermé. On dit que X est **ponctuellement pur** s'il l'est en tous ses points.

La proposition suivante est [Fujiwara, 2002, proposition 2.2.4]. La démonstration de cet article semble compliquée puisqu'elle passe par des résultats plus fins que ceux dont nous avons besoin. On en redonne donc une démonstration plus courte.

PROPOSITION 3.2.3. Soit $i: Y \rightarrow X$ une immersion fermée entre schémas réguliers. Le nombre de conditions satisfaites parmi les trois suivantes ne peut pas être deux :

- (a) Le couple régulier (X, Y) est pur ;
- (b) Le schéma Y est ponctuellement pur ;

(c) Le schéma X est ponctuellement pur aux points situés dans l'image de i .

Soit $y \in Y$, notons $V(y)$ le localisé de Y en y et $V(x)$ celui de l'image x de y dans X . On a un diagramme de schémas :

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{i_y} & V(y) \\ & \searrow i_x & \downarrow i' \\ & & V(x) \end{array}$$

La composition des morphismes de Gysin donne le diagramme commutatif suivant dans $D^+(y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_{i_y}} & i_y^? \Lambda \\ & \searrow \text{Cl}_{i_x} & \downarrow i_y^? \text{Cl}_{i'} \\ & & i_x^? \Lambda \end{array}$$

Sur ce diagramme, on voit aussitôt que (a) et (b) impliquent (c) et que (a) et (c) impliquent (b). Montrons que (b) et (c) impliquent (a). Il s'agit de montrer que pour tout point y de Y , le morphisme $i_y^* \text{Cl}_{i'}$ est un isomorphisme. On peut procéder par récurrence sur la dimension de $V(y)$. On peut ainsi supposer que le support d'un cône C du morphisme $\text{Cl}_{i'}$ dans $D^+(V(y)_{\text{ét}}, \Lambda)$ est contenu dans $\{y\}$. Mézalar, le morphisme canonique $i_y^! C \rightarrow i_y^* C$ est un isomorphisme ; le diagramme ci-dessus montre que $i_y^! C = 0$, ce qui permet de conclure que $C = 0$ et finalement d'obtenir (a).

Rappelons quelques propriétés importantes concernant la pureté ponctuelle :

PROPOSITION 3.2.4 ([Fujiwara, 2002, proposition 2.2.2]). Soit X un schéma local strictement hensélien régulier. Le complété $\hat{X}$ est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si X l'est.

PROPOSITION 3.2.5 ([Fujiwara, 2002, corollary 2.2.3]). Soit k un corps premier. Si X est schéma régulier qui est un k -schéma, alors X est ponctuellement pur.

3.3. Changement de coefficients.

PROPOSITION 3.3.1. Soit n un entier naturel non nul. Soit $n = \prod_{j=1}^k \ell_j^{v_j}$ la factorisation de n en produit de puissances de nombres premiers distincts. Un couple régulier (X, Y) est pur relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell_j^{v_j}\mathbf{Z}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.

Cela résulte aussitôt du lemme chinois et du fait que si m est un entier naturel divisant n , alors pour toute immersion fermée régulière $i: Y \rightarrow X$, le diagramme évident commute dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^? \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^? \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

PROPOSITION 3.3.2. Soit ℓ un nombre premier. Pour tout entier $v \geq 1$, un couple régulier (X, Y) est pur relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$ si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

En utilisant la résolution de Godement des faisceaux $\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}(c)$ (où c est la codimension de l'immersion $i: Y \rightarrow X$) pour tout v , on peut représenter les morphismes de Gysin $\text{Cl}_i: \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z} \rightarrow i^? \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$ dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z})$ par des cocycles. Un tel cocycle pour v_0 fixé induit pour tout entier $v \leq v_0$ un cocycle représentant le morphisme de Gysin à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$. Les propriétés élémentaires de la résolution de Godement font que, si on le souhaite, on peut en fait trouver une famille compatible de cocycles pour tout $v \in \mathbf{N}$.

Compte tenu de ces observations, une fois ces cocycles convenablement choisis, on dispose d'un cône privilégié $C(v)$ du morphisme $Cl_i: \mathbf{Z}/\ell^v \mathbf{Z} \rightarrow i^* \mathbf{Z}/\ell^v \mathbf{Z}$ dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^v \mathbf{Z})$ pour tout $v \in \mathbf{N}$ et de triangles

$$C(\mu) \longrightarrow C(\mu + v) \longrightarrow C(v) \longrightarrow C(\mu)[1]$$

dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mu+v} \mathbf{Z})$ pour tous $(\mu, v) \in \mathbf{N}^2$.

Par conséquent, si $C(1) = 0$, il vient que pour tout $v \geq 1$, $C(v) = 0$. Inversement, si $C(1)$ est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de $C(v)$ pour tout $v \geq 1$.

3.4. Diviseurs réguliers.

DÉFINITION 3.4.1. Si X est un schéma et $\bar{x} \rightarrow X$ un point géométrique, on note $V(\bar{x})$ l'hensélisé strict de X en $\bar{x}$ et $i_{\bar{x}}: V(\bar{x}) \rightarrow X$ le morphisme canonique.

PROPOSITION 3.4.2. Soit X un schéma régulier. Soit D un diviseur régulier de $X^{(x)}$. Le couple régulier (X, D) est pur si et seulement si pour tout point géométrique $\bar{x} \rightarrow D$, on a $H_{\text{ét}}^q(V(\bar{x}) - i_{\bar{x}}^{-1}(D), \Lambda) = 0$ pour tout $q \geq 2$.

Cela résulte du calcul de $H_{\text{ét}}^q(V(\bar{x}) - i_{\bar{x}}^{-1}(D), \Lambda)$ pour $q \in \{0, 1\}$ (cf. [SGA 4½ [Cycle] 2.1.4]).

PROPOSITION 3.4.3. On suppose que l'anneau de coefficients est $\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme fini et plat de degré constant premier à ℓ entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schémas réguliers. Soit D un diviseur régulier de X . On suppose que $D' = f^{-1}(D)_{\text{réd}}$ est un diviseur régulier de Y . Si le couple régulier (Y, D') est pur, alors (X, D) aussi.

Grâce à la proposition 3.4.2, on peut choisir un point géométrique de D et remplacer X par son hensélisé strict en ce point. On suppose donc que X et D sont locaux strictement henséliens et on se concentre sur la pureté du couple (X, D) en le point fermé de D . Le schéma Y est alors réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens ; au moins un de ceux-ci est de degré premier à ℓ sur X . On peut donc supposer que Y aussi est local strictement hensélien. Il suffit alors de montrer que $H^q(X - D, \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z})$ s'injecte dans $H^q(Y - D', \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z})$, ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 3.4.4. On suppose que l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de présentation finie, fini et plat de rang d premier à ℓ entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schémas. Alors, le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow f_* \Lambda$ est un monomorphisme scindé dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

D'après [SGA 4 XVII 6.2.3], on a un morphisme $\text{Tr}_f: f_* \Lambda \rightarrow \Lambda$ tel que la composée

$$\Lambda \rightarrow f_* \Lambda \rightarrow \Lambda$$

soit la multiplication par d , ce qui donne le scindage voulu puisque d est inversible dans Λ .

PROPOSITION 3.4.5. On suppose que l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma régulier. Soit f une fonction sur X dont le lieu des zéros $D = V(f)$ soit un diviseur régulier de X . On pose $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f))$. On note $\pi: X' \rightarrow X$ la projection, $D' = \pi^{-1}(D)_{\text{réd}}$ (noter que $D' \rightarrow D$ est un isomorphisme). Alors, X' est un schéma régulier, et le couple régulier (X', D') est pur si et seulement si le couple régulier (X, D) l'est.

Soit $\bar{x}$ un point géométrique de D (on identifiera aussi $\bar{x}$ à un point géométrique de D'). On va en fait montrer que (X, D) est pur en $\bar{x}$ si et seulement si (X', D') l'est. On peut supposer que X est le spectre premier d'un anneau local strictement hensélien A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que $\bar{x}$ est au-dessus du point fermé de X . On a évidemment $f \in \mathfrak{m}$; le fait que $D = V(f)$ soit régulier revient à dire que $f \notin \mathfrak{m}^2$.

Notons $A' = A[T]/(T^\ell - f)$. En considérant le déterminant de l'endomorphisme de A' comme A -module donné par la multiplication par un élément $b \in A'$, on observe que b est inversible dans

^(x)On veut dire par là que D est un sous-schéma fermé de X qui est régulier et purement de codimension 1. Ceci n'exclut pas le cas où D serait vide.

A' si et seulement si son image dans l'algèbre locale $(A/\mathfrak{m})[T]/(T^\ell)$ est inversible. Il en résulte que A' est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = (T) + \mathfrak{m}A'$. Par ailleurs, on a un isomorphisme $A/(f) \xrightarrow{\sim} A'/(T)$ (i.e. $D' \rightarrow D$ est un isomorphisme). L'anneau $A_{(f)}[T]/(T^\ell - f)$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante T ; on en déduit un isomorphisme $A_{(f)}[T]/(T^\ell - f) \xrightarrow{\sim} A'_{(T)}$ dont il découle que le localisé de A' par rapport à l'idéal (T) est un anneau de valuation discrète. La codimension de l'idéal premier (T) dans A' est donc 1. On en déduit que $\dim A' \geq 1 + \dim A'/(T) = 1 + \dim A/(f) = \dim A$. Comme $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, on peut introduire des éléments $(g_1, \dots, g_d)$ de $\mathfrak{m}$ tels que les classes des éléments $f, g_1, \dots, g_d$ forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ comme $A/\mathfrak{m}$ -espace vectoriel. On a alors $\mathfrak{m} = (f, g_1, \dots, g_d)$ et $\dim A = d + 1$ car A est régulier. L'idéal maximal $(T) + \mathfrak{m}A'$ de A' est engendré par $(T, g_1, \dots, g_d)$, donc $\dim A' \leq d + 1 = \dim A$. Comme on sait déjà que $\dim A' \geq \dim A$, il vient que $\dim A' = d + 1$ et que l'idéal maximal de A' est engendré par $\dim A'$ éléments, donc A' est régulier.

On peut considérer, pour tout entier $v \geq 0$, le X -schéma affine $X^v = \text{Spec}(A[T]/(T^{\ell^v} - f))$. En élevant T à la puissance ℓ , on obtient une tour de morphismes

$$\dots \rightarrow X^{v+1} \rightarrow X^v \rightarrow \dots \rightarrow X^1 \rightarrow X^0,$$

le dernier morphisme $X^1 \rightarrow X^0$ s'identifiant à $\pi: X' \rightarrow X$. Pour tout entier n inversible dans A , on note $\mu_n := \mu_n(A)$. Pour tout $v \geq 0$, on munit la A -algèbre $A[T]/(T^{\ell^v} - f)$ de l'action à gauche de μ_{ℓ^v} telle que $\zeta \in \mu_{\ell^v}$ agisse en envoyant T sur ζT . Le schéma X^v hérite ainsi d'une action à droite de μ_{ℓ^v} et $X^v \times_X (X - D)$ est muni d'une structure de μ_{ℓ^v} -torseur à droite au-dessus de $(X - D)_{\text{ét}}$. D'après 4.6.2, on dispose pour tout $v \geq 0$ d'un morphisme de topos $(X - D)_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{B}\mu_{\ell^v}$ tel que l'image inverse du μ_{ℓ^v} -torseur à droite $\mathbf{E}\mu_{\ell^v}$ (cf. 4.6.1) s'identifie à X^v . Les compatibilités évidentes entre les revêtements constituant cette tour font que si on note $\mathbf{Z}_\ell(1) = \varinjlim_v \mu_{\ell^v}$, alors on dispose en fait d'un morphisme de topos $\rho_f: (X - D)_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1)$ tel que le foncteur ρ_f^* envoie le système projectif $\mathbf{E}\mathbf{Z}_\ell(1) := (\mathbf{E}\mu_{\ell^v})_v$ sur $(X^v \times_X (X - D))_v$, et ce de façon équivariante pour les actions à droite des groupes μ_{ℓ^v} . (Si on a choisi un système compatible de points géométriques $\bar{y}_v$ des schémas $X^v \times_X (X - D)$, la construction 4.6.3 donne un système compatible de morphismes $\pi_1^{\text{ét}}(X - D, \bar{y}_0) \rightarrow \mu_{\ell^v}$. Par passage à la limite projective on obtient un morphisme $\pi_1^{\text{ét}}(X - D, \bar{y}_0) \rightarrow \mathbf{Z}_\ell(1)$. Le morphisme de topos ρ_f s'identifie alors au composé évident $X_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{B}\pi_1^{\text{ét}}(X - D, \bar{y}_0) \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1)$.)

Dans la suite, le μ_ℓ -torseur étale à droite $X' - D = X^1 - D$ au-dessus de $X - D$ sera aussi considéré comme un μ_ℓ -torseur à gauche (sans passage à l'inverse, ce qui est possible parce que μ_ℓ est commutatif) : c'est le μ_ℓ -torseur des racines ℓ -ièmes de f .

LEMME 3.4.6. *Le couple régulier (X, D) est pur en $\bar{x}$ si et seulement si le morphisme*

$$\text{R}\Gamma(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \rightarrow \text{R}\Gamma((X - D)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos ρ_f est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Ce lemme découle des deux lemmes suivants :

LEMME 3.4.7. *Pour tout entier $q \geq 2$, $H^q(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) = 0$ et on a des isomorphismes canoniques*

$$H^0(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mu_\ell, \quad H^1(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}.$$

Pour obtenir l'identification $H^1(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell)$, on utilise des conventions de signes compatibles avec 4.6.1. Pour le reste, il s'agit de montrer que $\mathbf{Z}_\ell(1)$ est de ℓ -dimension cohomologique 1. Pour cela, voir par exemple [Serre, 1994, § 3.4, chapitre I].

LEMME 3.4.8. *Le morphisme composé*

$$\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \simeq H^1(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \xrightarrow{\rho_f^*} H^1((X - D)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \xrightarrow{\delta} H_D^2(X, \mu_\ell)$$

envoie 1 sur $-\text{Cl}_{D \subset X}$.

Grâce à 4.6.1, on obtient que le générateur canonique de $H^1(\mathbf{B}\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell)$ s'envoie par ρ_f^* sur la classe du μ_ℓ -torseur $X' - D \rightarrow X - D$ qui d'après la construction 4.3.1 est égale à $\delta_K(f)$ où $\delta_K: H^i(X - D, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^{i+1}(X - D, \mu_\ell)$ est le morphisme de bord associé à la suite exacte de Kummer. Si on note

$\delta_{X-D}: H^i(X-D, \mathcal{F}) \rightarrow H_D^{i+1}(X, \mathcal{F})$ les morphismes de bord reliant la cohomologie et la cohomologie à supports (cf. 4.7.6), comme dans [SGA 4½ [Cycle] 2.1.3], 4.7.5 fournit la relation suivante dans $H_D^2(X, \mu_\ell)$:

$$\begin{aligned} \delta_{X-D}(\delta_K(f)) &= -\delta_K(\delta_{X-D}(f)) \\ &= -c_1(\mathcal{O}_X, f) \quad \text{d'après 4.7.6} \\ &= c_1(\mathcal{O}_X, f^{-1}) \\ &= c_1(f\mathcal{O}_X, 1) \\ &= -Cl_{D \subset X}. \end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme 3.4.6 à X' : il vient que le couple régulier (X', D') est pur en $\bar{x}$ si et seulement si le morphisme

$$R\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \rightarrow R\Gamma((X' - D')_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos $\rho_T: (X' - D')_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BZ}_\ell(1)$ est un isomorphisme.

On dispose d'un carré commutatif de topos :

$$\begin{array}{ccc} (X' - D')_{\text{ét}} & \xrightarrow{\rho_T} & \mathbf{BZ}_\ell(1) \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ (X - D)_{\text{ét}} & \xrightarrow{\rho_f} & \mathbf{BZ}_\ell(1) \end{array}$$

où g est induit par $\pi: X' \rightarrow X$ et g' par la multiplication par ℓ sur $\mathbf{Z}_\ell(1)$. Le faisceau $g_*\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ s'identifie canoniquement à $\rho_f^*g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Il en découle aisément que le couple régulier (X', D') est pur en $\bar{x}$ si et seulement si le morphisme canonique

$$R\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) \rightarrow R\Gamma((X - D)_{\text{ét}}, \rho_f^*g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$$

est un isomorphisme.

La cohomologie relative du morphisme de topos $\rho_f: (X - D)_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BZ}_\ell(1)$ définit un foncteur triangulé

$$F: D^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow D^+(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

tel que pour tout $K \in D^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, $F(K)$ soit isomorphe à un cône du morphisme canonique $R\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), K) \rightarrow R\Gamma((X - D)_{\text{ét}}, \rho_f^*K)$.

Le lemme suivant découle de ce qui précède :

LEMME 3.4.9. *Le couple régulier (X, D) est pur en $\bar{x}$ si et seulement si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$ tandis que (X', D') est pur en $\bar{x}$ si et seulement si $F(g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) = 0$.*

Comme $\mathbf{Z}_\ell(1)$ est un pro- ℓ -groupe, le faisceau $g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est une extension successive de ℓ copies de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Le foncteur F étant triangulé, on en déduit aussitôt que si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est nul, alors $F(g'_*\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ aussi et que si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de $F(g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.4.5.

3.5. Schémas sur un trait. Soit S un trait (dans lequel les nombres premiers divisant le cardinal de Λ sont inversibles). On note s son point fermé, η son point générique et π une uniformisante.

PROPOSITION 3.5.1. *Le trait S est ponctuellement pur.*

Il s'agit de montrer que S est ponctuellement pur en son point fermé. On peut supposer que S est strictement hensélien ; d'après la proposition 3.4.2, cela résulte alors du fait que le corps des fractions de S soit de ℓ -dimension cohomologique 1 pour tout nombre premier ℓ inversible sur S (cf. [SGA 4 x 2.2]).

PROPOSITION 3.5.2. *Pour tout entier naturel n , l'espace affine $\mathbf{A}_S^n$ est ponctuellement pur.*

D'après la proposition 3.2.5, les schémas A_s^n et A_η^n sont ponctuellement purs. Ainsi, A_s^n est ponctuellement pur en les points de la fibre générique. Pour établir la pureté ponctuelle de A_s^n en les points de la fibre spéciale, on utilise la proposition 3.2.3 : il suffit de montrer que le couple régulier (A_s^n, A_η^n) est pur. Le cas $n = 0$ résulte de la proposition 3.5.1 et le cas général en découle en vertu du théorème de changement de base lisse.

COROLLAIRE 3.5.3. *Un S -schéma lisse est ponctuellement pur.*

DÉFINITION 3.5.4. Soit $p: X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, avec X régulier et admettant un faisceau ample. On pose $K_X = p^? \Lambda_S$ et on dispose d'un morphisme de Gysin $Cl_{X/S}: \Lambda_X \rightarrow K_X$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (cf. définition 2.5.11).

PROPOSITION 3.5.5. *Soit $p: X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, avec X régulier et admettant un faisceau ample. Le schéma X est ponctuellement pur si et seulement si le morphisme $Cl_{X/S}: \Lambda_X \rightarrow K_X$ est un isomorphisme dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

On choisit une factorisation $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{q} S$ de p (dans la catégorie $\mathcal{S}^{ic}$) avec Y lisse sur S et i une immersion fermée (régulière). D'après le théorème 2.5.12 (ou plutôt par définition de $Cl_{X/S}$), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Cl_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow Cl_{X/S} & \downarrow i^? Cl_q \\ & & i^? q^? \Lambda \end{array}$$

Le morphisme q étant lisse, le morphisme de Gysin Cl_q est un isomorphisme. Par conséquent, $Cl_{X/S}$ est un isomorphisme si et seulement si $Cl_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$ en est un. D'après la proposition 3.2.3 et compte tenu du fait que Y soit ponctuellement pur (cf. corollaire 3.5.3), ceci équivaut encore à dire que X est ponctuellement pur.

COROLLAIRE 3.5.6. *Soit X un S -schéma de type fini qui est régulier. Soit Y un X -schéma lisse. Si X est ponctuellement pur, alors Y aussi.*

PROPOSITION 3.5.7. *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre et dominant de S -schémas où X et Y sont supposés de type fini sur S , intègres, réguliers et admettant des faisceaux amples. On suppose de plus que f est génériquement étale de degré d inversible dans Λ . Alors, la pureté ponctuelle de X implique celle de Y .*

Le morphisme f est localement d'intersection complète lissifiable de dimension relative virtuelle zéro, d'où $f^? = f^!$. Le morphisme de Gysin relatif à f est un morphisme $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^! \Lambda$.

LEMME 3.5.8. *On peut généraliser le morphisme $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^! \Lambda$ en des morphismes $f^* M \rightarrow f^! M$, fonctoriellement en $M \in D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Le morphisme $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^! \Lambda$ correspond par adjonction à un morphisme $Rf_! \Lambda \rightarrow \Lambda$, que l'on peut tensoriser avec M pour obtenir (via la formule de projection) un morphisme $Rf_! f^* M \rightarrow M$ qui correspond lui-même par adjonction au morphisme $f^* M \rightarrow f^! M$ du type recherché.

En appliquant la fonctorialité de la construction du lemme au morphisme $Cl_{Y/S}: \Lambda_Y \rightarrow K_Y$, on obtient un diagramme commutatif dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

$$\begin{array}{ccc} f^* \Lambda_Y & \longrightarrow & f^! \Lambda_Y \\ f^*(Cl_{Y/S}) \downarrow & & \downarrow f^!(Cl_{Y/S}) \\ f^* K_Y & \longrightarrow & f^! K_Y \end{array}$$

Via l'isomorphisme canonique $f^* \Lambda_Y \simeq \Lambda_X$, le morphisme du haut s'identifie au morphisme $Cl_f: \Lambda_X \rightarrow f^! \Lambda_Y$; celui de droite est $f^!(Cl_{Y/S})$. D'après le théorème 2.5.12, il vient que le morphisme composé $\Lambda_X \simeq f^* \Lambda_Y \rightarrow f^! K_Y \simeq K_X$ est le morphisme de Gysin $Cl_{X/S}$. On déduit de ceci un diagramme commutatif de la forme suivante dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{array}{ccccc}
f^* \Lambda_Y & \xrightarrow{\sim} & \Lambda_X & \xrightarrow{\text{Cl}_f} & f^! \Lambda_Y \\
f^*(\text{Cl}_{Y/S}) \downarrow & & \downarrow \text{Cl}_{X/S} & & \downarrow f^! \text{Cl}_{Y/S} \\
f^* K_Y & \longrightarrow & K_X & \xrightarrow{\sim} & f^! K_Y
\end{array}$$

Comme f est propre, on obtient par adjonction un nouveau diagramme commutatif dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda_Y & \longrightarrow & \text{Rf}_* \Lambda_X & \longrightarrow & \Lambda_Y \\
\text{Cl}_{Y/S} \downarrow & & \downarrow \text{Rf}_*(\text{Cl}_{X/S}) & & \downarrow \text{Cl}_{Y/S} \\
K_Y & \longrightarrow & \text{Rf}_* K_X & \longrightarrow & K_Y
\end{array}$$

Le diagramme ci-dessus met en évidence une relation entre les morphismes $\text{Cl}_{Y/S}$ et $\text{Rf}_*(\text{Cl}_{X/S})$. Comme va le montrer le lemme suivant, le premier morphisme est un facteur direct du second, ce qui montre que la pureté ponctuelle de X implique celle de Y , achevant la démonstration de la proposition 3.5.7.

LEMME 3.5.9. *Sur le diagramme précédent, les morphismes composés $\Lambda_Y \rightarrow \Lambda_Y$ et $K_Y \rightarrow K_Y$ sont les multiplications par le degré d (en particulier, ce sont des isomorphismes).*

Comme Y est connexe (non vide), on a un isomorphisme évident $\Lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}_{D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)}(\Lambda_Y)$. D'après le théorème de bidualité locale (cf. [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3]), on a aussi un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}_{D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)}(K_Y)$. Il suffit donc d'obtenir la conclusion au-dessus d'un ouvert non vide de Y . Quitte à remplacer Y par un ouvert non vide convenable, on peut supposer que f est un revêtement étale. On est ainsi ramené au lemme suivant :

LEMME 3.5.10. *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas fini étale de degré constant d . Pour tout objet $M \in D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme composé*

$$M \rightarrow f_* f^* M \rightarrow M$$

déduit des adjonctions canoniques (f^*, f_*) et (f_*, f^*) est la multiplication par d .

Grâce aux formules de projection, on peut supposer que $M = \Lambda_Y$. Il suffit alors d'établir le résultat après un changement de base étale (non vide) trivialisant le revêtement $X \rightarrow Y$ (par exemple une clôture galoisienne de ce revêtement). Bref, on peut supposer que X est une réunion disjointe de d copies de Y , auquel cas le résultat est trivial.

DÉFINITION 3.5.11. Soit $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbf{N}^n$. On définit un S -schéma :

$$V(S, \pi, e_1, \dots, e_n) = \text{Spec} \left(\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_n] / \left(\prod_{i=1}^n T_i^{e_i} - \pi \right) \right).$$

Pour tout i , on note H_i le sous-schéma fermé de $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ défini par l'équation $T_i = 0$.

PROPOSITION 3.5.12. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ un n -uplet d'entiers naturels non tous nuls. Alors, le schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est régulier et ponctuellement pur.*

On peut supposer que l'anneau des coefficients est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier inversible sur S .

LEMME 3.5.13.

- (i) *Si $(e_1, \dots, e_n)$ est un n -uplet d'entiers non tous nuls dont au moins un est inversible dans η , le S -schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est intègre, régulier et de fibre générique lisse ;*
- (ii) *Soit $d \geq 1$, si S' est le trait obtenu en extrayant une racine d -ième π' de l'uniformisante π (cf. [Serre, 1968, Proposition 17, §6, Chapitre I]), pour tout n -uplet $(e_1, \dots, e_n)$, on a un isomorphisme de schémas*

$$V(S', \pi', e_1, \dots, e_n) = V(S, \pi, de_1, \dots, de_n) ;$$

- (iii) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est un n -uplet d'entiers non tous nuls, le schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est régulier et intègre;
- (iv) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est un n -uplet d'entiers non tous nuls, le schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est ponctuellement pur si et seulement si pour tout i tel que $e_i > 0$, le couple régulier $(V(S, \pi, e_1, \dots, e_n), H_i)$ est pur^(xi);
- (v) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ un n -uplet d'entiers non nuls, soit e le p.p.c.m. des e_i ; on suppose que ℓ ne divise pas e ; si $V(S, \pi, e, \dots, e)$ est ponctuellement pur, alors $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ aussi;
- (vi) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est un n -uplet d'entiers tel que $e_1 \neq 0$, $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est ponctuellement pur si et seulement si $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n)$ est ponctuellement pur.

Les assertions (i) et (ii) sont laissées en exercice au lecteur. L'assertion (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Pour montrer l'assertion (iv), il suffit d'observer que les diviseurs H_i pour $e_i > 0$ sont ponctuellement purs (ce sont des espaces affines sur le corps résiduel de S) et forment un recouvrement de la fibre spéciale de $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$. La fibre générique du schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ étant ponctuellement pure (puisque lisse sur une extension de η), on peut conclure en utilisant la proposition 3.2.3.

Concernant l'assertion (v), l'élévation des T_i à la puissance $\frac{e}{e_i}$ définit un morphisme fini et plat $V(S, \pi, e, \dots, e) \rightarrow V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ de degré $\frac{e^n}{e_1 \dots e_n}$ (premier à ℓ); compte tenu du critère (iv), la proposition 3.4.3 permet de conclure.

Pour établir (vi), remarquons que l'élévation de T_1 à la puissance ℓ définit un morphisme fini et plat $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n) \rightarrow V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ de degré ℓ et étale en dehors du lieu d'annulation de T_1 . Il suffit donc de montrer que $(V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n), H_1)$ est pur si et seulement si $(V(S, \pi, e_1, \dots, e_n), H_1)$ l'est, ce qui résulte de la proposition 3.4.5.

Établissons la proposition 3.5.12. D'après l'assertion (iii), les schémas considérés sont réguliers. Pour établir leur pureté ponctuelle, d'après le corollaire 3.5.6, on peut supposer qu'aucun des exposants e_i n'est nul. Dans le cas où les tous les entiers e_i valent 1, le résultat est établi dans [Illusie, 2004, theorem 1.4] (voir aussi [Rapoport & Zink, 1982, Satz 2.21]). Grâce à l'utilisation d'un trait auxiliaire, l'assertion (ii) permet d'en déduire que pour tout entier $d \geq 1$, $V(S, \pi, d, \dots, d)$ est ponctuellement pur. En utilisant l'assertion (v), on obtient que $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est ponctuellement pur si ℓ ne divise aucun des entiers e_i . L'assertion (vi) permet de passer au cas général.

3.6. Géométrie logarithmique.

DÉFINITION 3.6.1. Soit S un trait, de point générique η . La log-structure canonique sur S est la log-structure image directe de la log-structure triviale sur η . Toute uniformisante de S définit un morphisme de monoïdes $\mathbf{N} \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ donnant naissance à une carte $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])$ du log-schéma S .

L'objectif de cette sous-section est d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6.2. Soit S un trait muni de sa log-structure canonique. Soit $(X, M) \rightarrow S$ un morphisme log-lisse de log-schémas fs. Si le schéma X est régulier, alors il est ponctuellement pur.

La proposition suivante précise [Kato, 1988, theorem 3.5] dans le cas des log-schémas fs :

PROPOSITION 3.6.3. Soit $(X, M) \rightarrow (Y, N)$ un morphisme log-lisse entre log-schémas fs. On suppose donnée une carte $Y \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])$ de (Y, N) où Q est un monoïde fs sans torsion^(xii). Pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X , il existe un voisinage étale U de $\bar{x}$, un morphisme injectif de monoïde $Q \rightarrow P$ avec P fs sans torsion et une carte $U \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ tels que la partie de torsion de $\text{Coker}(Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}})$ soit d'ordre inversible sur U et que le morphisme de schémas $U \rightarrow Y \times_{\text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ soit étale.

^(xi) Si $e_i = 0$, c'est vrai aussi : c'est un cas particulier du théorème de pureté relatif, cf. [SGA 4 XVI 3.7].

^(xii) Si $\bar{y}$ est un point géométrique de Y , il existe un voisinage étale de $\bar{y}$ admettant une telle carte avec $Q = M_{\bar{y}}/\mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^\times$ qui est fs saillant (cf. [Kato, 1994, Lemma 1.6]).

Dans la démonstration du critère de log-lissité de [Kato, 1988, theorem 3.5], des éléments $t_1, \dots, t_r$ de $M_{\bar{x}}$ sont choisis de sorte que la famille $(d \log t_1, \dots, d \log t_r)$ forme une base du faisceau des log-différentielles $\omega_{X/Y, \bar{x}}^1$. On considère ensuite le morphisme de monoïdes évident $\mathbf{N}^r \oplus Q \rightarrow M_{\bar{x}}$ donné sur la composante $\mathbf{N}^r$ par les $t_1, \dots, t_r$. Il est tel que le conoyau de $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$ soit fini d'exposant n inversible dans l'anneau $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}$ (en particulier, $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$ est n -divisible). Il existe un morphisme injectif $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow G$ de conoyau tué par une puissance de n et un prolongement $h: G \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}}$ de $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}}$ tel que $G \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$ soit surjectif. Comme $M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$ est un groupe abélien de type fini et sans torsion, le lemme suivant montre que l'on peut s'arranger pour que G soit un groupe abélien libre. Dans la démonstration de [Kato, 1988, theorem 3.5], on pose ensuite $P = h^{-1}(M_{\bar{x}})$ et il est montré que sur un voisinage étale U de $\bar{x}$, P engendre la log-structure de (X, M) et que le morphisme de schémas $U \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ est étale en $\bar{x}$. Le monoïde P ainsi construit est fs et sans torsion.

LEMME 3.6.4. *Soit n un entier naturel non nul. Soit A un groupe abélien libre de type fini. Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme de groupes abéliens. Soit $U \subset B$ un sous-groupe n -divisible. On suppose que B/U est sans torsion et que $\text{Coker}(A \rightarrow B/U)$ est fini et tué par n . Alors, il existe un groupe abélien A' libre de type fini, un morphisme injectif $A \rightarrow A'$ de groupes abéliens tel que A'/A soit tué par une puissance de n et une extension $A' \rightarrow B$ du morphisme $A \rightarrow B$ telle que le morphisme composé $A' \rightarrow B/U$ soit surjectif.*

Grâce à une récurrence sur l'ordre de $\text{Coker}(A \rightarrow B/U)$, on peut supposer que $\text{Coker}(A \rightarrow B/U)$ est cyclique d'ordre $d \geq 2$, engendré par la classe d'un élément $b \in B$. Il existe donc $a \in A$ et $u \in U$ tels que $db = \varphi(a) + u$. Comme u est n -divisible, il existe $\tilde{u} \in U$ tel que $u = d\tilde{u}$. Quitte à remplacer b par $b - \tilde{u}$, on peut supposer que $u = 0$. On forme le carré cocartésien suivant dans la catégorie des groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{d}\mathbf{Z} & \longrightarrow & A' \end{array}$$

En raison de la relation $db = \varphi(a)$, on peut définir un unique morphisme de groupes abéliens $\varphi': A' \rightarrow B$ induisant $\varphi: A \rightarrow B$ et envoyant $\frac{1}{d}$ sur b . On obtient ainsi une surjection $A' \rightarrow B/U$ induisant un isomorphisme $A'/A \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(A \rightarrow B/U)$. Il reste à vérifier que A' est sans torsion. Soit a' un élément de torsion de A' . L'image de a' dans B/U via φ' est de torsion, mais B/U étant sans torsion, on a $\varphi'(a') \in U$. Comme φ' induit un isomorphisme $A'/A \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(A \rightarrow B/U)$, on en déduit que $a' \in A$, mais A est sans torsion, donc $a' = 0$.

PROPOSITION 3.6.5. *Soit $(X, M) \rightarrow S$ un log-schéma fs log-lisse sur un trait S (muni de sa log-structure canonique). On suppose que le schéma X est régulier. Alors, localement pour la topologie étale, X admet un morphisme étale vers un schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est un n -uplet d'entiers non tous nuls (cf. définition 3.5.11).*

Soit π une uniformisante de S ; elle donne naissance à une carte $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])$. D'après la proposition 3.6.3, on peut supposer qu'il existe un monoïde P fs sans torsion, un morphisme injectif $\mathbf{N} \rightarrow P$, une carte $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ telle que le morphisme de schémas $X \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])} \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ soit étale. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X . On note P' le sous-monoïde de P formé des éléments dont l'image dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ soit inversible au point $\bar{x}$.

On peut supposer que P' est un groupe. En effet, si A est un sous-ensemble fini de P' qui engendre le groupe abélien (libre de type fini) P'^{gp} ^(xiii), on peut remplacer X par le voisinage ouvert de $\bar{x}$ sur lequel les images des éléments de A (et donc de P') sont inversibles dans le faisceau structural et par suite, remplacer P par $P[-P']$ qui est encore fs et sans torsion.

(xiii) En fait, on peut montrer que P' est un monoïde de type fini (c'est une face de P).

Le fait que $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ soit une carte implique alors que P' est le noyau de $P^{\text{gp}} \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\times}$. En particulier, on obtient un isomorphisme

$$P/P' \xrightarrow{\sim} M_{\bar{x}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\times}.$$

Comme X est log-régulier, on reconnaît que X est régulier au fait que $M_{\bar{x}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\times}$ soit un monoïde libre (cf. VI-1.7). Par conséquent, il existe un entier r et un isomorphisme de monoïdes $\mathbb{N}^r \xrightarrow{\sim} P/P'$. On peut relever ce morphisme en un morphisme $\mathbb{N}^r \rightarrow P$, ce qui permet de construire un isomorphisme $\mathbb{N}^r \oplus P' \xrightarrow{\sim} P$.

Il en résulte que le morphisme de carte $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ a pour but un schéma isomorphe à $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\mathbb{N}^r \oplus P'])$ qui est le produit d'un espace affine et d'un tore déployé (dont P' est le groupe des caractères). Dans la carte du morphisme $(X, M) \rightarrow S$ qui est donnée, l'image de 1 par le morphisme de monoïdes $\mathbb{N} \rightarrow P$ peut s'écrire $(e_1, \dots, e_r, p')$ dans $\mathbb{N}^r \oplus P'$ via les identifications ci-dessus. On peut choisir une base $a_1, \dots, a_s$ de P' comme groupe abélien telle que $p' = \sum_{i=1}^s f_i a_i$ avec $f_i \in \mathbb{N}$. On a ainsi construit un morphisme étale $X \rightarrow V(S, \pi, e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ (avec les $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s$ non tous nuls).

Compte tenu de la proposition 3.5.12, le théorème 3.6.2 résulte aussitôt de la proposition 3.6.5.

3.7. Démonstration du théorème de pureté. Démontrons le théorème 3.1.1. D'après les propositions 3.3.1 et 3.3.2, on peut supposer que l'anneau des coefficients Λ est $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ où ℓ est un nombre premier. D'après la proposition 3.2.3, il s'agit de montrer que tout $\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma régulier est ponctuellement pur. D'après [Fujiwara, 2002, corollary 6.1.5], on peut supposer que X est un schéma régulier intègre, quasi-projectif et plat sur un trait (strictement hensélien) S , que l'on peut supposer d'inégale caractéristique d'après la proposition 3.2.5. On peut utiliser les notations de la sous-section 3.5. Quitte à étendre le trait S , on peut supposer que l'anneau sous-jacent à S est intégralement fermé dans le corps des fonctions rationnelles sur X . La fibre générique X_η de X est donc géométriquement intègre.

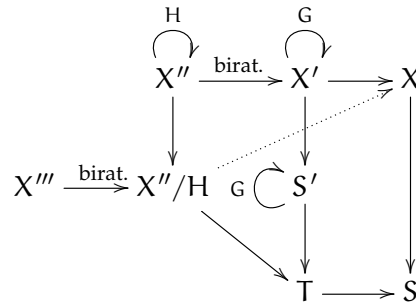
En appliquant [Vidal, 2004, proposition 4.4.1] à la normalisation de l'adhérence de X dans un plongement projectif, on obtient qu'il existe un groupe fini G et un diagramme G -équivariant :

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

tels que :

- G agisse trivialement sur X et S ;
- $S' \rightarrow S$ soit une extension finie de traits ;
- $X' \rightarrow X$ soit projectif, X' soit régulier, connexe et à réduction semi-stable sur S' ;
- G agisse fidèlement sur X' et $X' \rightarrow X$ soit génériquement un revêtement étale galoisien de groupe G .

On munit X' de la log-structure dont l'ouvert de trivialité est la fibre générique de $X' \rightarrow S'$. Soit H un ℓ -Sylow de G . On note $T = S'/H$. L'extension de traits (strictement henséliens) $S' \rightarrow T$ est d'ordre une puissance de ℓ , donc modérément ramifiée. Par conséquent, pour les log-structures canoniques, $S' \rightarrow T$ est log-étale. Comme on sait que X' est log-lisse sur S' , il l'est donc aussi sur T . Comme H agit trivialement sur T et que son action sur X' est modérée, on peut appliquer le théorème de résolution équivariante X-1.1 qui donne un morphisme projectif et birationnel H -équivariant $X'' \rightarrow X'$ de log-schémas tel que X'' soit log-lisse sur T et que H agisse très modérément sur X'' . Le log-schéma quotient X''/H est aussi log-lisse sur T (en particulier, X''/H est log-régulier). D'après le théorème de résolution des singularités de Kato-Nizioł (cf. [Kato, 1994, 10.3, 10.4] et [Nizioł, 2006, 5.7]), il existe un log-éclatement (en particulier, log-étale, projectif et birationnel) $X''' \rightarrow X''/H$ tel que X''' soit régulier. La situation est résumée sur le diagramme suivant :



Le log-schéma X''' est régulier et log-lisse sur T ; d'après le théorème 3.6.2, X''' est ponctuellement pur. Le morphisme évident $X''' \rightarrow X$ est projectif et génériquement un revêtement étale de degré premier à ℓ ; d'après la proposition 3.5.7, on peut conclure que X est ponctuellement pur, ce qui achève la démonstration du théorème de pureté.

4. Conventions de signes

Bien que le rédacteur de cet exposé y répugne, il peut être utile de préciser certaines conventions de signe. Nous nous appuierons sur celles de [Conrad, 2000, §1.3] ; elles ne coïncident pas avec celles de [SGA 4 XVII 1.1]. Quelques conventions supplémentaires sont précisées ci-dessous.

4.1. On rappelle que si $K = (\cdots \rightarrow K^n \rightarrow K^{n+1} \rightarrow \cdots)$ est un complexe dans une catégorie abélienne, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, le complexe $K[i]$ est tel que $K[i]^n = K^{i+n}$ et que les différentielles sur $K[i]$ soient données par les différentielles sur K multipliées par $(-1)^i$.

Si $f: K \rightarrow L$ est un morphisme de complexes, $\text{cône}(f)$ est le complexe tel que $\text{cône}(f)^n := K^{n+1} \oplus L^n$ et dont la différentielle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} -d_K & 0 \\ f & d_L \end{pmatrix}$. Les inclusions $L^n \rightarrow K^{n+1} \oplus L^n$ induisent un morphisme $i: L \rightarrow \text{cône}(f)$ et les projections $K^{n+1} \oplus L^n \rightarrow K^{n+1}$ induisent un morphisme $p: \text{cône}(f) \rightarrow K[1]$. On décrète que le triangle suivant est distingué^(xiv) :

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{i} \text{cône}(f) \xrightarrow{p} K[1].$$

Si $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, β induit un quasi-isomorphisme $\text{cône}(\alpha) \rightarrow M''$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\ 0 & & M & \xrightarrow{\beta} & M'' \end{array}$$

$$\text{cône}(\alpha) \xrightarrow{\sim} M''$$

Dans la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$, on obtient ainsi un triangle distingué

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \xrightarrow{\delta} M'[1],$$

^(xiv) On prendra garde au fait que [SGA 4 XVII 1.1] utilise une convention opposée.

où δ est le zigzag ainsi décrit :

$$\begin{array}{ccccc}
 -1 & & 0 & \longleftarrow & M' & \xrightarrow{-\text{Id}} & M' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\
 0 & & M'' & \xleftarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$$M'' \xleftarrow{\sim} \text{cône}(\alpha) \longrightarrow M'[1]$$

4.2. Si l'on dispose d'un foncteur cohomologique (covariant) $\mathcal{F}^0$ d'une des variantes de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on peut étendre ce foncteur en une suite de foncteurs $(\mathcal{F}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en posant $\mathcal{F}^n M := \mathcal{F}^0(M[n])$. À toute suite exacte courte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$ est associée une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^n M' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^n M \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}^n M'' \xrightarrow{\delta} \mathcal{F}^{n+1} M' \rightarrow \dots$$

où les morphismes $\delta: \mathcal{F}^n M'' \rightarrow \mathcal{F}^{n+1} M'$ sont obtenus par l'application du foncteur $\mathcal{F}^0$ au morphisme $\delta[n]: M'[n] \rightarrow M''[n+1]$. C'est ainsi que l'on munit par exemple la suite des foncteurs $H^n(X, -)$ pour X un site d'une structure de ∂ -foncteur [Grothendieck, 1957, §2.1], lequel est universel, ce qui permet de comparer des classes de cohomologie construites par des procédés faisant intervenir différentes constructions du ∂ -foncteur universel (cf. §4.8).

4.3. Soit $\mathcal{G}$ est un faisceau de groupes abéliens sur un site X et $\mathcal{T}$ est un $\mathcal{G}$ -torseur (à gauche). On se propose de définir une classe $[\mathcal{T}] \in H^1(X, \mathcal{G})$.

4.3.1. Il existe un monomorphisme de faisceaux abéliens $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ et un morphisme $\mathcal{G}$ -équivalent $\alpha: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ où l'on fait agir $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ par la formule $g.a = i(g) + a$. L'image de α dans le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ s'identifie à un élément $s \in H^0(X, \mathcal{A}/\mathcal{G})$. On note $[\mathcal{T}] := \delta(s) \in H^1(X, \mathcal{G})$ l'image de s par le morphisme de bord $\delta: H^0(X, \mathcal{A}/\mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G})$ associé à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow 0$ (cf. [SGA 4½ Cycle] 1.1.1)).

4.3.2. Si $\mathcal{E} \rightarrow \bullet$ est un épimorphisme de faisceaux d'ensembles (où $\bullet$ est l'objet final) et $s: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ un morphisme (que l'on considère comme une section de $\mathcal{T}$ au-dessus de $\mathcal{E}$), en considérant $\mathcal{T}$ comme un toseur- $\mathcal{G}$ (i.e. comme un toseur à droite sous $\mathcal{G}$) en faisant agir $\mathcal{G}$ à droite sur $\mathcal{T}$ par la formule $t.g := g.t$ (ce qui est possible puisque $\mathcal{G}$ est commutatif), il existe un (unique) morphisme $\gamma: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\text{pr}_2^*(s) = \text{pr}_1^*(s). \gamma$: c'est le 1-cocycle associé au toseur à droite $\mathcal{T}^{(\text{xv})}$. En suivant les conventions de [Conrad, 2000, §1.3] convenablement généralisées pour s'appliquer aux sites et pas seulement aux espaces topologiques, le 1-cocycle γ est un 1-cocycle de Čech associé au recouvrement $\mathcal{E} \rightarrow \bullet$; il définit donc un élément de $H^1(X, \mathcal{G})$ dont on peut montrer qu'il coïncide avec l'élément $[\mathcal{T}]$ défini en 4.3.1.

4.3.3. Il est également intéressant de disposer d'une troisième construction de $[\mathcal{T}]$, en identifiant cette fois $H^1(X, \mathcal{G})$ au groupe des morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}[1]$ dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens. Pour cela, avec les mêmes notations qu'en 4.3.2, on introduit le faisceau d'ensembles simplicial $\check{C}(\mathcal{E})$ défini par $\check{C}(\mathcal{E})_n := \mathbf{Hom}(\{0, \dots, n\}, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}^{1+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la structure simpliciale étant évidente. En notant $\mathbb{Z}-$ le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli des faisceaux abéliens vers les faisceaux d'ensembles, on obtient un faisceau abélien simplicial $\mathbb{Z}\check{C}(\mathcal{E})$ qui donne naissance à un complexe de faisceaux abéliens (concentré en degré négatifs), que l'on notera encore abusivement $\mathbb{Z}\check{C}(\mathcal{E})$:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}(\mathcal{E}^3) \xrightarrow{d_0 - d_1 + d_2} \mathbb{Z}(\mathcal{E}^2) \xrightarrow{d_0 - d_1} \mathbb{Z}\mathcal{E} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

(xv) C'est la formule que l'on utiliserait pour définir le 1-cocycle associé à un toseur à droite sous un faisceau de groupes non-nécessairement commutatif.

La projection $\mathcal{E} \rightarrow \bullet$ induit le morphisme d'augmentation $\varepsilon: \check{Z}\check{C}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Z}$, lequel est un quasi-isomorphisme. On peut alors décrire $[\mathcal{T}] \in H^1(X, \mathcal{G})$ comme étant le zigzag suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 -2 & 0 & \longleftarrow & \vdots & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 -1 & 0 & \longleftarrow & \mathbf{Z}(\mathcal{E}^2) & \xrightarrow{-\gamma} & \mathcal{G} \\
 & \downarrow & & \downarrow (e, e') & & \downarrow \\
 0 & \mathbf{Z} & \longleftarrow & \mathbf{Z}^{\mathcal{E}} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$\mathbf{Z} \xleftarrow[\sim]{\varepsilon} \check{Z}\check{C}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{G}[1]$

4.4. Un bicomplexe est une famille $(K^{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2}$ d'objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ munis de différentielles horizontales $d_h: K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ et verticales $d_v: K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ telles que $d_h \circ d_h = 0$, $d_v \circ d_v = 0$ et $d_v \circ d_h = d_h \circ d_v$. Le complexe simple associé à $K^{\bullet, \bullet}$ est défini par $(\text{Tot } K^{\bullet, \bullet})^n := \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ et la différentielle $(\text{Tot } K^{\bullet, \bullet})^n \rightarrow (\text{Tot } K^{\bullet, \bullet})^{n+1}$ est définie sur le terme $K^{p,q}$ (pour $p+q=n$) comme étant $d_h + (-1)^p d_v: K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q} \oplus K^{p,q+1} \subset (\text{Tot } K^{\bullet, \bullet})^{n+1}$. (Le complexe simple défini ci-dessus est celui défini en termes de sommes. Il existe aussi une version définie en utilisant des produits plutôt que des sommes. Dans les deux cas, il convient de s'assurer que les sommes ou produits considérés sont représentables dans $\mathcal{A}$.)

4.5. Le produit tensoriel de complexes est défini de la façon habituelle. Si K et L sont deux complexes (de modules, ou de faisceaux de modules), $(K \otimes L)^n := \bigoplus_{p+q=n} K^p \otimes L^q$ et la différentielle est définie par la formule $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy$ où $|x|$ est le degré de x (autrement dit, $K \otimes L$ est le complexe simple associé au bicomplexe évident $(K^p \otimes L^q)_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2}$, cf. 4.4).

4.5.1. L'automorphisme de symétrie $K \otimes L \simeq L \otimes K$ envoie $x \otimes y$ sur $(-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$. (L'isomorphisme d'associativité $(K \otimes L) \otimes M \simeq K \otimes (L \otimes M)$ ne fait en revanche pas intervenir de signe.) On peut alors remarquer que si K est un complexe et $i \in \mathbf{Z}$, alors $K \otimes (\Lambda[i])$ s'identifie canoniquement à K décalé de i crans vers la gauche *sans changement du signe des différentielles*. En revanche, on peut observer que $\Lambda[i] \otimes K$ s'identifie tout à fait canoniquement à $K[i]$. (Ici, Λ est un anneau (commutatif) de coefficients tout à fait arbitraire.)

4.5.2. Supposons que $\alpha: M' \otimes_{\Lambda} M'' \rightarrow M$ soit un morphisme de complexes de Λ -modules. On définit pour tout $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$ un morphisme $\alpha: H^i(M') \otimes_{\Lambda} H^j(M'') \rightarrow H^{i+j}(M)$ de la façon suivante. Si $x \in M'^i$ et $y \in M''^j$ sont des cocycles, alors $x \otimes y \in M'^i \otimes_{\Lambda} M''^j \subset (M' \otimes_{\Lambda} M'')^{i+j}$ est un cocycle dont on peut considérer l'image par α dans M^{i+j} : on définit ainsi l'image de $[x] \otimes [y]$. Avec les notations précédentes, si on interprète x, y et $\alpha(x \otimes y)$ comme des morphismes de complexes $x: \Lambda \rightarrow M'[i] = \Lambda[i] \otimes_{\Lambda} M'$, $y: \Lambda \rightarrow M''[j] = \Lambda[j] \otimes_{\Lambda} M''$ et $\alpha(x \otimes y): \Lambda \rightarrow M[i+j]$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda & \xrightarrow[\sim]{(-1)^{ij}} & \Lambda \otimes_{\Lambda} \Lambda & \xrightarrow{x \otimes y} & (\Lambda[i] \otimes_{\Lambda} M') \otimes_{\Lambda} (\Lambda[j] \otimes_{\Lambda} M'') \\
 \alpha(x \otimes y) \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 M[i+j] & \xlongequal{\quad} & \Lambda[i] \otimes_{\Lambda} \Lambda[j] \otimes_{\Lambda} M & \xleftarrow{\text{Id} \otimes \alpha} & \Lambda[i] \otimes_{\Lambda} \Lambda[j] \otimes_{\Lambda} (M' \otimes_{\Lambda} M'')
 \end{array}$$

(On prendra garde à la présence de la multiplication par $(-1)^{ij}$ en haut à gauche ! Elle est liée à l'isomorphisme de symétrie intervenant à droite.) Cette construction s'étend formellement au cas où α serait un morphisme $M' \otimes_{\Lambda}^L M'' \rightarrow M$ dans $D(\Lambda)$ (cf. XVII-8 pour la construction du produit tensoriel dérivé sur la catégorie dérivée totale).

4.5.3. Soit X un site muni du faisceau d'anneaux constant Λ . On peut appliquer la construction 4.5.2 au morphisme de Künneth $\alpha: R\Gamma(X, \Lambda) \overset{L}{\otimes}_{\Lambda} R\Gamma(X, \Lambda) \rightarrow R\Gamma(X, \Lambda)$ (cf. XVII-12.4.2). On définit ainsi le produit $H^i(X, \Lambda) \times H^j(X, \Lambda) \rightarrow H^{i+j}(X, \Lambda)$. Si $u \in H^i(X, \Lambda)$ et $v \in H^j(X, \Lambda)$, on note uv (ou $u \cup v$) le produit de deux classes. Ce produit vérifie la relation $vu = (-1)^{ij}uv$.

Il est également possible de décrire ce produit en termes de la composition de morphismes dans $D(X, \Lambda)$. Identifions $u \in H^i(X, \Lambda)$ et $v \in H^j(X, \Lambda)$ à des morphismes $u: \Lambda \rightarrow \Lambda[i]$ et $v: \Lambda \rightarrow \Lambda[j]$ dans $D(X, \Lambda)$. Le morphisme $\Lambda \simeq \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{u \otimes v} \Lambda[i] \otimes \Lambda[j] \simeq \Lambda[i+j]$ correspond à une classe dans $H^{i+j}(X, \Lambda)$ qui est égale non pas à uv en général, mais à $(-1)^{ij}uv$, c'est-à-dire vu . En utilisant la factorisation $u \overset{L}{\otimes} v = (\text{Id} \overset{L}{\otimes} v) \circ (u \overset{L}{\otimes} \text{Id})$, on montre que $vu = (-1)^{ij}uv$ peut aussi être décrit comme la composée $\Lambda \xrightarrow{u} \Lambda[i] \xrightarrow{v[i]} \Lambda[i+j]$. Une description plus élégante peut être obtenue en identifiant $u \in H^i(X, \Lambda)$ à un morphisme $u': \Lambda[-i] \rightarrow \Lambda$ et $v \in H^j(X, \Lambda)$ à un morphisme $v': \Lambda[-j] \rightarrow \Lambda$. Le produit $uv \in H^{i+j}(X, \Lambda)$ correspond alors, sans signe parasite, au morphisme $\Lambda[-(i+j)] \simeq \Lambda[-i] \otimes \Lambda[-j] \xrightarrow{u' \otimes v'} \Lambda$. (On notera que cette description du $\cup$ -produit est particulièrement adaptée à la définition des variantes à support de ces structures multiplicatives.)

4.6. On s'intéresse dans ce paragraphe aux conventions portant sur la cohomologie des groupes et sur le groupe fondamental étale.

4.6.1. Soit G un groupe. Soit A un groupe abélien (que l'on munit de l'action triviale de G). Nous avons besoin de préciser l'identification $H^1(G, A) \simeq \text{Hom}(G, A)$ pour le premier groupe de cohomologie du groupe (discret) G . On définit ici la cohomologie du groupe G comme étant celle du topos $\mathbf{BG}$ des G -ensembles (à gauche). Soit $\varphi: G \rightarrow A$ un homomorphisme. On définit un ensemble $A^\varphi := A$ que l'on munit d'une action à gauche de G par la formule $g.a := \varphi(g) + a$ et d'une action à droite de A par $a.a' := a + a'$. L'ensemble A^φ muni de l'action à gauche de G peut ainsi être considéré comme un faisceau sur le topos $\mathbf{BG}$. Si on tient aussi compte de l'action à droite de A , on fait de A^φ un toreur à droite sous le faisceau constant A sur le topos $\mathbf{BG}$. Comme A est abélien, A^φ peut aussi être vu comme un toreur à gauche sous A sur $\mathbf{BG}$. D'après 4.3, A^φ possède une classe $[A^\varphi] \in H^1(\mathbf{BG}, A) = H^1(G, A)$. L'isomorphisme canonique $\text{Hom}(G, A) \xrightarrow{\sim} H^1(G, A)$ est celui qui à φ associe $[A^\varphi]$. *Via* la comparaison entre la cohomologie et la cohomologie de Čech (cf. 4.3.2), cette définition est compatible avec l'identification de la cohomologie du groupe G calculée en termes de cochaînes (cf. [Serre, 1968, §3, Chapitre VII]) et la cohomologie de Čech associée au recouvrement donné par l'épimorphisme $\mathbf{EG} \rightarrow \mathbf{BG}$ où $\mathbf{BG}$ est ici l'objet final du topos $\mathbf{BG}$ et où $\mathbf{EG}$ est le faisceau sur $\mathbf{BG}$ correspondant à l'ensemble G muni de l'action à gauche de G par multiplication. On peut observer que la multiplication à droite sur G induit sur $\mathbf{EG}$ une structure de toreur à droite sous le groupe constant G dans le topos $\mathbf{BG}$. Dans le cas où G est commutatif, la classe de ce toreur $[\mathbf{EG}]$ correspond à l'identité de G *via* les identifications $\text{Hom}(G, G) \simeq H^1(G, G) = H^1(\mathbf{BG}, G)$.

4.6.2. Soit G un groupe fini. Soit X un topos. Soit $\mathcal{T}$ un faisceau d'ensembles sur X muni d'une structure de toreur à droite sous le groupe G . Pour tout faisceau d'ensembles F sur X , on note $u_*F := \text{Hom}_X(\mathcal{T}, F)$ et cet ensemble hérite d'une structure de G -ensemble (à gauche) provenant de l'action sur $\mathcal{T}$. Ce foncteur u_* est le foncteur image directe pour un morphisme de topos $u: X \rightarrow \mathbf{BG}$ et on a un isomorphisme canonique de toreurs à droite $\mathcal{T} \simeq u^*\mathbf{EG}$. Il vient ainsi que la donnée d'un morphisme de topos $u: X \rightarrow \mathbf{BG}$ équivaut à celle d'un toreur à droite sous G sur X .

4.6.3. Soit X un schéma noethérien connexe muni d'un point géométrique $\bar{x}$. On dispose du groupe fondamental étale $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$, cf. [SGA1 v 7]. La catégorie des $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ -ensembles (à gauche) discrets s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ (cf. XVII-7.2 pour plus de détails). Ce foncteur d'inclusion est le foncteur image inverse pour un morphisme de topos canonique $X_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{B}\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$. Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement étale galoisien. Notons $G := \text{Aut}_{\mathcal{O}_X\text{-Alg\`ebre}}(\mathcal{O}_Y)$: c'est le groupe opposé au groupe des automorphismes du X -schéma Y . Le schéma Y est ainsi naturellement muni d'une action à droite de G qui en fait un toreur à droite sous G au-dessus de $X_{\text{ét}}$. On dispose donc d'après 4.6.2 d'un morphisme de topos $X_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BG}$, lequel est

canoniquement isomorphe au composé $X_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{B}\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \xrightarrow{\text{Bp}} \mathbf{B}G$ pour $p: \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow G$ un morphisme que nous allons maintenant définir et qui dépend du choix d'un point fermé $\bar{y}$ dans la fibre géométrique $Y_{\bar{x}}$. Soit $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$. Cet élément γ agit (à gauche) sur la fibre $Y_{\bar{x}}$ sur laquelle G agit aussi (à droite), et ces deux actions commutent. On note $p(\gamma) \in G$ l'unique élément tel que $\gamma \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot p(\gamma)$.

4.7. On définit ici le foncteur **Hom** (hom. interne) sur les complexes (de faisceaux étales de Λ -modules sur un schéma X) comme étant le bifoncteur défini par un isomorphisme d'adjonction « cher à Cartan » où le Hom est le hom. dans la catégorie des complexes :

$$\text{Hom}(K, \text{Hom}(L, M)) \simeq \text{Hom}(K \otimes L, M) .$$

Cette adjonction s'enrichit tautologiquement en un isomorphisme « cher à Cartan » énoncé en termes du hom. interne :

$$\text{Hom}(K, \text{Hom}(L, M)) \simeq \text{Hom}(K \otimes L, M) .$$

4.7.1. Si K, L et M sont des complexes, l'identité de **Hom**(K, L) induit par adjonction un « morphisme d'évaluation » $\text{Hom}(K, L) \otimes K \rightarrow L$ auquel on peut appliquer $M \otimes -$ pour obtenir un morphisme $M \otimes \text{Hom}(K, L) \otimes K \rightarrow M \otimes L$, lequel induit par adjonction un morphisme canonique $M \otimes \text{Hom}(K, L) \rightarrow \text{Hom}(K, M \otimes L)$. En particulier, pour $M = \Lambda[m]$ avec $m \in \mathbf{Z}$, ce morphisme est un isomorphisme canonique $\text{Hom}(K, L)[m] \simeq \text{Hom}(K, L[m])$.

4.7.2. Si L et N sont des complexes, on peut définir un morphisme $\gamma_L: \text{Hom}(L, \Lambda) \otimes N \rightarrow \text{Hom}(L, N)$ de la façon suivante. L'identité de $\text{Hom}(L, \Lambda)$ induit par adjonction un morphisme $\text{ev}: \text{Hom}(L, \Lambda) \otimes L \rightarrow \Lambda$ qui permet de définir un morphisme :

$$\text{Hom}(L, \Lambda) \otimes N \otimes L \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(L, \Lambda) \otimes L \otimes N \xrightarrow{\text{ev} \otimes N} \Lambda \otimes N \xrightarrow{\sim} N ,$$

lequel définit par adjonction le morphisme voulu $\text{Hom}(L, \Lambda) \otimes N \rightarrow \text{Hom}(L, N)$. Soit $m \in \mathbf{Z}$. L'isomorphisme évident $\mathbf{Z}[-m] \otimes \mathbf{Z}[m] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ induit par adjonction un isomorphisme $\mathbf{Z}[-m] \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbf{Z}[m], \mathbf{Z})$. La construction γ_L précédente appliquée à $L = \mathbf{Z}[m]$ fournit ainsi un morphisme $\gamma_m: N[-m] \rightarrow \text{Hom}(\Lambda[m], N)$ qui est un isomorphisme. Si $N = \text{Hom}(K, L)$ avec K et L deux complexes, on obtient un isomorphisme (encore noté γ_m) :

$$\text{Hom}(K, L)[-m] \xrightarrow{\gamma_m} \text{Hom}(\Lambda[m], \text{Hom}(K, L)) \simeq \text{Hom}(\Lambda[m] \otimes K, L) \simeq \text{Hom}(K[m], L) .$$

On définit $\alpha_m: \text{Hom}(K[m], L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(K, L)[-m]$ par la formule $\alpha_m := (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \gamma_m^{-1}$.

4.7.3. Dans [Conrad, 2000, §1.3], Conrad définit explicitement le foncteur **Hom**. Sa construction est compatible à celle définie ici par adjonction puisqu'elle satisfait un tel isomorphisme d'adjonction : cet isomorphisme est donné degré par degré par des isomorphismes d'adjonctions chers à Cartan au niveau du hom. interne dans la catégorie des faisceaux, et ce *sans ajout de signes*. Avec ces conventions, les isomorphismes de « commutation » de **Hom**($-, -$) aux foncteurs $-[m]$ en les deux variables (4.7.1 et 4.7.2) sont les mêmes que ceux de [Conrad, 2000, §1.3]. En dérivant ce foncteur (cf. XVII-8 pour plus de détails), on obtient un bifoncteur $R\text{Hom}: D(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\text{opp}} \times D(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ qui est « triangulé par rapport aux deux variables ». Ceci signifie notamment que pour tout $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le foncteur $R\text{Hom}(K, -): D(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est triangulé et que pour tout $L \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le foncteur $R\text{Hom}(-, L): D(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\text{opp}} \rightarrow D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est triangulé.

4.7.4. La dernière assertion de 4.7.3 signifie que si $K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} K'[1]$ est un triangle distingué de $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le triangle suivant

$$R\text{Hom}(K', L)[-1] \xrightarrow{\gamma^*} R\text{Hom}(K'', L) \xrightarrow{\beta^*} R\text{Hom}(K, L) \xrightarrow{\alpha^*} R\text{Hom}(K', L)$$

obtenu en appliquant le foncteur $R\text{Hom}(-, L)$ et en utilisant $\alpha_1: R\text{Hom}(K'[1], L) \xrightarrow{\sim} R\text{Hom}(K', L)[-1]$, est *antidistingué* dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui signifie que le triangle suivant est *distingué* dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$R\text{Hom}(K', L)[-1] \xrightarrow{-\gamma^*} R\text{Hom}(K'', L) \xrightarrow{\beta^*} R\text{Hom}(K, L) \xrightarrow{\alpha^*} R\text{Hom}(K', L)$$

Il est également vrai que le triangle suivant est distingué, où l'on utilise ici implicitement $\alpha_{-1}: \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K''[-1], L) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K'', L)[1]$:

$$\mathbf{R}\mathbf{Hom}(K'', L) \xrightarrow{\beta^*} \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K, L) \xrightarrow{\alpha^*} \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K', L) \xrightarrow{\gamma[-1]^*} \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K'', L)[1]$$

Considérons ce morphisme $\delta := \gamma[-1]^*: \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K', L) \xrightarrow{\gamma[-1]^*} \mathbf{R}\mathbf{Hom}(K'', L)[1]$. Pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, le morphisme δ induit après application du foncteur $H_{\text{ét}}^n(X, -)$ un morphisme de groupes abéliens, où le $\mathbf{Hom}$ est le groupe abélien des morphismes dans la catégorie $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\delta^n: \mathbf{Hom}(K', L[n]) \rightarrow \mathbf{Hom}(K'', L[n+1]) .$$

On peut alors observer que si $\varphi \in \mathbf{Hom}(K', L[n])$, alors $\delta^n(\varphi)$ est le morphisme composé $K'' \xrightarrow{(-1)^{n+1}\gamma} K'[1] \xrightarrow{\varphi[1]} K[n+1]$.

4.7.5. Si $L' \xrightarrow{a} L \xrightarrow{b} L'' \xrightarrow{c} L'[1]$ est un triangle distingué dans $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on dispose aussi de suites exactes longues pour tout $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\dots \rightarrow \mathbf{Hom}(K, L'[n]) \xrightarrow{a[n]^*} \mathbf{Hom}(K, L[n]) \xrightarrow{b[n]^*} \mathbf{Hom}(K, L''[n]) \xrightarrow{\delta} \mathbf{Hom}(K, L'[n+1]) \rightarrow \dots$$

où pour tout $\varphi \in \mathbf{Hom}(K, L''[n])$, $\delta(\varphi) = c[n] \circ \varphi$. Si $K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} K'[1]$ est un triangle distingué dans $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut considérer le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}(K'', L''[n+1]) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{Hom}(K'', L'[n+2]) \\ \delta \uparrow & & \delta \uparrow \\ \mathbf{Hom}(K', L''[n]) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{Hom}(K', L'[n+1]) \end{array}$$

L'interprétation des morphismes δ en termes de composition dans $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ montre que ce carré est *anticommutatif* !

4.7.6. Un cas particulier de 4.7.4 qui nous intéressera est le suivant. Si Z est un sous-schéma fermé d'un schéma X et que $U = X - Z$, on dispose d'une suite exacte courte canonique de faisceaux étales sur X :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_U \rightarrow \mathbf{Z}_X \rightarrow \mathbf{Z}_Z \rightarrow 0 .$$

D'après 4.7.4, on dispose d'une suite exacte longue pour tout $L \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\dots \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^n(X, L) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X, L) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(U, L) \xrightarrow{\delta} H_{Z, \text{ét}}^{n+1}(X, L) \rightarrow \dots$$

Supposons que L est un complexe borné inférieurement formé de faisceaux injectifs. Soit une classe $[\gamma] \in H_{\text{ét}}^n(U, L)$ représentée par une section $\gamma \in \Gamma(U, L^n)$ telle que $d\gamma = 0 \in \Gamma(U, L^{n+1})$. Le faisceau L^n étant injectif, il existe une section $\tilde{\gamma} \in \Gamma(X, L^n)$ telle que $\tilde{\gamma}|_U = \gamma$. La section $d\tilde{\gamma} \in \Gamma(X, L^{n+1})$ s'annule sur U , donc définit un élément $d\tilde{\gamma} \in \Gamma_Z(X, L^{n+1})$ qui est évidemment un $(n+1)$ -cocycle. On a alors $\delta([\gamma]) = [d\tilde{\gamma}] \in H_{Z, \text{ét}}^{n+1}(X, L)$.

Si on suppose maintenant que $L = \mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ est un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$, il est utile de connaître une description explicite du morphisme $\delta: H^0(U, \mathcal{G}) \rightarrow H_Z^1(X, \mathcal{G})$. Notons tout d'abord que l'on peut généraliser la construction 4.3.1 : si $\mathcal{T}$ est un $\mathcal{G}$ -torseur sur $X_{\text{ét}}$ muni d'une section $s \in \mathcal{T}(U)$, on dispose d'un élément $[\mathcal{T}, s] \in H_{Z, \text{ét}}^1(X, \mathcal{G})$ (induisant $[\mathcal{T}] \in H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{G})$). Il est aisé de montrer que si $s \in \mathcal{G}(U) = H^0(U, \mathcal{G})$, alors, si on note $(\mathcal{G}, s)$ le $\mathcal{G}$ -torseur trivial ($\mathcal{G}$ agissant sur lui-même par addition) muni de la section s , on a $[\mathcal{T}, s] = \delta(s) \in H_{Z, \text{ét}}^1(X, \mathcal{G})$.

4.7.7. Si K et L sont deux objets de $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a déjà construit (cf. 4.7.1) un morphisme $\mathbf{Hom}(K, L) \otimes K \rightarrow L$. En utilisant l'isomorphisme de symétrie, on en déduit un morphisme $K \otimes \mathbf{Hom}(K, L) \rightarrow L$ qui correspond par adjonction à un morphisme $K \rightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(K, L), L)$ dit de « bidualité ». Il satisfait aux mêmes règles de signe que celles énoncées dans [Conrad, 2000, §1.3]. L'objet de l'exposé XVII sera d'étudier une version dérivée de cette construction...

4.8. Ce paragraphe est une mise en garde à propos de l'ambiguïté du sens que pourrait revêtir un énoncé disant deux constructions cohomologiques utilisant des conventions de signes différentes sont égales ou bien opposées. Considérons par exemple la catégorie dérivée $D^+(X)$ des faisceaux abéliens sur un site X . Pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$, on peut noter $H^i(X, \mathcal{F}) := \mathrm{Hom}_{D^+(X)}(\mathbf{Z}, \mathcal{F}[i])$. En utilisant la construction 4.2, on obtient un ∂ -foncteur $(H^*(X, -), \delta)$. Posons maintenant, $\tilde{H}^i(X, \mathcal{F}) := H^i(X, \mathcal{F})$ et notons $\tilde{\delta} := -\delta$. Bien sûr, $(\tilde{H}^*(X, -), \tilde{\delta})$ est aussi un ∂ -foncteur : c'est celui que l'on obtient naturellement en utilisant les conventions de [SGA 4 XVII 1.1].

Le caractère universel de ces deux ∂ -foncteurs induit un isomorphisme canonique de ∂ -foncteurs $\varphi : (H^*(X, -), \delta) \xrightarrow{\sim} (\tilde{H}^*(X, -), \tilde{\delta})$: en degré i , il est donné par la multiplication par $(-1)^i$.

Admettons qu'une certaine construction cohomologique utilisant le premier ∂ -foncteur produise une classe $x \in H^i(X, \mathcal{F})$ et qu'une autre construction utilisant le deuxième produise une classe $y \in \tilde{H}^i(X, \mathcal{F})$. L'énoncé « les classes de cohomologie x et y sont égales » peut alors raisonnablement prendre deux sens différents :

- (a) Comme ensemblistement, $H^i(X, \mathcal{F})$ et $\tilde{H}^i(X, \mathcal{F})$ sont tous les deux égaux à l'ensemble des morphismes $\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{F}[i]$ dans $D^+(X)$, on peut comprendre que $y = x$;
- (b) Si on identifie $H^i(X, \mathcal{F})$ et $\tilde{H}^i(X, \mathcal{F})$ *via* l'isomorphisme de ∂ -foncteurs φ , on peut comprendre que $y = (-1)^i x$.

On notera qu'en degré pair, les deux acceptions coïncident. (Sinon, le rédacteur recommande d'utiliser le sens (b).)

EXPOSÉ XVII

Dualité

Joël Riou

Ce texte vise à fournir une rédaction des résultats annoncés par Ofer Gabber dans [Gabber, 2005b] concernant les complexes dualisants dans le contexte étale sur les schémas noethériens excellents.

On fixe un entier naturel $n \geq 2$, on note $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$: ce sera notre anneau de coefficients. Si X est un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien, on note $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ la sous-catégorie de $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée des complexes ayant des faisceaux de cohomologie constructibles, $D_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée des complexes de tor-dimension finie et $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda) := D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda) \cap D_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

DÉFINITION 0.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien. Un **complexe dualisant** sur X est un objet $K \in D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ tel que le foncteur de dualité $D_K = R\mathbf{Hom}(-, K)$ préserve $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et que pour tout $L \in D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme de bidualité $L \rightarrow D_K D_K L$ (cf. XVI-4.7.7 et aussi §12) soit un isomorphisme.

Cette définition diffère de celle de [SGA 5 I 1.7] dans la mesure où on ne demande pas à un complexe dualisant d'être de dimension quasi-injective finie.

Le théorème suivant récapitule l'essentiel des résultats de Gabber que nous allons établir dans ces notes :

THÉORÈME 0.2. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension (cf. définition 2.1.1). Alors, X admet un complexe dualisant K , unique à produit tensoriel avec un objet inversible près (cf. proposition 9.2). Ce complexe dualisant K appartient à $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$; il est de dimension quasi-injective finie (autrement dit est un complexe dualisant au sens de [SGA 5 I 1.7]) si et seulement si X est de dimension de Krull finie.

Par ailleurs, on a les résultats suivants :

- si X est régulier, le faisceau constant Λ est un complexe dualisant ;
- si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme plat et à fibres géométriquement régulières avec Y noethérien excellent, alors $f^!K$ est un complexe dualisant ;
- si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de type fini compactifiable, alors $f^!K$ est un complexe dualisant.

La démonstration s'appuie sur la notion de complexe dualisant potentiel (définition 2.1.2) sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X muni d'une fonction de dimension δ : il s'agit de la donnée d'un complexe $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ muni d'isomorphismes (appelés épinglages) $R\Gamma_x(K) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$ pour tous les points $x \in X$, qui soient compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates de points géométriques de X (cf. section 1). Gabber montre dans [Gabber, 2004, lemma 8.1]⁽ⁱ⁾ que si un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien admet un complexe dualisant, alors il admet une fonction de dimension ; cette hypothèse du théorème 0.2 est donc bien nécessaire.

Dans la section 2, nous verrons notamment que sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien régulier excellent, le faisceau constant Λ est un complexe dualisant potentiel pour la fonction de dimension – codim (cf. proposition 2.4.4.1). Pour ce faire, nous utiliserons de manière essentielle le théorème de pureté cohomologique absolue démontré par Gabber, ainsi que les propriétés des morphismes de Gysin établies dans XVI-2.

⁽ⁱ⁾Dans *loc. cit.*, il faut remplacer l'hypothèse « $n > 0$ » par « $n > \infty$ » : lorsque l'anneau de coefficients $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est nul, les entiers $n(x)$ ne sont pas définis.

Dans la section 3, nous construirons un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_{x,\text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ où X est un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local strictement hensélien normal de dimension d et de point fermé x , vérifierons que cet isomorphisme est compatible aux spécialisations immédiates et nous servirons de ce résultat pour construire des morphismes de transition $H_{\bar{y}}^i(X, K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{i+2c}(X, K(c))$ pour une spécialisation $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de codimension c arbitraire entre points géométriques d'un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X , pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Nous utiliserons notamment la résolution des singularités pour les schémas noethériens excellents de dimension 2.

Dans la section 5, nous montrerons l'existence et l'unicité à isomorphisme unique près d'un complexe dualisant potentiel sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension. Dans le cas d'un schéma normal, nous nous appuierons sur les résultats de la section 3 et sur les résultats généraux de Gabber sur l'existence de t -structures définies par des fonctions de perversité. Nous montrerons aussi que les complexes dualisants potentiels vérifient de bonnes propriétés de stabilité par rapport aux morphismes plats et à fibres géométriquement régulières et aux morphismes de type fini.

Dans la section 6, nous montrerons qu'un complexe dualisant potentiel est un complexe dualisant. Une fois les propriétés de finitude établies, nous procéderons par récurrence sur la dimension, en utilisant d'une part une généralisation d'un argument de [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3] et d'autre part le théorème d'alébrisation partielle V-3.1.3.

Dans la section 7, nous montrons qu'à partir d'un complexe dualisant à coefficients Λ , on peut construire des complexes dualisants pour des anneaux de coefficients plus généraux. Ces résultats sont essentiellement indépendants des sections précédentes. Cependant, ce n'est qu'en combinant les résultats des sections précédentes sur les complexes dualisants potentiels avec le résultat d'unicité des complexes dualisants de la proposition 7.5.1.1 que l'on peut déduire le théorème 0.2. En vertu de ce théorème 0.2, les constructions de cette section donnent en particulier des complexes dualisants pour des anneaux de coefficients généraux sur les schémas noethériens excellents munis de fonctions de dimension. Il semble très probable qu'il soit possible d'étendre les résultats d'Ofer Gabber à des énoncés de dualité avec des coefficients ℓ -adiques. Toutefois, le rédacteur a renoncé à les rédiger.

Enfin, les sections 8, 9, 10, 11 et 12 contiennent quelques résultats nécessaires à ce qui précède. On y décrit notamment une construction du produit tensoriel dérivé sur la catégorie dérivée toute entière des faisceaux de modules sur un topos annelé (commutatif).

1. Le morphisme de transition en codimension 1

1.1. Notations.

DÉFINITION 1.1.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma, soit $x \in X$, soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. On pose $R\Gamma_x(K) = i_x^! K|_{X_{(x)}} \in D^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ où i_x est l'inclusion du point fermé du localisé $X_{(x)}$ ⁽ⁱⁱ⁾. Si $\bar{x}$ est un point géométrique de X au-dessus de x ⁽ⁱⁱⁱ⁾, on note $R\Gamma_{\bar{x}}(K) = R\Gamma_x(K)_{\bar{x}} \in D^+(\Lambda)$; cet objet s'identifie à la cohomologie à supports dans le point fermé de la restriction de K à l'hensélisé strict $X_{(\bar{x})}$. Les objets de cohomologie de $R\Gamma_{\bar{x}}(K)$ seront notés $H_{\bar{x}}^i(K)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

DÉFINITION 1.1.2 ([SGA 4 VIII 7.2], XIV-2.1.1, XIV-2.1.2). Si $\bar{y}$ et $\bar{x}$ sont deux points géométriques d'un schéma X , une **spécialisation** $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ est un X -morphisme $X_{(\bar{y})} \rightarrow X_{(\bar{x})}$ entre les hensélisés stricts correspondants, ce qui revient à la donnée d'un X -morphisme $\bar{y} \rightarrow X_{(\bar{x})}$. On définit la **codimension d'une spécialisation** comme étant la dimension de l'adhérence du point de $X_{(\bar{x})}$ en-dessous de $\bar{y}$. On dit qu'une spécialisation est **immédiate** si elle est de codimension 1.

⁽ⁱⁱ⁾ On obtiendrait une définition équivalente en remplaçant le schéma local $X_{(x)}$ par son hensélisé.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Dans la suite, pour ne pas alourdir inutilement le texte, si on fixe un point x d'un schéma X , $\bar{x}$ désignera un point géométrique au-dessus de x et inversement, si on fixe un point géométrique $\bar{x} \rightarrow X$, on notera x le point de l'espace topologique sous-jacent à X au-dessus duquel $\bar{x}$ se trouve. Dans cet exposé, on fera toujours l'hypothèse implicite que l'extension de corps $\kappa(\bar{x})/\kappa(x)$ est algébrique et séparable, autrement dit que $\kappa(\bar{x})$ est une clôture séparable de $\kappa(x)$.

On se propose ici de définir un morphisme de transition $\mathrm{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X: R\Gamma_{\bar{y}}(K) \rightarrow R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2]$ dans $D^+(\Lambda)$ pour toute spécialisation immédiate $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de points géométriques sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma excellent X , quel que soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

1.2. Cas d'un trait strictement hensélien. Soit X un trait strictement hensélien de point générique η et de point fermé s . Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . On va définir le morphisme de transition

$$R\Gamma_{\bar{\eta}}(K) \rightarrow R\Gamma_s(K)(1)[2]$$

pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

On note p l'exposant caractéristique du corps résiduel de X , que l'on suppose inversible dans Λ . On dispose d'une suite exacte canonique de groupes profinis :

$$1 \rightarrow S \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \rightarrow G \rightarrow 1 ,$$

où G est le groupe d'inertie modérée, canoniquement isomorphe à $\widehat{\mathbf{Z}}'(1)$ ^(iv) et où S , le groupe de ramification sauvage, est un pro- p -groupe (cf. [Gabber & Ramero, 2003, proposition 6.2.12]).

On rappelle que l'ordre d'un groupe profini est un nombre surnaturel (cf. [Serre, 1994, § 1.3, chapitre I]). On peut alors énoncer que l'ordre de G est multiple de $(\# \Lambda)^\infty$: ce fait sera utile au lecteur scrupuleux qui voudrait vérifier en exercice les détails passés sous silence dans cette sous-section.

1.2.1. Algèbre du groupe $\widehat{\mathbf{Z}}'(1)$.

DÉFINITION 1.2.1.1. L'algèbre de groupe $\Lambda[[G]]$ est l'anneau des endomorphismes du foncteur d'oubli de la catégorie des Λ -modules discrets munis d'une action continue de G vers celle des Λ -modules. Cette algèbre est naturellement topologisée : elle est munie de la topologie la moins fine qui soit telle que pour tout Λ -module discret M muni d'une action continue de G et tout élément $m \in M$, l'application $\Lambda[[G]] \rightarrow M$ qui à $a \in \Lambda[[G]]$ associe le résultat $a.m$ de son action sur m soit continue.

On a un isomorphisme canonique d'anneaux topologiques

$$\Lambda[[G]] \xrightarrow{\sim} \lim \Lambda[G/H] ,$$

où H parcourt l'ensemble ordonné des sous-groupes ouverts distingués de G et où $\Lambda[G/H]$ est l'algèbre de groupe usuelle (discrète) du groupe fini G/H . On peut identifier les Λ -modules discrets munis d'une action continue de G aux $\Lambda[[G]]$ -modules discrets.

L'action naturelle de $\Lambda[[G]]$ sur Λ muni de l'action triviale de G définit un morphisme continu d'augmentation $\varepsilon: \Lambda[[G]] \rightarrow \Lambda$. On note I_G le noyau de ε : c'est l'idéal d'augmentation.

PROPOSITION 1.2.1.2. *Le $\Lambda[[G]]$ -module I_G est libre de rang 1, engendré par $1 - \sigma$ si σ est un générateur topologique de G . (Plus généralement, si $d \geq 1$ est un entier premier à p , le noyau du morphisme d'anneaux canonique $\Lambda[[G]] \rightarrow \Lambda[\mu_d]$ est un $\Lambda[[G]]$ -module libre engendré par $1 - \sigma^d$.)*

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice au lecteur.

Le lemme suivant nous sera utile au §1.2.2 :

LEMME 1.2.1.3. *Soit M un objet injectif dans la catégorie des $\Lambda[[G]]$ -modules discrets. Le morphisme évident $M \rightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M)$ (qui à x associe $a \mapsto ax$) est surjectif.*

Notons σ un générateur topologique de G . Soit $\varphi: I_G \rightarrow M$ un morphisme de $\Lambda[[G]]$ -modules. Notons $m := \varphi(1 - \sigma)$. Comme M est discret, il existe un entier $d \geq 1$ premier à p tel que $\sigma^d(m) = m$.

^(iv) Pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté de signe, $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ est le groupe $\mathrm{Aut}_{\kappa(\eta)}(\kappa(\bar{\eta}))$ et pour tout entier n inversible dans X , le morphisme composé $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \rightarrow \widehat{\mathbf{Z}}'(1) \rightarrow \mu_n$ envoie $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\kappa(\eta)}(\kappa(\bar{\eta}))$ sur $\frac{\sigma(\pi')}{\pi'}$ où $\pi' \in \kappa(\bar{\eta})$ est une racine n -ième d'une uniformisante de X .

Notons $C_d \in GL_{1+d}(\Lambda)$ la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On introduit un Λ -module libre V_d de rang $1 + d$ dont une base est notée $\mathcal{B} = (f, e_0, e_1, \dots, e_{d-1})$. On note $c \in \text{Aut}_\Lambda(V_d)$ l'automorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ soit C , c'est-à-dire que $c(f) = f + e_0$, $c(e_i) = e_{i+1}$ si $0 \leq i \leq d-2$ et $c(e_{d-1}) = e_0$. On en déduit l'identité suivante :

$$C^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on note $d' := d \cdot \#\Lambda$, il vient ensuite que $C^{d'} = \text{Id}$ et que $c \in \text{Aut}_\Lambda(V_d)$ est d'ordre d' . L'entier d' étant premier à p , on en déduit une structure de $\Lambda[[G]]$ -module discret sur le Λ -module V_d telle que le générateur topologique $\sigma \in G$ agisse par $c: V_d \rightarrow V_d$. Notons $V'_d \subset V_d$ le sous- Λ -module engendré par $(e_0, \dots, e_{d-1})$. C'est aussi un sous- $\Lambda[[G]]$ -module discret et on peut considérer l'application Λ -linéaire $\psi: V'_d \rightarrow M$ qui à e_i associe $\sigma^i(m)$. On a ainsi construit un morphisme $\psi: V'_d \rightarrow M$ de $\Lambda[[G]]$ -modules discrets. L'injectivité de M fait que ce morphisme se prolonge en un morphisme $\tilde{\psi}: V_d \rightarrow M$. Posons $\tilde{m} := \tilde{\psi}(f)$; la $\Lambda[[G]]$ -linéarité de $\tilde{\psi}$ implique que $\varphi(1 - \sigma) = m = \psi(e_0) = \tilde{\psi}(e_0) = \tilde{\psi}(\sigma(f) - f) = \sigma(\tilde{m}) - \tilde{m}$. D'après la proposition 1.2.1.2, l'idéal I_G est engendré par $1 - \sigma$; on a donc plus généralement $\varphi(a) = a\tilde{m}$ pour tout $a \in I_G$.

REMARQUE 1.2.1.4. La proposition 1.2.1.2 permet de montrer que le $\Lambda[[G]]$ -module V_d intervenant dans la démonstration précédente est isomorphe au quotient $\Lambda[[G]]/J_d$ où J_d est l'idéal de $\Lambda[[G]]$ engendré par $(1 - \sigma)(\sigma^d - 1)$, l'isomorphisme envoyant la base $(f, e_0, e_1, \dots, e_{d-1})$ de V_d sur $(1, \sigma - 1, \sigma^2 - \sigma, \dots, \sigma^d - \sigma^{d-1})$. L'inclusion $V'_d \rightarrow V_d$ s'identifie alors à l'inclusion $I_G/J_d \rightarrow \Lambda[[G]]/J_d$.

1.2.2. *Description de la cohomologie à supports.* Il est clair que la catégorie des faisceaux (d'ensembles) sur $X_{\text{ét}}$ est naturellement équivalente à la catégorie des flèches de $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ -ensembles (discrets) $\mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\eta}}$ telles que l'action de $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur $\mathcal{M}_s$ soit triviale.

Pour tout faisceau de Λ -modules $\mathcal{M}$ sur $X_{\text{ét}}$, on pose $F^0\mathcal{M} := \mathcal{M}_s$, $F^1\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$, $F^2\mathcal{M} := \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S)$ où $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$ désigne le sous-groupe des points-fixes sous S de l'action de $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur la fibre $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}$. Le morphisme canonique $\bar{\eta} \rightarrow X$ induit un morphisme $\alpha: F^0\mathcal{M} \rightarrow F^1\mathcal{M}$. On définit un morphisme $\beta: F^1\mathcal{M} \rightarrow F^2\mathcal{M}$ de telle sorte que si $m \in \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$ et $a \in I_G$, alors $\beta(m)(a) = am$. En posant, $F^q\mathcal{M} = 0$ pour $q \notin \{0, 1, 2\}$, on définit ainsi un complexe $F\mathcal{M}$ dans la catégorie des Λ -modules :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{M}_s \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

où $\mathcal{M}_s$ est placé en degré 0. On notera que le foncteur qui à $\mathcal{M}$ associe $F\mathcal{M}$ est additif.

Pour tout complexe K dans la catégorie des faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$, on note $FK := \text{Tot}((F^q K^p)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2})$ où $(F^q K^p)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ est le bicomplexe évident (cf. XVI-4.4 pour les conventions de signes sur le complexe simple). Autrement dit, $(FK)^n := F^0 K^n \oplus F^1 K^{n-1} \oplus F^2 K^{n-2}$ et la différentielle $d_{FK}: (FK)^n \rightarrow (FK)^{n+1}$ est décrite par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} d_K & 0 & 0 \\ (-1)^n \alpha & d_K & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \beta & d_K \end{pmatrix}$$

On définit ainsi un foncteur F de la catégorie des complexes de faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$ vers celle des complexes de Λ -modules. Les conventions de signes font que pour tout K , on

dispose d'un isomorphisme canonique de complexes $F(K[1]) \simeq (FK)[1]$ (dont la définition ne fait pas intervenir de signe). Si $K \xrightarrow{f} L$ est un morphisme de complexes, l'image par F du triangle distingué $K \xrightarrow{f} L \rightarrow \text{cône}(f) \rightarrow K[1]$ s'identifie (sans intervention de signes supplémentaires) à $FK \xrightarrow{F(f)} FL \rightarrow \text{cône}(F(f)) \rightarrow F(K)[1]$. On observe en outre que, les foncteurs F^q pour $q \in \{0, 1, 2\}$ étant exacts, si K est acyclique, alors FK aussi. De ces remarques, il résulte que F préserve les quasi-isomorphismes et induit un foncteur triangulé $F: D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(\Lambda)$.

Observons enfin que si $\mathcal{M}$ est un faisceau de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$, alors on a une égalité $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, \mathcal{M}) = \text{Ker}(\alpha: F^0 \mathcal{M} \rightarrow F^1 \mathcal{M})$. Ainsi, pour tout complexe K de faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$, si on note $\Gamma_s(X, K)$ le complexe obtenu en appliquant $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, -)$ aux faisceaux constituant le complexe K , on dispose d'une transformation naturelle $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \rightarrow FK$.

PROPOSITION 1.2.2.1. *La transformation naturelle $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \rightarrow FK$ induit pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ un isomorphisme*

$$R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \xrightarrow{\sim} FK$$

dans $D^+(\Lambda)$.

Il s'agit de montrer que si K est un complexe borné inférieurement formé d'objets injectifs, alors le morphisme $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \rightarrow FK$ est un quasi-isomorphisme. Cet énoncé se ramène aussitôt au cas où K est constitué d'un unique faisceau de Λ -modules injectif $\mathcal{M}$ placé en degré 0. Compte tenu du fait que $\Gamma_s(X, \mathcal{M}) = H^0(F\mathcal{M})$ pour tout faisceau de Λ -modules, il suffit de montrer que $H^q(F\mathcal{M}) = 0$ pour $q \in \{1, 2\}$ si $\mathcal{M}$ est injectif.

On remarque que $\text{Ker}(\beta)$ s'identifie à $\Gamma(\eta, \mathcal{M})$ puis que l'on a un isomorphisme $H^1(F\mathcal{M}) \simeq \text{Coker}(\Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\eta, \mathcal{M}))$ pour tout faisceau de Λ -modules. Un faisceau injectif étant flasque, on obtient bien que $H^1(F\mathcal{M}) = 0$ si $\mathcal{M}$ est injectif.

Il reste à montrer que $H^2(F\mathcal{M}) = 0$ si $\mathcal{M}$ est injectif. Le foncteur de restriction des faisceaux de Λ -modules de $X_{\text{ét}}$ à $\eta_{\text{ét}}$ admettant un adjoint à gauche exact, si $\mathcal{M}$ est injectif, alors $\mathcal{M}_{\eta}$ aussi. De même, le foncteur image directe associé au morphisme de topos évident $u: \eta_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BG}$ (cf. [SGA 4 IV 4.5.2]) préserve les injectifs. Comme $u_* \mathcal{M}_{\eta} = \mathcal{M}_{\eta}^S$, si $\mathcal{M}$ est injectif, alors $\mathcal{M}_{\eta}^S$ est injectif dans la catégorie des $\Lambda[[G]]$ -modules discrets et on peut conclure que $H^2(F\mathcal{M}) = \text{Coker}(\beta)$ est nul en utilisant le lemme 1.2.1.3.

1.2.3. Définition du morphisme de transition. Soit σ un générateur topologique de G . Soit M un $\Lambda[[G]]$ -module discret. On observe que l'on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens $M(-1) \simeq \text{Hom}(G, M)$. On définit un morphisme de groupes abéliens $M(-1) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M)$ via les isomorphismes suivants, cf. proposition 1.2.1.2 :

$$M(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(G, M) \xrightarrow[\sim]{\text{ev}_{\sigma}} M \xleftarrow[\sim]{\text{ev}_{1-\sigma}} \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M).$$

Si $\mathcal{M}$ est un faisceau de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$, on peut appliquer la construction ci-dessus au $\Lambda[[G]]$ -module discret $\mathcal{M}_{\eta}^S$, ce qui fournit un morphisme $\mathcal{M}_{\eta}^S(-1) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\eta}^S) = F^2 \mathcal{M}$. Le groupe profini S étant un pro- p -groupe et p étant inversible dans Λ , on dispose d'un projecteur canonique $\mathcal{M}_{\eta} \rightarrow \mathcal{M}_{\eta}^S$ qui après torsion fournit un morphisme $\mathcal{M}_{\eta}(-1) \rightarrow \mathcal{M}_{\eta}^S(-1)$ que l'on peut composer avec celui précédemment construit pour obtenir un morphisme $\mathcal{M}_{\eta}(-1) \rightarrow F^2 \mathcal{M}$ et donc un morphisme de complexes $s_{\sigma}: \mathcal{M}_{\eta}(-1) \rightarrow F\mathcal{M}[2]$. En tensorisant ce morphisme avec $\Lambda(1)$ (ou en appliquant s_{σ} au faisceau $\mathcal{M}(1)$, cela revient au même), on obtient un morphisme de complexes $s_{\sigma}(1): \mathcal{M}_{\eta} \rightarrow F(\mathcal{M})(1)[2]$. Sans ajout de signe supplémentaire, on en déduit un morphisme $s_{\sigma}(1): K_{\eta} \rightarrow F(K)(1)[2]$ pour tout complexe de faisceaux de Λ -modules K sur $X_{\text{ét}}$. Compte tenu de la proposition 1.2.2.1, on peut procéder à la définition suivante :

DÉFINITION 1.2.3.1. On note $\text{sp}_{\eta \rightarrow s}^X: R\Gamma_{\eta}(K) \rightarrow R\Gamma_s(K)(1)[2]$ le morphisme dans $D^+(\Lambda)$ défini par $s_{\sigma}(1)$ fonctoriellement pour tout objet $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. D'après le lemme suivant, ce morphisme $\text{sp}_{\eta \rightarrow s}^X$ est indépendant du générateur σ de G : c'est le morphisme de transition associé à la spécialisation $\eta \rightarrow s$ de points géométriques de X .

LEMME 1.2.3.2. Si σ et σ' sont deux générateurs topologiques de G , il existe une unique homotopie fonctorielle en le faisceau $\mathcal{M}$ reliant les deux morphismes $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \rightarrow F(\mathcal{M})[2]$ donnés par s_σ et $s_{\sigma'}$.

On voit aussitôt qu'on peut se limiter aux $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M}_s = 0$ et que S agisse trivialement sur $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}$. On peut identifier cette catégorie de faisceaux à celle des $\Lambda[[G]]$ -modules discrets.

Soit M un $\Lambda[[G]]$ -module discret. Notons $\mathcal{M}$ le faisceau sur $X_{\text{ét}}$ correspondant. On note $F_\sigma(M)$ le complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{1-\sigma} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentré en les degrés 1 et 2. On note $\Psi_\sigma: F\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} F_\sigma(M)$ l'isomorphisme de complexes défini de façon évidente à partir de σ :

$$\begin{array}{ccccccc} F\mathcal{M} & \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\bar{\eta}} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ \Psi_\sigma \downarrow \sim & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \sim \text{ev}_{1-\sigma} \\ F_\sigma(M) & \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Notons $\varphi_\sigma: \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \xrightarrow{\sim} M$ l'isomorphisme défini par l'évaluation en σ via l'isomorphisme canonique $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \simeq \text{Hom}(G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}})$. Notons $t_\sigma: M \rightarrow F_\sigma(M)[2]$ le morphisme de complexes représenté par les flèches verticales ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} M & \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ \downarrow t_\sigma & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ F_\sigma(M)[2] & \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

On dispose ainsi d'un carré commutatif de complexes, fonctoriel en M :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) & \xrightarrow{s_\sigma} & F(\mathcal{M})[2] \\ \downarrow \varphi_\sigma & & \downarrow \Psi_\sigma \\ M & \xrightarrow{t_\sigma} & F_\sigma(M)[2] \end{array}$$

On a ainsi $t_\sigma = \Psi_\sigma \circ s_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$. Posons $f_{\sigma, \sigma'} = \Psi_\sigma \circ s_{\sigma'} \circ \varphi_\sigma^{-1}$. Les flèches verticales du diagramme ci-dessus étant des isomorphismes de complexes, montrer que les morphismes $s_\sigma, s_{\sigma'}: \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \rightarrow F(\mathcal{M})[2]$ sont (fonctoriellement) homotopes revient à vérifier que les deux morphismes $t_\sigma, f_{\sigma, \sigma'}: M \rightarrow F_\sigma(M)[2]$ le sont.

On peut ainsi représenter la situation de façon plus concrète :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Id} \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ g \end{array} \right) & \downarrow \\ \dots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M & \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

où g est la transformation naturelle induite par $f_{\sigma, \sigma'}$.

Comme $\Lambda[[G]]$ désigne précisément l'anneau des transformations naturelles $M \rightarrow M$, on peut identifier Id et g à des éléments 1 et g de $\Lambda[[G]]$ respectivement. Montrer l'existence et l'unicité de l'homotopie fonctorielle entre s_σ et $s_{\sigma'}$ se ramène donc à montrer l'existence et l'unicité de $h \in \Lambda[[G]]$ tel que $(1 - \sigma) \cdot h = 1 - g$. D'après la proposition 1.2.1.2, cela revient à montrer que $\varepsilon(g) = 1$. Par définition de $f_{\sigma, \sigma'}$, si on note u l'unité de $\Lambda[[G]]$ telle que $(1 - \sigma') = u \cdot (1 - \sigma)$ et qu'on note α l'élément de $\hat{\mathbf{Z}}'^\times$ tel que $\sigma' = \sigma^\alpha$, alors on a la relation $u \cdot g = \alpha$. Pour montrer $\varepsilon(g) = 1$, on est donc ramené à montrer que $\varepsilon(u) = \varepsilon(\alpha)$. Pour cela, on utilise la formule suivante :

$$\frac{1 - \sigma^\beta}{1 - \sigma} = \sum_{i=0}^{\beta-1} \sigma^i.$$

Cette formule est évidemment juste pour $\beta \in \mathbf{N}$; on peut lui donner un sens pour tout $\beta \in \widehat{\mathbf{Z}}$ en prolongeant chacun des membres par continuité. En appliquant cette formule avec $\beta = \alpha$, on obtient le résultat voulu :

$$\varepsilon(u) = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{\alpha-1} \sigma^i \right) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} 1 = \varepsilon(\alpha) ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

1.2.4. Compatibilité avec la classe du point fermé.

PROPOSITION 1.2.4.1. *Dans le cas du faisceau Λ , l'image de $1 \in \Lambda$ par le morphisme de transition $\mathrm{sp}_{\eta \rightarrow s}^X: \Lambda \rightarrow R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, \Lambda(1))[2]$ est la classe $\mathrm{Cl}_{s \rightarrow X} \in H_{s, \text{ét}}^2(X, \Lambda(1))$ de [XVI-2.3.1](#).*

Le seul enjeu de la démonstration de cette proposition est de s'assurer que le signe est correct. C'est ce qui justifie la précision des conventions de signes discutées dans [XVI-4](#), puisqu'elles permettent de donner un sens précis à l'énoncé ci-dessus.

DÉFINITION 1.2.4.2. Pour les besoins de la démonstration de la proposition [1.2.4.1](#), on introduit un foncteur E de la catégorie des complexes de faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$ vers celle des Λ -modules de la façon suivante. Pour tout complexe de faisceaux K , on note $E^{p,0}K := F^1K^p = (K_{\eta}^p)^S$, $E^{p,1}K := F^2K^p = \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, (K_{\eta}^p)^S)$ et $E^{p,q}K = 0$ pour $q \notin \{0, 1\}$. On définit un bicomplexe $(E^{p,q}K)_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2}$ en notant $d_h: E^{p,q}K \rightarrow E^{p+1,q}K$ pour $q \in \{0, 1\}$ les morphismes induits par les différentielles sur K et $d_v: E^{p,0}K \rightarrow E^{p,1}K$ le morphisme $\beta: F^1K^p \rightarrow F^2K^p$. On pose $EK := \mathrm{Tot}((E^{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2})$. Autrement dit, $(EK)^n := F^1K^n \oplus F^2K^{n-1}$ et la différentielle $d_{EK}: (EK)^n \rightarrow (EK)^{n+1}$ est décrite par la matrice :

$$\begin{pmatrix} d_K & 0 \\ (-1)^n \beta & d_K \end{pmatrix}$$

Pour tout faisceau de Λ -modules $\mathcal{M}$ sur $X_{\text{ét}}$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le noyau de $\beta: F^1\mathcal{M} \rightarrow F^2\mathcal{M}$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(\eta_{\text{ét}}, \mathcal{M})$. On en déduit une transformation naturelle $\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K) \rightarrow EK$ pour tout complexe K de faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$. De même que dans le [§1.2.2](#), E commute au foncteur $[1]$ (sans introduction de signe supplémentaire), préserve les quasi-isomorphismes, induit un foncteur triangulé $E: D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(\Lambda)$ et le morphisme canonique $R\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K) \rightarrow EK$ est un isomorphisme dans $D^+(\Lambda)$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. (Comme la construction ne dépend que de la restriction de K à η , on pourra se permettre d'utiliser cette construction pour $K \in D^+(\eta_{\text{ét}}, \Lambda)$.)

DÉFINITION 1.2.4.3. On définit une transformation naturelle $\Psi: EK[-1] \rightarrow FK$ pour tout complexe K de faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$ de la façon suivante. En degré $n \in \mathbf{Z}$, elle est donnée par le morphisme $F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2} \rightarrow F^0K^n \oplus F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2}$ décrit par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Via les isomorphismes canoniques $EK \simeq R\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)$ et $FK \simeq R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K)$ (cf. proposition [1.2.2.1](#)), Ψ induit un morphisme $\Psi: R\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)[-1] \rightarrow R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K)$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

LEMME 1.2.4.4. *Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme $\Psi: R\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)[-1] \rightarrow R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K)$ induit pour tout $n \in \mathbf{Z}$ le morphisme bord $\delta: H_{\text{ét}}^{n-1}(\eta, K) \rightarrow H_{s, \text{ét}}^n(X, K)$ (cf. [XVI-4.7.6](#)).*

On peut supposer que K est un complexe borné inférieurement formé d'objets injectifs. Soit $[\gamma] \in H_{\text{ét}}^{n-1}(\eta, K)$ une classe de cohomologie représentée par un élément $\gamma \in \Gamma(\eta, K^{n-1})$ tel que $d\gamma = 0$. (Dans cette démonstration, on notera simplement d les différentielles induites par les différentielles d_K de K .) On peut calculer $\delta([\gamma]) \in H_{s, \text{ét}}^n(X, K)$ en utilisant [XVI-4.7.6](#). Le faisceau K^{n-1} étant flasque, on peut choisir $\tilde{\gamma} \in \Gamma(X, K^{n-1})$ tel que $\tilde{\gamma}|_{\eta} = \gamma$. On a alors $d\tilde{\gamma} \in \Gamma_s(X, K^{n-1})$ et $\delta([\gamma]) = [d\tilde{\gamma}] \in H_{s, \text{ét}}^n(X, K)$. Via l'isomorphisme $R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \simeq FK$, la classe $\delta([\gamma]) = [d\tilde{\gamma}] \in H_{s, \text{ét}}^n(X, K)$ est décrite par le cocycle $(d\tilde{\gamma}, 0, 0) \in F^0K^n \oplus F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2} = (FK)^n$. La classe $[\gamma] \in H_{\text{ét}}^{n-1}(\eta, K)$ étant représentée via

l'isomorphisme $EK \simeq R\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)$ par le $(n-1)$ -cocycle $(\gamma_{\bar{\eta}}, 0) \in F^1 K^{n-1} \oplus F^2 K^{n-2} = (EK)^{n-1}$ de EK , la classe $\Psi([\gamma]) \in H_{s, \text{ét}}^n(X, K)$ est décrite par le n -cocycle $(0, (-1)^n \gamma_{\bar{\eta}}, 0) \in (FK)^n$. Pour conclure, il suffit d'observer que les deux n -cocycles $(d\tilde{\gamma}, 0, 0)$ et $(0, (-1)^n \gamma_{\bar{\eta}}, 0)$ du complexe FK sont cohomologues, ce qui vient de la relation

$$d_{FK}(\tilde{\gamma}, 0, 0) = (d\tilde{\gamma}, (-1)^{n-1} \gamma_{\bar{\eta}}, 0) \in F^0 K^n \subset F^0 K^n \oplus F^1 K^{n-1} \oplus F^2 K^{n-2} = (FK)^n.$$

DÉFINITION 1.2.4.5. On choisit une uniformisante π de X et un élément $\pi' \in \kappa(\bar{\eta})$ tel que $\pi^n = \pi$ (on rappelle que $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$). On note R le sous-groupe de $\kappa(\bar{\eta})^\times$ engendré par μ_n et π' . On pose $\bar{R} := R \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, c'est-à-dire que $\bar{R}$ est le quotient de R par le sous-groupe engendré par π . (On notera $\bar{R}$ additivement.) L'action de $\text{Gal}(\kappa(\bar{\eta})/\kappa(\eta))$ sur R se factorise en une action du groupe d'inertie modérée G . On en déduit une structure de $\Lambda[[G]]$ -module discret sur $\bar{R}$ et on dispose d'une suite exacte évidente de $\Lambda[[G]]$ -modules discrets :

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \bar{R} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

(Le morphisme $p: \bar{R} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ envoie la classe $\bar{\pi}'$ de π' sur 1.)

LEMME 1.2.4.6. *Il existe un unique morphisme de $\Lambda[[G]]$ -modules $Z: I_G \rightarrow \mu_n$ tel que pour tout $\sigma \in G$, $Z(1 - \sigma) = \frac{\pi'}{\sigma(\pi')}$. En particulier, si σ est un générateur topologique de G et que $\zeta \in \mu_n$ est l'image de σ par $G \simeq \hat{\mathbf{Z}}'(1) \rightarrow \mu_n$, alors $Z(1 - \sigma) = \zeta^{-1}$.*

Soit $\tau \in I_G$. En tant qu'élément de $\Lambda[[G]]$, τ induit un endomorphisme de $\bar{R}$. Que $\tau \in I_G$ signifie que $\tau(\pi') \in \mu_n \subset \bar{R}$. On peut donc poser $Z(\tau) := \tau(\pi')$. On vérifie facilement que $Z: I_G \rightarrow \mu_n$ est un morphisme de $\Lambda[[G]]$ -modules et que c'est le seul à satisfaire la relation $Z(1 - \sigma) = \frac{\pi'}{\sigma(\pi')}$ pour tout $\sigma \in G$ (cf. proposition 1.2.1.2).

LEMME 1.2.4.7. *Grâce aux définitions $(E\mu_n)^1 = F^2\mu_n = \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$, l'élément Z du lemme 1.2.4.6 peut-être considéré comme un 1-cocycle du complexe $E\mu_n$. Via l'isomorphisme canonique $R\Gamma(\eta_{\text{ét}}, \mu_n) \simeq E\mu_n$, l'élément Z correspond à la classe dans $H_{\text{ét}}^1(\eta, \mu_n)$ du toiseur $\mathcal{T}$ des racines n -ièmes de l'unité de π .*

Le toiseur $\mathcal{T}$ des racines n -ièmes de π s'identifie au faisceau d'ensembles sur $\eta_{\text{ét}}$ muni de l'action de μ_n correspondant à l'image inverse de 1 par le morphisme $p: \bar{R} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On note $\delta: H_{\text{ét}}^0(\eta, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\eta, \mu_n)$ le morphisme de bord associé à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \bar{R} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow 0$$

de la définition 1.2.4.5 ; on peut en effet identifier cette suite exacte courte de $\Lambda[[G]]$ -modules discrets à une suite exacte courte de faisceaux de Λ -modules sur $\eta_{\text{ét}}$. Grâce à la construction XVI-4.3.1, il vient que la classe du toiseur $\mathcal{T}$ est $\delta(1) \in H_{\text{ét}}^1(\eta, \mu_n)$. Pour conclure, il va s'agir de décrire δ en termes du foncteur triangulé $E \simeq R\Gamma(\eta, -)$. Le morphisme de bord δ est en effet celui provenant de la construction habituelle appliquée à la suite exacte courte de complexes de Λ -modules $0 \rightarrow E\mu_n \rightarrow E\bar{R} \rightarrow E\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow 0$. On part de $1 \in (E\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^0 = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ que l'on relève en $\pi' \in (E\bar{R})^0 = \bar{R}$. La différentielle $d\pi' := \beta(\pi') \in (E\bar{R})^1 = \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \bar{R})$ est par construction l'image de $Z \in \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n) = (E\mu_n)^1$ par la composition avec l'inclusion $\mu_n \rightarrow \bar{R}$. On en déduit que $\delta(1) = [Z] \in H^1(E\mu_n)$.

Nous pouvons enfin démontrer la proposition 1.2.4.1. Pour déterminer l'image de $1 \in \Gamma(\bar{\eta}_{\text{ét}}, \Lambda)$ par $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow s}^X$, il s'agit d'utiliser la définition de s_σ appliquée à $\Lambda(1) = \mu_n$ pour σ un générateur topologique de G . Si on suit la construction du §1.2.3, on fait d'abord correspondre à $1 \in \Lambda \simeq \mu_n(-1)$ un élément de $\text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$ qui est $-Z$. On considère alors $-Z$ comme un élément de $(F\mu_n)^2 = F^2\mu_n = \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$ et il vient donc que $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow s}^X(1) = [-Z] \in H^2(F\mu_n) \simeq H_s^2(X, \mu_n)$. Le morphisme $-Z$ peut aussi être pensé comme un élément de $(E\mu_n)^1 = F^2\mu_n = \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$ et on a bien $\Psi(-Z) = -Z$ où Ψ est le morphisme $\Psi: E\mu_n[-1] \rightarrow F\mu_n$ de la définition 1.2.4.3. En combinant les énoncés des lemmes 1.2.4.4 et 1.2.4.7, on obtient que $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow s}^X(1) = [-Z] = [\Psi(-Z)] = \delta([-Z]) = -\delta([\mathcal{T}])$

où $\delta: H_{\text{ét}}^1(\eta, \mu_n) \rightarrow H_{s, \text{ét}}^2(X, \mu_n)$ est le morphisme bord et $\mathcal{T}$ le torseur des racines n -ièmes de π . Le calcul fait au cours de la démonstration de **XVI-3.4.8** permet de conclure que $\text{sp}_{\eta \rightarrow s}^X(1) = -\delta([\mathcal{T}]) = \text{Cl}_{s \rightarrow X}$.

REMARQUE 1.2.4.8. Si $\mathcal{M}$ est un faisceau de Λ -modules sur le trait strictement hensélien X , le morphisme $\mathcal{H}^0(\text{sp}_{\eta \rightarrow s}^X): \mathcal{M}_{\bar{\eta}} \rightarrow H_s^2(X, \mathcal{M}(1))$ induit un isomorphisme $(\mathcal{M}_{\bar{\eta}})_{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)} \xrightarrow{\sim} H_s^2(X, \mathcal{M}(1))$ où l'on a noté $-_{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}$ les co-invariants sous le groupe $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$.

1.3. Cas d'un schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1. Soit X un $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1. Soit η le point générique de X . Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . Soit s le point fermé de X . Soit $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$ la normalisation de X . Le schéma $\tilde{X}$ est un trait strictement hensélien (de point fermé $\tilde{s}$). L'extension finie $\tilde{s}/s$ ne peut être que purement inséparable, ce qui permet de remarquer que f est un homéomorphisme universel et donc que le foncteur image inverse f^* induit une équivalence entre les catégories des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ et $\tilde{X}_{\text{ét}}$ (cf. **[SGA 4 VIII 1.1]**).

DÉFINITION 1.3.1. Via les identifications ci-dessus, le morphisme de transition $\text{sp}_{\eta \rightarrow s}^X$ est induit par $\frac{1}{[\tilde{s}:s]} \text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \tilde{s}}^{\tilde{X}}$ (cf. définition **1.2.3.1**).

1.4. Cas général.

DÉFINITION 1.4.1. Soit X un $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma excellent. Soit $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ une spécialisation immédiate de points géométriques de X . Pour définir le morphisme de transition $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X: R\Gamma_{\bar{y}}(K) \rightarrow R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2]$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, quitte à remplacer K par son image inverse *via* le morphisme canonique $X_{(\bar{x})} \rightarrow X$, on peut supposer que X est local strictement hensélien (excellent) de point fermé $\bar{x}$. On note alors Z l'adhérence du point de X en-dessous de $\bar{y}$ et $i: Z \rightarrow X$ son immersion dans X . Ce $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma Z est local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1, le morphisme de transition $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{z}}^Z$ a été introduit dans la définition **1.3.1**. Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on définit le morphisme de transition $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X$ de façon à faire commuter le diagramme suivant où les flèches verticales sont les isomorphismes évidents :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\bar{y}}(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X} & R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ R\Gamma_{\bar{y}}(i^!K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^Z} & R\Gamma_{\bar{x}}(i^!K)(1)[2] \end{array}$$

REMARQUE 1.4.2. Pour toute spécialisation $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ de codimension 0 entre points géométriques de X (essentiellement, un élément du groupoïde de Galois absolu du corps résiduel d'un des points de X), on a un isomorphisme évident $R\Gamma_{\bar{x}'}(K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\bar{x}}(K)$, que l'on note $\text{sp}_{\bar{x}' \rightarrow \bar{x}}^X$. Il est évident que si $\bar{z} \rightarrow \bar{y}$ et $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ sont des spécialisations composables telles que la codimension c de $\bar{z} \rightarrow \bar{x}$ soit 0 ou 1, on a une égalité de morphismes

$$\text{sp}_{\bar{z} \rightarrow \bar{x}}^X = \text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X \circ \text{sp}_{\bar{z} \rightarrow \bar{y}}^X: R\Gamma_{\bar{z}}(K) \rightarrow R\Gamma_{\bar{x}}(K)(c)[2c].$$

Ainsi, les morphismes de transition associés aux spécialisations se composent bien dans l'étendue où ces constructions ont été faites jusqu'à présent. Nous définirons plus tard des morphismes de transition en codimension arbitraire et ce de façon compatible à la composition, mais seulement au niveau des groupes de cohomologie (cf. théorème **3.1.2**).

2. Complexes dualisants putatifs et potentiels

2.1. Définition des complexes dualisants putatifs et potentiels.

DÉFINITION 2.1.1. Une **fonction de dimension** sur un schéma localement noethérien X est une fonction $\delta: X \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour toute spécialisation immédiate $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de points géométriques de X , on ait $\delta(\bar{y}) = \delta(\bar{x}) + 1$.

Localement pour la topologie de Zariski, un schéma excellent admet une fonction de dimension, cf. [XIV-2.2.1](#).

DÉFINITION 2.1.2. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Un **complexe dualisant putatif** consiste en la donnée de $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et pour tout $x \in X$ d'un isomorphisme (appelé **épinglage** en x) $R\Gamma_x(K) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$ dans $D^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$. Un complexe dualisant putatif est un complexe dualisant potentiel si pour toute spécialisation immédiate $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\bar{y}}(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X} & R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2] \\ & \searrow \sim & \downarrow \sim \\ & & \Lambda(\delta(\bar{y}))[2\delta(\bar{y})] \end{array}$$

Autrement dit, les épinglages sont compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates. (On notera que puisque les objets apparaissant sur le diagramme ci-dessus n'ont qu'un seul objet de cohomologie non nul, il suffit d'énoncer la commutativité du diagramme après passage aux groupes de cohomologie de degré $-2\delta(\bar{y})$.)

Les notions de complexes dualisants putatifs et potentiels (à coefficients Λ) ne sont définis que pour les $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents munis d'une fonction de dimension. Certains des énoncés à venir contiendront donc implicitement ces hypothèses sur les schémas. La fonction de dimension ne sera pas non plus systématiquement mentionnée dans les énoncés.

REMARQUE 2.1.3. Si X est connexe et que $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est muni de deux structures de complexe dualisant potentiel, pour vérifier que les épinglages sont les mêmes en tous les points de X , il suffit de le faire en un seul point.

L'objectif de cette section est de montrer que sur un schéma régulier excellent muni de la fonction de dimension – codim, le faisceau constant Λ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel.

2.2. Functorialité par rapport aux morphismes étales. Des propriétés de stabilité importantes des complexes dualisants potentiels par rapport à certaines classes de morphismes seront obtenues dans la section 4. Pour le moment, mentionnons simplement la compatibilité suivante pour les morphismes étales :

PROPOSITION 2.2.1. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme étale entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. On suppose que X est muni d'une fonction de dimension δ_X . On définit une fonction de dimension δ_Y sur Y en posant $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y))$ pour tout $y \in Y$. Soit K un complexe dualisant putatif sur X . Alors, f^*K est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif et c'est un complexe dualisant potentiel si K en est un.

Si y est un point de Y , que $x = f(y)$ et que l'on note $g: y \rightarrow x$ le morphisme induit par f , on a un isomorphisme canonique $g^*R\Gamma_x(K) \simeq R\Gamma_y(f^*K)$. Ceci permet de définir les épinglages sur f^*K . On vérifie aussitôt que si K est un complexe dualisant potentiel, alors f^*K aussi.

La construction de cette proposition passe évidemment à la limite : le résultat vaut aussi pour des localisations $X_{(x)} \rightarrow X$, $X_{(x)}^h \rightarrow X$ ou $X_{(\bar{x})} \rightarrow X$. Nous utiliserons librement ces observations simples dans la suite.

2.3. Compléments sur les spécialisations.

DÉFINITION 2.3.1. Soit $X' \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Soit $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ et $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ des spécialisations de points géométriques de X' et X respectivement. Si l'on se donne des X -morphisms $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$

et $\overline{x'} \rightarrow \overline{x}$ tels que le diagramme évident ci-dessous commute, alors on dit que $\overline{y'} \rightarrow \overline{x'}$ est **au-dessus** de $\overline{y} \rightarrow \overline{x}$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{y'} & \longrightarrow & X'_{(\overline{x'})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{y} & \longrightarrow & X_{(\overline{x})} \end{array}$$

PROPOSITION 2.3.2. *Soit $X' \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Soit $\overline{y'} \rightarrow \overline{x'}$ une spécialisation de points géométriques de X' . Alors, à des isomorphismes uniques près, il existe une unique spécialisation $\overline{y} \rightarrow \overline{x}$ de points géométriques de X en-dessous de $\overline{y'} \rightarrow \overline{x'}$.*

C'est évident.

PROPOSITION 2.3.3. *Soit $X' \rightarrow X$ un morphisme fini et $\overline{y} \rightarrow \overline{x}$ une spécialisation de points géométriques de X . Soit $\overline{y'} \rightarrow X'$ un point géométrique de X' au-dessus de $\overline{y}$ (i.e. on s'est donné un X -morphisme $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$). Alors, à des isomorphismes uniques près, il existe une unique spécialisation de points géométriques de X' au-dessus de $\overline{y} \rightarrow \overline{x}$ de la forme $\overline{y'} \rightarrow \overline{x'}$.*

On peut supposer que X est local strictement hensélien de point fermé $\overline{x}$. Le schéma X' étant fini sur X , c'est une réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens. Quitte à remplacer X' par la composante connexe contenant $\overline{y'}$, on peut supposer que X' est lui-aussi local strictement hensélien. Il n'y a alors manifestement plus d'alternative : $\overline{x'}$ est le point fermé de X' .

2.4. Construction d'un complexe dualisant potentiel dans le cas régulier.

2.4.1. Un complexe dualisant putatif.

PROPOSITION 2.4.1.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien régulier excellent muni de la fonction de dimension – codim. Alors Λ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif.*

Soit $x \in X$. Pour définir l'épingleage en x , on peut supposer que X est local de point fermé x . On note $i: x \rightarrow X$ l'inclusion de ce point fermé. Le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_i: \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)] \rightarrow i^! \Lambda = \mathrm{R}\Gamma_x(\Lambda)$ est un isomorphisme d'après le théorème de pureté cohomologique absolue (cf. XVI-3.1.1). L'épingleage en x est l'isomorphisme inverse.

2.4.2. Cas d'un trait.

PROPOSITION 2.4.2.1. *Soit X un trait excellent, muni de la fonction de dimension $\delta = -\mathrm{codim}$. On suppose que X est un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma.*

- (a) *Le complexe dualisant putatif Λ de la proposition 2.4.1.1 pour X est un complexe dualisant potentiel.*
- (b) *Si K est un complexe dualisant putatif sur X , il existe un unique morphisme $\Lambda \rightarrow K$ compatible aux épingleages au point générique.*
- (c) *Si K est un complexe dualisant potentiel sur X , le morphisme $\Lambda \rightarrow K$ défini ci-dessus est un isomorphisme (compatible aux épingleages).*

Notons $i: s \rightarrow X$ l'inclusion du point fermé s de X et $j: \eta \rightarrow X$ l'inclusion de son point générique η . La proposition 1.2.4.1 énonce précisément la compatibilité (a) dans le cas où S est strictement hensélien ; le cas général en résulte puisque la classe de cohomologie Cl_i du point fermé s dans $H_s^2(X, \Lambda(1))$ induit la classe de $\overline{s}$ dans le hensélisé strict $X_{(\overline{s})}$ (cf. XVI-2.3.2). Établissons (b). Soit K un complexe dualisant putatif sur X . On a un triangle distingué canonique, que l'on peut récrire en présence d'épingleages :

$$\begin{array}{ccccccc} i_* i^! K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathrm{R}j_* j^* K & \longrightarrow & i_* i^! K[1] \\ \downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ i_* \Lambda(-1)[-2] & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathrm{R}j_* \Lambda & \longrightarrow & i_* \Lambda(-1)[-1] \end{array}$$

En appliquant le foncteur i -ème faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^i$, on obtient l'annulation de $\mathcal{H}^i K$ pour $i < 0$ et un isomorphisme canonique $\mathcal{H}^0 K \simeq \Lambda$. En vertu des propriétés élémentaires de la t -structure canonique sur $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on obtient un unique morphisme $\Lambda \simeq \mathcal{H}^0 K \rightarrow K$ compatible à l'épingleage au point générique.

Pour obtenir (c), supposons que K soit un complexe dualisant potentiel. On considère le diagramme commutatif induit par le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow K$ de (b) et la fonctorialité du morphisme de spécialisation associé à un choix de spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow \bar{s}$ au-dessus des points η et s :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\bar{\eta}}(\Lambda) & \longrightarrow & R\Gamma_{\bar{\eta}}(K) \\ \downarrow \text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{s}}^X & & \downarrow \text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{s}}^X \\ R\Gamma_{\bar{s}}(\Lambda)(1)[2] & \longrightarrow & R\Gamma_{\bar{s}}(K)(1)[2] \end{array}$$

Comme Λ et K sont des complexes dualisants potentiels, les flèches verticales sont des isomorphismes. Par construction, le morphisme du haut est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme du bas aussi. Par conséquent le morphisme $\Lambda \rightarrow K$ induit un isomorphisme après application de j^* et de $i^!$: c'est un isomorphisme.

2.4.3. Fonctorialité par rapport aux morphismes quasi-finis.

PROPOSITION 2.4.3.1. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme quasi-fini. Soit K un complexe dualisant putatif sur X pour une certaine fonction de dimension δ_X sur X . Alors $f^! K$ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif pour la fonction de dimension δ_Y sur Y définie par $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y))$ pour tout $y \in Y$ (cf. XIV-2.5.2).*

Soit $y \in Y$. Notons $x = f(y)$ et $\pi: y \rightarrow x$ le morphisme fini induit par f . On a un isomorphisme canonique dans $D^+(y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$R\Gamma_y(f^! K) \simeq \pi^! R\Gamma_x(K).$$

L'épingleage en x donne un isomorphisme $R\Gamma_x(K) \simeq \Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)]$. Pour obtenir l'isomorphisme voulu $R\Gamma_y(f^! K) \simeq \Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)]$, il suffit de définir un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \pi^! \Lambda$: on utilise le morphisme de Gysin Cl_π .

REMARQUE 2.4.3.2. Soit $g: Z \rightarrow Y$ un autre morphisme quasi-fini. Via l'isomorphisme de transitivité $g^! f^! \simeq (f \circ g)^!$, la structure de complexe dualisant putatif sur $g^!(f^! K)$ obtenue en appliquant cette construction à f puis à g est la même que celle obtenue en appliquant directement la construction à $f \circ g$: cela résulte aussitôt des propriétés de composition des morphismes de Gysin.

PROPOSITION 2.4.3.3. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme fini et surjectif et K un complexe dualisant putatif sur X . Alors K est un complexe dualisant potentiel si et seulement si le complexe dualisant putatif $f^! K$ de la proposition 2.4.3.1 est un complexe dualisant potentiel.*

En vertu des propositions 2.3.2 et 2.3.3, on peut supposer que X et Y sont des schémas locaux strictement henséliens intègres de dimension 1 et que les fonctions de dimension prennent les valeurs 0 et -1 . Compte tenu de la remarque 2.4.3.2, il vient alors qu'il suffit de traiter deux cas :

- (1) Y est le normalisé de X ;
- (2) X et Y sont des traits.

On obtient la conclusion dans le cas (1) en utilisant le fait que le morphisme de transition pour X et K est défini à partir de celui pour Y et $f^! K$ (cf. définition 1.3.1) et que si M/L est une extension finie purement inséparable de corps, le morphisme de Gysin $\text{Cl}_\pi: \Lambda \rightarrow \pi^! \Lambda$ associé au morphisme $\pi: \text{Spec}(M) \rightarrow \text{Spec}(L)$ s'identifie à la multiplication par le degré de M/L via les isomorphismes tautologiques $\pi^! \Lambda \simeq \pi^* \Lambda \simeq \Lambda$.

La démonstration dans le cas (2) va utiliser le lemme général suivant :

LEMME 2.4.3.4. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme quasi-fini entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents réguliers de dimension relative virtuelle $-c$. On munit X de la fonction de dimension $\delta_X = -\text{codim}$ et Y de la fonction de dimension δ_Y définie par composition avec f comme dans la proposition 2.4.3.1. Compte*

tenu de la relation $\delta_Y(y) = -\text{codim}_Y(y) - c$ pour tout $y \in Y$, la proposition 2.4.1.1 munit $\Lambda(-c)[-2c]$ d'une structure de complexe dualisant putatif pour la fonction de dimension δ_Y sur Y . La proposition 2.4.1.1 donne une structure de complexe dualisant putatif sur Λ sur X , dont on déduit, par la proposition 2.4.3.1, une structure de complexe dualisant putatif sur $f^!\Lambda$ sur Y pour la fonction de dimension δ_Y . Alors, l'isomorphisme de pureté $\text{Cl}_f: \Lambda(-c)[-2c] \xrightarrow{\sim} f^!\Lambda$ est compatible aux épinglages de ces deux complexes dualisants putatifs.

Étudions les épinglages en un point $y \in Y$. Notons $x = f(y)$. On peut supposer que X et Y sont locaux (strictement henséliens) de points fermés respectifs x et y . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{j} & Y \\ g \downarrow & \searrow h & \downarrow f \\ x & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Les schémas apparaissant sur ce diagramme sont affines et réguliers et les morphismes entre eux sont de type fini. Ces morphismes sont donc localement d'intersection complète (lissifiables), on peut leur appliquer la théorie des morphismes de Gysin (cf. XVI-2.5). Le résultat du lemme découle alors aussitôt de leur compatibilité à la composition, puisqu'elle donne un diagramme commutatif dans $D^+(y_{\text{ét}}, \Lambda)$, où l'on a noté c' la codimension de y dans Y :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_g} & g^!\Lambda \\ \downarrow \text{Cl}_j & \searrow \text{Cl}_h & \downarrow g^!(\text{Cl}_i) \\ j^!\Lambda(c')[2c'] & \xrightarrow{j^!(\text{Cl}_f)} & h^!\Lambda(c+c')[2c+2c'] \end{array}$$

Revenons à la démonstration de la proposition 2.4.3.3. Supposons que K soit un complexe dualisant potentiel. D'après la proposition 2.4.2.1 appliquée à X , K est canoniquement isomorphe à Λ (avec les épinglages de la proposition 2.4.1.1). On suppose donc $K = \Lambda$. On a un isomorphisme de pureté $\text{Cl}_f: \Lambda \xrightarrow{\sim} f^!\Lambda$. D'après le lemme 2.4.3.4, cet isomorphisme est compatible avec les épinglages de la proposition 2.4.1.1 pour Λ et ceux de la proposition 2.4.3.1 pour $f^!\Lambda$. D'après la proposition 2.4.2.1 (a) appliquée à Y , il vient que $f^!\Lambda$ est bien un complexe dualisant potentiel.

Inversement, supposons que $f^!K$ soit un complexe dualisant potentiel. La proposition 2.4.2.1 (b) pour X donne un morphisme canonique $\Lambda \rightarrow K$ compatible aux épinglages au point générique de X . Le morphisme $f^!\Lambda \rightarrow f^!K$ qui s'en déduit est un morphisme entre deux complexes dualisants potentiels compatible aux épinglages au point générique de Y . D'après la proposition 2.4.2.1 (c), $f^!\Lambda \rightarrow f^!K$ est un isomorphisme. Le foncteur $f^!$ étant conservatif, il en résulte que le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow K$ est un isomorphisme. On peut donc supposer que $K = \Lambda$ (de façon compatible aux épinglages au point générique). L'épinglage de K au point fermé x ne peut qu'être de la forme $\lambda \cdot \text{Cl}_{x/X}^{-1}: \text{R}\Gamma_x(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \Lambda(-1)[-2]$ pour $\lambda \in \Lambda^\times$. Compte tenu de ce qui précède, il vient aussitôt que le complexe dualisant putatif $f^!K$ sur Y s'identifie à Λ , épinglé trivialement au point générique et par $\lambda \cdot \text{Cl}_{y/Y}^{-1}$ au point fermé y de Y . Compte tenu de la proposition 2.4.2.1 (a), ce complexe dualisant putatif sur Y ne peut évidemment être un complexe dualisant potentiel que si $\lambda = 1$. Ainsi, K est bien un complexe dualisant potentiel sur X , puisqu'il s'identifie à Λ de façon compatible aux épinglages.

2.4.4. Un complexe dualisant potentiel.

PROPOSITION 2.4.4.1. *Soit X un schéma régulier excellent, muni de la fonction de dimension $-\text{codim}$. Le complexe dualisant putatif Λ de la proposition 2.4.1.1 est un complexe dualisant potentiel.*

Soit $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ une spécialisation immédiate de points géométriques de X . On veut montrer que les épinglages sur Λ sont compatibles au morphisme de transition $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X$. Pour cela, on peut supposer que X est local strictement hensélien de point fermé $\bar{x}$. Soit C l'adhérence de l'image de $\bar{y}$ dans X . Notons $i: C \rightarrow X$ l'immersion fermée de C dans X . Soit $n: \tilde{C} \rightarrow C$ le normalisé de C . Montrer la compatibilité des épinglages avec le morphisme de transition associé à $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ revient à montrer que

le complexe dualisant putatif $i^! \Lambda$ de la proposition 2.4.3.1 est un complexe dualisant potentiel, ce qui, d'après la proposition 2.4.3.3, revient encore à dire que $n^! i^! \Lambda$ en est un. D'après le lemme 2.4.3.4, le complexe dualisant putatif $n^! i^! \Lambda$ s'identifie au complexe dualisant putatif $\Lambda(-c)[-2c]$ obtenu par torsion et décalage à partir du complexe dualisant putatif Λ de la proposition 2.4.1.1 appliquée au trait $\tilde{C}$. En vertu de la proposition 2.4.2.1 (a), il s'agit bien d'un complexe dualisant potentiel, ce qui achève la démonstration.

3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal

3.1. Énoncés des théorèmes principaux.

THÉORÈME 3.1.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma local normal strictement hensélien excellent de dimension d et de point fermé x . Alors, $H_{x, \text{ét}}^q(X, \Lambda(d)) = 0$ pour $q > 2d$ et on a un isomorphisme $[x]: \Lambda \xrightarrow{\sim} H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ compatible aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates.*

THÉORÈME 3.1.2. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent. Pour toute spécialisation $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de points géométriques de X de codimension c , on peut définir, pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $i \in \mathbf{Z}$, un morphisme de transition $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X: H_{\bar{y}}^i(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{i+2c}(K(c))$, compatible à la composition des spécialisations et induit par les définitions de la section 1 pour $c \leq 1$. Par ailleurs, ces morphismes de transition généralisés vérifient une compatibilité avec les morphismes finis énoncée dans la proposition 3.5.4.*

REMARQUE 3.1.3. Localement pour la topologie étale, un schéma quasi-excellent est excellent (cf. XIV-2.3.1 et XIV-2.2.6). Il est donc évident que dans l'énoncé du théorème 3.1.2, on peut remplacer l'hypothèse « excellent » par « quasi-excellent ».

3.2. Dimension cohomologique. On énonce ici deux résultats de dimension cohomologique qui se déduisent du théorème de Lefschetz affine de Gabber, cf. XV-1.2.2. Voir XVIII_A et XVIII_B pour des variantes de ces résultats sans hypothèse d'excellence.

PROPOSITION 3.2.1. *Soit ℓ un nombre premier. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma local strictement hensélien excellent de point fermé x . On note $U = X - x$. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ -modules sur U . Soit $d \in \mathbf{N}$. On suppose que si $u \in U$ est tel que $\mathcal{M}_{\bar{u}} \neq 0$, alors la dimension de l'adhérence de u dans X est $\leq d$. Alors $H_{\text{ét}}^q(U, \mathcal{M}) = 0$ pour $q \geq 2d$.*

En particulier, si $d = \dim X$, on a $\text{cd}_{\ell} U \leq 2d - 1$ (cf. [SGA 4 x 1]) et pour tout faisceau de ℓ -torsion $\mathcal{M}$ sur $X_{\text{ét}}$, les groupes $H_{x, \text{ét}}^q(X, \mathcal{M})$ sont nuls pour $q > 2d$.

Par passage à la limite inductive filtrante sur les sous-faisceaux constructibles de $\mathcal{M}$, on peut supposer que $\mathcal{M}$ est constructible. Quitte à remplacer X par l'adhérence dans X du support de $\mathcal{M}$, on peut alors supposer que $d = \dim X$. On est alors ramené à montrer que $\text{cd}_{\ell} U \leq 2d - 1$. Comme le schéma (séparé) U peut être recouvert par d ouverts affines (cf. [Serre, 1965, § B.3, Chapitre III]), et qu'un ouvert affine de X est de dimension cohomologique au plus d (cf. XV-1.2.4), en utilisant convenablement les suites exactes de Mayer-Vietoris, on obtient bien que $\text{cd}_{\ell} U \leq 2d - 1$.

PROPOSITION 3.2.2. *Soit ℓ un nombre premier. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension d , de point générique η . Alors $\text{cd}_{\ell} \eta \leq d$.*

Le point générique η s'identifie à limite projective du système projectif formé par les ouverts affines non vides de X . Comme chacun de ces ouverts affines est de ℓ -dimension cohomologique au plus d , il en va de même pour η .

3.3. Morphismes finis.

PROPOSITION 3.3.1. *Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme fini entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Soit $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ une spécialisation immédiate de points géométriques de X' au-dessus d'une spécialisation immédiate $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de points géométriques de X (cf. définition 2.3.1). Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $i \in \mathbf{Z}$, le diagramme*

suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H_{y'}^i(f^!K) & \xrightarrow{\text{sp}_{y' \rightarrow x'}^{X'}} & H_{x'}^{i+2}(f^!K(1)) \\ \uparrow \text{Cl}_{y' \rightarrow y} \sim & & \sim \uparrow \text{Cl}_{x' \rightarrow x} \\ H_{\bar{y}}^i(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X} & H_{\bar{x}}^{i+2}(K(1)) \end{array}$$

On peut supposer que f est un morphisme dominant entre schémas locaux strictement henséliens intègres de dimension 1. Comme dans la démonstration de la proposition 2.4.3.3, il y a deux cas à traiter :

- (1) X' est le normalisé de X ;
- (2) X et X' sont des traits.

Le cas (1) étant trivial, on se concentre sur le cas où X et X' sont des traits. Pour vérifier la compatibilité, on peut évidemment supposer que $i = 0$. Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, comme les flèches verticales sont des isomorphismes, on peut noter $\delta_K: H_{\bar{y}}^0(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^2(K(1))$ la différence des flèches obtenues en suivant les deux chemins possibles. Il s'agit de montrer que pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a $\delta_K = 0$.

Les résultats de la section 2 montrent que $\delta_\Lambda = 0$. La suite de la démonstration va consister à se ramener à ce cas-là.

Comme $\bar{y}$ est au-dessus du point générique de X , $H_{\bar{y}}^0$ s'identifie à la fibre en $\bar{y}$ du faisceau de cohomologie de K en degré 0. Si on note $\tau_{\leq 0}K \rightarrow K$ le morphisme canonique déduit de la t -structure canonique sur $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ ^(v), on obtient un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{y}}^0(\tau_{\leq 0}K) & \xrightarrow{\delta_{\tau_{\leq 0}K}} & H_{\bar{x}}^2(\tau_{\leq 0}K(1)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \\ H_{\bar{y}}^0(K) & \xrightarrow{\delta_K} & H_{\bar{x}}^2(K(1)) \end{array}$$

Il résulte de ce diagramme que si $\delta_{\tau_{\leq 0}K} = 0$, alors $\delta_K = 0$.

Notons $\mathcal{H}^0K$ le faisceau de cohomologie de K en degré zéro. Pour des raisons de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1), le morphisme canonique $\tau_{\leq 0}K \rightarrow \mathcal{H}^0K$ induit un isomorphisme après application du foncteur $H_{\bar{x}}^2(-)$ (et aussi du foncteur $H_{\bar{y}}^0$). Par conséquent, en considérant un carré commutatif du type précédent, on obtient cette fois-ci que $\delta_{\mathcal{H}^0K} = 0$ équivaut à $\delta_{\tau_{\leq 0}K} = 0$.

Il résulte de ces remarques que pour montrer que $\delta_K = 0$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut supposer que K est concentré en degré 0.

On suppose maintenant que $K = \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est un faisceau de Λ -modules sur X . Notons $j: y \rightarrow X$ l'inclusion du point générique de X . En utilisant la description du foncteur $H_{\bar{x}}^2$ de la proposition 1.2.2.1, on obtient que le morphisme canonique $j_{!}j^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ induit des isomorphismes après application de $H_{\bar{y}}^0$ et $H_{\bar{x}}^2(-)$: $\delta_K = 0$ équivaut à $\delta_{j_{!}j^*K} = 0$. La propriété, pour un faisceau K sur X , d'être tel que $\delta_K = 0$ ne dépend donc que de sa restriction au point générique y .

Pour tout faisceau de Λ -modules $\mathcal{L}$ sur y , on note $\delta_{\mathcal{L}} = \delta_{j_{!}\mathcal{L}}$. Il s'agit de montrer que $\delta_{\mathcal{L}} = 0$ pour tout faisceau de Λ -modules sur y . Notons $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{constant}}$ le plus grand quotient constant de $\mathcal{L}$: formellement, le foncteur $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}_{\text{constant}}$ est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux constants de Λ -modules dans la catégorie des faisceaux de Λ -modules sur y . D'après la remarque 1.2.4.8, il vient que le morphisme canonique $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{constant}}$ induit un isomorphisme après application de $H_{\bar{x}}^2(j_{!} -)$ (et une surjection après application de $H_{\bar{y}}^0$). D'où $\delta_{\mathcal{L}} = 0$ si et seulement si $\delta_{\mathcal{L}_{\text{constant}}} = 0$. Il en résulte que l'on peut supposer que $\mathcal{L}$ est un faisceau constant de Λ -modules. Par ailleurs, on peut évidemment supposer que $\mathcal{L}$ est constructible. Si $\mathcal{L} \rightarrow$

^(v) L'auteur pense qu'il eût été plus cohérent de noter cette troncature $\tau_{\leq 0}$ pour respecter la convention qui veut que les degrés cohomologiques soient indiqués en exposant, mais la tradition ayant consacré l'usage inverse, il s'y plie avec répugnance.

$\mathcal{L}'$ est un épimorphisme de faisceaux constants constructibles de Λ -modules, il vient aussitôt que $\delta_{\mathcal{L}} = 0$ implique $\delta_{\mathcal{L}'} = 0$. Il en résulte que l'on peut supposer que $\mathcal{L} = \Lambda^r$ pour un certain $r \in \mathbf{N}$, puis, par additivité, que $r = 1$. Bref, on s'est bien ramené au cas du faisceau constant Λ , ce qui achève la démonstration de cette proposition.

3.4. Le cas de la dimension 2. Compte tenu des résultats établis jusqu'à présent, les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 peuvent être considérés comme ayant été établis en dimension 0 et 1. Cette sous-section se concentre sur le cas de la dimension 2 qui est l'étape cruciale pour passer au cas général.

On fixe un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma local strictement hensélien excellent normal X de dimension 2. On note x le point fermé de X et on pose $U = X - x$. En s'aidant d'une résolution des singularités $X' \rightarrow X$, nous allons définir au paragraphe 3.4.1 une classe dans $H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2))$, puis nous démontrerons au paragraphe 3.4.2 qu'elle est indépendante de la résolution. Enfin, nous établirons au paragraphe 3.4.3 une compatibilité entre cette classe, les classes définies pour les localisés stricts en X en les points de codimension 1 et les morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates correspondantes.

3.4.1. *Construction d'une classe.* D'après le résultat principal de [Lipman, 1978], il existe un morphisme propre birationnel $p: X' \rightarrow X$ avec X' régulier. Le morphisme p induit alors automatiquement un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$. On peut supposer de plus que $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$ est un diviseur à croisements normaux stricts (dont on note $D_1, \dots, D_n$ les composantes irréductibles).

En effet, on peut dans un premier temps supposer que les composantes irréductibles $D_1, \dots, D_n$ sont de dimension 1 : si ce n'est pas le cas, on peut éclater le point fermé correspondant (ceci ne se peut produire que si X est déjà régulier et que p est un isomorphisme). Dans un deuxième temps, on peut s'arranger pour que les composantes irréductibles de $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$ soient régulières en itérant le processus consistant à éclater les points singuliers (cf. [Šafarevič, 1966, page 38]). Dans un dernier temps, on peut contraindre les croisements à devenir normaux en éclatant les points fermés récalcitrants ; comme des invariants numériques décroissent strictement dans cette opération (cf. [Šafarevič, 1966, page 21]), ce processus termine.

PROPOSITION 3.4.1.1.

- (a) Le morphisme de bord $H_{\text{ét}}^{q-1}(U, \Lambda(2)) \rightarrow H_{x,\text{ét}}^q(X, \Lambda(2))$ est un isomorphisme pour $q \geq 2$ et ces groupes sont nuls pour $q \geq 5$;
- (b) Le morphisme évident $H_{\text{ét}}^q(X', \Lambda(2)) \rightarrow H_{\text{ét}}^q(p^{-1}(x), \Lambda(2))$ est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbf{Z}$ et ces groupes sont nuls pour $q \geq 3$;
- (c) Le morphisme de bord $H_{\text{ét}}^{q-1}(U, \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^q(X', \Lambda(2))$ est un isomorphisme pour $q \geq 4$;
- (d) Le morphisme évident $H_{x,\text{ét}}^q(X, \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^q(X', \Lambda(2))$ est un isomorphisme pour $q \geq 4$ et ces groupes sont nuls pour $q \geq 5$.

(a) s'obtient en utilisant la suite exacte canonique :

$$H_{\text{ét}}^{q-1}(X, \Lambda(2)) \rightarrow H_{\text{ét}}^{q-1}(U, \Lambda(2)) \rightarrow H_{x,\text{ét}}^q(X, \Lambda(2)) \rightarrow H_{\text{ét}}^q(X, \Lambda(2)) .$$

En effet, X étant local strictement hensélien, on a $H_{\text{ét}}^i(X, \Lambda(2))$ pour $i > 0$. On conclut en utilisant le fait que $\text{cd}_\ell U \leq 3$ (cf. proposition 3.2.1).

(b) résulte du théorème de changement de base pour un morphisme propre et du fait que $p^{-1}(x)$ soit une courbe propre et donc de dimension cohomologique 2.

(c) se déduit aussitôt de (b).

(d) résulte de (a), de (c) et de la commutativité du diagramme évident suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^{q-1}(U, \Lambda(2)) & \longrightarrow & H_{x,\text{ét}}^q(X, \Lambda(2)) \\ \parallel & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^{q-1}(U, \Lambda(2)) & \longrightarrow & H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^q(X', \Lambda(2)) \end{array}$$

PROPOSITION 3.4.1.2. *On a une suite exacte*

$$\bigoplus_{i < j} H_{D_i \cap D_j, \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow \bigoplus_i H_{D_i, \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x), \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow 0,$$

où les flèches sont induites par des morphismes d'agrandissement du support, et leurs différences.

Pour tout fermé F de X' , on note Λ_F le faisceau $i_{F*}\Lambda$ où i_F est l'immersion de F dans X' . On a une suite exacte courte évidente de faisceaux de Λ -modules sur X' :

$$0 \rightarrow \Lambda_{p^{-1}(x)} \rightarrow \bigoplus_i \Lambda_{D_i} \rightarrow \bigoplus_{i < j} \Lambda_{D_i \cap D_j} \rightarrow 0.$$

En appliquant $R\mathbf{Hom}(-, \Lambda(2))$ au triangle distingué de $D^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ associé à cette suite exacte courte, on peut obtenir la suite exacte voulue, pourvu que l'on sache montrer que $H_{D_i \cap D_j, \text{ét}}^5(X', \Lambda(2))$ est nul pour $i < j$. D'après le théorème de pureté absolue, ce groupe s'identifie à $H_{\text{ét}}^1(D_i \cap D_j, \Lambda)$ qui est bien nul puisque $D_i \cap D_j$ est une union disjointe finie de spectres de corps séparablement clos.

PROPOSITION 3.4.1.3. *La suite exacte de la proposition 3.4.1.2 se récrit sous la forme :*

$$\bigoplus_{i < j} \bigoplus_{y \in D_i \cap D_j} \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda^n \xrightarrow{\varepsilon} H_{p^{-1}(x), \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow 0.$$

Si on note $(\chi_y)_{i < j, y \in D_i \cap D_j}$ la base canonique du groupe de gauche et $\chi_{D_1}, \dots, \chi_{D_n}$ celle de Λ^n , la différentielle δ vérifie la formule

$$\delta(\chi_y) = [y : x] \cdot (\chi_{D_i} - \chi_{D_j}).$$

En outre, $\varepsilon(\chi_{D_i}) \in H_{p^{-1}(x), \text{ét}}^4(X', \Lambda(2))$ est obtenu par agrandissement du support à partir de la classe $\frac{1}{[z:x]} \text{Cl}_{z \rightarrow X'} \in H_{z, \text{ét}}^4(X', \Lambda(2))$ pour tout point fermé z de D_i .

Le théorème de pureté cohomologique absolue donne des isomorphismes

$$\text{Cl}_{D_i \cap D_j \rightarrow X'} : H_{\text{ét}}^0(D_i \cap D_j, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_{D_i \cap D_j, \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)),$$

ce qui permet de décrire le groupe de gauche dans la suite exacte de la proposition 3.4.1.2. Le même théorème donne aussi des isomorphismes

$$\text{Cl}_{D_i \rightarrow X'} : H_{\text{ét}}^2(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} H_{D_i, \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)).$$

En outre, on dispose du morphisme trace (relativement à x) $\text{Tr} : H_{\text{ét}}^2(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} \Lambda$. Celui-ci est caractérisé par le fait que pour tout point fermé z de D_i , l'image de $\text{Cl}_{z \rightarrow D_i} \in H_{z, \text{ét}}^2(D_i, \Lambda(1))$ par le morphisme composé

$$H_{z, \text{ét}}^2(D_i, \Lambda(1)) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\text{Tr}} \Lambda$$

soit $[z : x]$ (qui est inversible dans Λ parce que $\kappa(y)/\kappa(x)$ est purement inséparable). La description des morphismes δ et ε donnée dans l'énoncé s'obtient alors aussitôt à partir des propriétés de composition des morphismes de Gysin.

PROPOSITION 3.4.1.4. *La suite suivante est exacte :*

$$\bigoplus_{i < j} \bigoplus_{y \in D_i \cap D_j} \Lambda \xrightarrow{\delta} \bigoplus_i \Lambda \xrightarrow{\Sigma} \Lambda \rightarrow 0,$$

où Σ est défini par $\Sigma(\chi_{D_i}) = 1$ pour tout i .

Tout d'abord, à partir de la formule donnée pour δ dans la proposition 3.4.1.3, il est clair que $\Sigma \circ \delta = 0$. Σ induit donc un morphisme $\text{Coker}(\delta) \rightarrow \Lambda$. Comme les degrés $[y : x]$ qui interviennent sont inversibles dans Λ , on voit que si i et j sont tels que $D_i \cap D_j$ soit non vide, alors χ_{D_i} et χ_{D_j} ont la même classe dans $\text{Coker}(\delta)$. La fibre $p^{-1}(x)$ étant connexe (Main Theorem), on en déduit que tous les éléments χ_{D_i} ont la même classe dans $\text{Coker}(\delta)$. Il existe donc un morphisme $\Lambda \rightarrow \text{Coker}(\delta)$ envoyant 1 sur χ_{D_i} pour tout i ; ce morphisme est l'isomorphisme inverse de $\text{Coker}(\delta) \rightarrow \Lambda$.

COROLLAIRE 3.4.1.5. Les suites exactes des propositions 3.4.1.3 et 3.4.1.4 donnent naissance à un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^4(X', \Lambda(2))$.

COROLLAIRE 3.4.1.6. Via l'isomorphisme canonique $H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^4(X', \Lambda(2))$ de la proposition 3.4.1.1 (d), l'isomorphisme du corollaire précédent donne un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2))$.

DÉFINITION 3.4.1.7. On note $[x]_{X'} \in H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2))$ le générateur défini par l'isomorphisme du corollaire précédent.

3.4.2. *Indépendance en la résolution.* Dans ce paragraphe, nous allons montrer que si $q: X'' \rightarrow X$ est une autre résolution du type envisagé dans le paragraphe 3.4.1, alors $[x]_{X'} = [x]_{X''}$. Quitte à introduire une désingularisation de la composante irréductible dominant X du produit fibré de X'' de X' au-dessus de X , on peut supposer qu'une des deux désingularisations X' et X'' considérées coiffe l'autre. On suppose donc par exemple qu'il existe un (unique) X -morphisme $\pi: X'' \rightarrow X'$. Le morphisme π est projectif et birationnel entre deux schémas réguliers de dimension 2, il induit donc un isomorphisme au-dessus d'un ouvert U' de X' tel que le fermé $X' - U'$ soit de dimension 0. Il existe donc certainement un point fermé y' de $p^{-1}(y)$ tel que le morphisme induit soit un isomorphisme $\pi^{-1}(y') \rightarrow y'$. On note y'' l'unique point fermé de $\pi^{-1}(y')$. La compatibilité des classes de Gysin au changement de base (cf. XVI-2.3.2) implique que la classe $\text{Cl}_{y' \rightarrow X'}$ est envoyée sur $\text{Cl}_{y'' \rightarrow X''}$ par le morphisme de restriction $\pi^*: H_{y',\text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow H_{y'',\text{ét}}^4(X'', \Lambda(2))$. Cette compatibilité vaut encore après élargissement du support à $p^{-1}(x)$ et à $q^{-1}(x)$. En considérant la composition suivante :

$$H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H_{q^{-1}(x),\text{ét}}^4(X'', \Lambda(2)) ,$$

on obtient aussitôt que $[y' : x] \cdot [x]_{X'} = [y'' : x] \cdot [x]_{X''}$, ce qui permet de conclure que $[x]_{X'} = [x]_{X''}$.

REMARQUE 3.4.2.1. En utilisant des arguments semblables aux précédents, on peut montrer que si $p: X' \rightarrow X$ est un morphisme projectif birationnel avec X' régulier, alors, même sans supposer que $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$ soit un diviseur à croisements normaux strict, l'application $H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^4(X', \Lambda(2))$ est un isomorphisme et la classe $[x]$ s'envoie bien sur l'élément induit par $\frac{1}{[x':x]} \text{Cl}_{x' \rightarrow X'}$ pour tout point fermé x' de $p^{-1}(x)$.

3.4.3. *Compatibilité aux morphismes de transition.* Soit $\bar{y} \rightarrow X$ un point géométrique au-dessus d'un point y de codimension 1. Autrement dit, on a une spécialisation immédiate $\bar{y} \rightarrow x$ de points géométriques de X . Nous allons montrer que si $\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}$ est une spécialisation immédiate, alors on a l'égalité

$$[x] = \text{sp}_{\bar{y} \rightarrow x}^X(\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}}^X(1))$$

dans $H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2))$, ce qui achèvera la démonstration du théorème 3.1.1 jusqu'en dimension 2.

On note C l'adhérence de y dans X . Il existe une désingularisation $X' \rightarrow X$ du type envisagé dans le paragraphe 3.4.1 telle que l'adhérence C' de y dans X' soit un trait. Plus précisément, le morphisme évident $C' \rightarrow C$ identifie C' au normalisé de C . Le morphisme $C' \rightarrow C$ étant un homéomorphisme universel, on peut noter x' le point fermé de C' (celui de C est bien entendu x) et $U' = X' - x'$. On dispose d'immersions fermées évidentes $i: C \rightarrow X, i': C' \rightarrow X', k: y \rightarrow U$ et $k': y \rightarrow U'$.

LEMME 3.4.3.1. Avec les notations ci-dessus, le diagramme évident qui suit est commutatif (les flèches marquées comme étant des isomorphismes devant être considérées comme bidirectionnelles) :

$$\begin{array}{ccc} H_{x,\text{ét}}^4(X, \Lambda(2)) & \xlongequal{\quad} & H_{x,\text{ét}}^4(C, i^! \Lambda(2)) \\ \swarrow \sim & & \nwarrow \sim \\ H_{p^{-1}(x),\text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) & & H_{\text{ét}}^3(y, k^! \Lambda(2)) \\ \swarrow \sim & & \searrow \\ H_{x',\text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) & \xlongequal{\quad} & H_{x',\text{ét}}^4(C', i'^! \Lambda(2)) \end{array}$$

Ceci équivaut à la commutativité du diagramme évident :

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{ét}}^3(U, \Lambda(2)) & \xrightarrow{\sim} & H_{x, \text{ét}}^4(X, \Lambda(2)) & = & H_{x, \text{ét}}^4(C, i^! \Lambda(2)) & \longleftarrow & H_{\text{ét}}^3(y, k^! \Lambda(2)) \\ \uparrow \sim & & & & & & \parallel \\ H_{\text{ét}}^3(U', \Lambda(2)) & \xrightarrow{\sim} & H_{x', \text{ét}}^4(X', \Lambda(2)) & = & H_{x', \text{ét}}^4(C', i'^! \Lambda(2)) & \longleftarrow & H_{\text{ét}}^3(y, k'^! \Lambda(2)) \end{array}$$

On peut identifier le carré externe de ce diagramme-ci au suivant, où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli du support :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^3(U, \Lambda(2)) & \longleftarrow & H_{y, \text{ét}}^3(U, \Lambda(2)) \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ H_{\text{ét}}^3(U', \Lambda(2)) & \longleftarrow & H_{y, \text{ét}}^3(U', \Lambda(2)) \end{array}$$

Ce diagramme-là est bien évidemment commutatif, ce qui achève la démonstration du lemme 3.4.3.1.

On peut prolonger sur la droite le diagramme commutatif du lemme :

$$\begin{array}{ccccc} H_{x, \text{ét}}^4(C, i^! \Lambda(2)) & \xleftarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow x}^C} & H_{\bar{y}}^2(C, i^! \Lambda(1)) & & \\ \uparrow \sim & & \nwarrow \sim & & \\ H_{\text{ét}}^3(y, k^! \Lambda(2)) & & (\mathcal{H}^2 k^! \Lambda(1))_{\bar{y}} & \xleftarrow[\sim]{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}}^X} & \Lambda \\ \downarrow \sim & & \nearrow \sim & & \\ H_{x', \text{ét}}^4(C', i'^! \Lambda(2)) & \xleftarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow x'}^{C'}} & H_{\bar{y}}^2(C', i'^! \Lambda(1)) & & \end{array}$$

Du groupe $(\mathcal{H}^2 k^! \Lambda(1))_{\bar{y}}$ partent deux isomorphismes canoniques vers des groupes de cohomologie à supports de C et de C' ; ici, on les a multipliés respectivement par $[x' : x]$ et 1 de façon à rendre le diagramme commutatif (cf. définition 1.3.1).

On peut partir de l'élément 1 dans le groupe Λ tout à droite et considérer son image dans le groupe $H_{x, \text{ét}}^4(X, \Lambda(2))$ figurant sur le diagramme du lemme. En suivant le chemin du bas, on obtient $[x' : x] \cdot [x]_{X'}$. En suivant le chemin du haut, on obtient $[x' : x] \cdot \text{sp}_{\bar{y} \rightarrow x}^X (\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}}^X (1))$. On peut ainsi conclure que l'on a bien l'égalité

$$[x]_{X'} = \text{sp}_{\bar{y} \rightarrow x}^X (\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}}^X (1))$$

dans $H_{x, \text{ét}}^4(X, \Lambda(2))$.

3.5. Morphismes de transition en codimension arbitraire. Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.1.2 en nous appuyant sur le théorème 3.1.1 établi pour le moment jusqu'en dimension 2. Ce résultat nous permettra ensuite d'établir le théorème 3.1.1 en toute généralité.

DÉFINITION 3.5.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent. Soit $\bar{y} = \bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n = \bar{x}$ une suite de spécialisations de points géométriques de X telle que pour tout $0 \leq i < n$, la spécialisation $\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_{i+1}$ soit de codimension 0 ou 1. On note c la codimension de la spécialisation $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$. Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on note $\text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n}^X : H_{\bar{y}}^p(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{p+2c}(K(c))$ le morphisme de transition obtenu par la composition $\text{sp}_{\bar{x}_{n-1} \rightarrow \bar{x}_n}^X \circ \cdots \circ \text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_1}^X$.

DÉFINITION 3.5.2. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent. Soit $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ une spécialisation de points géométriques de X de codimension c . Soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. On dit que la propriété $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^c$ est satisfaite si le morphisme $\text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n}^X : H_{\bar{y}}^0(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{2c}(K(c))$ ne dépend pas du choix de la factorisation de $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ en $\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n$.

DÉFINITION 3.5.3. On dira que la propriété $(C)^{\leq c}$ est satisfaite si toutes les propriétés $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^{c'}$ envisagés dans la définition 3.5.2 le sont pour $c' \leq c$. On dira que la propriété $(C)_{\text{loc}}^{\leq c}$ est vérifiée si les propriétés $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, K}^{c'}$ sont vérifiées dans la situation, dite locale, où le schéma X est supposé local strictement hensélien intègre de dimension $\leq c$ de point fermé x et où $\bar{\eta}$ est au-dessus du point générique de X . Enfin, on dira que la propriété $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c}$ est satisfaite si on suppose de plus que X est normal et que $K = \Lambda$.

Il s'agit donc d'établir la propriété $(C)^{\leq c}$ pour tout $c \geq 0$. D'après la remarque 1.4.2, on peut considérer que la propriété $(C)^{\leq 1}$ est connue. En outre, notons que le théorème 3.1.1 affirme en particulier $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c}$ pour tout $c \geq 0$. Les résultats de la sous-section 3.4 montrent que $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq 2}$ est satisfaite.

PROPOSITION 3.5.4. Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme fini entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Soit $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ une spécialisation de points géométriques de X' de codimension c au-dessus d'une spécialisation $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de points géométriques de X (cf. définition 2.3.1). Pour toute factorisation $\bar{x}'_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}'_n$ de $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ en une suite de spécialisations de codimension 0 ou 1, si on note $\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n$ la factorisation de $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ en-dessous de la précédente, pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $i \in \mathbf{Z}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{y}'}^i(f^!K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{x}'_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}'_n}^{X'}} & H_{\bar{x}'}^{i+2c}(f^!K(c)) \\ \uparrow \text{Cl}_{\bar{y}' \rightarrow \bar{y}} \sim & & \sim \uparrow \text{Cl}_{\bar{x}' \rightarrow \bar{x}} \\ H_{\bar{y}}^i(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n}^X} & H_{\bar{x}}^{i+2c}(K(c)) \end{array}$$

En outre, on a l'équivalence $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^c \iff (C)_{\bar{y}' \rightarrow \bar{x}', f^!K}^c$.

La commutativité du diagramme se déduit aussitôt de la proposition 3.3.1. L'équivalence annoncée résulte de la commutativité du diagramme et du fait qu'il est essentiellement équivalent de se donner une factorisation de la spécialisation $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ ou de s'en donner une de $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ (cf. propositions 2.3.2 et 2.3.3).

LEMME 3.5.5. Pour tout entier $c \geq 0$, on a l'équivalence $(C)^{\leq c} \iff (C)_{\text{loc}}^{\leq c}$.

Supposons $(C)_{\text{loc}}^{\leq c}$ et montrons $(C)^{\leq c}$. Il suffit évidemment de montrer $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^{c'}$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, avec X un schéma local strictement hensélien de point fermé $\bar{x}$ et une spécialisation $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ de codimension $c' \leq c$. Il s'agit de vérifier que l'on peut supposer que X est intègre et que $\bar{y}$ est au-dessus du point générique. Pour cela, on introduit l'immersion fermée $i: Z \rightarrow X$ où $Z = \{\bar{y}\}$. La proposition 3.5.4 montre que $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, i^!K}^{c'}$ implique $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^{c'}$. Pour conclure, il suffit d'observer que $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, i^!K}^{c'}$ est un cas particulier de $(C)_{\text{loc}}^{\leq c}$.

LEMME 3.5.6. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local strictement hensélien intègre de dimension c , de point fermé x et de point générique η . Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . Soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

- (a) $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \tau_{\leq 0}K}^c \implies (C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, K}^c$;
- (b) $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \tau_{\leq 0}K}^c \iff (C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{H}^0K}^c$;
- (c) Soit $j: U \rightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert dense et $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$ tels que $j^*\mathcal{M} \simeq j^*\mathcal{N}$, alors $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{M}}^c \iff (C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{N}}^c$.

L'implication (a) résulte du fait que le morphisme canonique $\tau_{\leq 0}K \rightarrow K$ induise un isomorphisme $H_{\bar{\eta}}^0(\tau_{\leq 0}K) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{\eta}}^0(K)$.

On considère ensuite le morphisme canonique $\tau_{\leq 0}K \rightarrow \mathcal{H}^0K$. Il induit évidemment un isomorphisme après application de $H_{\bar{\eta}}^0$, mais aussi après celle de H_x^{2c} , pour des raisons de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1). L'équivalence (b) en résulte aussitôt.

Pour montrer (c), on peut supposer que $\mathcal{N} = j_! j^* \mathcal{M}$. On a alors un monomorphisme canonique $j_! j^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, dont le conoyau est $i_* i^* \mathcal{M}$, où $i: Z \rightarrow X$ désigne une immersion fermée complémentaire. La proposition 3.2.1 montre alors que $H_{\text{ét}}^q(X - x, (i_* i^* \mathcal{M})|_{X-x}) = 0$ pour $q \geq 2c - 2$. Ainsi, le morphisme $j_! j^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ induit un isomorphisme non seulement après application de H_{η}^0 , mais aussi celle de $H_{x, \text{ét}}^{2c}$, ce qui permet de conclure.

LEMME 3.5.7. *Pour tout entier $c \geq 0$, on a l'implication $(C)_{\text{loc., normal}, \Lambda}^{\leq c} \implies (C)_{\text{loc.}}^{\leq c}$.*

Soit X un $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local strictement hensélien intègre de dimension $c' \leq c$, de point fermé x et de point générique η . Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . D'après le lemme 3.5.6, pour montrer $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, K}^{c'}$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, il suffit de montrer $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{M}}^{c'}$ pour tout faisceau de Λ -modules $\mathcal{M}$ sur X . On peut évidemment supposer que $\mathcal{M}$ est constructible. Mais alors, il existe un ouvert dense de X au-dessus duquel $\mathcal{M}$ soit localement constant. Il existe évidemment un morphisme fini surjectif $f: \tilde{X} \rightarrow X$, avec $\tilde{X}$ normal intègre, et un ouvert dense U de X tel que f induise un revêtement fini étale $\tilde{U} = f^{-1}(U) \rightarrow U$ et que $(f^* \mathcal{M})|_{\tilde{U}}$ soit isomorphe à un faisceau constant de valeur un certain Λ -module N . Choisissons une spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}$ au-dessus de $\bar{\eta} \rightarrow x$. La propriété $(C)_{\text{loc., normal}, \Lambda}^{\leq c}$ contient $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, \Lambda}^{c'}$ comme cas particulier. Cette dernière propriété implique à son tour la propriété $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, N}^{c'}$. On observe que l'on a un isomorphisme canonique $(f^! \mathcal{M})|_{\tilde{U}} \simeq N$. L'assertion (c) du lemme 3.5.6 permet d'obtenir la propriété $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, \mathcal{H}^0(f^! \mathcal{M})}^{c'}$, et les assertions (a) et (b) d'en déduire $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, f^! \mathcal{M}}^{c'}$. Enfin, la proposition 3.5.4 permet de vérifier $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{M}}^{c'}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 3.5.8. *Pour tout entier $c \geq 3$, on a l'implication $(C)^{\leq c-1} \implies (C)_{\text{loc., normal}, \Lambda}^{\leq c}$.*

Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma noethérien excellent local strictement hensélien normal de dimension c , de point fermé x et de point générique η . On choisit un point géométrique $\bar{\eta}$ au-dessus de η . On note $s: \bar{\eta} \rightarrow x$ la spécialisation canonique. Nous allons montrer la propriété $(C)_{s, \Lambda}^c$.

Soit $\bar{z} \rightarrow X$ un point géométrique tel que $z \neq x$ et $z \neq \eta$. On a une spécialisation canonique $t: \bar{z} \rightarrow x$. On peut choisir une spécialisation $u: \bar{\eta} \rightarrow \bar{z}$. On n'obtient peut-être pas ainsi une factorisation de la spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow x$ fixée plus haut, mais il existe certainement $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ faisant commuter le diagramme suivant de spécialisations de points géométriques de X :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\eta} & \xrightarrow{s} & x \\ \sim \downarrow \sigma & & \uparrow t \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{u} & \bar{z} \end{array}$$

Les spécialisations σ , u et t sont de codimension $\leq c - 1$, les morphismes de transitions associés sont donc bien définis. On peut considérer l'image de $1 \in H_{\eta}^0(X, \Lambda)$ par le composé de ces morphismes de transition :

$$\gamma_{\sigma, u, t} := (\text{sp}_t^X \circ \text{sp}_u^X \circ \text{sp}_\sigma^X)(1) \in H_{x, \text{ét}}^{2c}(X, \Lambda(c)) .$$

Bien entendu, on a $\text{sp}_\sigma^X(1) = 1$. On note donc simplement $\gamma_{u, t}$ l'élément $\gamma_{\sigma, u, t} = (\text{sp}_t^X \circ \text{sp}_u^X)(1)$. J'affirme que cette classe $\gamma_{u, t}$ ne dépend que du point z de X en-dessous duquel $\bar{z}$ se trouve. En effet, soit $\bar{z}'$ un autre point géométrique au-dessus de z , et $t': \bar{z}' \rightarrow x$ la spécialisation canoniquement associée. On choisit une spécialisation $u': \bar{\eta} \rightarrow \bar{z}'$. On peut choisir un z -isomorphisme $\sigma': \bar{z} \xrightarrow{\sim} \bar{z}'$. Le schéma X étant géométriquement unibranche, on peut montrer facilement qu'il existe un η -isomorphisme $\sigma'': \bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}$ induisant un diagramme commutatif de spécialisations de points géométriques de X :

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\eta} & \xrightarrow{u} & \bar{z} & \xrightarrow{t} & x \\ \sim \downarrow \sigma'' & & \sim \downarrow \sigma' & & \parallel \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{u'} & \bar{z}' & \xrightarrow{t'} & x \end{array}$$

En utilisant cette fois-ci que σ'' agit trivialement sur $1 \in H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda)$, on montre que $\gamma_{u,t} = \gamma_{u',t'}$. On peut donc noter simplement γ_z cette classe.

Il s'agit de montrer que la classe γ_z est indépendante de $z \in X - \{\eta, x\}$. Par construction, si $z' \in X - \{\eta, x\}$ est tel qu'il existe une spécialisation (Zariski) $z \rightarrow z'$, on a $\gamma_z = \gamma_{z'}$.

Comme A est local normal excellent de dimension ≥ 3 , d'après [SGA 2 XIII 2.1] appliqué au complété de A , si $f \in A - \{0\}$, le schéma $\text{Spec}(A/(f)) - \{x\}$ est connexe. Il en résulte aussitôt que les classes γ_z pour $z \in \text{Spec}(A/(f)) - \{x\}$ sont égales. Maintenant, si z et z' sont deux éléments de $X - \{\eta, x\}$, il existe bien évidemment $f \in A - \{0\}$ tel que z et z' appartiennent à l'hypersurface définie par f . On obtient donc bien $\gamma_z = \gamma_{z'}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.1.2. Il s'agit d'établir la propriété $(C)^{\leq c}$ pour tout $c \geq 0$. Elle équivaut à la propriété $(C)_{\text{loc}}^{\leq c}$ d'après le lemme 3.5.5. D'après le lemme 3.5.7, elle équivaut encore à la propriété $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c}$. Compte tenu de ces équivalences, le lemme 3.5.8 montre que pour $c \geq 3$, $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c-1}$ implique $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c}$. Un raisonnement par récurrence permet donc de conclure puisque la propriété $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq 2}$ a été établie plus haut.

3.6. Fin de la démonstration.

PROPOSITION 3.6.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local hensélien normal de dimension d , de point fermé x et de point générique η . Soit $\bar{x}$ un point géométrique au-dessus de x . Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . Soit $\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}$ une spécialisation. Alors, l'image de 1 par le morphisme de transition $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}}^X: H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda) \rightarrow H_{\bar{x}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ est invariante par $\text{Gal}(\bar{x}/x)$, et indépendante de la spécialisation choisie $\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}$; on la note $[x]$. On obtient ainsi un morphisme $\Lambda[-2d] \rightarrow \tau_{\geq 2d} R\Gamma_x(\Lambda(d))$ dans $D(x_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Ceci résulte aussitôt du théorème 3.1.2 et du fait que $1 \in H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda)$ est fixé par $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$.

Par construction, les classes $[x]$ sont compatibles aux morphismes de transition. Pour finir de démontrer le théorème 3.1.1, il reste à montrer que dans la situation de la proposition précédente, le morphisme $\Lambda[-2d] \rightarrow \tau_{\geq 2d} R\Gamma_x(\Lambda(d))$ est un isomorphisme, ou encore, dans la situation où X est strictement hensélien, que le morphisme $\Lambda \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ induit par $[x]$ est un isomorphisme. En effet, des considérations de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1) expliquent alors l'annulation de $H_{x, \text{ét}}^q(X, \Lambda(d))$ pour $q > 2d$.

LEMME 3.6.2. *Soit $d \geq 3$. On suppose le résultat du théorème 3.1.1 connu jusqu'en dimension $d - 1$. Alors, pour tout $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X local strictement hensélien normal de dimension d , de point fermé x , le morphisme $\Lambda \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ induit par $[x]$ est surjectif.*

On utilise la suite spectrale de coniveau calculant la cohomologie de l'ouvert $U = X - x$ à coefficients dans $\Lambda(d)$:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{y \in U^p} H_{y, \text{ét}}^{p+q}(X_{(y)}, \Lambda(d)) \implies H_{\text{ét}}^{p+q}(U, \Lambda(d)),$$

où U^p désigne l'ensemble des points de codimension p de U . La topologie étale étant plus fine que la topologie de Nisnevich, dans l'expression du terme E_1 , on peut remplacer les localisés $X_{(y)}$ par leurs hensélisés $X_{(y)}^h$ pour tout $y \in U^p$ avec $0 \leq p \leq d - 1$. On obtient ainsi un isomorphisme canonique :

$$R\Gamma_y(X_{(y)}, \Lambda(d)) \simeq R\Gamma(y, R\Gamma_y(\Lambda(p))(d - p)).$$

La structure de $\tau_{\geq 2p} R\Gamma_y(\Lambda(p))$ est connue par notre connaissance limitée du théorème 3.1.1 puisque $p \leq d - 1$. D'après la proposition 3.2.2, on a une majoration de la ℓ -dimension cohomologique de y pour tout nombre premier ℓ divisant n : $\text{cd}_{\ell} y \leq d - p$. En appliquant la suite spectrale de composition des foncteurs dérivés au calcul de $R\Gamma_y(X_{(y)}, \Lambda(d))$, on obtient d'une part que $H_{y, \text{ét}}^i(X_{(y)}, \Lambda(d)) = 0$ pour $i > d + p$, c'est-à-dire que $H_{y, \text{ét}}^{p+q}(X_{(y)}, \Lambda(d)) = 0$ pour $q > d$, et d'autre part que $H_{y, \text{ét}}^{p+d}(X_{(y)}, \Lambda(d)) \simeq H_{\text{ét}}^{d-p}(y, \Lambda(d - p))$.

On a donc montré que $E_1^{p,q} = 0$ pour $q \geq d + 1$, et par ailleurs, il est évident que $E_1^{p,q} = 0$ si $p \geq d$. On en déduit aussitôt que l'on a des isomorphismes canoniques $\text{Coker}(E_1^{d-2,d} \rightarrow E_1^{d-1,d}) \xrightarrow{\sim}$

$H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$. En particulier, le morphisme canonique $E_1^{d-1, d} \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ est surjectif. D'après le calcul ci-dessus, on connaît la structure de $E_1^{d-1, d}$:

$$E_1^{d-1, d} \simeq \bigoplus_{y \in U^{d-1}} H_{\text{ét}}^1(y, \Lambda(1)) .$$

Pour tout $y \in U^{d-1}$, on a un isomorphisme évident $H_{\text{ét}}^1(y, \Lambda(1)) \simeq \Lambda$ (induit par une spécialisation immédiate $\bar{y} \rightarrow x$ de points géométriques de X). Il n'est pas difficile de vérifier que l'image du morphisme canonique $\Lambda \simeq H_{\text{ét}}^1(y, \Lambda(1)) \subset E_1^{d-1, d} \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ est le sous-groupe engendré par $[x]$. Par conséquent, l'image du morphisme surjectif $E_1^{d-1, d} \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ est le sous-groupe engendré par $[x]$, ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 3.6.3. *Soit $d \geq 3$. On suppose le résultat du théorème 3.1.1 connu jusqu'en dimension $d - 1$. Alors, pour tout $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X local strictement hensélien normal de dimension d , de point fermé x , le morphisme $\Lambda \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ induit par $[x]$ est un isomorphisme, autrement dit, l'énoncé du théorème 3.1.1 vaut jusqu'en dimension d .*

En vertu du lemme 3.6.2, il ne s'agit plus que de déterminer la structure du Λ -module $H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$. Compte tenu du théorème de changement de base formel (cf. [Fujiwara, 1995, corollary 6.6.4]), on peut supposer que X est complet. Les théorèmes de structure des anneaux locaux noethériens complets (cf. [ÉGA 0_{IV} 19.8.8]) montrent que X est alors isomorphe à un sous-schéma fermé d'un schéma régulier. Notons $i: X \rightarrow Y$ une immersion fermée de X dans un schéma régulier excellent Y . Compte tenu de ce que l'on sait déjà sur les complexes dualisants potentiels sur les schémas réguliers, il existe un complexe dualisant potentiel pour $(Y, -\text{codim})$ grâce à la proposition 2.4.4.1 et on peut en déduire l'existence d'un complexe dualisant potentiel sur X pour la fonction de dimension induite en utilisant par exemple la construction de la proposition 2.4.3.1. Quitte à décaler et tordre, si on note δ la fonction de dimension sur X telle que $\delta(\eta) = 0$ où η est le point générique de X , on obtient qu'il existe un complexe dualisant K pour (X, δ) . Nous allons utiliser le lemme général suivant :

LEMME 3.6.4. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent normal intègre de point générique η . On suppose X muni de la fonction de dimension δ telle que $\delta(\eta) = 0$. Soit K un complexe dualisant potentiel pour (X, δ) . Alors, les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^q K$ sont nuls pour $q < 0$ et l'épingleage en η s'étend en un isomorphisme $\mathcal{H}^0 K \simeq \Lambda$. Autrement dit, on a un isomorphisme canonique $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} K$.*

Pour obtenir le résultat pour X , il suffit de l'avoir pour ses hensélisés stricts. On peut donc supposer que X est strictement hensélien de dimension d et de point fermé x . On procède par récurrence sur d . Si $d = 0$, le résultat est évident. On suppose donc que $d \geq 1$ et que le résultat est connu pour l'ouvert $U = X - x$. Notons $j: U \rightarrow X$ et $i: x \rightarrow X$ les immersions évidentes. On a un triangle distingué dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_* i^! K \rightarrow K \rightarrow Rj_* j^* K \rightarrow i_* i^! K[1] .$$

Grâce à l'épingleage en x , il vient que $\mathcal{H}^q i^! K = 0$ pour $q \leq 1$. L'hypothèse sur U montre que $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} j^* K$. On en déduit que $\mathcal{H}^q K = 0$ pour $q < 0$ et que $\mathcal{H}^0 K \simeq j_* \Lambda$. Comme X est normal, le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow j_* \Lambda$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons à la démonstration du lemme 3.6.3, on considère le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow K$ déduit du lemme 3.6.4. Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . Choisissons une spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow x$. On considère le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont induites par $\Lambda \rightarrow K$ et les flèches horizontales par les morphismes de transition associés à la spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow x$:

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{\eta}}^0(\Lambda) & \longrightarrow & H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\bar{\eta}}^0(K) & \longrightarrow & H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K(d)) \end{array}$$

Le morphisme de gauche est évidemment un isomorphisme. Celui du bas aussi puisque K est un complexe dualisant potentiel. Le morphisme du haut est donc injectif, mais on sait déjà qu'il est surjectif. Le Λ -module $H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d))$ est donc isomorphe à Λ , ce qui permet de conclure.

4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels

4.1. Énoncés. Grâce aux résultats de la section 3, nous allons pouvoir poursuivre l'étude de certaines propriétés des complexes dualisants potentiels. Le résultat principal de la section 2 était la construction d'un complexe dualisant potentiel sur les schémas réguliers (cf. proposition 2.4.1.1). Les deux propositions suivantes établissent des propriétés de stabilité des complexes dualisants potentiels par rapport aux morphismes de type fini et aux morphismes réguliers [ÉGA IV 6.8.1].

PROPOSITION 4.1.1. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. On suppose X muni d'une fonction de dimension δ_X . On munit Y de la fonction de dimension δ_Y définie par l'égalité $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) - \text{codim}_{f^{-1}(f(y))}(y)$ pour tout $y \in Y$ (cf. XIV-2.5.4).*

Si K est un complexe dualisant putatif sur X , alors f^*K est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif sur Y , et c'est un complexe dualisant potentiel si K en est un.

PROPOSITION 4.1.2. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini compactifiable entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. On suppose X muni d'une fonction de dimension δ_X . On munit Y de la fonction de dimension δ_Y définie par l'égalité $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) + \deg. \text{tr.}(y/f(y))$ pour tout $y \in Y$ (cf. XIV-2.5.2).*

Si K est un complexe dualisant putatif sur X , alors $f^!K$ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif sur Y , et c'est un complexe dualisant potentiel si K en est un.

REMARQUE 4.1.3. Au cours des démonstrations, on observera que les constructions des propositions 4.1.1 et 4.1.2 sont compatibles à la composition des morphismes : si $g: Z \rightarrow Y$ est un autre morphisme du type envisagé et K un complexe dualisant putatif sur X , l'isomorphisme de transitivité $g^*f^*K \simeq (f \circ g)^*K$ (resp. $g^!f^!K \simeq (f \circ g)^!K$) est compatible aux épinglages. La proposition 4.1.1 généralise la construction de la proposition 2.2.1 (cas où f est étale).

Nous verrons plus bas que la proposition 4.1.2 résulte facilement de la proposition 4.1.1. Nous allons donc nous intéresser plus particulièrement aux morphismes réguliers. La sous-section suivante sur le théorème de changement de base par un morphisme régulier nous permettra de définir une structure de complexe dualisant putatif sur f^*K dans la situation de la proposition 4.1.1. Dans le cas d'un complexe dualisant potentiel, ce sont les résultats de la section 3 qui vont nous permettre de vérifier que les épinglages sur f^*K sont compatibles aux spécialisations.

4.2. Changement de base par un morphisme régulier. Dans ce numéro, on étudie quelques conséquences du théorème de changement de base par un morphisme régulier XIV-2.5.3 dont on rappelle l'énoncé :

PROPOSITION 4.2.1. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas localement noethériens. Soit $g: X' \rightarrow X$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. On constitue le carré cartésien de schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Alors, pour tout $K \in D^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme de changement de base $f^*Rg_*K \rightarrow Rg'_*f'^*K$ est un isomorphisme dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.

PROPOSITION 4.2.2. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit $K \in D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Soit $L \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, le morphisme évident est un isomorphisme dans $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$f^*R\mathbf{H}\mathbf{om}(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathbf{H}\mathbf{om}(f^*K, f^*L).$$

Avant de la démontrer, signalons un corollaire de cette proposition (cas où $K := i_*\Lambda$ et $L := M$) :

COROLLAIRE 4.2.3. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée. Notons $i': f^{-1}(Z) \rightarrow Y$ l'immersion fermée déduite par changement de base, et $f': f^{-1}(Z) \rightarrow Z$ la projection. Alors, pour tout $M \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme évident $f'^* i^! M \rightarrow i^! f^* M$ est un isomorphisme dans $D^+(f^{-1}(Z)_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Pour démontrer la proposition 4.2.2, commençons par constater que ce corollaire est un cas particulier de la proposition 4.2.1 (l'appliquer avec pour g l'immersion ouverte complémentaire de i).

LEMME 4.2.4. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée. On constitue le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Soit $K \in D_c^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$. On suppose que pour tout $L \in D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f'^* R\mathbf{Hom}(K, L) \rightarrow R\mathbf{Hom}(f'^* K, f'^* L)$ est un isomorphisme. Alors, pour tout $L \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f^* R\mathbf{Hom}(i_* K, L) \rightarrow R\mathbf{Hom}(f^* i_* K, f^* L)$ est un isomorphisme.

Ce lemme-ci résulte aussitôt du corollaire 4.2.3.

LEMME 4.2.5. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit $j: U \rightarrow X$ une immersion ouverte. On constitue le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Soit $K \in D_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. On suppose que pour tout $L \in D^+(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f'^* R\mathbf{Hom}(K, L) \rightarrow R\mathbf{Hom}(f'^* K, f'^* L)$ est un isomorphisme. Alors, pour tout $L \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f^* R\mathbf{Hom}(j_! K, L) \rightarrow R\mathbf{Hom}(f^* j_! K, f^* L)$ est un isomorphisme.

Ce lemme-là résulte de l'isomorphisme $f^* Rj_* \simeq Rj'_* f'^*$ qui est un cas particulier de la proposition 4.2.1.

Démontrons la proposition 4.2.2. Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 permettent de supposer que K est un faisceau localement constant constructible de Λ -modules sur X . En utilisant que le résultat est trivial si f est étale, on se ramène au cas où K est un faisceau constant de valeur M où M est un Λ -module de type fini. En introduisant une résolution projective (éventuellement infinie) de M , on peut se ramener au cas trivial où M est libre de type fini sur Λ .

4.3. Démonstration de la proposition 4.1.1.

4.3.1. Structure de complexe dualisant putatif sur $f^* K$.

LEMME 4.3.1.1. Dans la situation de la proposition 4.1.1, si K est un complexe dualisant putatif sur X , on peut munir $f^* K$ d'une structure de complexe dualisant putatif sur Y .

Soit K un complexe dualisant putatif sur X . Soit $x \in X$. Introduisons le localisé $X' = X_{(x)}$ de X en x et $Y' = Y \times_X X'$. Notons $i: f^{-1}(x) \rightarrow Y'$ l'immersion de la fibre au-dessus de x , $g: f^{-1}(x) \rightarrow x$ la projection et $j: Y' \rightarrow Y$ le morphisme canonique. D'après le corollaire 4.2.3, on a un isomorphisme canonique $g^* R\Gamma_x(K) \simeq i^! j^* f^* K$. Définir des épinglages sur $f^* K$ en les points de $f^{-1}(x)$ revient à définir une structure de complexe dualisant putatif sur $i^! j^* f^* K$ pour la fonction de dimension $\delta_{Y|f^{-1}(x)}$. On vient de voir que cet objet s'identifie à $g^* R\Gamma_x(K)$ qui s'identifie lui-même à $\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)]$ en vertu de l'épingleage donné de K en x . La fibre $f^{-1}(x)$ étant régulière, le faisceau constant Λ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel pour la fonction de dimension – codim (cf. proposition 2.4.4.1). Vu la définition de δ_Y , on en déduit aussitôt une structure de complexe dualisant

potentiel sur $\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)] \in D^+(f^{-1}(x)_{\text{ét}}, \Lambda)$ pour la fonction de dimension $\delta_{Y|f^{-1}(x)}$. On a ainsi obtenu des épinglages pour f^*K en tous les points de $f^{-1}(x)$. Grâce à cette construction fibre à fibre, on a défini une structure de complexe dualisant putatif sur f^*K .

LEMME 4.3.1.2. *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents réguliers. On munit X et Y des fonctions de dimension $\delta_X = -\text{codim}$ et $\delta_Y = -\text{codim}$. On munit les faisceaux constants Λ sur X et Y des structures de complexes dualisants putatifs définies dans la proposition 2.4.1.1 ; le lemme 4.3.1.1 munit $f^*\Lambda$ d'une structure de complexe dualisant putatif sur Y pour la fonction de dimension δ_Y . Alors, l'isomorphisme canonique $\Lambda \simeq f^*\Lambda$ sur Y est compatible aux épinglages.*

Vérifions la compatibilité de l'isomorphisme canonique $\Lambda \simeq f^*\Lambda$ aux épinglages en un point y de Y . Quitte à localiser, on peut supposer que X est local de point fermé $x = f(y)$ et que y est un point fermé dans la fibre $F = f^{-1}(y)$. Notons $c = \text{codim}_X x$ et $d = \text{codim}_Y y$. L'épinglage de $f^*\Lambda$ en y est donné par le produit des classes $f^*(Cl_{x \rightarrow X}) \in H_{F, \text{ét}}^{2c}(Y, \Lambda(c))$ et $Cl_{y \rightarrow F} \in H_{y, \text{ét}}^{2d}(F, \Lambda(d))$, ce produit trouvant demeure dans $H_{y, \text{ét}}^{2c+2d}(Y, \Lambda(c+d))$. La compatibilité des classes de Gysin au changement de base (cf. XVI-2.3.2) implique que $f^*(Cl_{x \rightarrow X})$ est la classe de Gysin $Cl_{F \rightarrow Y} \in H_{F, \text{ét}}^{2c}(Y, \Lambda(c))$. En utilisant la compatibilité des classes de Gysin à la composition, le produit considéré plus haut est $Cl_{y \rightarrow Y}$, qui est précisément la classe qui définit l'épinglage de Λ en y .

REMARQUE 4.3.1.3. Supposons que l'on dispose de deux morphismes réguliers composables $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Si K est un complexe dualisant putatif sur X , alors appliquer la construction du lemme 4.3.1.1 à f , puis à g , revient à l'appliquer directement à $f \circ g$, autrement dit l'isomorphisme évident $g^*f^*K \simeq (f \circ g)^*K$ dans $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ est compatible aux épinglages. En effet, les constructions s'effectuant fibre à fibre, on peut supposer que X est le spectre d'un corps et, quitte à modifier la fonction de dimension, que $K = \Lambda$; en particulier, X, Y et Z sont réguliers, les faisceaux constants Λ sur X, Y et Z sont naturellement munis de structures de complexes dualisants putatifs (et même potentiels, cf. proposition 2.4.4.1) pour les fonctions de dimension considérées, la compatibilité requise est obtenue en appliquant le lemme 4.3.1.2 aux morphismes f, g et $f \circ g$.

4.3.2. *Compatibilité aux spécialisations.* Supposons maintenant que K soit un complexe dualisant potentiel. Par définition des complexes dualisants potentiels, il s'agit maintenant de montrer que les épinglages sur f^*K sont compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates. D'après le théorème 3.1.2, on peut donner un sens à cette compatibilité pour toute spécialisation $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$ de points géométriques de Y , quelle que soit sa codimension ; c'est l'objet de la définition suivante :

DÉFINITION 4.3.2.1. Soit L un complexe dualisant putatif sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent Y muni d'une fonction de dimension δ . Soit $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$ une spécialisation de points géométriques de Y . On dit que les épinglages de L sont **compatibles à la spécialisation** $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$ si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{y'}^{-2\delta(y')} (L(-\delta(y'))) & \xrightarrow{\text{sp}_{y' \rightarrow \overline{y}}^X} & H_{\overline{y}}^{-2\delta(y)} (L(-\delta(y))) \\ & \searrow \sim & \downarrow \sim \\ & & \Lambda \end{array}$$

(Les isomorphismes avec Λ sont induits par les épinglages en y et y' .)

Il est évident qu'un complexe dualisant putatif est un complexe dualisant potentiel (cf. définition 2.1.2) si et seulement si ses épinglages sont compatibles aux spécialisations immédiates au sens ci-dessus et si c'est le cas, la construction du théorème 3.1.2 montre qu'ils sont compatibles à toutes les spécialisations.

LEMME 4.3.2.2. *Plaçons nous dans la situation de la proposition 4.1.1. Soit K un complexe dualisant potentiel sur X . Soit $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$ une spécialisation de points géométriques de Y au-dessus d'une spécialisation*

$\overline{x'} \rightarrow \overline{x}$ de points géométriques de X . Si $\overline{x'} \rightarrow \overline{x}$ est de codimension 0 ou 1, alors les épingleages sur f^*K sont compatibles à la spécialisation $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$.

Étant entendu que la construction de la structure de complexe dualisant putatif sur f^*K a été réalisée fibre à fibre, on peut supposer que X est local strictement hensélien intègre, de point générique x' et de point fermé x . Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que dans ce cas f^*K est un complexe dualisant potentiel. On peut supposer que $\delta_X(x') = 0$. Le schéma X étant de dimension ≤ 1 , si on note $n: \tilde{X} \rightarrow X$ la normalisation de X , le schéma $\tilde{X}$ est régulier. On constitue le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{n'} & Y \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\ \tilde{X} & \xrightarrow{n} & X \end{array}$$

Les morphismes n et n' sont finis surjectifs radiciels. Pour eux, on dispose des constructions $n^!$ et $n'^!$ sur les complexes dualisants putatifs (cf. proposition 2.4.3.1). Pour les morphismes réguliers f et $\tilde{f}$, on a les constructions f^* et $\tilde{f}^*$. On peut donc considérer les complexes dualisants putatifs $\tilde{f}^*n^!K$ et $n'^!f^*K$. D'après le lemme 4.3.2.3 à suivre, on a un isomorphisme canonique de complexes dualisants putatifs $\tilde{f}^*n^!K \simeq n'^!f^*K$. En outre, la proposition 2.4.3.3 montre que pour montrer que f^*K est un complexe dualisant potentiel, il suffit de montrer que $n'^!f^*K$ en est un. Comme il s'identifie à $\tilde{f}^*n^!K$ et que la proposition 2.4.3.3 nous dit aussi que $n^!K$ est un complexe dualisant potentiel, on peut finalement remplacer f par $\tilde{f}$ et supposer que X est régulier de dimension ≤ 1 . On peut alors supposer que $K = \Lambda$, épinglé comme il convient de le faire. Le complexe $f^*\Lambda$ s'identifie à Λ dont on sait qu'il peut-être muni d'une structure de complexe dualisant potentiel (cf. proposition 2.4.4.1). Il s'agit de montrer que les épingleages sur $f^*\Lambda$ et sur Λ sont compatibles : c'est le sens du lemme 4.3.1.2.

LEMME 4.3.2.3. *Plaçons nous dans la situation de la proposition 4.1.1. Soit $g: X' \rightarrow X$ un morphisme fini surjectif radiciel. On constitue le carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Soit K un complexe dualisant putatif sur X . Alors, l'isomorphisme évident $f'^*g^!K \simeq g'^!f^*K$ dans $D^+(Y'_{\text{ét}}, \Lambda)$ est compatible aux épingleages.

Les constructions envisagées se réalisant fibre à fibre, on peut supposer que X et X' sont les spectres de corps notés respectivement E et E' . Les morphismes f et f' étant plats et à fibres géométriquement régulières, les schémas Y et Y' sont réguliers. Dans cette situation, compte tenu de la proposition 2.4.3.3 et de la construction du lemme 4.3.1.1, il est manifeste que les complexes dualisants putatifs $f'^*g^!K$ et $g'^!f^*K$ sont des complexes dualisants potentiels. Pour montrer que l'isomorphisme évident $f'^*g^!K \simeq g'^!f^*K$ est compatible aux épingleages, il suffit donc de le faire aux points maximaux de Y' . Bref, on peut supposer que Y est lui aussi le spectre d'un corps F . Comme Y' est régulier et homéomorphe à Y , le schéma Y' est à son tour le spectre d'un corps F' . Compte tenu de la construction de la proposition 2.4.3.1 faisant intervenir les morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète $Y' \rightarrow Y$ et $X' \rightarrow X$, la comparaison des deux structures de complexes dualisants putatifs envisagées sur Y' se ramène à l'égalité des degrés $[F' : F] = [E' : E]$, qui résulte aussitôt de la définition de $Y' : F' = E' \otimes_E F$.

Pour finir la démonstration de la proposition 4.1.1, il nous reste à établir des compatibilités entre les épingleages sur f^*K et les spécialisations de points géométriques de Y . Les lemmes suivants sur les spécialisations nous seront utiles.

LEMME 4.3.2.4. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. On suppose que f est un morphisme local entre schémas locaux strictement henséliens. Soit $\bar{x} \rightarrow X$ un point géométrique de X . Alors, $f^{-1}(\bar{x}) = Y_{\bar{x}} = Y \times_X \bar{x}$ est un schéma intègre.

Notons $Y_x := Y \times_X x$. Soit x'/x une extension finie séparable. Notons plus généralement $Y \times_x x' := Y_x \times_x x' \simeq Y \times_X x'$. Si $n \geq 2$ est un entier inversible en x , en appliquant la proposition 4.2.1 au faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au morphisme $x' \rightarrow X$ et au changement de base régulier $Y \rightarrow X$, on obtient un isomorphisme $H_{\text{ét}}^0(x', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^0(Y_{x'}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. On en déduit que $Y_{x'}$ est connexe. Le morphisme $f: Y \rightarrow X$ étant régulier, le schéma $Y_{x'}$ est régulier et connexe, donc intègre. Le schéma $Y_{\bar{x}}$ étant une limite projective filtrante de ces schémas affines intègres $Y_{x'}$, on obtient que $Y_{\bar{x}}$ est intègre.

LEMME 4.3.2.5. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. Soit $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ une spécialisation de points géométriques de X . Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique de Y au-dessus de $\bar{x}$ tel que η soit de codimension 0 dans sa fibre pour f . Alors, à un isomorphisme non nécessairement unique près, il existe une unique spécialisation $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$ au-dessus de $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ telle que η' soit de codimension 0 dans sa fibre. La codimension de $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$ est la même que celle de $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$.

On peut supposer que f est un morphisme local entre schémas locaux strictement henséliens Y et X de points fermés respectifs $\bar{\eta}$ et $\bar{x}$. Établir le lemme dans ce cas précis revient à montrer qu'à isomorphisme près, la fibre géométrique $Y_{\bar{x}'}$ n'a qu'un seul point géométrique au-dessus d'un point maximal de $Y_{\bar{x}'}$, ce qui résulte du lemme 4.3.2.4. Il résulte de [ÉGA IV 6.1.2] que la codimension de la spécialisation de $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$ est la même que celle de $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$.

LEMME 4.3.2.6. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. Soit $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$ une spécialisation de points géométriques de Y au-dessus d'une spécialisation $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ de points géométriques de X . On suppose que η et η' sont de codimension 0 dans leur fibre pour f . Soit $\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n$ une factorisation de la spécialisation $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ en une suite de spécialisations immédiates. Alors, on peut décomposer $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$ en une suite de spécialisations immédiates $\bar{\eta}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{\eta}_n$ au-dessus de $\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n$, chacun des points η_i étant de codimension 0 dans sa fibre pour f .

Ceci résulte aussitôt du lemme 4.3.2.5.

LEMME 4.3.2.7. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. Soit $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$ une spécialisation de points géométriques de Y au-dessus de $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$. Alors, il existe un diagramme commutatif de spécialisations de points géométriques de Y :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\eta}' & \longrightarrow & \bar{\eta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{y}' & \longrightarrow & \bar{y} \end{array}$$

où les points géométriques $\bar{\eta}'$ et $\bar{\eta}$ sont respectivement au-dessus de $\bar{x}'$ et de $\bar{x}$, et où η' et η sont de codimension 0 dans leur fibre pour f .

On peut supposer que X et Y sont locaux strictement henséliens de points fermés respectifs $\bar{y}$ et $\bar{x}$. On choisit une spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}$ de points géométriques de la fibre $Y_{\bar{x}}$ avec η de codimension 0 dans cette fibre. D'après le lemme 4.3.2.5, il existe une spécialisation $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$ de points géométriques de Y au-dessus de $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$, avec η' de codimension 0 dans sa fibre pour f . Par ailleurs, la fibre géométrique $Y_{\bar{x}'}$ étant intègre, on peut en choisir un point géométrique $\bar{\eta}''$ au-dessus du point générique. Le point géométrique $\bar{y}'$ de Y étant au-dessus de $\bar{x}'$, il définit un point géométrique de $Y_{\bar{x}'}$; on dispose donc d'une spécialisation $\bar{\eta}'' \rightarrow \bar{y}'$ de points géométriques au-dessus de $\bar{x}'$. La fibre géométrique $Y_{\bar{x}'}$ étant intègre, il existe un isomorphisme $\bar{\eta}' \simeq \bar{\eta}''$, ce qui donne le diagramme commutatif souhaité.

4.3.3. Fin de la démonstration. Finissons la démonstration de la proposition 4.1.1, il s'agit de montrer que pour tout complexe dualisant potentiel K sur X , les épinglages sur le complexe dualisant putatif f^*K sont compatibles aux spécialisations de points géométriques de Y . Soit $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$ une telle

spécialisation. Le lemme 4.3.2.7 s'applique et on obtient un diagramme commutatif de spécialisations comme ci-dessus. Pour montrer la compatibilité pour la spécialisation $\overline{y}' \rightarrow \overline{y}$, il suffit de l'obtenir pour les trois autres spécialisations qui interviennent dans le carré commutatif. Pour les spécialisations $\overline{\eta}' \rightarrow \overline{y}'$ et $\overline{\eta} \rightarrow \overline{y}$, cela résulte aussitôt des faits observés dans la construction même du lemme 4.3.1.1, à savoir que chaque fibre de f est munie d'un complexe dualisant potentiel. On peut appliquer le lemme 4.3.2.6 pour obtenir une factorisation de $\overline{\eta}' \rightarrow \overline{\eta}$ en une suite de spécialisations immédiates $\overline{\eta}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \overline{\eta}_n$ au-dessus d'une composition de spécialisations immédiates $\overline{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \overline{x}_n$ de points géométriques de X . On peut appliquer le lemme 4.3.2.2 aux spécialisations $\overline{\eta}_i \rightarrow \overline{\eta}_{i+1}$ pour obtenir la compatibilité souhaitée pour $\overline{\eta}' \rightarrow \overline{\eta}$, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1.1.

4.4. Démonstration de la proposition 4.1.2.

LEMME 4.4.1. *Dans la situation de la proposition 4.1.2, si K est un complexe dualisant putatif sur X , on peut munir $f^!K$ d'une structure de complexe dualisant putatif sur Y .*

Définir la structure de complexe dualisant putatif sur $f^!K$ peut se faire fibre à fibre. On suppose donc que $X = x$ est le spectre d'un corps. Soit $y \in Y$. Soit U un ouvert non vide de régularité de l'adhérence (réduite) $\overline{\{y\}}$. On note $j: U \rightarrow Y$ l'immersion de U dans Y et $\pi: U \rightarrow x$ la projection. On a des isomorphismes canoniques induits par le morphisme de Gysin Cl_π et l'épinglage de K en x :

$$\Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)] \xrightarrow{\sim} \pi^! \Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)] \xleftarrow{\sim} \pi^! R\Gamma_x(K) \simeq j^! f^! K.$$

En passant au point générique de U , on obtient l'isomorphisme voulu : $R\Gamma_y(f^!K) \simeq \Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)]$. Il ne dépend évidemment pas de l'ouvert U , ce qui permet de définir l'épinglage souhaité de $f^!K$ en y .

On peut vérifier que la construction de cette structure de complexe dualisant putatif sur $f^!K$ est compatible à la composition des morphismes de type fini (pour le sens de cette affirmation, cf. remarque 4.1.3). Par ailleurs, il est évident que dans le cas où f est quasi-fini, les épinglages définis ici sont les mêmes que ceux de la proposition 2.4.3.1. Enfin, dans le cas où f est lisse de dimension relative d , via l'isomorphisme canonique $f^*K \simeq f^!K(d)[2d]$, les épinglages sont compatibles avec ceux de la proposition 4.1.1, compte tenu du décalage entre les deux fonctions de dimension envisagées sur Y .

Montrons la proposition 4.1.2. La question étant de nature locale, on peut supposer que $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme de type fini entre schémas affines. Il existe donc une factorisation $f = p \circ i$ avec i une immersion fermée et p un morphisme lisse. Soit K un complexe dualisant potentiel sur X . Les remarques précédentes montrent que $p^!K$, puis $i^!p^!K$ sont des complexes dualisants potentiels et que ce dernier s'identifie à $f^!K$. Par conséquent, $f^!K$ est un complexe dualisant potentiel, ce qui achève la démonstration.

5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels

5.1. Énoncé du théorème. L'objectif de cette section est d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 5.1.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Alors (X, δ) admet un complexe dualisant potentiel K_X , unique à isomorphisme unique près, et le morphisme évident $\Lambda \rightarrow \tau_{\leq 0} R\mathbf{Hom}(K_X, K_X)$ est un isomorphisme dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. De plus, $K_X \in \text{Perv}^{-2\delta}(X, \Lambda)$ (cf. sous-section 5.2).*

5.2. Préliminaires sur les faisceaux pervers. Si X est un schéma noethérien et $p: X \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ une fonction de perversité (c'est-à-dire que pour toute spécialisation $\overline{y} \rightarrow \overline{x}$ de points géométriques de X , on a $p(x) \geq p(y)$), Gabber a défini dans [Gabber, 2004] une t -structure $(D^{\leq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda), D^{\geq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda))$ sur $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ de sorte que pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on ait :

$$K \in D^{\leq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \iff \forall x \in X, K|_x \in D^{\leq p(x)}(x_{\text{ét}}, \Lambda),$$

$$K \in D^{\geq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \iff \forall x \in X, R\Gamma_x(K) \in D^{\geq p(x)}(x_{\text{ét}}, \Lambda),$$

où l'on a muni chacune des catégories $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ de sa t -structure canonique.

On note $\text{Perv}^p(X, \Lambda) \subset D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure, les foncteurs de troncature étant notés $\tau_{\leq p}$ et $\tau_{\geq p}$.

DÉFINITION 5.2.1. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. On dit que f est une **pseudo-immersion ouverte** si f induit un homéomorphisme sur son image et que le morphisme induit $f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme.

Cette classe de morphismes est stable par composition ; elle contient les immersions ouvertes et les localisations.

PROPOSITION 5.2.2. Soit $p: X \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ une fonction de perversité. Soit $f: Y \rightarrow X$ une pseudo-immersion ouverte.

- (a) La fonction $p \circ f: Y \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ est une fonction de perversité (encore notée p) et pour les t -structures définies par p , $f^*: D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ est t -exact et $Rf_*: D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ t -exact à gauche ;
- (b) Le foncteur f^* induit un foncteur exact $f^*: \text{Perv}^p(X, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^p(Y, \Lambda)$ qui admet un adjoint à droite $f_*^p: \text{Perv}^p(Y, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^p(X, \Lambda)$ défini par la formule $f_*^p K = \tau_{\leq p} Rf_* K$;
- (c) Le morphisme d'adjonction $f^* f_*^p \rightarrow \text{Id}_{\text{Perv}^p(Y, \Lambda)}$ est un isomorphisme et le foncteur $f_*^p: \text{Perv}^p(Y, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^p(X, \Lambda)$ est pleinement fidèle.
- (d) Si $g: Z \rightarrow Y$ est une pseudo-immersion ouverte composable avec f , on dispose d'un isomorphisme de transitivité $f_*^p \circ g_*^p \simeq (f \circ g)_*^p$.

La t -exactitude de f^* est triviale. En particulier, f^* est t -exact à droite ; par adjonction, Rf_* est t -exact à gauche. (b) résulte aussitôt de (a). (c) en résulte aussi compte tenu du fait que le morphisme d'adjonction $f^* Rf_* \rightarrow \text{Id}_{\text{Perv}^p(X, \Lambda)}$ est un isomorphisme. L'isomorphisme du (d) se déduit par adjonction de l'isomorphisme de transitivité des foncteurs images inverses.

5.3. Cas d'un schéma normal.

PROPOSITION 5.3.1. L'énoncé du théorème 5.1.1 est vrai si on suppose de plus que le schéma X est normal. Plus précisément, soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent irréductible normal de point générique η , muni d'une fonction de dimension δ telle que $\delta(\eta) = 0$. On note $j: \eta \rightarrow X$ l'inclusion du point générique et on pose $T = j_*^\varphi \Lambda$ où $\varphi: X \rightarrow \mathbf{N}$ est la fonction de perversité définie par l'égalité :

$$\varphi(x) = \max(0, 2 \dim \mathcal{O}_{X,x} - 2)$$

pour tout $x \in X$.

- (a) Le morphisme d'adjonction $\Lambda \rightarrow j_*^\varphi j^* \Lambda$ définit un morphisme évident $\Lambda \rightarrow T$ tel que pour tout point géométrique $\bar{x} \rightarrow X$, l'application induite

$$H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(\Lambda) \rightarrow H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(T)$$

soit un isomorphisme et que $H_{\bar{x}}^q(T) = 0$ si $q \neq -2\delta(x)$. Le théorème 3.1.1 fournit alors un épinglage de T en x . Avec ces épinglages, T est un complexe dualisant potentiel pour (X, δ) .

- (b) Si K est un complexe dualisant potentiel pour (X, δ) , alors K appartient à $\text{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$ (et à $\text{Perv}^{-2\delta}(X, \Lambda)$) et le morphisme $K \rightarrow T$ qui s'en déduit aussitôt est un isomorphisme compatible aux épinglages.
- (c) Si K est un complexe dualisant potentiel sur X , alors le morphisme évident $\Lambda \rightarrow \tau_{\leq 0} R\text{Hom}(K, K)$ est un isomorphisme.

Établissons (a). Le point essentiel est de montrer que pour tout $x \in X$, le morphisme évident $H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(\Lambda) \rightarrow H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(T)$ est un isomorphisme et que $H_{\bar{x}}^q(T)$ est nul si $q \neq -2\delta(x)$. Le fait que T soit un complexe dualisant potentiel résultera alors aussitôt du théorème 3.1.1. Pour établir le résultat voulu, on peut supposer que X est local strictement hensélien de point fermé x . Par récurrence sur $d = \dim X$, on peut supposer (a) connu sur l'ouvert $U = X - x$. Si $d = 0$, le résultat est évident. On suppose donc $d \geq 1$, de sorte que U contienne le point générique de X . Posons $L = T|_U$. D'après la proposition 5.2.2,

si on note $g: U \rightarrow X$ l'immersion ouverte évidente, on a un isomorphisme canonique $T = g_*^\varphi L$. On en déduit aussitôt un isomorphisme canonique $T = \tau_{\leq \varphi(x)} Rg_* L$.

Si $d = 1$, $\varphi(\eta) = 0$, donc $T = g_* \Lambda = \Lambda$. La proposition 2.4.2.1 permet de conclure que T est bien un complexe dualisant potentiel avec les épinglages envisagés ici. On suppose donc que $d \geq 2$. Dans ce cas, on a $\varphi(x) = 2d - 2$ et $T = \tau_{\leq 2d-2} Rg_* L$.

D'après le lemme 3.6.4, la structure des objets de cohomologie $\mathcal{H}^q L$ pour $q \leq 0$ est connue. Notons $i: x \rightarrow X$ l'immersion du point fermé de X . Utilisons le triangle distingué canonique :

$$i_* i^! T \rightarrow T \rightarrow Rg_* L \rightarrow i_* i^! T[1].$$

Il en résulte une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_{\text{ét}}^{q-1}(U, L) \rightarrow H_{x, \text{ét}}^q(X, T) \rightarrow (\mathcal{H}^q T)_x \rightarrow H_{\text{ét}}^q(U, L) \rightarrow \dots$$

Par construction, $(\mathcal{H}^q T)_x \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^q(U, L)$ si $q \leq 2d - 2$ et $(\mathcal{H}^q T)_x = 0$ si $q \geq 2d - 1$. Il en résulte que $H_{x, \text{ét}}^q(X, T) = 0$ si $q \leq 2d - 1$ et que l'on a des isomorphismes $H_{\text{ét}}^{q-1}(U, L) \xrightarrow{\sim} H_{x, \text{ét}}^q(X, T)$ pour $q \geq 2d$. Il vient aussi que $\mathcal{H}^q T = 0$ si $q < 0$ et que l'on a un isomorphisme canonique $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 T$. Ainsi, on a un morphisme canonique $\Lambda \rightarrow T$ induisant un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} T$.

LEMME 5.3.2. *Soit U le complémentaire du point fermé dans un schéma local strictement hensélien excellent normal X de dimension $d \geq 2$. Soit $M \in D^{\leq \varphi}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} M$. Alors, pour tout $q \geq 2d$, le morphisme évident est un isomorphisme :*

$$H_{\text{ét}}^{q-1}(U, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^{q-1}(U, M).$$

On note M^+ un cône du morphisme évident $\Lambda \rightarrow M$. Il suffit de montrer que $H_{\text{ét}}^q(U, M^+) = 0$ pour $q \geq 2d - 2$. Les hypothèses impliquent que les objets de cohomologie de M^+ sont nuls en dehors de l'intervalle $[1, 2d - 4]$. On peut aussi observer que pour tout $1 \leq i \leq d - 2$, si $y \in U$ est tel que $(\mathcal{H}^{2i-1} M^+)_{\bar{y}}$ ou $(\mathcal{H}^{2i} M^+)_{\bar{y}}$ soit non nul, alors l'adhérence (dans X) de y est de dimension $\leq d - i - 1$. D'après la proposition 3.2.1 et la suite spectrale d'hypercohomologie, on obtient bien que $H_{\text{ét}}^q(U, M^+) = 0$ si $q \geq 2d - 2$.

On peut appliquer le lemme 5.3.2 avec $M = L$. Il résulte alors de ce qui précède et du théorème 3.1.1 que $H_{x, \text{ét}}^q(X, T) = 0$ si $q \neq 2d$, que l'on a un isomorphisme canonique $H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, T(d))$, et que l'on peut ainsi définir des épinglages sur T qui en font un complexe dualisant potentiel sur X .

Montrons maintenant (b). Soit K un complexe dualisant potentiel sur X . Il est évident que $K \in D^{\geq -2\delta}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset D^{\geq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Pour montrer que $K \in D^{\leq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset D^{\leq -2\delta}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut supposer que X est local strictement hensélien de dimension d . On note $i: x \rightarrow X$ l'inclusion du point fermé et $g: U \rightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire $X - x$. Le cas où $d = 0$ étant trivial et celui où $d = 1$ ayant été traité dans la proposition 2.4.2.1, on peut supposer que $d \geq 2$. Par récurrence sur d , on peut supposer (b) connu pour l'ouvert U . On note $L = K|_U \in D^{\leq \varphi}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Comme K est un complexe dualisant potentiel, la structure des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^q K$ pour $q \leq 0$ est connue (cf. lemme 3.6.4). On peut donc appliquer le lemme 5.3.2 avec $M = L$. Ainsi, le morphisme évident est un isomorphisme $H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, L)$, et $H_{\text{ét}}^q(U, L) = 0$ pour $q \geq 2d$ (cf. proposition 3.2.1).

De même que pour établir (a), on utilise le triangle distingué canonique :

$$i_* i^! K \rightarrow K \rightarrow Rg_* L \rightarrow i_* i^! K[1],$$

et la suite exacte longue qui s'en déduit :

$$\dots \rightarrow H_{\text{ét}}^{q-1}(U, L) \rightarrow H_{x, \text{ét}}^q(X, K) \rightarrow (\mathcal{H}^q K)_x \rightarrow H_{\text{ét}}^q(U, L) \rightarrow \dots$$

La structure de $H_{x, \text{ét}}^q(X, K)$ étant connue pour tout $q \in \mathbb{Z}$, il vient aussitôt que $(\mathcal{H}^q K)_x = 0$ pour $q \geq 2d + 1$ et que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathcal{H}^{2d-1} K)_x \rightarrow H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, L) \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K) \rightarrow (\mathcal{H}^{2d} K)_x \rightarrow 0.$$

Pour montrer que $K \in D^{\leq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, il reste donc à montrer que le morphisme canonique $H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, L) \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K)$ est un isomorphisme. Choisissons une spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow x$. On peut considérer le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont induites par le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow K$:

$$\begin{array}{ccccc} H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^X} & H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d)) & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, \Lambda(d)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ H_{\bar{\eta}}^0(X, K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^X} & H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K(d)) & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, L(d)) \end{array}$$

Les flèches de la colonne de gauche vers celle du milieu sont les morphismes de transition introduits au théorème 3.1.2. Ici, ce sont des isomorphismes : pour la flèche du haut, cela résulte du théorème 3.1.1 et pour la flèche du bas, du fait que K soit un complexe dualisant potentiel. On en déduit que le morphisme du milieu $H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, \Lambda(d)) \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K(d))$ est un isomorphisme. Compte tenu des autres isomorphismes connus, il vient que le morphisme évident $H_{\text{ét}}^{2d-1}(U, L(d)) \rightarrow H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K(d))$ est un isomorphisme, ce qui achève de montrer que $K \in \text{Perv}^{\varphi}(X, \Lambda)$.

On a alors un morphisme d'adjonction $K \rightarrow j_{\star}^{\varphi} j^{\star} K = T$ dans $\text{Perv}^{\varphi}(X, \Lambda)$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut se placer dans la situation locale précédente, et faire une récurrence sur la dimension pour pouvoir supposer que le morphisme induit $K|_U \rightarrow T|_U$ est un isomorphisme. Choisissons une spécialisation $\bar{\eta} \rightarrow x$. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{\eta}}^0(X, K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^X} & H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, K(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\bar{\eta}}^0(X, T) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^X} & H_{x, \text{ét}}^{2d}(X, T(d)) \end{array}$$

La flèche de gauche est évidemment un isomorphisme. Les flèches horizontales aussi puisque K et T sont des complexes dualisants potentiels. Il vient donc que le morphisme induit $i^! K \rightarrow i^! T$ est un isomorphisme. Il en découle que $K \rightarrow T$ est un isomorphisme (compatible aux épinglages au point générique, donc à tous les épinglages), ce qui achève la démonstration de (b).

Montrons (c). Soit K un complexe dualisant potentiel sur X . Pour montrer que le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow \tau_{\leq 0} R \mathbf{Hom}(K, K)$ est un isomorphisme, quitte à remplacer X par des schémas connexes étales sur lui, il suffit de montrer que $\Lambda \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K)$ et que $\text{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K[q]) = 0$ pour $q < 0$. L'annulation de $\text{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K[q])$ pour $q < 0$ résulte aussitôt du fait que K appartienne au cœur de la t -structure définie par φ . D'après (b), on a un isomorphisme canonique $K = j_{\star}^{\varphi} \Lambda$. L'isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K)$ résulte alors de ce que $j_{\star}^{\varphi} : \text{Perv}^{\varphi}(\eta, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^{\varphi}(X, \Lambda)$ soit pleinement fidèle (cf. proposition 5.2.2).

5.4. Un résultat de recollement. La proposition suivante est un résultat de recollement qui nous permettra de passer du cas normal au cas général :

PROPOSITION 5.4.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . On suppose donné un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où i est une immersion fermée d'ouvert complémentaire U et où p est un morphisme fini surjectif induisant un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$. On note $q = p \circ i'$. On suppose que l'énoncé du théorème 5.1.1 est connu pour X' , Y et Y' (relativement aux fonctions de dimensions déduites de celle sur X par le procédé de la proposition 2.4.3.1). Alors, cet énoncé est également vrai pour X , et si on note K_X , $K_{X'}$, K_Y et $K_{Y'}$ les complexes

dualisants potentiels de X , X' , Y et Y' respectivement, on a un triangle distingué canonique dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$q_* K_{Y'} \rightarrow i_* K_Y \oplus p_* K_{X'} \rightarrow K_X \rightarrow q_* K_{Y'}[1] .$$

Dans un premier temps, supposons que X admette un complexe dualisant potentiel K_X et montrons que l'on peut définir un triangle distingué canonique de la forme souhaitée. Pour cela, considérons la suite exacte courte évidente de faisceaux sur X :

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(+,+)} i_* \Lambda \oplus p_* \Lambda \xrightarrow{(+,-)} q_* \Lambda \rightarrow 0 .$$

En appliquant $R\mathbf{Hom}(-, K_X)$ au triangle distingué correspondant, on obtient un triangle distingué :

$$q_* q^! K_X \xrightarrow{(+,-)} i_* i^! K_X \oplus p_* p^! K_X \xrightarrow{(+,+)} K_X \rightarrow q_* q^! K_X[1] ,$$

qui, compte tenu de la proposition 4.1.2 et de la vertu d'unicité des complexes dualisants potentiels sur X' , Y et Y' , se réécrit sous la forme :

$$q_* K_{Y'} \xrightarrow{(+,-)} i_* K_Y \oplus p_* K_{X'} \xrightarrow{(+,+)} K_X \rightarrow q_* K_{Y'}[1] .$$

Revenant aux hypothèses de la proposition, nous allons montrer qu'inversement, si on définit K_X de façon à avoir un tel triangle distingué (mais *a priori* pas de façon canonique), on obtient bien un complexe dualisant potentiel sur X . On suppose donc le théorème 5.1.1 connu seulement pour X' , Y et Y' et on note $K_{X'}$, K_Y et $K_{Y'}$ les complexes dualisants potentiels correspondants. La propriété d'unicité pour les complexes dualisants potentiels sur Y' donne des isomorphismes canoniques $K_{Y'} \simeq p'^! K_Y$ et $K_{Y'} \simeq i'^! K_{X'}$. Par adjonction, on en déduit des morphismes canoniques $p'_* K_{Y'} \rightarrow K_Y$ et $i'_* K_{Y'} \rightarrow K_{X'}$, puis en appliquant respectivement i_* et p_* , on obtient des morphismes canoniques $q_* K_{Y'} \rightarrow i_* K_Y$ et $q_* K_{Y'} \rightarrow p_* K_{X'}$. On peut considérer leur différence et constituer un triangle distingué dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$q_* K_{Y'} \xrightarrow{(+,-)} i_* K_Y \oplus p_* K_{X'} \rightarrow K_X \rightarrow q_* K_{Y'}[1] .$$

On obtient ainsi un objet $K_X \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et deux morphismes privilégiés $i_* K_Y \rightarrow K_X$ et $p_* K_{X'} \rightarrow K_X$.

Notons $j: U \rightarrow X$ et $j': U \rightarrow X'$ les immersions ouvertes évidentes. En appliquant j^* au triangle distingué ci-dessus, on peut commencer par observer que le morphisme évident $j'^* K_{X'} \simeq j^* p_* K_{X'} \rightarrow j^* K_X$ est un isomorphisme. Par conséquent, on peut munir K_X d'épinglages en les points de l'ouvert U de façon compatible avec la structure de complexe dualisant potentiel obtenue sur $j'^* K_{X'}$.

Considérons le morphisme canonique $q_* K_{Y'} \rightarrow p_* K_{X'}$. J'affirme qu'il induit un isomorphisme après application du foncteur $i^!$. En effet, on a des isomorphismes évidents de foncteurs $i^! q_* i^! \simeq i^! i_* p'_* i'^! \simeq p'_* i'^! \simeq i^! p_*$ et, compte tenu de l'isomorphisme canonique $K_{Y'} \simeq i'^! K_{X'}$, on obtient bien que le morphisme évident $i^! q_* K_{Y'} \rightarrow i^! p_* K_{X'}$ est un isomorphisme. En appliquant $i^!$ au triangle distingué de définition de K_X , il vient alors que le morphisme canonique $i_* K_Y \rightarrow K_X$ induit un isomorphisme $K_Y \xrightarrow{\sim} i^! K_X$ après application de $i^!$. Ceci permet de définir des épinglages pour K_X en tous les points de Y .

Finalement, on a obtenu une structure de complexe dualisant putatif sur K_X . D'après la proposition 2.4.3.3, pour montrer que K_X est un complexe dualisant potentiel, il suffit de montrer que $p^! K_X$ en est un. Nous allons bien évidemment le comparer à $K_{X'}$. Par construction de K_X , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & i_* K_Y & \\ \nearrow & & \searrow \\ q_* K_{Y'} & & K_X \\ \searrow & & \nearrow \\ & p_* K_{X'} & \end{array}$$

Par adjonction, on obtient que deux définitions concurrentes d'un morphisme $K_{Y'} \rightarrow q^!K_X$ coïncident :

$$\begin{array}{ccc}
 & p^!K_Y \longrightarrow p^!i^!K_X & \\
 & \parallel & \parallel \\
 K_{Y'} & & q^!K_X \\
 & \parallel & \parallel \\
 & i^!K_{X'} \longrightarrow i^!p^!K_X &
 \end{array}$$

On a déjà montré que le morphisme canonique $K_Y \rightarrow i^!K_X$ était un isomorphisme. Par conséquent, sur le diagramme ci-dessus, toutes les flèches sont des isomorphismes. Ainsi, le morphisme évident $K_{X'} \rightarrow p^!K_X$ induit un isomorphisme non seulement après application de j'^* , mais aussi après celle de $i'^!$. Il en résulte que ce morphisme $K_{X'} \rightarrow p^!K_X$ est un isomorphisme. En outre, sur le diagramme ci-dessus, tous les objets sont naturellement munis d'une structure de complexe dualisant putatif et tous les isomorphismes, sauf peut-être celui du bas, sont compatibles aux épinglages. Cet isomorphisme $i'^!K_{X'} \rightarrow i'^!p^!K_X$ est donc lui aussi compatible aux épinglages. Par conséquent, l'isomorphisme $K_{X'} \xrightarrow{\sim} p^!K_X$ est compatible aux épinglages non seulement sur U mais aussi sur Y' . Il en résulte que $p^!K_X$ est un complexe dualisant potentiel ; d'après la proposition 2.4.3.3, on peut en conclure que K_X est aussi un complexe dualisant potentiel.

En outre, l'hypothèse selon laquelle les complexes dualisants potentiels sur X' , Y et Y' sont pervers pour la fonction de perversité -2δ implique par construction que K_X est aussi pervers pour -2δ .

Pour conclure, il s'agit de montrer que si K et L sont deux complexes dualisants potentiels sur X , on a un isomorphisme privilégié $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} R\mathbf{Hom}(K, L)$ qui donne naissance à un morphisme $\psi: K \rightarrow L$ qui soit un isomorphisme de complexes dualisants potentiels. En effet, cela montrera que si $\phi: K \rightarrow L$ est un autre isomorphisme, alors $\phi = \lambda \cdot \psi$ où $\lambda: X \rightarrow \Lambda^\times$ est une fonction localement constante. Demander que ϕ soit compatible aux épinglages impliquant que $\lambda = 1$, on aura bien un unique isomorphisme $K \xrightarrow{\sim} L$ de complexes dualisants potentiels.

D'après la propriété d'unicité des complexes dualisants potentiels sur X' , Y et Y' , on a des isomorphismes de complexes dualisants potentiels $p^!K \xrightarrow{\sim} p^!L$ et $i^!K \xrightarrow{\sim} i^!L$ induisant le même isomorphisme $q^!K \xrightarrow{\sim} q^!L_Y$. On a construit plus haut un triangle distingué canonique :

$$q_* q^!K \xrightarrow{(+,-)} i_* i^!K \oplus p_* p^!K \xrightarrow{(+,+)} K \rightarrow q_* q^!K[1].$$

En lui appliquant $R\mathbf{Hom}(-, L)$, on obtient un autre triangle distingué :

$$R\mathbf{Hom}(K, L) \xrightarrow{(+,+)} i_* R\mathbf{Hom}(i^!K, i^!L) \oplus p_* R\mathbf{Hom}(p^!K, p^!L) \xrightarrow{(+,-)} q_* R\mathbf{Hom}(q^!K, q^!L) \xrightarrow{+}$$

L'énoncé du théorème 5.1.1 pour X' , Y et Y' implique aussitôt que les objets de cohomologie $\mathcal{H}^q R\mathbf{Hom}(K, L)$ sont nuls pour $q < 0$, et, compte tenu de la suite exacte canonique de faisceaux :

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(+,+)} i_* \Lambda \oplus p_* \Lambda \xrightarrow{(+,-)} q_* \Lambda \rightarrow 0,$$

que l'on a un isomorphisme privilégié $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 R\mathbf{Hom}(K, L)$. Le morphisme $K \rightarrow L$ correspondant induit bien entendu les uniques isomorphismes de complexes dualisants potentiels $i^!K \xrightarrow{\sim} i^!L$ et $p^!K \xrightarrow{\sim} p^!L$. Ce morphisme $K \rightarrow L$ est donc compatible aux épinglages sur Y et sur U : c'est un isomorphisme de complexes dualisants potentiels. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.4.1.

5.5. Cas général. Montrons le théorème 5.1.1 dans le cas général. Pour le montrer pour tous les $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents munis d'une fonction de dimension, par récurrence noethérienne, on peut supposer le résultat connu pour les schémas finis sur un fermé d'intérieur vide de X . On peut supposer que X est réduit. Notons $p: X' \rightarrow X$ la normalisation de X . Le morphisme p est fini

surjectif et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense de normalité U du schéma excellent X . Posons $Y = (X - U)_{\text{réduit}}$ et formons le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Comme X' est normal, la proposition 5.3.1 montre que l'énoncé du théorème 5.1.1 est connu pour X' . L'hypothèse de récurrence noethérienne montre que c'est aussi le cas pour Y et Y' . La proposition 5.4.1 donne la conclusion souhaitée pour X .

6. Le théorème de dualité locale

6.1. Énoncé du théorème.

THÉORÈME 6.1.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Soit K le complexe dualisant potentiel de (X, δ) (cf. théorème 5.1.1). Alors*

- $K \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
- K est de dimension quasi-injective finie si et seulement si X est de dimension de Krull finie ;
- le foncteur $D_K = R\mathbf{Hom}(-, K)$ préserve $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
- pour tout $M \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme de bidualité $M \rightarrow D_K D_K M$ est un isomorphisme.

En particulier, si X est de dimension de Krull finie, K est un complexe dualisant au sens de [SGA 5 I 1.7].

6.2. Constructibilité, tor-dimension, dimension quasi-injective.

6.2.1. Changement de coefficients.

PROPOSITION 6.2.1.1. *Soit $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Soit m un diviseur de n . Soit $\Lambda' = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. L'anneau Λ' est une Λ -algèbre. Soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ un complexe dualisant potentiel sur X relativement à l'anneau de coefficients Λ . Alors $K' = R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\Lambda', K) \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda')$ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel relativement à l'anneau de coefficients Λ' . De plus, si $M \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda')$, on a un isomorphisme canonique dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(M, K) \simeq R\mathbf{Hom}_{\Lambda'}(M, K') .$$

Ceci résulte facilement de la commutation des foncteurs de cohomologie à supports avec le foncteur $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\Lambda', -)$. (On utilise aussi un isomorphisme privilégié $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\Lambda', \Lambda) \simeq \Lambda'$: via cet isomorphisme, le générateur canonique de Λ' correspond au morphisme $\Lambda' \rightarrow \Lambda$ envoyant $1 \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ sur $[n/m] \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.)

6.2.2. Constructibilité, tor-finitude.

PROPOSITION 6.2.2.1. *Soit K un complexe dualisant potentiel sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Alors $K \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

On va utiliser le lemme suivant :

LEMME 6.2.2.2. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent. Soit $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée. Soit $j: U \rightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $K \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
- $j^*K \in D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $i^!K \in D_{\text{c}}^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Ce lemme résulte aussitôt du fait non trivial que le foncteur Rj_* envoie $D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ dans $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, cf. XIII-1.1.1.

Démontrons la proposition. On peut supposer X réduit. Comme X est excellent, X admet un ouvert dense régulier. Notons Z le sous-schéma fermé $(X - U)_{\text{réduit}}$ et $i: Z \rightarrow X$ son immersion fermée dans X . Par récurrence noethérienne, on peut supposer que le complexe dualisant potentiel $i^!K$ de Z est dans $D_{\text{c}}^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$. En vertu du lemme, on est ramené à montrer que $j^*K \in D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. Autrement

dit, on peut supposer que X est régulier. On peut supposer de plus que X est connexe. Notons η le point générique de X . D'après la proposition 2.4.4.1 et le théorème 5.1.1, on a un isomorphisme canonique $K \simeq \Lambda(\delta(\eta))[2\delta(\eta)]$. Ainsi, K appartient bien à $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 6.2.2.3. *Soit X un schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Le complexe dualisant potentiel de (X, δ) appartient à $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

On sait déjà que le complexe dualisant potentiel K de (X, δ) appartient à $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Il s'agit donc d'obtenir un résultat de tor-finitude pour K . Pour cela, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^v \mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier et $v \geq 1$. D'après la proposition 6.2.1.1, $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}, K)$ est un complexe dualisant potentiel relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$; d'après la proposition 6.2.2.1, cet objet appartient à $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z})$, le critère du lemme suivant permet de conclure que K appartient à $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

LEMME 6.2.2.4. *Soit X un schéma noethérien. Soit ℓ un nombre premier. Soit $v \geq 1$. On pose $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^v \mathbf{Z}$. Soit $K \in D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $K \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
- (ii) $K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z} \in D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z})$;
- (iii) $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}, K) \in D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z})$.

Dans ce cas, on a un isomorphisme canonique $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}, K) \simeq K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ dans $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z})$.

L'équivalence entre (i) et (ii) est seulement indiquée pour mémoire. Il s'agit ici principalement de montrer que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. On représente K par un complexe borné. Notons R le complexe (acyclique) de Λ -modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \dots & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{\ell^{v-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{\ell^{v-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{\ell^{v-1}} & \Lambda & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On note $R^{\leq 0}$ et $R^{>0}$ les troncatures bêtes de R , de façon à ce que l'on ait une suite exacte courte de complexes :

$$0 \rightarrow R^{>0} \xrightarrow{i} R \xrightarrow{p} R^{\leq 0} \rightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte de complexes de faisceaux de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$:

$$0 \rightarrow K \otimes_{\Lambda} R^{>0} \rightarrow K \otimes_{\Lambda} R \rightarrow K \otimes_{\Lambda} R^{\leq 0} \rightarrow 0,$$

puis un triangle distingué dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$K \otimes_{\Lambda} R^{>0} \rightarrow K \otimes_{\Lambda} R \rightarrow K \otimes_{\Lambda} R^{\leq 0} \xrightarrow{\delta} (K \otimes_{\Lambda} R^{>0})[1].$$

On dispose d'un quasi-isomorphisme évident $R^{\leq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ qui permet de faire l'identification $K \otimes_{\Lambda} R^{\leq 0} \simeq K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ dans $D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Avec les conventions de signes de [Conrad, 2000, §1.3] (voir aussi XVI-4.7.3), on a un isomorphisme canonique $(K \otimes_{\Lambda} R^{>0})[1] \simeq K \otimes_{\Lambda} (R^{>0}[1])$ et un autre (qui ne fait pas intervenir de signes) $\mathbf{Hom}(Q, \Lambda) = R^{>0}[1]$ où Q est le complexe de faisceaux constants de Λ -modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & -4 & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \\ \dots & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{-\ell^{v-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{-\ell^{v-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

En procédant comme dans XVI-4.7.2, on en déduit un isomorphisme $K \otimes_{\Lambda} (R^{>0}[1]) \rightarrow \mathbf{Hom}(Q, K)$. Le quasi-isomorphisme évident $Q \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ induit un isomorphisme $\mathbf{Hom}(Q, K) \simeq R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}, K)$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Compte tenu de ce qui précède, on a obtenu un isomorphisme canonique $(K \otimes_{\Lambda} R^{>0})[1] \simeq R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}, K)$. Si on note $\tilde{\delta}: K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z} \rightarrow R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}, K)$ le morphisme dans

$D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ induit par δ *via* les isomorphismes précédents, on a obtenu un triangle distingué dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$K \otimes_{\Lambda} R \rightarrow K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \xrightarrow{\tilde{\delta}} R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K) \rightarrow (K \otimes_{\Lambda} R)[1]$$

Vu que $R = R[2]$, on remarque que l'on a des isomorphismes au niveau des objets de cohomologie $\mathcal{H}^q(K \otimes_{\Lambda} R) \simeq \mathcal{H}^{q+2}(K \otimes_{\Lambda} R)$ pour tout $q \in \mathbf{Z}$. Par conséquent, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $K \otimes_{\Lambda} R$ est acyclique.
- (b) $K \otimes_{\Lambda} R \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
- (c) $K \otimes_{\Lambda} R \in D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;

Grâce au triangle distingué construit plus haut, compte tenu du fait que $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K) \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on obtient que (b) est équivalente à (ii). De même, que $K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ appartienne à $D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ implique que (c) et (iii) sont équivalentes. Par conséquent, (ii) et (iii) sont équivalentes.

Si on suppose que ces conditions équivalentes sont vérifiées (c'est-à-dire que $K \in D_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$), le morphisme $\tilde{\delta}: K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \rightarrow R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ est un isomorphisme dans $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui ne permet pas de conclure immédiatement puisque l'on souhaite obtenir un isomorphisme dans la catégorie $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Pour cela, on peut représenter K par un complexe borné de faisceaux plats de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$. Les objets $K \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ et $R\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ sont alors représentés respectivement par $K/\ell K$ et ${}_{\ell}K := \text{Ker}(\ell: K \rightarrow K)$ et le quasi-isomorphisme cherché est l'isomorphisme induit par la multiplication par $\ell^{v-1}: K/\ell K \xrightarrow{\sim} {}_{\ell}K$. (On peut montrer qu'après application du foncteur évident $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, l'isomorphisme que l'on vient de définir devient $\tilde{\delta}$.)

6.2.3. Préservation de $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

PROPOSITION 6.2.3.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Notons K_X le complexe dualisant potentiel de (X, δ) . Alors, le foncteur $D_X = R\mathbf{Hom}(-, K_X)$ préserve $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Grâce à la proposition 6.2.1.1, on peut supposer que l'anneau de coefficients est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, avec ℓ un nombre premier. Il s'agit de montrer que pour tout faisceau constructible de Λ -modules $\mathcal{M}$ sur X , $D_X \mathcal{M} \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. D'après la proposition 6.2.2.1, si $\mathcal{M}$ est constant, on a bien $D_X \mathcal{M} \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Si $p: Y \rightarrow X$ est un morphisme étale, on a un isomorphisme évident $p^* D_X \mathcal{M} \simeq D_Y p^* \mathcal{M}$ pour tout faisceau constructible $\mathcal{M}$ sur X . Si $\mathcal{M}$ est localement constant, en introduisant un morphisme étale surjectif p tel que $p^* \mathcal{M}$ soit constant, on obtient que $D_X \mathcal{M} \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ si $\mathcal{M}$ est localement constant.

On raisonne alors par récurrence noethérienne. Pour tout faisceau constructible $\mathcal{M}$, il existe un ouvert dense U de X sur lequel $\mathcal{M}$ est localement constant. On note $j: U \rightarrow X$ l'immersion ouverte correspondante et $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée complémentaire. D'après ce qui précède, on a $j^* D_X \mathcal{M} = D_U \mathcal{M}|_U \in D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. Par ailleurs, $i^! D_X \mathcal{M} \simeq D_Z i^* \mathcal{M}$. Par hypothèse de récurrence noethérienne, on obtient que $i^! D_X \mathcal{M}$ appartient à $D_{\text{c}}^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$. Le lemme 6.2.2.2 permet de conclure que $D_X \mathcal{M}$ appartient à $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

La stabilité de $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ par D_X permet d'énoncer le résultat important suivant :

PROPOSITION 6.2.3.2. *Soit $p: X' \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. On suppose X muni d'une fonction de dimension δ_X et on munit X' de la fonction de dimension $\delta_{X'}$ définie dans la proposition 4.1.1. Alors, pour tout $L \in D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a un isomorphisme canonique $p^* D_X L \xrightarrow{\sim} D_{X'} p^* L$ et le morphisme de bidualité $p^* L \rightarrow D_{X'}^2 p^* L$ s'identifie à l'image par p^* du morphisme de bidualité $L \rightarrow D_X^2 L$.*

Cela résulte aussitôt des propositions 4.1.1, 4.2.2, 6.2.3.1 et du résultat du §12.3.2.

6.2.4. Dimension quasi-injective.

PROPOSITION 6.2.4.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Notons K_X le complexe dualisant potentiel de (X, δ) . La dimension quasi-injective de K_X est $-2 \inf_{x \in X} \delta(x)$. En particulier, elle est finie si et seulement si X est de dimension de Krull finie.*

Commençons par minorer la dimension quasi-injective de K_X . Soit $x \in X$. On note $i: Z \rightarrow X$ l'inclusion du sous-schéma intègre de X de point générique x . On a un isomorphisme canonique $i^! K_X \simeq i^* R\mathbf{Hom}(\Lambda_Z, K_X)$. Le complexe $K_Z = i^! K_X$ est un complexe dualisant potentiel pour $(Z, \delta|_Z)$. Par conséquent $(K_Z)_{\bar{x}} \simeq \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$. Il en résulte que la dimension quasi-injective de K_X est au moins $-2\delta(x)$. On obtient ainsi la minoration

$$-2 \inf_{x \in X} \delta(x) \leq \dim. q. \text{ inj. } K_X .$$

Montrons que cette inégalité est en fait une égalité si X est de dimension de Krull finie. On peut procéder par récurrence sur la dimension de X . On peut en outre supposer que X est local strictement hensélien (réduit) de point fermé x . Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur X . Il s'agit de montrer que $D_X \mathcal{M} \in D^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Il existe un ouvert affine dense U sur lequel $\mathcal{M}$ est localement constant. Le schéma X étant réduit et excellent, quitte à rétrécir X , on peut supposer que U est régulier. Notons $j: U \rightarrow X$ l'immersion de U . Notons $U_1, \dots, U_n$ les composantes connexes de U , et $\eta_1, \dots, \eta_n$ les points génériques de ces composantes. Le schéma U étant régulier, on connaît la structure du complexe dualisant potentiel K_U : pour tout $1 \leq i \leq n$, on a un isomorphisme canonique $K_{U_i} \simeq \Lambda(\delta(\eta_i))[2\delta(\eta_i)]$. En particulier, $K_{U_i} \in D^{\leq -2\delta(\eta_i)}(U_{i,\text{ét}}, \Lambda)$. Le faisceau $\mathcal{M}|_{U_i}$ étant localement constant, on obtient que $D_{U_i} \mathcal{M}|_{U_i} \in D^{\leq -2\delta(\eta_i)}(U_{i,\text{ét}}, \Lambda)$. D'après le théorème de Lefschetz affine (cf. XV-1.2.2) appliqué aux immersions ouverts affines $j_i: U_i \rightarrow X$, il vient alors que $Rj_{i*} D_{U_i} \mathcal{M}|_{U_i}$ appartient à $D^{\leq \dim \overline{\{\eta_i\}} - 2\delta(\eta_i)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Comme on a $\dim \overline{\{\eta_i\}} - 2\delta(\eta_i) \leq -2\delta(x)$, il vient que $Rj_* D_U \mathcal{M}|_U$ appartient à $D^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Notons $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée complémentaire à j . Grâce à la récurrence sur la dimension, on sait que $D_Z i^* \mathcal{M} \in D^{\leq -2\delta(x)}(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$. En utilisant le triangle distingué canonique

$$i_* D_Z i^* \mathcal{M} \rightarrow D_X \mathcal{M} \rightarrow Rj_* D_U \mathcal{M}|_U \rightarrow i_* D_Z i^* \mathcal{M}[1] ,$$

on obtient bien que $D_X \mathcal{M} \in D^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

6.3. Le théorème en degré négatif ou nul.

PROPOSITION 6.3.1. *Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur X . Alors, le morphisme canonique est un isomorphisme dans $D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} D_X D_X \mathcal{M} .$$

Au cours de cette démonstration, on dira qu'un faisceau constructible de Λ -modules $\mathcal{M}$ sur X est **faiblement réflexif** si le morphisme canonique $\mathcal{M} \rightarrow \tau_{\leq 0} D_X D_X \mathcal{M}$ de la proposition est un isomorphisme.

D'après le théorème 5.1.1, on sait que Λ est faiblement réflexif. Si $g: Z \rightarrow X$ est une immersion fermée et $\mathcal{N}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur Z , il est clair que $\mathcal{N}$ est faiblement réflexif sur Z si et seulement si $g_* \mathcal{N}$ est faiblement réflexif sur X . Plus généralement, si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme fini et $\mathcal{N}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur Y , alors $\mathcal{N}$ est faiblement réflexif si et seulement si $f_* \mathcal{N}$ l'est (voir [SGA 5 I 1.13] et le §12.4.4). Notons aussi qu'une utilisation appropriée du lemme des cinq montre que si on a une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ de faisceaux constructibles de Λ -modules, et que $\mathcal{M}''$ est faiblement réflexif, alors $\mathcal{M}$ est faiblement réflexif si et seulement si $\mathcal{M}'$ est faiblement réflexif.

Grâce à la stabilité par extension énoncée plus haut et à la proposition 6.2.1.1, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Des remarques précédentes, il résulte que si $f: Y \rightarrow X$ est fini et que U est un ouvert de Y , alors $f_* \Lambda_U$ est faiblement réflexif. La classe des faisceaux constructibles de Λ -modules faiblement réflexifs sur X étant stable par facteurs directs et extensions, on peut conclure en utilisant le dévissage des faisceaux constructibles de [SGA 4 IX 5.8].

6.4. L'argument de [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3].

DÉFINITION 6.4.1. Soit X un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ . Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur X . On dit que $\mathcal{M}$ est **réflexif** si le morphisme de bidualité $\mathcal{M} \rightarrow D_X D_X \mathcal{M}$ est un isomorphisme. On dira que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour X si tout faisceau constructible de Λ -modules sur X est réflexif.

PROPOSITION 6.4.2. Soit $d \geq 0$. Si le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour les $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas excellents noethériens de dimension $\leq d$, alors il l'est aussi pour les schémas de type fini sur de tels schémas.

REMARQUE 6.4.3. Dans [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3], un tel isomorphisme de bidualité est construit pour les schémas de type fini sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier de dimension au plus un (mais non nécessairement excellent). Aux hypothèses d'excellence et de régularité du schéma de base près, il s'agit essentiellement du cas $d = 1$ de la proposition. La démonstration qui suit reprend et généralise celle de [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3].

Par récurrence sur d , on peut supposer que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour les schémas de type fini (et leurs hensélisés stricts) sur des $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents de dimension $< d$. Pour montrer que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout schéma Y de type fini sur X , il suffit évidemment de le faire pour $Y = (\mathbf{P}^1)^k \times X$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X de dimension au plus d (muni d'une fonction de dimension δ), le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour $(\mathbf{P}^1)^k \times X$. L'hypothèse de la proposition règle le cas $k = 0$. Supposons la propriété établie jusqu'au cran $k - 1$, avec $k \geq 1$. Soit X un schéma noethérien excellent de dimension d muni d'une fonction de dimension δ . Montrons que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour $(\mathbf{P}^1)^k \times X$. Grâce à la proposition 6.2.3.2, on peut supposer que X est local strictement hensélien, de point fermé x . Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible sur $(\mathbf{P}^1)^k \times X$. Notons C un cône du morphisme de bidualité $\mathcal{M} \rightarrow D D \mathcal{M}$. On sait déjà que $C \in D_c^b((\mathbf{P}^1)^k \times X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (cf. proposition 6.2.3.1). Nous allons dans un premier temps montrer que les faisceaux de cohomologie de C sont en gratte-ciel, c'est-à-dire supportés par des points fermés. L'hypothèse de récurrence sur d montre que le support de C est contenu dans le fermé $(\mathbf{P}^1)^k \times x$. Posons $Y = (\mathbf{P}^1 \times X)_{(y)}$ où y est le point générique de $\mathbf{P}^1 \times x \subset \mathbf{P}^1 \times X$. On considère les n projections canoniques $(\mathbf{P}^1)^k \times X \rightarrow \mathbf{P}^1 \times X$ et leur changement de base $(\mathbf{P}^1)^{k-1} \times Y \rightarrow Y$ au-dessus de Y . Le schéma Y étant de dimension d et la proposition 6.2.3.2 montrant en particulier que « la dualité commute aux localisations », l'hypothèse de récurrence pour $n - 1$ implique que si $z \in (\mathbf{P}^1)^k \times X$ est tel que $C_z \neq 0$, alors les images de z par les k projections canoniques $(\mathbf{P}^1)^k \times X \rightarrow \mathbf{P}^1 \times X$ sont des points fermés (puisqu'elles sont au-dessus de x et différentes du point générique y de $\mathbf{P}^1 \times x$). Par conséquent, un tel point z est un point fermé de $(\mathbf{P}^1)^k \times x$. Bref, les faisceaux de cohomologie de C sont supportés par des points fermés. Il en résulte que si on note $\pi: (\mathbf{P}^1)^k \times X \rightarrow X$ le morphisme canonique, alors pour montrer que $C \simeq 0$, il suffit de montrer que $R\pi_* C \simeq 0$. D'après [SGA 4½ [Th. finitude] 4.4], $R\pi_* C$ s'identifie au cône du morphisme de bidualité $R\pi_* \mathcal{M} \rightarrow D_X D_X R\pi_* \mathcal{M}$, qui est un isomorphisme par hypothèse. Par conséquent, $C \simeq 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

6.5. Fin de la démonstration. Démontrons le théorème 6.1.1. Compte tenu des résultats antérieurs, il ne reste plus qu'à montrer que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X muni d'une fonction de dimension δ . Comme il suffit d'obtenir la conclusion pour les hensélisés stricts de X , on peut supposer que X est de dimension de Krull finie d . On va raisonner par récurrence sur d .

DÉFINITION 6.5.1. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent X muni d'une fonction de dimension δ . Pour tout $q \geq 1$, on dit que $\mathcal{M}$ vérifie la propriété $(D)_q$ si le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M})$ est nul.

D'après la proposition 6.3.1, $\mathcal{M}$ est réflexif si et seulement s'il vérifie la propriété $(D)_q$ pour tout $q \geq 1$.

La fonction de dimension δ sert à formuler la propriété $(D)_q$. Pourtant, elle n'en dépend pas. En effet, si δ et δ' sont deux fonctions de dimension sur X (connexe), il existe un entier relatif k tel que $\delta' = \delta + k$. Le complexe dualisant potentiel $K_{X,\delta'}$ s'identifie canoniquement à $K_{X,\delta}(k)[2k]$: les foncteurs de bidualité $D_{X,\delta}^2$ et $D_{X,\delta'}^2$ sont canoniquement isomorphes. Il n'y a donc pas lieu de mentionner la fonction de dimension dans la notation D_X^2 , et les propriétés $(D)_q$ définies relativement à δ et δ' sont équivalentes.

En outre, les propriétés $(D)_q$ sont clairement locales pour la topologie étale. Comme les schémas noéthériens excellents admettent localement pour la topologie étale des fonctions de dimension, on peut leur donner un sens même en l'absence d'une fonction de dimension globale. Par recollement, on peut même donner un sens aux faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M})$.

Soit $d \geq 0$. On suppose que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noéthérien excellent de dimension au plus $d - 1$ muni d'une fonction de dimension.

Nous allons montrer par récurrence sur $q \geq 1$ que tout faisceau constructible de Λ -modules $\mathcal{M}$ sur un schéma noéthérien excellent X de dimension $\leq d$ vérifie la propriété $(D)_q$.

Soit $q \geq 1$. On suppose que pour tout $1 \leq q' < q$, tout faisceau de Λ -modules sur un schéma noéthérien excellent X de dimension $\leq d$ vérifie la propriété $(D)_{q'}$.

LEMME 6.5.2. *Les entiers d et q ayant été fixés comme ci-dessus, la propriété $(D)_q$ pour les faisceaux constructibles de Λ -modules sur les schémas noéthériens excellents de dimension au plus d est stable par extensions et sous-objets.*

En effet, si on a une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ de faisceaux constructibles de Λ -modules sur un tel schéma X , l'hypothèse de récurrence si $q \geq 2$ ou la proposition 6.3.1 si $q = 1$ implique que l'on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M}') \rightarrow \mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M}'')$$

La propriété $(D)_q$ est donc stable par extensions et sous-objets.

LEMME 6.5.3. *Soit $p: Y \rightarrow X$ un morphisme fini entre schémas noéthériens excellents. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur Y . Alors, $\mathcal{M}$ vérifie la propriété $(D)_q$ si et seulement si $p_* \mathcal{M}$ la vérifie.*

Ceci résulte aussitôt de l'isomorphisme canonique $p_* \mathcal{H}^q(D_Y^2 \mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}^q(D_X^2 p_* \mathcal{M})$ (voir [SGA 5 I 1.12 (a)]) et de la conservativité du foncteur p_* .

LEMME 6.5.4. *Soit X un schéma noéthérien excellent. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie $\text{Cons}(X, \Lambda)$ des faisceaux constructibles de Λ -modules sur X , stable par facteurs directs et extensions. On suppose que pour tout morphisme fini $p: Y \rightarrow X$, toute immersion ouverte $j: U \rightarrow Y$ avec Y normal intègre et tout nombre premier ℓ divisant n , on a $p_* j_* \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z} \in \mathcal{C}$. Alors, $\mathcal{C} = \text{Cons}(X, \Lambda)$.*

Il s'agit d'une variante facile de [SGA 4 IX 5.8].

LEMME 6.5.5. *Les entiers d et q ayant été fixés comme ci-dessus, si la propriété $(D)_q$ est satisfaite par le faisceau constant Λ sur les schémas noéthériens excellents normaux (strictement henséliens) de dimension au plus d , alors la propriété $(D)_q$ est satisfaite par tout faisceau constructible de Λ -modules sur un schéma noéthérien excellent de dimension au plus d .*

D'après le lemme 6.5.4, il suffit d'établir la propriété $(D)_q$ pour un faisceau de la forme $p_* j_* \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ avec ℓ un diviseur premier de n , p un morphisme fini et j une immersion ouverte entre schémas normaux intègres. D'après le lemme 6.5.3, il suffit d'établir la propriété $(D)_q$ pour $j_* \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$ avec $j: U \rightarrow Y$ une immersion ouverte, avec Y normal intègre. D'après la stabilité par sous-objet et extensions de la propriété $(D)_q$ (cf. lemme 6.5.2), il suffit de traiter le cas du faisceau $j_* \Lambda$, qui est lui-même un sous-faisceau du faisceau constant Λ sur le schéma normal Y , ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ainsi ramené à montrer la propriété $(D)_q$ pour le faisceau constant Λ sur les schémas noéthériens excellents normaux X de dimension d . On peut supposer X local strictement hensélien

de point fermé x et de point générique η . Si $d \leq 1$, X est régulier, et alors, si on choisit la fonction de dimension δ sur X telle que $\delta(\eta) = 0$, le complexe dualisant potentiel associé K_X sur X est le faisceau constant Λ , et alors il est évident que Λ vérifie la propriété $(D)_q$ puisque l'on a tautologiquement $D_X D_X \Lambda \simeq \Lambda$. On peut donc supposer que $d \geq 2$. En appliquant le lemme suivant à la complétion $\widehat{X} \rightarrow X$, on voit qu'on peut supposer que X est complet :

LEMME 6.5.6. *Soit $q \geq 1$. Soit $p: X' \rightarrow X$ un morphisme régulier entre $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau constructible de Λ -modules sur X . On suppose que p est surjectif. Alors, le faisceau $\mathcal{M}$ vérifie la propriété $(D)_q$ si et seulement si $p^* \mathcal{M}$ la vérifie.*

Ceci résulte aussitôt de la proposition 6.2.3.2.

Il nous reste à montrer que si X est un schéma local strictement hensélien noethérien normal complet de dimension $d \geq 2$, alors le faisceau constant Λ sur X vérifie la propriété $(D)_q$. D'après le théorème d'algébrisation partielle (cf. V-3.1.3 et V-2.1.2), il existe un morphisme $p: X' \rightarrow X$ fini surjectif tel que

- le schéma X' soit normal ;
- il existe un schéma local noethérien complet Y de dimension $< d$, un morphisme de type fini $Z \rightarrow Y$, un point géométrique $\bar{z} \rightarrow Z$ et un isomorphisme $X' \simeq \widehat{Z_{(\bar{z})}}$.

Le schéma Y est noethérien excellent et de dimension $< d$. L'hypothèse de récurrence sur d et la proposition 6.4.2 impliquent que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour $Z_{(\bar{z})}$. En particulier, le faisceau constant Λ sur $Z_{(\bar{z})}$ est réflexif. Appliquée au morphisme de complétion $X' \rightarrow Z_{(\bar{z})}$, la proposition 6.2.3.2 montre que le faisceau constant Λ sur X' est réflexif. En particulier, le faisceau constant Λ sur X' satisfait la propriété $(D)_q$. D'après le lemme 6.5.3, on peut en déduire que le faisceau $p_* \Lambda$ sur X vérifie la propriété $(D)_q$. Le morphisme fini p étant surjectif, le morphisme canonique $\Lambda \rightarrow p_* \Lambda$ est un monomorphisme de faisceaux. La propriété $(D)_q$ étant stable par sous-objets (cf. lemme 6.5.2), le faisceau constant Λ sur X vérifie bien la propriété $(D)_q$, ce qui achève la démonstration du théorème de dualité locale.

7. Anneaux de coefficients généraux

7.1. Énoncés.

DÉFINITION 7.1.1. Soit X un schéma noethérien. Soit A un anneau commutatif noethérien. On appelle **complexe dualisant** sur $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$) un objet $K \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$) tel que le foncteur $D_K = R\text{Hom}(-, K)$ préserve $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$) et que pour tout $M \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $M \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$), le morphisme de bidualité $M \rightarrow D_K^2 M$ soit un isomorphisme.

Cette section vise à établir les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 7.1.2. *Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort au sens de [Conrad, 2000, page 120]^(vi). Soit K un complexe dualisant sur $D_C^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $R \otimes_{\Lambda}^L K$ est un complexe dualisant sur $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$.*

THÉORÈME 7.1.3. *Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit K un complexe dualisant sur $D_C^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $A \otimes_{\Lambda}^L K$ est un complexe dualisant sur $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$.*

^(vi) On rappelle que cela signifie ici que R appartient à $D_C^b(A)$ et que pour tout $x \in \text{Spec}(A)$, $R_{(x)} \in D(A_{(x)})$ est un complexe dualisant pour $A_{(x)}$ au sens de [Hartshorne, 1966, page 258], ce qui signifie que $R_{(x)}$ est de dimension injective finie et que le foncteur $R\text{Hom}(-, R_{(x)})$ induit une involution de $D_C^b(A_{(x)})$. D'après, [Conrad, 2000, lemma 3.1.5], il revient au même de demander que le foncteur $R\text{Hom}_A(-, R)$ induise une involution de $D_C^b(A)$.

7.2. Systèmes locaux.

DÉFINITION 7.2.1. Soit X un schéma noethérien. On appelle **système local** (d'ensembles) sur X un faisceau d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ isomorphe à une limite inductive filtrante de faisceaux représentés par des revêtements étales finis de X . Un **système local fini** est un système local représenté par un revêtement étale fini.

PROPOSITION 7.2.2. Soit X un schéma noethérien. La catégorie des systèmes locaux sur X est équivalente à la catégorie $\text{Ind}(\text{Rev}(X))$ des ind-objets dans la catégorie $\text{Rev}(X)$ des revêtements étales finis de X .

Le foncteur qui à un revêtement étale fini $Y \rightarrow X$ associe le faisceau d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ représenté par Y est pleinement fidèle. En utilisant [SGA 4 I 8.7.5 a)], on en déduit, par passage à la limite inductive, un foncteur pleinement fidèle de la catégorie $\text{Ind}(\text{Rev}(X))$ vers celle des faisceaux d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$. Par définition, l'image essentielle de ce foncteur est la catégorie des systèmes locaux.

PROPOSITION 7.2.3. Soit X un schéma noethérien connexe. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X . Le foncteur qui à un système local $\mathcal{F}$ associe la fibre $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ est naturellement muni d'une action de $\pi_1(X, \bar{x})$ et définit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux sur X et la catégorie $\pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ens}$ des ensembles sur lesquels le groupe profini $\pi_1(X, \bar{x})$ agit continûment. Autrement dit, la catégorie des systèmes locaux d'ensembles sur X s'identifie à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(X, \bar{x})$.

Notons Ensf la catégorie des ensembles finis. D'après [SGA 1 v 7], le foncteur $\text{Rev}(X) \rightarrow \text{Ensf}$ qui à Y associe l'ensemble sous-jacent au schéma $Y_{\bar{x}}$ s'enrichit d'une action du groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ pour définir une équivalence de catégories $\text{Rev}(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ensf}$ où $\pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ensf}$ est la catégorie des ensembles finis (discrets) munis d'une action continue du groupe profini $\pi_1(X, \bar{x})$. En passant cette équivalence aux ind-objets, on obtient une équivalence $\text{Ind}(\text{Rev}(X)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ens}$, ce qui permet de conclure d'après la proposition 7.2.2.

À partir de la définition des systèmes locaux d'ensembles, on peut définir les systèmes locaux de groupes abéliens, de groupes abéliens de torsion, de modules, etc.

PROPOSITION 7.2.4.

- (a) Pour tout schéma noethérien X , la catégorie des systèmes locaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur X admet des limites inductives et des limites projectives finies et le foncteur d'inclusion de la catégorie des systèmes locaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur $X_{\text{ét}}$ y commute.
- (b) Soit $p: Y \rightarrow X$ un morphisme entre schémas noethériens. Si $\mathcal{F}$ est un système local sur X , alors $p^*\mathcal{F}$ est un système local sur Y ; la réciproque est vraie si p est un revêtement étale fini surjectif.
- (c) Si $\mathcal{G}$ est un système local sur Y et p un revêtement étale fini, alors $p_*\mathcal{G}$ est un système local sur X .

En appliquant la proposition 7.2.3 aux composantes connexes de X et à tous leurs points géométriques, on obtient directement (a). La première partie de (b) est triviale. Pour montrer la deuxième partie de (b), commençons par établir (c). Il suffit pour cela de montrer que si $\mathcal{G}$ est représenté par un revêtement étale de Y , alors $p_*\mathcal{G}$ est représenté par un revêtement étale de X (que l'on peut supposer connexe) : par descente fidèlement plate, on se ramène au cas trivial où Y est une réunion disjointe de copies de X . Montrons la dernière partie de (b). Supposons que p est un revêtement étale fini surjectif et que $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ tel que $p^*\mathcal{F}$ soit un système local. On a un isomorphisme évident entre $\mathcal{F}$ et l'égalisateur des deux morphismes évidents $p_*p^*\mathcal{F} \rightarrow p_*p^*p_*p^*\mathcal{F}$ déduits du couple de foncteurs adjoints (p^*, p_*) . D'après les autres propriétés de stabilité des systèmes locaux, $p_*p^*\mathcal{F}$ et $p_*p^*p_*p^*\mathcal{F}$ sont des systèmes locaux et l'égalisateur de deux morphismes entre systèmes locaux est encore un système local d'après (a). On obtient ainsi que $\mathcal{F}$ est un système local, ce qui achève la démonstration de (b).

PROPOSITION 7.2.5. Soit X un schéma noethérien. La catégorie abélienne des systèmes locaux de groupes abéliens de torsion sur X est stable par extension dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$. Plus précisément, si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur X telle que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ soient des systèmes locaux et que $\mathcal{F}'$ soit de torsion, alors $\mathcal{F}$ est un système local de groupes abéliens.

Cette proposition résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 7.2.6. *Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes abéliens de torsion agissant librement sur un faisceau d'ensembles $\mathcal{T}$. On note $p: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{G}$ le morphisme quotient. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{T}/\mathcal{G}$ sont des systèmes locaux, alors $\mathcal{T}$ aussi.*

On peut supposer que X est connexe. Notons $\mathcal{Y} = \mathcal{T}/\mathcal{G}$. On peut écrire $\mathcal{Y}$ comme réunion de sous-systèmes locaux finis $\mathcal{Y}'$. Pour chacun de ces $\mathcal{Y}'$, on peut considérer $p^{-1}(\mathcal{Y}')$: il s'agit d'un faisceau d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ sur lequel $\mathcal{G}$ agit librement avec $\mathcal{Y}'$ pour quotient. Le faisceau $\mathcal{T}$ étant réunion des sous-faisceaux $p^{-1}(\mathcal{Y}')$ associés, pour montrer que $\mathcal{T}$ est un système local, il suffit de montrer que pour tout sous-système local fini $\mathcal{Y}'$ de $\mathcal{Y}$, $p^{-1}(\mathcal{Y}')$ est un système local. Bref, on peut supposer que $\mathcal{Y}$ est un système local fini.

On suppose ainsi que $\mathcal{Y}$ est représenté par un revêtement étale fini $q: Y \rightarrow X$. Nous voudrions montrer que $\mathcal{T}$ est un système local. Pour cela, admettons provisoirement que ce fait est connu dans le cas particulier où $Y = X$ (ce qui revient à demander que $\mathcal{T}$ soit $\mathcal{G}$ -torseur au-dessus de $X_{\text{ét}}$) ; nous étudierons ce cas plus bas. Introduisons $r: Z \rightarrow X$ un revêtement étale galoisien trivialisant q , c'est-à-dire que $Y \times_X Z = \coprod_{i \in I} Z_i$ où $Z_i \rightarrow Z$ est un isomorphisme pour tout $i \in I$. Par image inverse, $r^*\mathcal{G}$ est un système local sur Z agissant librement sur $r^*\mathcal{T}$ et le quotient $r^*(\mathcal{T}/\mathcal{G})$ s'identifie à $\coprod_{i \in I} \bullet$ où $\bullet$ est l'objet final de la catégorie des faisceaux sur $Z_{\text{ét}}$. Pour tout $i \in I$, notons $\mathcal{T}_i \subset r^*\mathcal{T}$ l'image inverse par $r^*\mathcal{T} \rightarrow \coprod_{i \in I} \bullet$ de la copie de $\bullet$ correspondant à i . Le faisceau $\mathcal{T}_i$ sur $Z_{\text{ét}}$ est donc un $r^*\mathcal{G}$ -torseur au-dessus de $Z_{\text{ét}}$. D'après ce que nous avons admis provisoirement, les faisceaux $\mathcal{T}_i$ sont des systèmes locaux sur $Z_{\text{ét}}$, donc $r^*\mathcal{T} = \coprod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est aussi un système local sur $Z_{\text{ét}}$. D'après la proposition 7.2.4 (b), $\mathcal{T}$ est un système local sur X .

On s'est ramené à la situation où $\mathcal{T}/\mathcal{G}$ est l'objet final de la catégorie des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, c'est-à-dire que $\mathcal{T}$ est un toseur sous $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est un système local fini, alors $\mathcal{T}$ est représentable par un revêtement étale fini et est donc un système local ; nous allons nous ramener à ce cas-là.

La classe d'isomorphisme du $\mathcal{G}$ -torseur $\mathcal{T}$ est définie par un élément dans l'ensemble $H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{G})$. Comme $H_{\text{ét}}^1(X, -)$ commute aux limites inductives filtrantes, il existe un sous-système local de groupes abéliens finis $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ (supposé de torsion), un $\mathcal{G}'$ -torseur $\mathcal{T}'$ et un $\mathcal{G}$ -isomorphisme $\mathcal{T} \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{G}'} \mathcal{T}'$ où l'on a noté $\otimes$ le foncteur d'extension du groupe structural (cf. [Giraud, 1971, proposition 1.3.6, Chapitre III]). L'extension du groupe structural commutant aux limites inductives filtrantes, $\mathcal{T}$ s'identifie à la limite inductive des $\mathcal{G}'' \otimes_{\mathcal{G}'} \mathcal{T}'$ pour $\mathcal{G}''$ parcourant l'ensemble ordonné des sous-systèmes locaux de groupes abéliens finis de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{G}'$. D'après ce qui précède, $\mathcal{G}'' \otimes_{\mathcal{G}'} \mathcal{T}'$ est un système local d'ensembles sur X . Par passage à la limite inductive, $\mathcal{T}$ est bien un système local.

Le résultat de l'exercice suivant montre que l'hypothèse « de torsion » est bien nécessaire dans la proposition 7.2.5, et que par ailleurs, un faisceau qui est un système local localement pour la topologie étale n'est pas forcément un système local.

EXERCICE 7.2.7. Soit A le sous-anneau de $\mathbb{C}[t]$ formé des polynômes f tels que $f(0) = f(1)$: le schéma $C = \text{Spec}(A)$ correspondant est obtenu en identifiant 0 et 1 dans la droite affine complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$.

- Montrer que C est isomorphe à la cubique plane d'équation $x^3 - y^2 + xy = 0$ dans le plan affine complexe $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ (envoyer x et y respectivement sur $t(t-1)$ et $t^2(t-1)$).
- Montrer que C admet un unique point singulier O .
- Montrer que le morphisme évident $p: \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ est le normalisé de C et que le sous-schéma fermé (réduit) $p^{-1}(O)$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ est $\{0, 1\}$.
- Construire un isomorphisme $H_{\text{ét}}^1(C, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
- Montrer qu'il existe un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $C_{\text{ét}}$ tel que :
 - (i) $\mathcal{F}$ soit extension de deux systèmes locaux, et s'insère plus précisément dans une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$;
 - (i') Localement pour la topologie étale, $\mathcal{F}$ soit un système local ;
 - (ii) $\mathcal{F}$ ne soit pas un système local.

7.3. Partitions galoisiennes.

DÉFINITION 7.3.1. Une **partition galoisienne** d'un schéma noethérien X consiste en la donnée d'une partition finie de X par des sous-schémas (localement fermés) réduits connexes (non vides) $(S_i)_{i \in I}$ et d'un revêtement étale galoisien $S'_i \rightarrow S_i$ pour tout $i \in I$.

DÉFINITION 7.3.2. Soit $p: Y \rightarrow X$ un revêtement fini étale galoisien entre schémas noethériens. Soit A une Λ -algèbre. On dit qu'un système local de A -modules $\mathcal{F}$ sur X est **rendu ind-unipotent par** Y , si pour un point géométrique $\bar{y}$ de Y (et donc pour tous) au-dessus d'un point géométrique $\bar{x}$ de X , le $\pi_1(X, \bar{x})$ -module discret $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ est ind-unipotent pour le sous-groupe distingué $\pi_1(Y, \bar{y})$ (cf. sous-section 11.3), autrement dit que $\mathcal{F}$ est limite inductive filtrante de faisceaux localement constants extensions successives de faisceaux dont l'image inverse par p soit un faisceau constant.

DÉFINITION 7.3.3. Soit X un schéma noethérien muni d'une partition galoisienne $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$. Soit A une Λ -algèbre. On dit d'un faisceau de A -modules sur X qu'il est **faiblement constructible par rapport à** $\mathcal{P}$ si pour tout $i \in I$, sa restriction à S_i est un système local rendu ind-unipotent par S'_i . On note $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux de A -modules sur X formée des faisceaux faiblement constructibles pour $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}'$ est une deuxième partition galoisienne, on dit que $\mathcal{P}'$ **raffine** $\mathcal{P}$ si on a l'inclusion $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A) \subset \text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X, A)$ (et donc aussi $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A) \subset \text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X, A)$ pour toute Λ -algèbre A).

PROPOSITION 7.3.4. Soit X un schéma noethérien muni d'une partition galoisienne. Soit A une Λ -algèbre. La catégorie $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est abélienne et admet des limites inductives ; son foncteur d'inclusion dans la catégorie des faisceaux de A -modules sur X est exact et commute aux limites inductives. $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est stable par extensions dans la catégorie des faisceaux de A -modules sur X .

Ceci résulte aussitôt des propriétés des modules ind-unipotents pour un sous-groupe (cf. proposition 11.3.4) et des propriétés générales des systèmes locaux (cf. sous-section 7.2).

DÉFINITION 7.3.5. On dit d'une partition galoisienne $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$ sur un schéma noethérien X qu'elle est **dirigée** si on a muni I d'un ordre total tel que, soit I est vide, soit, si on note i_0 le plus petit élément de I , S_{i_0} est ouvert et, récursivement, $(S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I - \{i_0\}}$ est une partition galoisienne dirigée du fermé réduit $X - S_{i_0}$. On dit qu'une partition galoisienne est **dirigeable** s'il existe un ordre total sur l'ensemble d'indices qui en fasse une partition galoisienne dirigée.

PROPOSITION 7.3.6. Toute partition galoisienne d'un schéma noethérien est raffinée par une partition galoisienne dirigeable.

LEMME 7.3.7. Soit $X' \rightarrow X$ un revêtement étale galoisien. Soit $(S_i \rightarrow X)_{i \in I}$ une partition de X par un nombre fini de sous-schémas réduits connexes. On note S'_i une composante connexe du produit fibré $S_i \times_X X'$. Alors, $(S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$ est une partition galoisienne de X qui raffine la partition galoisienne $(X' \rightarrow X)$.

Cela résulte aussitôt de la théorie de Galois.

Montrons la proposition 7.3.6 par récurrence noethérienne sur X . Soit $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$ une partition galoisienne d'un schéma noethérien non vide X . Tout d'abord, montrons que, quitte à raffiner $\mathcal{P}$, on peut supposer qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que S_{i_0} soit un ouvert. En effet, si on choisit un $i_0 \in I$ tel que S_{i_0} contienne un point maximal de X , S_{i_0} contient un ouvert non vide U de S_{i_0} . Notons $V_1, \dots, V_n$ les composantes connexes du fermé réduit $S_{i_0} - U$ de S_{i_0} . D'après le lemme, il existe une partition galoisienne $\mathcal{Q} = (U' \rightarrow U, V'_1 \rightarrow V_1, \dots, V'_n \rightarrow V_n)$ de S_{i_0} qui raffine la partition galoisienne $(S'_{i_0} \rightarrow S_{i_0})$ de S_{i_0} . Quitte à remplacer la partition galoisienne initiale de X par son raffinement $\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}'$ avec $\mathcal{P}' = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I - \{i_0\}}$, on peut effectivement supposer que S_{i_0} est ouvert.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence noethérienne à la partition galoisienne $\mathcal{P}'$ de $X - S_{i_0}$ pour en obtenir un raffinement $\mathcal{P}''$ indexé par un certain ensemble totalement ordonné J qui fasse de $\mathcal{P}''$ une partition galoisienne dirigée de $X - S_{i_0}$. La partition galoisienne $(S'_{i_0} \rightarrow S_{i_0}) \cup \mathcal{P}''$ raffine $\mathcal{P}$, et si on étend l'ordre sur J en un ordre sur la réunion disjointe $\{i_0\} \amalg J$ de façon à faire de i_0 le plus petit élément, on a obtenu une partition dirigée.

EXERCICE 7.3.8. Montrer que si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux partitions galoisiennes d'un schéma noethérien X , il existe une partition galoisienne (dirigeable) raffinant à la fois $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

7.4. Dévissages. Le but de cette sous-section est d'établir le résultat suivant :

PROPOSITION 7.4.1. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{T}$ une sous-catégorie triangulée strictement pleine de $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ stable par facteurs directs. On suppose que pour tout nombre premier ℓ divisant n et tout $A/\ell A$ -module de type fini N , le foncteur $N \otimes_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}^L -: D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{T}$. Alors, $\mathcal{T} = D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$.

La démonstration de cette proposition est repoussée à la fin de cette sous-section.

PROPOSITION 7.4.2. Soit A une Λ -algèbre. Soit $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$ avec $I = \{1, \dots, N\}$ une partition galoisienne dirigée d'un schéma noethérien X . Notons $k_i: S_i \rightarrow X$ l'immersion canonique pour tout $i \in I$. Pour tout $i \in I$, le foncteur $k_{i!}: \text{FCons}^{(S'_i \rightarrow S_i)}(S_i, A) \rightarrow \text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est pleinement fidèle. Tout objet $\mathcal{F}$ de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ admet une filtration croissante (fonctorielle) $(\text{Fil}_n \mathcal{F})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que le $\text{Fil}_0 \mathcal{F} = 0$, $\text{Fil}_N \mathcal{F} = \mathcal{F}$ et que pour tout $1 \leq i \leq N$, le quotient $\text{Fil}_i \mathcal{F} / \text{Fil}_{i-1} \mathcal{F}$ soit dans $k_{i!} \text{FCons}^{S'_i \rightarrow S_i}(S_i, A)$.

C'est trivial.

PROPOSITION 7.4.3. Soit A une Λ -algèbre. Soit $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$ une partition galoisienne dirigeable d'un schéma noethérien X . Notons $k_i: S_i \rightarrow X$ l'immersion canonique pour tout $i \in I$. Si A est noethérien, alors $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est une catégorie abélienne localement noethérienne (cf. [Gabriel, 1962, pages 325–326]). Si A est artinien, $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est localement finie et admet un nombre fini d'objets simples ; plus précisément, si on note $k_i: S_i \rightarrow X$ les inclusions canoniques, W_i un ensemble (fini) représentatif des objets simples de la catégorie des $A[\text{Gal}(S'_i/S_i)]$ -modules (via le choix d'un point géométrique de S'_i , on identifie ces objets à des systèmes locaux sur S_i trivialisés par S'_i), alors les objets $k_{i!} \mathcal{F}$ pour $i \in I$ et $\mathcal{F} \in W_i$ forment un ensemble représentatif des objets simples de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$.

Supposons A noethérien. Montrons que $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est localement noethérienne. On sait déjà que cette catégorie abélienne admet des limites inductives filtrantes et que celles-ci sont exactes. Il s'agit de montrer que tout objet de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ est limite inductive d'objets noethériens (ou plus précisément, mais cela revient au même, « réunion » de ses sous-objets noethériens). Si l'ensemble d'indice I de $\mathcal{P}$ est vide, c'est trivial. Sinon, on peut choisir un ordre total sur I qui fasse de $\mathcal{P}$ une partition galoisienne dirigée, et noter i_0 le plus petit élément de I . Notons $j: S_{i_0} \rightarrow X$ l'immersion (ouverte) correspondante et $k: X - S_{i_0} \rightarrow X$ l'immersion du fermé réduit complémentaire. Pour tout objet $\mathcal{F} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$, on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} k_* k^* \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

En raisonnant par récurrence sur le cardinal de I , on peut supposer que $k^* \mathcal{F}$ est « réunion » de ses sous-objets noethériens dans $\text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X - S_{i_0}, A)$ avec $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - (S'_{i_0} \rightarrow S_{i_0})$. Bien entendu, un objet $\mathcal{R} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X - S_{i_0}, A)$ est noethérien si et seulement si $k_* \mathcal{R}$ l'est dans $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$. On dispose donc d'un système inductif $(\mathcal{H}_b)_{b \in B}$ indexé par un ensemble ordonné filtrant B de sous-objets noethériens de $k_* k^* \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}$ soit la réunion des sous-objets $\pi^{-1}(\mathcal{H}_b)$ de $\mathcal{F}$ pour $b \in B$. Si chacun des $\pi^{-1}(\mathcal{H}_b)$ est réunion de ses sous-objets noethériens, alors $\mathcal{F}$ aussi. Ceci permet de supposer que $k^* \mathcal{F}$ est noethérien. Concernant $j^* \mathcal{F}$, en utilisant que la catégorie des $A[G]$ -modules discrets (avec G groupe profini) est localement noethérienne, on obtient que l'objet $j^* \mathcal{F}$ de $\text{FCons}^{S'_{i_0} \rightarrow S_{i_0}}(S_{i_0}, A)$ est réunion de ses sous-objets noethériens ; on en déduit aussitôt que $j_! j^* \mathcal{F}$ est aussi réunion de ses sous-objets noethériens dans $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$. Pour conclure que $\mathcal{F}$ est réunion de ses sous-objets noethériens, on utilise le lemme suivant :

LEMME 7.4.4. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit $\mathcal{P}$ une partition galoisienne dirigeable d'un schéma noethérien X . Soit $0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$. On suppose que $\mathcal{G}$ est un objet noethérien de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ et que $\mathcal{H}$ est réunion de ses sous-objets noethériens. Alors, $\mathcal{F}$ est aussi réunion de ses sous-objets noethériens.

Il est évident que $\mathcal{G}$ est un faisceau de A -modules constructible sur X . D'après [SGA 4 IX 2.7.3], le foncteur $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, -)$ de la catégorie des faisceaux de A -modules sur X vers celle des A -modules commute aux limites inductives filtrantes. La suite exacte donnée définissant un élément dans $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ et $\mathcal{H}$ s'écrivant comme une limite inductive filtrante de ses sous-objets noethériens, il existe un sous-objet noethérien $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$, une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ et un diagramme commutatif de la forme suivante, où le carré de gauche est cocartésien :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}' & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} \longrightarrow 0, \end{array}$$

À vrai dire, on peut remplacer $\mathcal{H}'$ par tout sous-objet (noethérien) $\mathcal{H}''$ de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}'$, et $\mathcal{F}$ s'identifie à la réunion des sous-objets $\mathcal{F}''$ ainsi définis. Pour conclure, il suffit de montrer qu'un tel $\mathcal{F}''$ est un objet noethérien de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$, ce qui est évident puisqu'il est extension de deux objets noethériens $\mathcal{H}''$ et $\mathcal{G}$.

Terminons la démonstration de la proposition 7.4.3. Supposons A artinien. Il s'agit de trouver un ensemble fini d'objets simples à partir desquels tous les objets noethériens s'obtiennent par extensions successives. Compte tenu du dévissage de la proposition 7.4.2, on peut supposer que $\mathcal{P}$ est constitué d'un unique revêtement galoisien $X' \rightarrow X$. Choisissons un point géométrique $\bar{x}'$ de X' au-dessus d'un point géométrique $\bar{x}$ de X . Notons $G = \pi_1(X, \bar{x})$ et $H = \pi_1(X', \bar{x}')$. Le groupe profini H s'identifie à un sous-groupe ouvert distingué de G . Notons $K = G/H$ le groupe fini quotient. L'anneau $A[K]$ est évidemment artinien à gauche, on peut en noter W un ensemble représentatif fini d'objets simples ; considérés comme des $A[G]$ -modules discrets, les éléments de W sont encore simples.

La catégorie $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ s'identifie à la catégorie des G -modules discrets ind-unipotents pour H . Tout objet de cette catégorie s'écrit comme une réunion de sous-objets de type fini unipotents pour H , et de tels sous-objets se dévissent eux-mêmes en extensions successives d'objets sur lesquels H agit trivialement, ces derniers s'identifiant à des $A[K]$ -modules de type fini, ils se dévissent en extensions successives d'éléments de W .

DÉFINITION 7.4.5. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{P}$ une partition galoisienne. On note $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ la sous-catégorie pleine de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ formée des faisceaux de A -modules constructibles (ce qui revient ici à dire que les fibres sont des A -modules de type fini). Si $\mathcal{P}$ est dirigeable, il s'agit bien entendu de la sous-catégorie abélienne des objets noethériens de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$.

PROPOSITION 7.4.6. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{P}$ une partition galoisienne dirigeable de X . Soit $\mathcal{F}$ un objet de $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$. Il existe une filtration finie de $\mathcal{F}$ dans $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ dont les quotients successifs soient des facteurs directs d'objets de la forme $M \otimes_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathcal{F}_0$ où ℓ est un nombre premier divisant n , M un $A/\ell A$ -module de type fini et $\mathcal{F}_0$ un objet de $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$.

D'après la proposition 7.4.2, on peut supposer que $\mathcal{P}$ est constituée d'un unique revêtement galoisien $X' \rightarrow X$. En reprenant les notations utilisées dans la démonstration du cas artinien de la proposition 7.4.3, on peut identifier $\mathcal{F}$ à un $A[G]$ -module discret unipotent pour le sous-groupe distingué fermé H . Cette propriété d'unipotence permet de supposer que H agit trivialement, de sorte qu'on se retrouve avec une action du groupe fini $K = G/H = \text{Gal}(X'/X)$ (bref, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est un système local de A -modules trivialisé par X'). Le lemme suivant appliqué à l'algèbre de groupe $B = \Lambda[K]$ permet de conclure.

LEMME 7.4.7. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit B une Λ -algèbre finie non nécessairement commutative. Tout $A \otimes_{\Lambda} B$ -module (à gauche) de type fini admet une filtration finie dont les quotients successifs soient des facteurs directs de $A \otimes_{\Lambda} B$ -modules de la forme $N \otimes_{F_{\ell}} L$ où ℓ est un nombre premier divisant n , N un $A/\ell A$ -module de type fini et L un $B/\ell B$ -module simple.

En premier lieu, comme $A \otimes_{\Lambda} B$ est évidemment noethérien à gauche, on peut procéder à une récurrence noethérienne ; il suffit donc de montrer que tout $A \otimes_{\Lambda} B$ -module non nul admet un sous-module non nul facteur direct d'un module de la forme $N \otimes_{F_{\ell}} L$ avec N un $A/\ell A$ -module de type fini, L un $B/\ell B$ -module simple et ℓ un nombre premier divisant n . Ceci permet de supposer que B est un anneau semi-simple. En effet, pour tout B -module non nul M , l'annulateur du radical de Jacobson $\mathcal{N}$ de B dans M est un sous- B -module non nul de M (cf. [Lam, 1991, § 4]) ; si M est un $A \otimes_{\Lambda} B$ -module non nul, l'annulateur de $\mathcal{N}$ dans M s'identifie donc à un $A \otimes_{\Lambda} (B/\mathcal{N})$ -module non nul et l'anneau $B/\mathcal{N}$ est bien semi-simple.

En deuxième lieu, l'énoncé du lemme est vrai pour un produit $B = B_1 \times \cdots \times B_k$ d'anneaux si et seulement s'il est vrai pour chacun des B_i et l'énoncé est aussi invariant par équivalence de Morita (cf. [Lam, 1999, § 18]) puisqu'on peut le formuler intrinsèquement en termes de la catégories des B -modules. Compte tenu du théorème d'Artin-Wedderburn de structure des anneaux semi-simples (cf. [Lam, 1991, 3.5]), on peut donc supposer que B est un corps fini, *a priori* non commutatif, mais effectivement commutatif en vertu du théorème de Wedderburn (cf. [Lam, 1991, 13.1]).

En troisième lieu, l'énoncé est vrai dans le cas particulier auquel on s'est ramené ci-dessus. Soit $B = L$ une extension finie de F_{ℓ} , pour un certain nombre premier ℓ divisant n . On peut supposer que ℓ annule A . Soit M un $A \otimes_{F_{\ell}} L$ -module. L'extension L/F_{ℓ} est galoisienne, notons G son groupe de Galois. L'application $\gamma: L \otimes_{F_{\ell}} L \rightarrow \prod_{\sigma \in G} L$ définie par $\sigma(a \otimes b) = (\sigma(a)b)_{\sigma \in G}$ est une bijection d'après la théorie de Galois et elle réalise un isomorphisme de (L, L) -bimodules $\gamma: L \otimes_{F_{\ell}} L \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in G} {}_{\sigma}L_{\text{Id}}$ où l'on a indiqué en indice les morphismes $L \rightarrow L$ qui définissent les structures de modules à gauche et à droite sur les différents facteurs. Comme $M \otimes_L {}_{\text{Id}}L_{\text{Id}}$ s'identifie tautologiquement à M comme $A \otimes_{F_{\ell}} L$ -module, on en déduit que le $A \otimes_{F_{\ell}} L$ -module M s'identifie comme on le voulait à un facteur direct du $A \otimes_{F_{\ell}} L$ -module $M \otimes_L (L \otimes_{F_{\ell}} L) \simeq M \otimes_{F_{\ell}} L$ (où L agit par multiplication sur le facteur de droite).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 7.4.1. Soit $\mathcal{T}$ une telle sous-catégorie triangulée de $D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de A -modules sur X . Il s'agit de montrer que $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{T}$. Il existe évidemment une partition galoisienne $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{F}$ appartienne à $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$. D'après la proposition 7.3.6, on peut supposer que $\mathcal{P}$ est dirigeable. On peut alors appliquer la proposition 7.4.6 pour conclure que $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{T}$.

7.5. Complexes dualisants sur $D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$.

7.5.1. Unicité.

PROPOSITION 7.5.1.1. *Soit X un schéma noethérien. Soit A un anneau noethérien. Si K et K' sont deux complexes dualisants sur $D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$), alors il existe un objet inversible $L \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ (cf. proposition 9.2 pour plus de précisions) tel que K' soit isomorphe à $L \otimes_A K$.*

LEMME 7.5.1.2. *Soit X un schéma noethérien. Soit A un anneau noethérien. On suppose que K est un complexe dualisant sur $D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. Pour tout $F \in D_{\mathbb{C}}^-(X_{\text{ét}}, A)$, si $D_K F \in D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$, alors $F \in D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$.*

Commençons par montrer que l'on peut supposer que $D_K F = 0$. Pour tout $F \in D(X_{\text{ét}}, A)$, notons $\varepsilon_F: F \rightarrow D_K D_K F$ le morphisme de bidualité. Le morphisme composé

$$D_K F \xrightarrow{\varepsilon_{D_K F}} D_K D_K D_K F \xrightarrow{D_K(\varepsilon_F)} D_K F$$

est l'identité de $D_K F$. Comme $D_K F$ est dans $D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$, le fait que K soit dualisant implique que $\varepsilon_{D_K F}$ est un isomorphisme. Par conséquent, $D_K(\varepsilon_F)$ est un isomorphisme. Quitte à remplacer F par un cône de ε_F , on peut supposer que $D_K F = 0$.

Par l'absurde, supposons que F soit non nul. Il existe alors un morphisme non nul $p: F \rightarrow F'$ avec $F' \in D_{\mathbb{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ (par exemple, le morphisme canonique $F \rightarrow \tau_{\geq n} F$ pour un entier n bien choisi).

Considérons le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{p} & F' \\ \downarrow \varepsilon_F & & \downarrow \varepsilon_{F'} \\ D_K^2 F & \xrightarrow{D_K^2(p)} & D_K^2 F' \end{array}$$

D'un côté, $D_K^2 F$ est nul, donc $\varepsilon_{F'} \circ p = 0$, mais de l'autre, $\varepsilon_{F'}$ est un isomorphisme, d'où $p = 0$, ce qui conduit à une contradiction.

Établissons la proposition 7.5.1.1 dans le cas des complexes dualisants sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, la démonstration qui suit vaudra aussi pour $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ (à ceci près qu'il ne sera plus alors nécessaire de recourir au lemme ci-dessus). On pose $Y = D_K K' \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$. Comme K est dualisant, on a aussi un isomorphisme privilégié $K' = D_K Y$. Pour tout $Z \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, on a un isomorphisme fonctoriel $D_{K'} Z \simeq D_K(Z \overset{L}{\otimes}_A Y)$ dans $D(X_{\text{ét}}, A)$. Grâce au lemme, on en déduit que pour tout $Z \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, on a $Z \overset{L}{\otimes}_A Y \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$. On a ainsi un triangle commutatif de catégories et de foncteurs (à isomorphisme près de foncteurs) :

$$\begin{array}{ccc} D_c^b(X_{\text{ét}}, A) & \xrightarrow{- \overset{L}{\otimes}_A Y} & D_c^b(X_{\text{ét}}, A) \\ & \searrow D_{K'} & \downarrow D_K \\ & & (D_c^b(X_{\text{ét}}, A))^{\text{opp}} \end{array}$$

Comme D_K et $D_{K'}$ sont des équivalences, le foncteur $- \overset{L}{\otimes}_A Y$ aussi. En particulier, Y est un complexe inversible. Notons Y' l'inverse de Y . On a un isomorphisme de foncteurs $R\mathbf{Hom}(Y, -) \simeq Y' \overset{L}{\otimes}_A -$ (si un foncteur est une équivalence, son adjoint à droite est un quasi-inverse). Comme $K' = D_K Y$, on peut en déduire que $K' \simeq Y' \overset{L}{\otimes}_A K$.

7.5.2. Réduction au cas $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

PROPOSITION 7.5.2.1. Soit A un anneau noethérien. Soit $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. Soit J un idéal de A . On pose $A' = A/J$ et $R' = R\mathbf{Hom}_A(A', R) \in D(A')$. Alors, R' est un complexe ponctuellement dualisant fort. Si on note D (resp. D') le foncteur $R\mathbf{Hom}_A(-, R)$ (resp. $R\mathbf{Hom}_{A'}(-, R')$) sur $D(A)$ (resp. $D(A')$) et $\text{oub} : D(A') \rightarrow D(A)$ le foncteur de « restriction des scalaires », on a un isomorphisme canonique :

$$\text{oub} \circ D' \simeq D \circ \text{oub} .$$

En passant aux adjoints à gauche de ces foncteurs, cela découle des résultats du §8 :

PROPOSITION 7.5.2.2. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit J un idéal de A . Soit $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. On pose $A' = A/J$ et $R' = R\mathbf{Hom}_A(A', R) \in D(A')$. On note $K_R = K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ et $K_{R'} = K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R' \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A')$. On note $\text{oub} : D_c^b(X_{\text{ét}}, A') \rightarrow D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ le foncteur conservatif évident. Alors, pour tout $M \in D(X_{\text{ét}}, A')$, on a un isomorphisme canonique dans $D(X_{\text{ét}}, A)$:

$$\text{oub}(R\mathbf{Hom}_{A'}(M, K_{R'})) \simeq R\mathbf{Hom}_A(\text{oub}(M), K_R) .$$

De plus, si K_R est un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, alors $K_{R'}$ en est un sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A')$ et la réciproque est vraie si J est nilpotent.

Les autres assertions en étant des conséquences faciles, il s'agit de montrer que l'on a un isomorphisme canonique $R\mathbf{Hom}_A(A', K_R) \simeq \text{oub}(K_{R'})$ dans $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, ce qui résulte de la proposition 10.1.2.

COROLLAIRE 7.5.2.3. Pour démontrer le théorème 7.1.2, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier.

Étant entendu que la propriété d'unicité des complexes dualisants a déjà été obtenue (cf. proposition 7.5.1.1), il est évident que pour démontrer le théorème 7.1.2, on peut supposer que $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^v \mathbb{Z}$ où ℓ est un nombre premier et $v \geq 1$. Posons $A' = A/\ell A$. Notons $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. D'après la proposition 7.5.2.1, le complexe $R' = R \mathbf{Hom}_\Lambda(A', R) \in D(A')$ en est un pour A' . Appliquant dans un premier temps la proposition 7.5.2.2 au cas où $\Lambda \rightarrow A$ est $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$, nous obtenons que $K'' = R \mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}, K)$ est un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})$. D'après le lemme 6.2.2.4, on a aussi un isomorphisme $K'' \simeq K \otimes_\Lambda^L \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ dans $D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})$. Appliquons le théorème 7.1.2 dans le cas de la $\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ -algèbre A' : on obtient que $K'' \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L R'$ est un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A')$. Cet objet $K'' \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L R'$ s'identifie aussi à $K \otimes_\Lambda^L R' = K_{R'}$. D'après la proposition 7.5.2.2, il vient que $K \otimes_\Lambda^L R = K_R$ est un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, ce qui achève la démonstration de ce corollaire.

7.5.3. Démonstration du théorème 7.1.2. L'énoncé d'unicité des complexes dualisants sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ a déjà été obtenu, cf. proposition 7.5.1.1. Pour l'énoncé d'existence, d'après le corollaire 7.5.2.3, on peut supposer que $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ avec ℓ un nombre premier. On se donne K un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})$. Soit A une $\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}$ -algèbre noethérienne et $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. Notons $D_X = R \mathbf{Hom}_\Lambda(-, K)$ le foncteur de dualité sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ induit par K et D_A celui induit par R sur $D_c^b(A)$. Notons $D_{X,A}$ le foncteur $R \mathbf{Hom}_A(-, K_R)$ sur $D(X_{\text{ét}}, A)$ où $K_R = K \otimes_\Lambda^L R$. La proposition 10.1.3 (Λ est un corps) montre que l'on a un isomorphisme canonique, pour tout $N \in D_c^b(A)$ et $\mathcal{F} \in D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})$:

$$D_{X,A}(N \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L \mathcal{F}) \simeq (D_A N) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L (D_X \mathcal{F}).$$

Par hypothèse, $D_A N \in D_c^b(A)$ et $D_X \mathcal{F} \in D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z})$, ce qui permet de déduire que $D_{X,A}(N \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L \mathcal{F})$ appartient à $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, puis que $D_{X,A}$ préserve $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ grâce au dévissage de la proposition 7.4.1. Avec les mêmes notations, les morphismes de bidualité $N \rightarrow D_A^2 N$ et $\mathcal{F} \rightarrow D_X^2 \mathcal{F}$ sont des isomorphismes, le morphisme de bidualité $N \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L \mathcal{F} \rightarrow D_{X,A}^2(N \otimes_{\mathbb{Z}/\ell \mathbb{Z}}^L \mathcal{F})$ en est donc un aussi ; le même dévissage permet de conclure que $D_{X,A}$ définit une involution de $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, c'est-à-dire que K_R est un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, ce qui achève la démonstration du théorème 7.1.2.

7.6. Complexes dualisants sur $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. L'assertion d'unicité des complexes dualisants sur $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ a déjà été énoncée dans la proposition 7.5.1.1. L'essentiel de cette sous-section vise à établir le théorème suivant, dont on va déduire dans quelques lignes le théorème 7.1.3 :

THÉORÈME 7.6.1. *Soit X un schéma noethérien. On suppose qu'il existe un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Pour tous K et L objets de $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$, l'objet $R \mathbf{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ et pour tout $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :*

$$M \otimes_A^L R \mathbf{Hom}_A(K, L) \xrightarrow{\sim} R \mathbf{Hom}_A(K, M \otimes_A^L L).$$

Si A' est une A -algèbre, que K et L sont des objets de $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$, alors on a un isomorphisme canonique dans $D^b(X_{\text{ét}}, A')$:

$$A' \otimes_A^L R \mathbf{Hom}_A(K, L) \xrightarrow{\sim} R \mathbf{Hom}_{A'}(A' \otimes_A^L K, A' \otimes_A^L L).$$

Montrons que l'on peut déduire le théorème 7.1.3 de ce théorème 7.6.1 et du théorème 7.1.2 qui a déjà été établi. Commençons par un lemme :

LEMME 7.6.2. *Soit A un anneau noethérien. Soit $K \in D_c^-(A)$. Alors K est nul si et seulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , l'objet $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A^L K$ est nul.*

On suppose que K n'est pas nul. On veut montrer qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A^L K$ ne soit pas nul. Soit q le plus grand entier tel que $H^q(K)$ soit non nul. On peut supposer

que K est un complexe formé de A -modules projectifs de type fini et nuls en degrés strictement plus grands que q . Par construction du produit tensoriel dérivé, on a un isomorphisme $H^q((A/\mathfrak{m})^{\bigotimes_A L} K) \xrightarrow{\sim} H^q(K)/\mathfrak{m}H^q(K)$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A . Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $H^q(K) \neq \mathfrak{m}H^q(K)$ ou encore, d'après le lemme de Nakayama, que $H^q(K) \otimes_A A_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Le support de $H^q(K)$ est un fermé non vide de $\mathrm{Spec}(A)$ (cf. [ÉGA 0_I 1.7]), il contient un point fermé que l'on identifie à un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , et cet idéal maximal vérifie la condition voulue.

Démontrons le théorème 7.1.3 en supposant connu le théorème 7.6.1. Soit K un complexe dualisant sur $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et A une Λ -algèbre noethérienne. Grâce au lemme 6.2.2.4, il vient que K appartient à $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et donc que $K_A = A \otimes_A^L K$ appartient à $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. D'après le théorème 7.6.1, le foncteur $D_A = R\mathrm{Hom}_A(-, K_A)$ préserve $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. Il reste à montrer que le morphisme de bidualité $L \rightarrow D_A^2 L$ est un isomorphisme pour tout $L \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. D'après le lemme, il suffit de montrer qu'après produit tensoriel dérivé avec $A/\mathfrak{m}$, le morphisme $L \rightarrow D_A^2 L$ induit un isomorphisme. D'après le théorème 7.6.1, le foncteur de dualité considéré commute au changement d'anneau, ainsi, après produit tensoriel avec $A/\mathfrak{m}$, grâce au théorème 12.2.5, on obtient le morphisme de bidualité pour $A/\mathfrak{m} \otimes_A^L L$ dans $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A/\mathfrak{m})$. Bref, on peut supposer que l'anneau A est un corps. Dans ce cas, on peut conclure en utilisant le théorème 7.1.2.

PROPOSITION 7.6.3. *Soit X un schéma noethérien. On suppose qu'il existe un complexe dualisant sur $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, pour toute immersion j d'un ouvert U de X , le foncteur Rj_* envoie $D_{\mathcal{C}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ dans $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Soit K un complexe dualisant sur $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Pour des raisons évidentes, j^*K est un complexe dualisant sur $D_{\mathcal{C}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. On note D_X (resp. D_U) les dualités induites par K et j^*K sur les catégories triangulées $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (resp. $D_{\mathcal{C}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$). On a un isomorphisme canonique $D_X \circ j_! \simeq Rj_* D_U$. On en déduit que pour tout $M \in D_{\mathcal{C}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, $Rj_* M \simeq D_X j_! D_U M$, ce qui permet de conclure que $Rj_* M$ appartient à $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

DÉFINITION 7.6.4. Si X est un schéma noethérien, A une Λ -algèbre noethérienne et $\mathcal{P}$ une partition galoisienne dirigeable de X , on note $D(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ la sous-catégorie triangulée de $D(X_{\text{ét}}, A)$ dont les objets de cohomologie sont dans $\mathrm{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$. On définit de même les variantes $D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$, $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$, etc.

PROPOSITION 7.6.5. *Soit $j: U \rightarrow X$ une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que Rj_* applique $D_{\mathcal{C}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ dans $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Pour toute partition galoisienne dirigeable $\mathcal{P}$ de U , il existe une partition galoisienne $\mathcal{P}'$ de X et un entier c tel que Rj_* envoie $D^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}}$ dans $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}'}$ et que pour tout $q > c$ et $\mathcal{F} \in \mathrm{FCons}^{\mathcal{P}}(U, \Lambda)$, on ait $R^q j_* \mathcal{F} = 0$.*

On sait que la catégorie $\mathrm{FCons}^{\mathcal{P}}(U, \Lambda)$ est localement finie (cf. [Gabriel, 1962, pages 356]) et admet même un nombre fini d'objets simples (et ceux-ci sont des faisceaux constructibles), cf. proposition 7.4.3. Comme Rj_* applique $D_{\mathcal{C}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ dans $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut choisir un entier c et une partition galoisienne $\mathcal{P}'$ de X tels que pour tout objet simple $\mathcal{F}$ de $\mathrm{FCons}^{\mathcal{P}}(U, \Lambda)$, $Rj_* \mathcal{F}$ appartienne à $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}'}$ et ait des objets de cohomologie nuls en les degrés strictement supérieurs à c . Ce résultat s'étend par dévissage aux objets noethériens de $\mathrm{FCons}^{\mathcal{P}}(U, \Lambda)$ puis à cette catégorie toute entière du fait de la commutation des foncteurs $R^q j_*$ aux limites inductives filtrantes.

COROLLAIRE 7.6.6. *Soit $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée entre schémas noethériens. On suppose que $i^!$ applique $D_{\mathcal{C}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ dans $D_{\mathcal{C}}^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$. Pour toute partition galoisienne dirigeable $\mathcal{P}$ sur X , il existe une partition galoisienne $\mathcal{P}'$ sur Z et un entier c tel que $i^!$ envoie $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}}$ dans $D^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}'}$ et que pour tout $q > c$ et $\mathcal{F} \in \mathrm{FCons}^{\mathcal{P}}(X, \Lambda)$, on ait $\mathcal{H}^q(i^! \mathcal{F}) = 0$.*

Si on note $j: U \rightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire, l'hypothèse sur $i^!$ énoncée ici équivaut à celle exigée sur Rj_* dans la proposition 7.6.5. Quitte à raffiner $\mathcal{P}$, on peut supposer que les constituants de $\mathcal{P}$ sont soit au-dessus de U , soit au-dessus de Z . On peut ainsi écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_U \cup \mathcal{P}_Z$ où $\mathcal{P}_U$ et $\mathcal{P}_Z$ sont des partitions galoisiennes de U et Z respectivement. On applique la proposition 7.6.5 à $\mathcal{P}_U$. On obtient une partition galoisienne $\mathcal{P}''$ de X telle que Rj_* applique $D^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}_U}$ dans $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}''}$ et un entier naturel c' tel que pour tout $\mathcal{F} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}_U}(U, \Lambda)$, on ait $R^q j_* \mathcal{F} = 0$ pour $q > c'$. Quitte à raffiner $\mathcal{P}''$, on peut supposer que $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}_Z'' \cup \mathcal{P}_U''$ comme ci-dessus. Quitte à raffiner $\mathcal{P}_Z''$, on peut supposer que cette partition galoisienne de Z raffine $\mathcal{P}_Z$. En utilisant le triangle distingué

$$i^!K \rightarrow i^*K \rightarrow i^*Rj_*j^*K \rightarrow i^!K[1]$$

pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on obtient aussitôt que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_Z''$ et $c = c' + 1$ conviennent.

PROPOSITION 7.6.7. *Soit $j: U \rightarrow X$ une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que Rj_* envoie $D^b_c(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ dans $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, pour toute Λ -algèbre noethérienne A , Rj_* envoie $D^b_c(U_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D^b_{\text{cft}}(U_{\text{ét}}, A)$) dans $D^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$). En outre, pour tout $Y \in D^b_{\text{cft}}(U_{\text{ét}}, A)$ et $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique $M \otimes_A^L Rj_* Y \rightarrow Rj_*(M \otimes_A^L Y)$ est un isomorphisme. Par ailleurs, si $i: Z \rightarrow X$ est une immersion fermée complémentaire à j , alors $i^!$ envoie $D^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$) dans $D^b_c(Z_{\text{ét}}, A)$ (resp. $D^b_{\text{cft}}(Z_{\text{ét}}, A)$), et pour tout $M \in D^+(A)$ et $Y \in D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$, le morphisme canonique $M \otimes_A^L i^! Y \rightarrow i^!(M \otimes_A^L Y)$ est un isomorphisme.*

L'énoncé sur $i^!$ se déduit aussitôt de celui sur Rj_* , on se concentre donc sur celui-là. Pour montrer que Rj_* envoie $D^b_c(U_{\text{ét}}, A)$ dans $D^b_c(X_{\text{ét}}, A)$, on peut supposer par un dévissage évident que $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, où ℓ est un nombre premier. Par conséquent, pour tout Λ -module N et tout objet $Y \in D^b_c(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a un isomorphisme $Rj_*(N \otimes_A^L Y) \simeq N \otimes_A^L Rj_* Y$ (cf. proposition 10.2.1). Si N a une structure de A -module de type fini, comme on sait que $Rj_* Y$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut en déduire que $Rj_*(N \otimes_A^L Y)$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. D'après le dévissage de la proposition 7.4.1, il vient que Rj_* envoie $D^b_c(U_{\text{ét}}, A)$ dans $D^b_c(X_{\text{ét}}, A)$.

Montrons maintenant que Rj_* envoie $D^b_{\text{cft}}(U_{\text{ét}}, A)$ dans $D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$. Compte tenu du résultat précédent, il suffit de montrer que si $\mathcal{F}$ est un faisceau de A -modules plat et constructible sur U , alors $Rj_* \mathcal{F} \in D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$, c'est-à-dire que $M \otimes_A^L Rj_* \mathcal{F}$ est borné indépendamment du A -module M . D'après la proposition 10.2.1, il suffit de montrer que $Rj_*(\mathcal{F} \otimes_A M)$ est borné indépendamment du A -module M , et si tel est le cas, la formule des coefficients universels énoncée ici sera satisfaite. Il existe une partition galoisienne dirigeable $\mathcal{P}$ de U telle que $\mathcal{F}$ appartienne à $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(U, A)$. Pour tout A -module M , $\mathcal{F} \otimes_A M$ est un objet de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(U, A)$, ainsi, il suffit de montrer qu'il existe un entier c tel que pour tout objet $\mathcal{G}$ de $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(U, A)$, on ait $R^q j_* \mathcal{G} = 0$ pour $q > c$, ce qui résulte de la proposition 7.6.5.

DÉFINITION 7.6.8. Soit X un schéma noethérien. Soit A une Λ -algèbre noethérienne. Soit $K \in D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$. On dira que K vérifie la **condition (B)** si pour toute partition galoisienne $\mathcal{P}$ de X , il existe un entier c et une partition galoisienne $\mathcal{P}'$ de X tels que pour tout $L \in D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$, $R\text{Hom}_A(K, L)$ appartienne à $D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$, que si on suppose que $\mathcal{H}^q L = 0$ pour $q > 0$, alors $\mathcal{H}^q R\text{Hom}_A(K, L) = 0$ pour $q > c$ et enfin, que si L appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$, alors $R\text{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$.

PROPOSITION 7.6.9. *Soit X un schéma noethérien tel qu'il existe un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, tout objet $K \in D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$ vérifie la condition (B).*

LEMME 7.6.10. *Soit X un schéma noethérien tel qu'il existe un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Soit $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée. Soit $j: U \rightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit $K \in D^b_{\text{cft}}(X_{\text{ét}}, A)$. On suppose que i^*K et j^*K satisfont la condition (B). Alors, K satisfait la condition (B).*

Pour tout $L \in D(X_{\text{ét}}, A)$, on a un triangle distingué dans $D(X_{\text{ét}}, A)$:

$$i_* R\text{Hom}_A(i^*K, i^!L) \rightarrow R\text{Hom}_A(K, L) \rightarrow Rj_* R\text{Hom}_A(j^*K, j^!L) \xrightarrow{+}$$

Grâce au résultat de l'exercice 7.3.8 et compte tenu de la proposition 7.6.3, on peut combiner d'une part le résultat sur $i^!$ du corollaire 7.6.6 et la condition (B) pour i^*K et d'autre part la proposition 7.6.5 concernant Rj_* et la condition (B) pour j^*K pour obtenir que K vérifie la condition (B).

Démontrons la proposition 7.6.9. La condition (B) définit une sous-catégorie triangulée de $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que si K est un faisceau de A -modules plat et constructibles, alors K satisfait la condition (B). L'existence d'un complexe dualisant étant une condition préservée par passage à un sous-schéma, le lemme précédent fournit un moyen de dévisser la situation pour se ramener au cas où K est localement constant. On est ramené au lemme suivant :

LEMME 7.6.11. *Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de A -modules constructible, plat et localement constant. Alors, $\mathcal{F}$ satisfait la propriété (B).*

Tout d'abord, pour tout $L \in D^b(X_{\text{ét}}, A)$, si $\mathcal{H}^q L = 0$ pour $q > 0$, alors pour tout $q > 0$, $\mathcal{H}^q(R\text{Hom}_A(\mathcal{F}, L)) \simeq \text{Hom}_A(\mathcal{F}, \mathcal{H}^q L) = 0$, et si $L \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$, alors $R\text{Hom}_A(\mathcal{F}, L) \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$. Il reste donc à montrer que si $\mathcal{P}$ est une partition galoisienne de X , il existe une partition galoisienne $\mathcal{P}'$ de X telle que pour tout $L \in D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$, alors $R\text{Hom}_A(\mathcal{F}, L)$ appartient à $D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$. On peut supposer que $\mathcal{P}$ est constitué d'un unique revêtement étale galoisien $X' \rightarrow X$. On choisit un revêtement étale galoisien $X'' \rightarrow X$ tel que l'image inverse de $\mathcal{F}$ sur X'' soit un faisceau constant, puis un revêtement galoisien $X''' \rightarrow X$ coiffant X' et X'' . On voit aussitôt que la partition galoisienne $\mathcal{P}' = (X''' \rightarrow X)$ de X convient.

Démontrons le théorème 7.6.1. Soit $K \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. D'après la proposition 7.6.9, K vérifie la condition (B). Soit $L \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. Il existe une partition galoisienne $\mathcal{P}$ de X telle que L appartienne à $D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$. Pour tout A -module M , l'objet $M \otimes_A^L L$ appartient encore à cette catégorie (et est borné indépendamment de M). Il résulte de la condition (B) de K que $R\text{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ et qu'il existe une partition galoisienne $\mathcal{P}'$ telle que $R\text{Hom}_A(K, M \otimes_A^L L)$ soit un objet de $D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$ borné indépendamment du A -module M . La proposition 10.1.1 permet de déduire que $R\text{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ et que pour tout $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique $M \otimes_A^L R\text{Hom}_A(K, L) \rightarrow R\text{Hom}_A(K, M \otimes_A^L L)$ est un isomorphisme. On déduit aussitôt de cette formule la compatibilité au changement d'anneau $A \rightarrow A'$ pour toute A -algèbre A' .

7.7. Élimination de l'hypothèse noethérienne sur A .

DÉFINITION 7.7.1. Soit A un anneau commutatif. Soit X un schéma noethérien. On dit d'un complexe $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$ qu'il est **c-parfait** s'il existe une partition finie $(U_i)_{i \in I}$ de X par des sous-schémas (réduits) telle que pour tout $i \in I$, $K|_{U_i} \in D(U_{i,\text{ét}}, A)$ soit un complexe parfait (cf. [SGA 6 I 4.8]). On note $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ la sous-catégorie triangulée de $D(X_{\text{ét}}, A)$ formée des complexes c-parfaits.

Bien entendu, pour tout morphisme d'anneaux $A \rightarrow A'$, le foncteur $A' \otimes_A^L - : D^-(X_{\text{ét}}, A) \rightarrow D^-(X_{\text{ét}}, A')$ induit un foncteur $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A) \rightarrow D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A')$. En outre, si A est un anneau noethérien, $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A) = D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$.

THÉORÈME 7.7.2. *Soit A une Λ -algèbre commutative. Soit X un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit K un complexe dualisant sur $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $A \otimes_{\Lambda}^L K$ est un complexe dualisant sur $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. En outre, le bifoncteur $R\text{Hom}_A$ préserve $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ et commute à tout changement d'anneau $A \rightarrow A'$.*

Le théorème 7.6.1 énonce que si B est une Λ -algèbre noethérienne, que K et L sont deux objets de $D_{\text{c-parf}}^b(X_{\text{ét}}, B)$, alors pour toute B -algèbre A , on a un isomorphisme canonique

$$R\text{Hom}_A(A \otimes_B^L K, A \otimes_B^L L) \simeq A \otimes_B^L R\text{Hom}_B(K, L).$$

Comme l'objet de droite appartient à $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$, il s'agit d'un isomorphisme dans $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. Bref, compte tenu du théorème 7.6.1 et du théorème 7.1.3 (dont l'énoncé d'unicité des complexes dualisants vaut aussi pour $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ avec la même démonstration, cf. proposition 7.5.1.1), le théorème ci-dessus est ramené au lemme suivant :

LEMME 7.7.3. *Soit A un anneau commutatif. Soit X un schéma noethérien. Pour tout objet K de $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$, il existe un sous-anneau noethérien (et même de type fini sur $\mathbf{Z}$) B de A et $K' \in D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, B)$ tels que les objets K et $A \otimes_B^L K'$ de $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ soient isomorphes.*

Comme il nécessite un examen plus attentif de la notion de c -perfection, on repousse la démonstration de ce lemme à la fin de cette sous-section.

LEMME 7.7.4. *Soit A un anneau commutatif. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de A -modules sur $X_{\text{ét}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une partition $(U_i)_{i \in I}$ de X par des sous-schémas réduits tels que pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit localement constant et que pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X , le A -module $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ soit projectif de type fini ;*
- (ii) *Le faisceau de A -modules $\mathcal{F}$ est constructible^(vii) et pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X , le A -module $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ est projectif de type fini ;*
- (iii) *Le faisceau de A -modules $\mathcal{F}$ est plat et constructible.*

Par définition des faisceaux constructibles, on a évidemment l'équivalence (i) $\iff$ (ii). Si $\mathcal{F}$ est constructible, les fibres $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont des A -modules de présentation finie, il est alors équivalent d'exiger que ces modules soient plats ou projectifs de type fini, ce qui montre l'équivalence (ii) $\iff$ (iii).

On note $\mathcal{C}$ la catégorie fibrée au-dessus du site $X_{\text{ét}}$ qui à $U \in X_{\text{ét}}$ fait correspondre la catégorie $\mathcal{C}_U$ des faisceaux de A -modules sur $U_{\text{ét}}$ et $\mathcal{C}_c$ la sous- $X_{\text{ét}}$ -catégorie de $\mathcal{C}$ formée des faisceaux de A -modules plats et constructibles. Nous allons utiliser la terminologie de [SGA 6 I 1.2] et [SGA 6 I 2]. Il est évident qu'un objet de $\mathcal{C}$ qui est localement dans $\mathcal{C}_c$ est dans $\mathcal{C}_c$ et que $\mathcal{C}_c$ est stable par noyau d'épimorphisme. D'après [SGA 4 IX 2.7], un faisceau de A -modules sur $X_{\text{ét}}$ est constructible si et seulement s'il est isomorphe au conoyau d'un morphisme $A_V \rightarrow A_U$ pour U et V deux X -schémas étales et de présentation finie. Les faisceaux A_U pour U étale et de présentation finie sur X sont donc évidemment plats et constructibles. Il résulte de ces résultats qu'un objet de $\mathcal{C}_X$ est de $\mathcal{C}_c$ -type fini si et seulement s'il est engendré par un nombre fini de sections (ce qui revient à demander qu'il soit de $\mathcal{C}_{cX}$ -type fini) et qu'un objet de $\mathcal{C}_X$ est de $\mathcal{C}_c$ -présentation finie si et seulement s'il est constructible (ce qui revient encore à demander qu'il soit de $\mathcal{C}_{cX}$ -présentation finie). Il est par ailleurs évident que $\mathcal{C}_c$ est quasi-relevable dans $\mathcal{C}$ et même que $\mathcal{C}_{cX}$ est quasi-relevable dans $\mathcal{C}_X$. Les catégories $\mathcal{C}_c$ et $\mathcal{C}$ vérifient donc les hypothèses de [SGA 6 I 2.0] et de [SGA 6 II 1.1] (mais en général pas de [SGA 6 I 4.0]). On dispose donc d'une notion de complexe pseudo-cohérent (relativement à $\mathcal{C}_c$) et celle-ci peut-être définie de façon globale (c'est-à-dire relativement à $\mathcal{C}_{cX}$) :

DÉFINITION 7.7.5. Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in C(X_{\text{ét}}, A)$. On dit que K est **strictement c -pseudo-cohérent** (resp. **strictement c -parfait**) si K est un complexe borné supérieurement (resp. borné) formé de faisceaux de A -modules plats et constructibles.

DÉFINITION 7.7.6. Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. On dit que K est **c -pseudo-cohérent** s'il est isomorphe à l'image dans $D(X_{\text{ét}}, A)$ d'un complexe strictement c -pseudo-cohérent^(viii). Les objets c -pseudo-cohérents forment une sous-catégorie triangulée anonyme de $D(X_{\text{ét}}, A)$.

^(vii) On utilise la définition donnée dans [SGA 4 IX 2.3] même si A n'est pas noethérien, et non pas la définition suggérée en note à cet endroit ; un faisceau constructible pour cette autre définition est ce que nous appelons un faisceau c -pseudo-cohérent (cf. définition 7.7.6).

^(viii) En raison de l'existence de « résolutions globales », la définition globale donnée ici équivaut à la définition locale de [SGA 6 I 2.3].

REMARQUE 7.7.7. La $X_{\text{ét}}$ -catégorie $\mathcal{C}$ contient aussi la $X_{\text{ét}}$ -catégorie $\mathcal{C}_0$ des faisceaux constants de valeur un A -module projectif de type fini. Bien entendu, $\mathcal{C}_0$ est contenue dans $\mathcal{C}_c$. Ainsi, les notions de stricte pseudo-cohérence (resp. stricte perfection) définies relativement à $\mathcal{C}_0$ impliquent les notions correspondantes relativement à $\mathcal{C}_c$.

PROPOSITION 7.7.8. *Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) K est c -parfait ;
- (ii) K est c -pseudo-cohérent et de tor-dimension finie ;
- (iii) K est isomorphe à l'image dans $D(X_{\text{ét}}, A)$ d'un complexe strictement c -parfait.

LEMME 7.7.9. *Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une partition finie de X par des sous-schémas réduits. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. On suppose que pour tout $i \in I$, la restriction de K à U_i est c -pseudo-cohérente. Alors, K est c -pseudo-cohérent.*

Par les arguments habituels, on se ramène au cas où la partition de X est constituée d'un ouvert U et d'un fermé Z . On note $i: Z \rightarrow X$ et $j: U \rightarrow X$ les immersions correspondantes. On dispose d'un triangle distingué dans $D(X_{\text{ét}}, A)$:

$$j_! j^* K \rightarrow K \rightarrow i_* i^* K \rightarrow j_! j^* K[1]$$

On sait que $j^* K$ et $i^* K$ sont c -pseudo-cohérents. Il est évident que $j_!$ et i_* préservent la notion de faisceau plat et constructible ; au niveau des catégories triangulées, ces foncteurs préservent donc la notion de c -pseudo-cohérence. Les objets $j_! j^* K$ et $i_* i^* K$ sont c -pseudo-cohérents ; il en résulte que K aussi est c -pseudo-cohérent.

LEMME 7.7.10. *Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. Si K est c -parfait, alors K est c -pseudo-cohérent.*

D'après le lemme 7.7.9, quitte à passer à un recouvrement fini par des localement fermés convenables, on peut supposer que K est parfait. Par conséquent, K est pseudo-cohérent (sous-entendu relativement à la $X_{\text{ét}}$ -catégorie $\mathcal{C}_0$) ; *a fortiori*, K est c -pseudo-cohérent.

Démontrons la proposition 7.7.8. L'implication (iii) $\implies$ (i) est évidente. L'implication (i) $\implies$ (ii) résulte essentiellement du lemme précédent ; il reste cependant à vérifier que si K est c -parfait, alors il est de tor-dimension finie. Supposons donc que K est c -parfait. Il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i \in I}$ de X par des localement fermés tels que $K|_{U_i}$ soit parfait pour tout $i \in I$. Pour obtenir (ii) pour K , il suffit de montrer que le complexe parfait $K|_{U_i}$ est de tor-dimension finie, ce qui résulte aussitôt de [SGA 6 I 5.8.1]. Il reste à établir l'implication (ii) $\implies$ (iii), la plus intéressante pour nous. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$ un complexe c -pseudo-cohérent et de tor-dimension finie. Par définition de la c -pseudo-cohérence, on peut remplacer si besoin est K par un complexe borné supérieurement formé de faisceaux de A -modules plats et constructibles. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on peut considérer la troncature canonique $\tau_{\leq a} K$ de K , si on note Z^a le noyau de $K^a \rightarrow K^{a+1}$, il s'agit du sous-complexe suivant de K :

$$\cdots \rightarrow K^{a-2} \rightarrow K^{a-1} \rightarrow Z^a \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Comme K est de tor-dimension finie, il existe un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout A -module M , $\tau_{\leq a}(K \otimes_A M)$ soit acyclique. En appliquant ceci avec $M = A$, on obtient une résolution plate de Z^a :

$$\cdots \rightarrow K^{a-3} \rightarrow K^{a-2} \rightarrow K^{a-1} \rightarrow Z^a \rightarrow 0.$$

Ensuite, on obtient aussitôt que pour un A -module M quelconque, cette suite reste exacte après passage au produit tensoriel avec M . Par suite, pour tout $i > 0$, $\text{Tor}_i^A(Z^a, M) = 0$ pour tout A -module M , ce qui implique que Z^a est un faisceau de A -modules plat. Par ailleurs, Z^a est le conoyau du morphisme $K^{a-2} \rightarrow K^{a-1}$, donc Z^a est un faisceau constructible. Ainsi, Z^a est plat et constructible. Le complexe K est quasi-isomorphe au complexe strictement c -parfait

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow Z^a \rightarrow K^a \rightarrow K^{a+1} \rightarrow \cdots,$$

ainsi K vérifie la condition (iii).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme 7.7.3. Compte tenu de la proposition 7.7.8, il s'agit de montrer que si $K \in C(X_{\text{ét}}, A)$ est un complexe strictement c-parfait, alors A contient un sous-anneau A' de type fini sur $\mathbf{Z}$ tel qu'il existe un complexe strictement c-parfait $K' \in C(X_{\text{ét}}, A')$ et un isomorphisme $K \simeq A \otimes_{A'} K'$. Ceci résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 7.7.11. *Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système inductif d'anneaux commutatifs indexé par un ensemble ordonné filtrant (non vide) I . On en note A la limite inductive. Soit X un schéma noethérien. Alors, la donnée d'un faisceau de A -modules constructible (resp. plat et constructible) sur X équivaut à la donnée d'un faisceau de A_α -modules constructible (resp. plat et constructible) sur X pour α assez grand.*

Conformément aux grands principes de [ÉGA IV 8], ceci signifie d'une part que si F est un faisceau de A -modules constructible sur X , il existe $\alpha \in I$ et F_α un faisceau de A_α -modules constructible sur X tel que F soit isomorphe à $A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ et d'autre part que si $\alpha \in I$ et que F_α et G_α sont deux faisceaux de A_α -modules constructibles sur X , si on note $F_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ et $G_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} G_\alpha$ pour tout $\beta \geq \alpha$ et $F = A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ et $G = A \otimes_{A_\alpha} G_\alpha$, alors l'application canonique

$$\operatorname{colim}_{\beta \geq \alpha} \operatorname{Hom}_{A_\beta}(F_\beta, G_\beta) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(F, G)$$

est un isomorphisme. En outre, si $\alpha \in I$ et que F_α est un faisceau de A_α -modules constructible sur X , alors $F = A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ est plat si et seulement si pour $\beta \geq \alpha$ assez grand, $F_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ est plat.

L'énoncé dans le cas non respé résulte de la description des faisceaux de B -modules constructibles (pour tout anneau commutatif B) comme conoyau d'une flèche $B_V \rightarrow B_U$ où U et V sont étales et de présentation finie sur X , et du fait que le foncteur $H_{\text{ét}}^0(V, -)$ de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ vers celle des groupes abéliens commute aux limites inductives filtrantes [SGA 4 VII 3.3].

Il reste à montrer que si F_α est un faisceau de A_α -modules constructible tel que, avec les notations ci-dessus, F soit A -plat, alors pour $\beta \geq \alpha$ assez grand, F_β est A_β -plat. En utilisant une décomposition de X en réunion de localement fermés connexes (non vides) au-dessus desquels F_α soit localement constant trivialisé par un revêtement étale (non vide), on peut supposer que X est connexe (non vide) et que F_α est localement constant et trivialisé par un revêtement étale (non vide) $Y \rightarrow X$. Pour vérifier la platitude de F_β , il suffit de l'obtenir pour une fibre $(F_\beta)_{\bar{x}}$; on est ainsi ramené au lemme suivant :

LEMME 7.7.12. *Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système inductif d'anneaux commutatifs indexé par un ensemble ordonné filtrant (non vide) I . On en note A la limite inductive. Soit $\alpha \in I$, soit M_α un A_α -module de présentation finie. On suppose que $M = A \otimes_{A_\alpha} M_\alpha$ est A -plat. Alors, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que $M_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} M_\alpha$ soit A_β -plat.*

Les modules considérés étant de présentation finie, le module M (resp. M_β) est plat si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre de type fini. On peut conclure en utilisant convenablement [ÉGA IV 8.5.2].

8. Produits tensoriels de complexes non bornés

8.1. K-platitude.

DÉFINITION 8.1.1. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. On note $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ (resp. $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$) la catégorie des complexes de $\mathcal{A}$ -Modules (resp. la catégorie homotopique correspondante, la catégorie dérivée associée). On dispose d'un bifoncteur $\otimes_{\mathcal{A}}$ sur $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ induisant un bifoncteur sur $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ ^(ix). Soit $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. On dit que K est **K-plat** si le foncteur triangulé $K \otimes_{\mathcal{A}} - : K(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ préserve les quasi-isomorphismes, autrement dit que pour tout complexe acyclique L de $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, le complexe $K \otimes_{\mathcal{A}} L$ est acyclique (cf. [Spaltenstein, 1988, définition 5.1]).

La sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ formée des complexes K -plats est stable par limites inductives filtrantes, sommes directes et facteurs directs. En outre, la sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ correspondante est une sous-catégorie triangulée de $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$.

^(ix) Le lecteur pourra consulter les conventions de signes de XVI-4.5

PROPOSITION 8.1.2. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit K un complexe borné supérieurement formé de $\mathcal{A}$ -modules plats (cf. [SGA4 V 1]). Alors, K est K -plat.

En utilisant les foncteurs de troncature bête et la stabilité par limites inductives filtrantes de la K -platitudo, on se ramène au cas où K est borné. Comme la K -platitudo définit une sous-catégorie triangulée de $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, on peut procéder à un dévissage utilisant encore les troncatures bêtes pour se ramener au cas où $K^q = 0$ pour $q \neq 0$. On est alors ramené à montrer que si F est un $\mathcal{A}$ -Module plat et $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un complexe acyclique, alors $F \otimes_{\mathcal{A}} L$ est acyclique, ce qui résulte aussitôt de la définition de la platitudo.

8.2. Résolutions K -plates.

8.2.1. Définition du produit tensoriel dérivé.

THÉORÈME 8.2.1.1. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Il existe un foncteur $\rho: C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ et une transformation naturelle $\rho K \rightarrow K$ pour $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ telle que :

- pour tout $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, ρK soit K -plat ;
- pour tout $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, le morphisme $\rho K \rightarrow K$ soit un quasi-isomorphisme ;
- le foncteur ρ commute aux limites inductives filtrantes.

Ce théorème sera démontré plus bas. Dédouons-en aussitôt la proposition triviale suivante, qui constitue notre définition du produit tensoriel sur $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$:

PROPOSITION 8.2.1.2. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Le foncteur dérivé total à gauche de $\otimes_{\mathcal{A}}: C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \times C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ existe. Plus précisément, pour tous K et L dans $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, on note $K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} L = (\rho K) \otimes_{\mathcal{A}} (\rho L) \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$; ce bifoncteur $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}}$ commute aux limites inductives filtrantes en chaque argument et, préservant les quasi-isomorphismes, il induit un bifoncteur du même nom $D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \times D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$; la transformation naturelle évidente $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} \rightarrow \otimes_{\mathcal{A}}$ fait de $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}}$ le foncteur dérivé total à gauche de $\otimes_{\mathcal{A}}$ (cf. [Goerss & Jardine, 1999, remark 7.4, Chapter II] pour une définition des foncteurs dérivés totaux en termes d'extensions de Kan). En outre, si K et L sont deux objets de $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ dont l'un au moins est K -plat, alors le morphisme canonique $K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} L \rightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} L$ est un isomorphisme dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$.

8.2.2. Modules sur un anneau. On se place ici dans le cas particulier où le topos $\mathcal{T}$ est ponctuel. On peut identifier les faisceaux de $\mathcal{A}$ -modules à des A -modules pour un anneau A . Le lemme suivant démontre le théorème 8.2.1.1 dans ce cas particulier.

LEMME 8.2.2.1. Pour tout anneau commutatif A , on peut définir un foncteur ρ_A et une transformation naturelle $\rho_A \rightarrow \text{Id}$ de foncteurs de la catégorie $C(A)$ des complexes de A -modules dans elle-même telle que ρ_A commute aux limites inductives filtrantes, préserve les monomorphismes, que pour tout $K \in C(A)$, le morphisme de complexes $\rho_A(K) \rightarrow K$ soit un quasi-isomorphisme, que pour tout entier relatif n , $\rho_A(K)^n$ soit un A -module libre, et que $\rho_A(K)$ soit la limite inductive filtrante de sous-complexes bornés formés de A -modules libres (en particulier, $\rho_A(K)$ est K -plat).

On peut définir de telles résolutions K -plates ρ_A pour tout anneau commutatif A de sorte que si $A \rightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux, on ait un morphisme fonctoriel $\rho_A(K) \rightarrow \rho_{A'}(K)$ dans $C(A)$ pour $K \in C(A')$, ce morphisme vérifiant une compatibilité évidente à la composition des morphismes d'anneaux.

On note G le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli oub de la catégorie des A -modules vers celle des ensembles pointés. On pose $F = G \circ \text{oub}$. Si M est un A -module, FM est le quotient du A -module libre de base l'ensemble M par le sous-module libre de rang 1 engendré par le zéro de M . On pose $(F'M)_0 := FM$ et on note Z_0 le noyau du morphisme d'adjonction $(F'M)_0 = FM \rightarrow M$ qui est un épimorphisme. Ensuite, de façon évidente, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on peut définir par récurrence un objet $(F'M)_n = FZ_{n-1}$, un morphisme $d_n: (F'M)_n \rightarrow (F'M)_{n-1}$ et le noyau $Z_n = \text{Ker}(d_n)$. Il est évident que l'on définit ainsi un complexe $F'M$ concentré en degrés négatifs ou nuls, muni d'une augmentation $F'M \rightarrow M$ qui soit un quasi-isomorphisme. Comme F préserve les monomorphismes, on voit que F' préserve aussi les monomorphismes.

Soit $K \in C(A)$. Le foncteur F' défini ci-dessus n'est pas additif (à moins que $A = 0$), mais il est tel que $F'(0) = 0$. Ainsi, si on applique terme à terme le foncteur F' aux objets K_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on

obtient un complexe double $((F^p K^q)_{-q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}}$ dans la catégorie des A -modules. On note $\rho_A(K)$ le complexe simple associé (défini en termes de sommes), cf. XVI-4.4. On dispose bien entendu d'un morphisme d'augmentation $\rho_A(K) \rightarrow K$. Il est évident que ρ_A commute aux limites inductives filtrantes, préserve les monomorphismes et que pour tout entier n , $\rho_A(K)^n$ est un A -module libre. Si K est borné supérieurement, le fait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\rho_A(K^n) \rightarrow K^n$ soit un quasi-isomorphisme implique, par passage au complexe simple, que $\rho_A(K) \rightarrow K$ est un quasi-isomorphisme. Comme tout complexe de A -modules peut s'écrire comme une limite inductive filtrante de sous-complexes bornés supérieurement, il vient que pour tout $K \in C(A)$, le morphisme $\rho_A(K) \rightarrow K$ est un quasi-isomorphisme.

Si K est borné supérieurement $\rho_A(K)$ est borné supérieurement et formé de A -modules libres. En utilisant les troncatures bêtes, on obtient que $\rho_A(K)$ est limite inductive filtrante de sous-complexes bornés formés de A -modules libres. Dans le cas général, K est limite inductive filtrante de sous-complexes bornés supérieurement. En utilisant que ρ_A préserve les monomorphismes et commute aux limites inductives filtrantes, on obtient que $\rho_A(K)$ est limite inductive filtrante de sous-complexes bornés formés de A -modules libres.

La dernière assertion concernant le changement d'anneau étant évidente, on peut considérer que le lemme a été démontré.

8.2.3. Préfaisceaux de modules. On suppose maintenant que $\mathcal{T}$ est le topos des préfaisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{C}$. Le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ est un préfaisceau d'anneaux commutatifs sur $\mathcal{C}$.

Soit $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Pour tout objet U de $\mathcal{C}$, $K(U)$ s'identifie à un objet de $C(\mathcal{A}(U))$. On applique la construction du lemme 8.2.2.1 à l'anneau $\mathcal{A}(U)$. On pose $(\rho K)(U) = \rho_{\mathcal{A}(U)}(K(U)) \in C(\mathcal{A}(U))$. Si $V \rightarrow U$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, on définit un $\mathcal{A}(U)$ -morphisme $(\rho K)(U) \rightarrow (\rho K)(V)$ de la façon suivante :

$$\rho_{\mathcal{A}(U)}(K(U)) \rightarrow \rho_{\mathcal{A}(U)}(K(V)) \rightarrow \rho_{\mathcal{A}(V)}(K(V))$$

où le morphisme de gauche est induit par la structure de complexes de préfaisceaux de $\mathcal{A}$ -modules sur K et la flèche de droite par la compatibilité de la construction du lemme 8.2.2.1 au changement d'anneau. D'après ce lemme, ces morphismes de transition définissent une structure de préfaisceau sur ρK . Ainsi, on a défini un objet $\rho K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ et il est muni d'un morphisme fonctoriel $\rho K \rightarrow K$.

Par construction, on peut vérifier les vertus présumées de ρ terme à terme ; ainsi, ce foncteur ρ permet d'établir le théorème 8.2.1.1 dans le cas où le topos est un topos de préfaisceaux.

8.2.4. Faisceaux de modules.

PROPOSITION 8.2.4.1. Soit $\mathcal{T}$ le topos des faisceaux sur un site dont la catégorie sous-jacente est notée $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{T}'$ le topos des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{A}'$ un préfaisceau d'anneaux commutatifs sur $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{A}$ le faisceau d'anneaux $\alpha\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{T}$ associé à $\mathcal{A}'$. Si $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ est K -plat, alors $\alpha K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est K -plat.

LEMME 8.2.4.2. On conserve les notations de la proposition 8.2.4.1. Soit $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ un objet tel que αK soit nul dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Alors, pour tout $L \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$, $\alpha(K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'} L)$ (où le produit tensoriel dérivé au-dessus de $\mathcal{A}'$ est celui défini plus haut dans le cas des préfaisceaux) est nul dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$.

Si M est un $\mathcal{A}'$ -Module plat, le $\mathcal{A}$ -Module αM est plat d'après [SGA 4 v 1.7.1]^(x). L'isomorphisme $\alpha(K \otimes_{\mathcal{A}'} M) \simeq \alpha K \otimes_{\mathcal{A}} \alpha M$ permet alors d'obtenir que $\alpha(K \otimes_{\mathcal{A}'} M)$ est acyclique. Par dévissage, si M est un complexe borné formé de $\mathcal{A}'$ -Modules plats, alors $\alpha(K \otimes_{\mathcal{A}'} M)$ est acyclique. Pour tout $L \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$, comme $\rho_{\mathcal{A}'} L$ est limite inductive filtrante de complexes bornés formés de $\mathcal{A}'$ -Modules plats, il vient que $\alpha(K \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} L)$ est acyclique. Comme $\rho_{\mathcal{A}'} L$ est K -plat (sur $\mathcal{A}'$), le quasi-isomorphisme $\rho_{\mathcal{A}'} K \rightarrow K$ induit un quasi-isomorphisme $\rho_{\mathcal{A}'} K \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} L \rightarrow K \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} L$. Par passage aux faisceaux associés, on en déduit des isomorphismes dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$: $\alpha(K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'} L) \simeq \alpha(K \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} L) \simeq 0$.

^(x)On laisse au lecteur le soin de trouver une démonstration alternative qui soit plus directe et qui évite de recourir aux limites inductives locales [SGA 4 v 8] dans le cas où le topos $\mathcal{T}$ n'admettrait pas de famille conservative de points.

Montrons la proposition 8.2.4.1. Notons $\mathcal{L}$ la sous-catégorie triangulée de $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ formée des complexes qui sont annulés par le foncteur faisceau associé $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Le foncteur induit $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')/\mathcal{L} \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est évidemment une équivalence de catégories triangulées. D'après le lemme 8.2.4.2, le bifoncteur $\otimes_{\mathcal{A}'}^L$ sur $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ passe au quotient par $\mathcal{L}$ pour définir un bifoncteur sur $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. La proposition en résulte aussitôt. En effet, soit $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ K-plat, soit $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ tel que L soit nul dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. On peut identifier L à un objet L' de $C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ et cet objet L' appartient à la sous-catégorie triangulée $\mathcal{L}$ de $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$. Le lemme montre que $K \otimes_{\mathcal{A}'}^L L'$ appartient à $\mathcal{L}$, autrement dit, K étant K-plat, que $K \otimes_{\mathcal{A}'} L'$ appartient à $\mathcal{L}$, c'est-à-dire que le complexe de faisceaux $aK \otimes_{\mathcal{A}} L$ est acyclique, ce qui montre que $a(K \otimes_{\mathcal{A}'} L') = aK \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est K-plat.

COROLLAIRE 8.2.4.3. *Avec les notations de la proposition 8.2.4.1, le foncteur $\rho_{\mathcal{A}}$ qui à un complexe $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ associe $a\rho_{\mathcal{A}} K'$ où K' est le $\mathcal{A}'$ -Module défini par K est un foncteur de résolution K-plat sur $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ vérifiant les conditions du théorème 8.2.1.1. Ainsi, on dispose d'un bifoncteur $\otimes_{\mathcal{A}}^L$ sur $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ et d'un isomorphisme bifonctoriel*

$$aK \otimes_{\mathcal{A}}^L aL \simeq a(K \otimes_{\mathcal{A}'}^L L)$$

dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ pour tous K et L dans $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$.

Avec l'énoncé de ce corollaire s'achève la démonstration du théorème 8.2.1.1.

8.3. Compléments.

8.3.1. Homomorphismes internes.

DÉFINITION 8.3.1.1. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. On note $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}$ le foncteur adjoint à droite du foncteur produit tensoriel $\otimes_{\mathcal{A}}$ sur $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, c'est-à-dire que pour X, K et L des objets de $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{T}, \mathcal{A})}(X \otimes_{\mathcal{A}} K, L) \simeq \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{T}, \mathcal{A})}(X, \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L)) .$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(K, L) := \Gamma(\mathcal{T}, \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L))$ le complexe de groupes abéliens obtenu en appliquant le foncteur sections globales $\Gamma(\mathcal{T}, -)$ au complexe de faisceaux $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L)$; ainsi, $H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(K, L)) \simeq \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{T}, \mathcal{A})}(K, L)$.

On rappelle qu'un objet $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est **K-injectif** si pour tout complexe acyclique $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, le complexe de groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(K, L)$ est acyclique. On rappelle aussi qu'il existe des foncteurs de résolutions K-injectives^(xi).

La proposition suivante, indiquée pour mémoire, est essentiellement triviale :

PROPOSITION 8.3.1.2. *Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}$ sur $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ admet un foncteur dérivé total à droite $R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}} : D(\mathcal{T}, \mathcal{A})^{\mathrm{opp}} \times D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, adjoint à droite de $\otimes_{\mathcal{A}}^L$. En outre, si K et L sont des objets de $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, avec L K-injectif, alors le morphisme canonique*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L) \rightarrow R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L)$$

est un isomorphisme dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$; si on suppose de plus que K est K-plat, alors $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L)$ est K-injectif. Enfin, si K, L et M sont trois objets de $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, on a un isomorphisme fonctoriel dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ « cher à Cartan » :

$$R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K \otimes_{\mathcal{A}}^L L, M) \simeq R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M)) .$$

^(xi) Ce résultat est énoncé dans [Spaltenstein, 1988, §4] dans le cadre des espaces topologiques annelés, mais la démonstration peut être étendue au cas des topos annelés. Le principe de la démonstration est similaire à celui utilisé par Grothendieck pour montrer l'existence de suffisamment d'injectifs dans les catégories de faisceaux dans [Grothendieck, 1957, §I.10] ; dans le contexte de l'algèbre homotopique, cet argument est connu sous le nom de « raisonnement du petit objet ». On peut trouver une démonstration pour le cas qui nous intéresse dans [Hovey, 2001].

8.3.2. *Compatibilité aux images inverses.*

PROPOSITION 8.3.2.1. *Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Pour tout $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, la résolution K-plate $\rho_A K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est telle que pour tout morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs $u: (\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$, le complexe $u^* \rho_{\mathcal{A}} K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ soit K-plat.*

Comme u^* et $\rho_{\mathcal{A}}$ commutent aux limites inductives filtrantes, on peut supposer que K est un complexe borné. Le complexe $\rho_{\mathcal{A}} K$ est alors un complexe borné supérieurement. D'après la proposition 8.1.2, il suffit pour conclure de montrer que $u^* \rho_A K$ est formé de $\mathcal{A}$ -Modules plats. Si on note $F_{\mathcal{A}}$ (resp. $F_{\mathcal{A}'}$) le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{A}$ -Modules (resp. $\mathcal{A}'$ -Modules) vers celle des faisceaux d'ensembles pointés sur $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}'$), pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un faisceau d'ensembles pointés X^n sur $\mathcal{T}$ tel que $(\rho_A K)^n \simeq F_{\mathcal{A}} X^n$ et donc $(u^* \rho_A K)^n \simeq u^* F_{\mathcal{A}} X^n \simeq F_{\mathcal{A}'} u^{-1} X^n$, où u^{-1} est le foncteur image inverse associé à u au niveau des faisceaux d'ensembles pointés. Ceci permet de conclure que $u^* \rho_A K$ est formé de $\mathcal{A}'$ -Modules plats.

PROPOSITION 8.3.2.2. *Soit $u: (\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Le foncteur $u^* \circ \rho_{\mathcal{A}}: C(\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ préserve les quasi-isomorphismes et induit un foncteur que l'on note $Lu^*: D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ qui est le foncteur dérivé total à gauche de $u^*: C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$.*

Il faut montrer que si $K_1 \rightarrow K_2$ est un quasi-isomorphisme dans $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, alors $u^* \rho_{\mathcal{A}} K_1 \rightarrow u^* \rho_{\mathcal{A}} K_2$ est un quasi-isomorphisme. Notons $u^{-1} \mathcal{A}$ le faisceau d'anneaux image inverse de $\mathcal{A}$ et $u': (\mathcal{T}', u^{-1} \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ le morphisme de topos annelés évident. En appliquant la proposition 8.3.2.1 à u' , il vient que $u'^{-1} \rho_{\mathcal{A}} K_1$ et $u'^{-1} \rho_{\mathcal{A}} K_2$ sont des complexes K-plats de $u'^{-1} \mathcal{A}$ -Modules. Notons $C \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ le cône de $\rho_{\mathcal{A}} K_1 \rightarrow \rho_{\mathcal{A}} K_2$. Le complexe $u^{-1} C$ s'identifiant au cône de $u'^{-1} \rho_{\mathcal{A}} K_1 \rightarrow u'^{-1} \rho_{\mathcal{A}} K_2$, il vient que $u^{-1} C$ est K-plat. Comme u^{-1} est exact et C acyclique, il vient que $u^{-1} C$ est acyclique. La K-platité de $u^{-1} C$ conduit à des quasi-isomorphismes $u^* C = \mathcal{A}' \otimes_{u^{-1} \mathcal{A}} u^{-1} C \simeq \rho_{u^{-1} \mathcal{A}} \mathcal{A}' \otimes_{u^{-1} \mathcal{A}} u^{-1} C$. L'acyclicité de $u^{-1} C$ et la K-platité de $\rho_{u^{-1} \mathcal{A}} \mathcal{A}'$ implique ensuite que $\rho_{u^{-1} \mathcal{A}} \mathcal{A}' \otimes_{u^{-1} \mathcal{A}} u^{-1} C$ est acyclique. Finalement, $u^* C$ est acyclique et comme $u^* C$ s'identifie au cône du morphisme $u^* \rho_{\mathcal{A}} K_1 \rightarrow u^* \rho_{\mathcal{A}} K_2$, ce morphisme de complexes est un quasi-isomorphisme.

COROLLAIRE 8.3.2.3. *Soit $u: (\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Pour tous K et L objets de $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$, on a un isomorphisme canonique*

$$Lu^* K \otimes_{\mathcal{A}}^L Lu^* L \simeq Lu^* (K \otimes_{\mathcal{A}'}^L L)$$

dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$.

COROLLAIRE 8.3.2.4. *Si u et v sont des morphismes composables de topos annelés en anneaux commutatifs, alors on a un isomorphisme canonique de foncteurs $Lv^* \circ Lu^* \xrightarrow{\sim} L(u \circ v)^*$.*

REMARQUE 8.3.2.5. Il est possible d'établir un énoncé plus précis que la proposition 8.3.2.1, à savoir que pour tout morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs $u: (\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$, si $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est K-plat, alors $u^* K$ est K-plat. Compte tenu de la proposition 8.3.2.1, on se ramène à montrer que si $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est K-plat et acyclique, alors $(u^* K) \otimes_{\mathcal{A}'} L$ est acyclique pour tout $\mathcal{A}'$ -Module L et ceci peut se démontrer grâce à la méthode des limites inductives locales utilisées dans [SGA4 v 8.2.9] (ou en utilisant une famille conservative de foncteurs fibres si les topos considérés en possèdent). La conclusion de cette remarque est que pour calculer $Lu^* K$ il suffit d'appliquer u^* à une résolution K-plate arbitraire de K .

9. Complexes inversibles

PROPOSITION 9.1. *Soit A un anneau commutatif. Soit $X \in D(A)$. Soit $Y \in D(A)$. Soit $X \otimes_A^L Y \simeq A$ un isomorphisme dans $D(A)$. Alors, il existe une fonction localement constante $k: \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{Z}$, un A -module inversible L et des isomorphismes $X \simeq L[k]$ et $Y \simeq L^\vee[-k]$ (le foncteur de décalage $[k]$ étant défini de façon évidente).*

Ce résultat apparaît dans [Hartshorne, 1966, lemma 3.3, Chapter V] sous des hypothèses supplémentaires disant que A est noethérien et que X et Y sont dans $D_c^-(A)$. Cette version implique évidemment une autre où on demande à A d'être noethérien et à X et Y d'être des complexes parfaits. Il est alors facile de supprimer l'hypothèse noethérienne (cf. [ÉGA IV 8]). Bref, pour achever la démonstration, il suffit de montrer que dans les conditions de la proposition ci-dessus, le complexe X (et donc Y par symétrie des rôles) est un complexe parfait. On dit d'un objet X de $D(A)$ qu'il est de **présentation finie** si le foncteur $\mathrm{Hom}_{D(A)}(X, -)$ de $D(A)$ vers la catégorie des groupes abéliens commute aux sommes directes (infinies). On peut montrer que $X \in D(A)$ est un complexe parfait si et seulement s'il est de présentation finie^(xii). De l'isomorphisme $X \overset{L}{\otimes}_A Y \simeq A$, on tire un isomorphisme de foncteurs $R\mathrm{Hom}(X, -) \simeq Y \overset{L}{\otimes}_A - : D(A) \rightarrow D(A)$. Comme le foncteur $Y \overset{L}{\otimes}_A -$ commute évidemment aux sommes directes, c'est aussi le cas du foncteur $\mathrm{Hom}_{D(A)}(X, -)$, ce qui montre que X est de présentation finie : il s'agit d'un complexe parfait.

PROPOSITION 9.2. *Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit $X \in D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Soit $Y \in D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Soit $X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} Y \simeq \mathcal{A}$ un isomorphisme dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Alors, l'objet final de $\mathcal{T}$ est recouvert par des objets U tels que $X|_U$ et $Y|_U$ puissent être induits par des complexes parfaits X' et Y' de $D(\mathcal{A}(U))$ et que l'on ait un isomorphisme $X' \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}(U)} Y' \simeq \mathcal{A}(U)$ compatible à l'isomorphisme donné ; la forme des complexes X' et Y' est donc connue grâce à la proposition 9.1.*

Démontrons la proposition 9.2. On peut supposer que $\mathcal{T}$ est le topos des faisceaux sur un site $\mathcal{C}$. Notons $\mathcal{T}'$ le topos des préfaisceaux sur la catégorie sous-jacente au site $\mathcal{C}$, elle aussi notée $\mathcal{C}$, et $\mathcal{A}'$ le préfaisceau d'anneaux sur $\mathcal{C}$ défini par $\mathcal{A}$. On peut identifier $X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} Y$ au faisceau associé à $\rho_{\mathcal{A}'} X \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} Y$ où $\rho_{\mathcal{A}'}$ est le foncteur de résolution K-plate défini dans le paragraphe 8.2.3. Ainsi, l'isomorphisme donné $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} Y$ peut être représenté localement par un 0-cocycle s de $(\rho_{\mathcal{A}'} X \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} Y)(U) = \rho_{\mathcal{A}(U)}(X(U)) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \rho_{\mathcal{A}(U)}(Y(U))$. Soit U un objet de $\mathcal{C}$ sur lequel une telle description est possible. Par construction de $\rho_{\mathcal{A}(U)}$, il vient qu'il existe des sous-complexes bornés formés de $\mathcal{A}(U)$ -modules libres de type fini X' de $\rho_{\mathcal{A}(U)}(X(U))$ et Y' de $\rho_{\mathcal{A}(U)}(Y(U))$ tels que $X' \otimes_{\mathcal{A}(U)} Y'$ contienne s . Notons $\mathcal{T}_U$ le topos des faisceaux sur $\mathcal{T}$ au-dessus de U (un site sous-jacent est donné par la catégorie $\mathcal{C}/U$). On dispose d'un morphisme de topos annelés évident π de $(\mathcal{T}_U, \mathcal{A}_U)$ vers le topos ponctuel muni de l'anneau $\mathcal{A}(U)$. Posons $X'' = \pi^* X'$ et $Y'' = \pi^* Y'$: ce sont des complexes strictement parfaits sur $\mathcal{T}_U$. On dispose de morphismes évidents $X'' \rightarrow X|_U$ et $Y'' \rightarrow Y|_U$ dans $D(\mathcal{T}_U, \mathcal{A}_U)$ et d'après ce qui précède, on a un morphisme $\mathcal{A}_U \rightarrow X'' \otimes_{\mathcal{A}_U} Y''$ factorisant l'isomorphisme $\mathcal{A}_U \simeq X|_U \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}_U} Y|_U$. Bref, $\mathcal{A}_U \simeq X|_U \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}_U} Y|_U$ est un facteur direct de $X'' \otimes_{\mathcal{A}_U} Y''$. Par ailleurs, l'isomorphisme $\mathcal{A}_U \xrightarrow{\sim} X|_U \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}_U} Y|_U$ se factorise aussi par $X'' \otimes_{\mathcal{A}_U} Y|_U$, donc $\mathcal{A}_U$ est un facteur direct de $X'' \otimes_{\mathcal{A}_U} Y|_U$ dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$; en tensorisant ce fait avec $X|_U$, on obtient que $X|_U$ est un facteur direct de X'' . Soit $p : X'' \rightarrow X''$ un projecteur dont l'image soit isomorphe à $X|_U$. Comme X' et Y' sont (strictement) parfaits, quitte à remplacer U par une famille d'objets le recouvrant, on peut supposer que p provient d'un projecteur $\tilde{p}$ sur X' dans $D(\mathcal{A}(U))$. L'image de $\tilde{p}$ est un complexe parfait $\tilde{X}$ dans $D(\mathcal{A}(U))$ induisant $X|_U$. De même, on peut supposer que $Y|_U$ est induit par un complexe parfait de $\mathcal{A}(U)$ -modules $\tilde{Y}$. Quitte à raffiner le recouvrement de U , on peut donc supposer que l'isomorphisme $\mathcal{A}_U \xrightarrow{\sim} X|_U \otimes_{\mathcal{A}_U} Y|_U$ est induit par un morphisme $\tilde{s} : \mathcal{A}(U) \rightarrow \tilde{X} \otimes_{\mathcal{A}(U)} \tilde{Y}$. Notons C un cône de $\tilde{s}$. Le complexe C est parfait et vérifie $\pi^* C \simeq 0$. Il en résulte que quitte à raffiner le recouvrement de U , on peut supposer que C est acyclique, c'est-à-dire que $\tilde{s}$ est un isomorphisme.

^(xii) Il s'agit d'un bon exercice. Toutefois, on peut aussi obtenir ce critère en utilisant des principes généraux. L'objet A de $D(A)$ est un générateur de présentation finie (i.e. le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, -)$ commute aux sommes directes et est conservatif) ; la sous-catégorie triangulée de $D(A)$ formée des objets de présentation finie est donc l'enveloppe pseudo-abélienne de la sous-catégorie triangulée engendrée par A , c'est-à-dire la sous-catégorie des complexes parfaits : combiner [Neeman, 2001, proposition 8.4.1], [Neeman, 2001, lemma 4.4.5] et [Neeman, 2001, remark 4.2.6].

10. Coefficients universels

10.1. Énoncés pour $R\mathbf{Hom}$.

PROPOSITION 10.1.1. *Soit Z un schéma noethérien. Soit A un anneau commutatif noethérien. Soit $X \in D_{\mathbb{C}}^-(Z_{\text{ét}}, A)$. Soit $Y \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$. On suppose ou bien que A est un corps ou bien que $R\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A -module M . Alors, pour tout $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique*

$$M \overset{L}{\otimes}_A R\mathbf{Hom}(X, Y) \rightarrow R\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y)$$

est un isomorphisme. En outre, si on est dans le cas où $R\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A -module M , alors $R\mathbf{Hom}(X, Y) \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$.

On note $u_M: M \overset{L}{\otimes}_A R\mathbf{Hom}(X, Y) \rightarrow R\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y)$ le morphisme canonique, pour tout $M \in D^+(Z_{\text{ét}}, A)$. L'hypothèse selon laquelle $X \in D_{\mathbb{C}}^-(Z_{\text{ét}}, A)$ implique que les foncteurs $\mathbf{Ext}^q(X, -) = \mathcal{H}^q R\mathbf{Hom}(X, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux de A -modules sur Z . En particulier, le foncteur $R\mathbf{Hom}(X, -)$ de la catégorie $D^+(Z_{\text{ét}}, A)$ dans elle-même commute aux sommes directes représentables. On en déduit que u_M est un isomorphisme si M est un A -module libre. Par suite, si M est un complexe borné de A -modules libres, alors u_M est un isomorphisme ; si A est un corps, on peut conclure que u_M est un isomorphisme pour tout $M \in D^+(A)$.

On se place dorénavant dans le cas où $R\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A -module M . Soit $M \in D^b(A)$. Montrons que u_M est un isomorphisme. Pour tout entier relatif q , il existe un morphisme $P \rightarrow M$ avec P un complexe borné de A -modules libres tel que si on note C un cône de ce morphisme, alors $C \leq q$ (de telles inégalités sont à comprendre relativement à la t -structure canonique). On considère le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P \overset{L}{\otimes}_A R\mathbf{Hom}(X, Y) & \xrightarrow[\sim]{u_P} & R\mathbf{Hom}(X, P \overset{L}{\otimes}_A Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \overset{L}{\otimes}_A R\mathbf{Hom}(X, Y) & \xrightarrow{u_M} & R\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y) \end{array}$$

Notons N le plus petit entier naturel tel que $R\mathbf{Hom}(X, V \overset{L}{\otimes}_A Y)$ soit $\leq N$ pour tout A -module V . Par dévissage, on obtient que les cônes des flèches verticales du diagramme ci-dessus sont $\leq q + N$. Les deux flèches verticales induisent donc des isomorphismes sur les objets de cohomologie $\mathcal{H}^i$ pour $i \geq q + N + 2$. La flèche du haut étant un isomorphisme, la flèche du bas induit aussi des isomorphismes sur les $\mathcal{H}^i$ pour $i \geq q + N + 2$. Ce fait étant vérifié pour tout $q \in \mathbb{Z}$, le morphisme du bas est bien un isomorphisme.

On déduit aussitôt de ce qui précède que $R\mathbf{Hom}(X, Y) \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$. On sait par ailleurs que $Y \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ et que $X \in D^-(Z_{\text{ét}}, A)$. Par conséquent, il existe un entier relatif N' tel que si $M \in D^{\geq c}(A)$ pour un certain entier c , alors la source et le but de u_M sont $\geq c + N'$. En raisonnant comme ci-dessus, on déduit du fait que u_M soit un isomorphisme pour tout $M \in D^b(A)$ que ce résultat vaut en fait pour tout $M \in D^+(A)$.

PROPOSITION 10.1.2. *Soit Z un schéma. Soit A un anneau commutatif. Soit $Y \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$. Soit M un complexe pseudo-cohérent dans $D(A)$ ^(xiii). Soit $N \in D^+(A)$. Alors, le morphisme canonique*

$$R\mathbf{Hom}(M, N) \overset{L}{\otimes}_A Y \rightarrow R\mathbf{Hom}(M, N \overset{L}{\otimes}_A Y)$$

est un isomorphisme dans $D^+(Z_{\text{ét}}, A)$. (On a noté $R\mathbf{Hom}$ le hom. interne dans $D(A)$.)

^(xiii) On rappelle que cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de complexes $P \rightarrow M$ induisant des isomorphismes $H^q P \rightarrow H^q M$ pour $q \geq n$ où P est un complexe strictement parfait de A -modules (c'est-à-dire que P est borné et formé de A -modules projectifs de type fini).

On fixe $N \in D^+(A)$. Pour tout $M \in D(A)$, notons v_M le morphisme canonique

$$R\mathrm{Hom}(M, N) \otimes_A^L Y \rightarrow R\mathrm{Hom}(M, N \otimes_A^L Y).$$

Bien entendu, si $M \in D(A)$ est un complexe parfait, v_M est un isomorphisme. Pour tout $M \in D(A)$ pseudo-cohérent et tout entier relatif q , il existe un morphisme $P \rightarrow M$ avec P parfait dont le cône soit $\leq q$. Pour pouvoir déduire que v_M est un isomorphisme pour tout $M \in D(A)$ du cas particulier où M est supposé parfait, il suffit donc de montrer qu'il existe un entier relatif c tel que pour tout entier q et tout $M \in D^{\leq q}(A)$, la source et le but de v_M soient $\geq -q + c$. Notons a un entier tel que $N \geq a$ et b un entier tel que pour tout A -module V , $V \otimes_A^L Y \geq b$. On vérifie aussitôt que $c = a + b$ convient, ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 10.1.3. *Soit Z un schéma noethérien. Soit A un anneau commutatif noethérien. Soit $X \in D_c^-(Z_{\text{ét}}, A)$. Soit $Y \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$. On suppose ou bien que A est un corps ou bien que $R\mathrm{Hom}(X, N \otimes_A^L Y)$ est borné indépendamment du A -module N . Soit B une A -algèbre. Alors, pour tout complexe pseudo-cohérent $M \in D(B)$ et pour tout $N \in D^+(B)$, le morphisme canonique*

$$R\mathrm{Hom}_B(M, N) \otimes_A^L R\mathrm{Hom}_A(X, Y) \rightarrow R\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A^L X, N \otimes_A^L Y)$$

est un isomorphisme dans $D(Z_{\text{ét}}, B)$.

Les hypothèses font que $R\mathrm{Hom}_B(M, N)$ appartient à $D^+(B)$. Si A n'est pas un corps, on peut appliquer le résultat de la proposition 10.1.2 en remplaçant respectivement A, M, N et Y par B, M, N et $B \otimes_A^L R\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ (on notera que $R\mathrm{Hom}_A(X, Y) \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ d'après la proposition 10.1.1). On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$R\mathrm{Hom}_B(M, N) \otimes_A^L R\mathrm{Hom}_A(X, Y) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_B(M, N \otimes_A^L R\mathrm{Hom}_A(X, Y)).$$

Si A est un corps, on établit cet isomorphisme par un argument similaire en se ramenant au cas où M est un complexe parfait de B -modules. En appliquant maintenant la proposition 10.1.1, on obtient un nouvel isomorphisme :

$$R\mathrm{Hom}_B(M, N \otimes_A^L R\mathrm{Hom}_A(X, Y)) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_B(M, R\mathrm{Hom}_A(X, N \otimes_A^L Y)).$$

Enfin, on utilise l'isomorphisme cher à Cartan :

$$R\mathrm{Hom}_B(M, R\mathrm{Hom}_A(X, N \otimes_A^L Y)) \simeq R\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A^L X, N \otimes_A^L Y).$$

L'isomorphisme voulu est l'isomorphisme obtenu en composant les différents isomorphismes canoniques ci-dessus.

10.2. Conséquences pour Rj_* et $i^!$.

PROPOSITION 10.2.1. *Soit $j: U \rightarrow X$ une immersion ouverte entre schémas noethériens. Soit A un anneau commutatif noethérien. Soit $Y \in D_{\text{ff}}^b(U_{\text{ét}}, A)$. On suppose ou bien que A est un corps ou bien que $Rj_*(M \otimes_A^L Y)$ est borné indépendamment du A -module M . Alors, pour tout $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique*

$$M \otimes_A^L Rj_* Y \rightarrow Rj_*(M \otimes_A^L Y)$$

est un isomorphisme dans $D(X_{\text{ét}}, A)$. Si $Rj_*(M \otimes_A^L Y)$ est borné indépendamment du A -module M , alors $Rj_* Y$ appartient à $D_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, A)$.

Ceci résulte de la proposition 10.1.1, compte tenu de la formule $Rj_* Y \simeq R\mathrm{Hom}(j_! A, j_! Y)$ pour tout $Y \in D(U_{\text{ét}}, A)$.

PROPOSITION 10.2.2. Soit $i: Z \rightarrow X$ une immersion fermée entre schémas noethériens. Soit A un anneau commutatif noethérien. Soit $Y \in D_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, A)$. On suppose ou bien que A est un corps ou bien que $i^!(M \overset{L}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A -module M . Alors, pour tout $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique

$$M \overset{L}{\otimes}_A i^!Y \rightarrow i^!(M \overset{L}{\otimes}_A Y)$$

est un isomorphisme dans $D(Z_{\text{ét}}, A)$. Si $i^!(M \overset{L}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A -module M , alors $i^!Y$ appartient à $D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$.

Cette fois-ci, on utilise la formule $i^!Y \simeq i^*R\text{Hom}(i_*A, Y)$.

11. Modules ind-unipotents

11.1. Définitions. Soit G un groupe topologique. Soit A un anneau. On appellera ici $A[G]$ -module un $A[G]$ -module (à gauche) au sens où on l'entend usuellement quand G est un groupe qui n'est pas muni d'une topologie. Un $A[G]$ -module discret est un $A[G]$ -module dans lequel le stabilisateur de tout élément est ouvert. Un $A[G]$ -module est dit **trivial** si le groupe G agit trivialement sur lui ; un tel $A[G]$ -module est discret. On note I_G l'idéal d'augmentation de $A[G]$; un $A[G]$ -module est trivial si et seulement s'il est annulé par I_G .

La catégorie des $A[G]$ -modules discrets est une catégorie abélienne de Grothendieck ; le foncteur d'inclusion de cette catégorie dans celle des $A[G]$ -modules est exact, commute aux limites inductives, mais en général pas aux limites projectives. La catégorie des $A[G]$ -modules discrets est stable par sous-quotient (mais en général pas par extensions) dans celle des $A[G]$ -modules.

DÉFINITION 11.1.1. Un $A[G]$ -module discret est **unipotent** s'il admet une filtration finie dont les quotients successifs sont des $A[G]$ -modules triviaux. L'**ordre d'unipotence** d'un $A[G]$ -module unipotent est la plus petite longueur d'une telle filtration ; ainsi, un $A[G]$ -module trivial non nul est unipotent d'ordre 1. Un $A[G]$ -module discret est **ind-unipotent** si tous ses sous- $A[G]$ -modules de type fini sont unipotents.

DÉFINITION 11.1.2. Soit M un $A[G]$ -module discret. On définit par récurrence une filtration croissante $(\text{Fil}_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$ de M par des sous $A[G]$ -modules, de façon à ce que $\text{Fil}_0 M = 0$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait un isomorphisme canonique $\text{Fil}_{n+1} M / \text{Fil}_n M \simeq H^0(G, M / \text{Fil}_n M) \subset M / \text{Fil}_n M$.

La filtration $\text{Fil}_\bullet M$ est évidemment fonctorielle en M au sens où si $f: M \rightarrow M'$ est un morphisme de $A[G]$ -modules, alors $f(\text{Fil}_n M) \subset \text{Fil}_n(M')$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

11.2. Propriétés.

PROPOSITION 11.2.1. Les notions d'unipotence et d'ind-unipotence des $A[G]$ -modules discrets jouissent des propriétés suivantes :

- (i) Le caractère unipotent des $A[G]$ -modules discrets est stable par sous-quotients et extensions ; l'ordre d'unipotence décroît par passage à un sous-quotient et est sous-additif vis-à-vis des extensions ;
- (ii) Le caractère ind-unipotent des $A[G]$ -modules discrets est stable par sous-quotients, et, si G est pro-fini, par extensions ;
- (iii) La catégorie des $A[G]$ -modules discrets unipotents (resp. ind-unipotents) est abélienne, le foncteur d'inclusion dans celle des $A[G]$ -modules discrets est exact ;
- (iv) Un $A[G]$ -module discret M est unipotent si et seulement s'il existe un entier naturel n tel que $\text{Fil}_n M = M$; dans ce cas, l'ordre d'unipotence de M est le plus petit de ces entiers n ;
- (v) Le caractère unipotent (resp. ind-unipotent) d'un $A[G]$ -module discret ne dépend pas de l'anneau des coefficients A et cette notion n'est pas altérée non plus si on considère G comme groupe discret ;
- (vi) Pour tout entier naturel n et tout $A[G]$ -module discret, $\text{Fil}_n M$ est l'annulateur de I_G^n dans M ;
- (vii) Pour tout entier naturel n , un $A[G]$ -module discret est unipotent d'ordre au plus n si et seulement s'il est annulé par l'idéal I_G^n . Un $A[G]$ -module discret M est ind-unipotent si et seulement si tout élément de M est annulé par une puissance de I_G , c'est-à-dire que $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}_n M$;
- (viii) Un $A[G]$ -module discret unipotent est ind-unipotent ;

- (ix) Un $A[G]$ -module discret de type fini est unipotent si et seulement s'il est ind-unipotent ;
- (x) Une somme directe (resp. une limite inductive) de $A[G]$ -modules discrets ind-unipotents est un $A[G]$ -module discret ind-unipotent.
- (xi) Les $A[G]$ -modules discrets ind-unipotents sont exactement les $A[G]$ -modules limites inductives filtrantes de $A[G]$ -modules discrets unipotents.

Montrons (i). Si $(M, F_\bullet M)$ est un $A[G]$ -module discret filtré, tout sous-objet M' (resp. sous-quotient M'') de M est naturellement muni d'une filtration $F_\bullet M'$ (resp. $F_\bullet M''$) telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le morphisme induit au niveau des gradués $\text{Gr}_n M' \rightarrow \text{Gr}_n M$ (resp. $\text{Gr}_n M \rightarrow \text{Gr}_n M''$) soit injectif (resp. surjectif) ; comme tout sous-quotient d'un $A[G]$ -module trivial est trivial, il en résulte aussitôt que le caractère unipotent d'un $A[G]$ -module est stable par sous-quotient et que l'ordre d'unipotence décroît dans cette opération. Il est évident sur la définition que le caractère unipotent des $A[G]$ -modules discrets est stable par extensions, et que l'ordre d'unipotence est sous-additif vis-à-vis d'elles. (viii) est une conséquence triviale de (i).

Montrons la propriété (iv). Soit M un $A[G]$ -module discret. Si $\text{Fil}_n M = M$, la filtration $(\text{Fil}_i M)_{0 \leq i \leq n}$ est une filtration finie de M de longueur n dont les quotients successifs sont triviaux ; ainsi, M est unipotent d'ordre au plus n . Inversement, soit M un $A[G]$ -module muni d'une filtration $(F_i M)_{i \geq 0}$ telle que $F_0 M = 0$ et dont les quotients successifs soient triviaux. Une récurrence évidente sur $i \in \mathbf{N}$ montre que l'on a une inclusion $F_i M \subset \text{Fil}_i M$, de sorte que si un entier naturel n est tel que $F_n M = M$, alors $\text{Fil}_n M = M$.

Dans le cas unipotent, la propriété (v) est une conséquence de la propriété (iv) : la filtration $\text{Fil}_\bullet M$ est la même que l'on considère M comme $A[G]$ -module ou comme $\mathbf{Z}[G]$ -module, et que l'on considère G comme un authentique groupe topologique ou comme un groupe discret. Quand ce ne sera pas pertinent, on ne précisera donc pas systématiquement dans la suite que les $A[G]$ -modules sont discrets.

Concernant la propriété (vi), il est facile de montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\text{Fil}_n M$ est l'annulateur de I_G^n dans M .

Considérons (vii). On déduit trivialement de (iv) et (vi) qu'un $A[G]$ -module discret est unipotent d'ordre au plus n si et seulement s'il est annulé par I_G^n . Montrons l'autre partie de (vii). Soit M un $A[G]$ -module discret ind-unipotent. Pour tout $m \in M$, le sous- $A[G]$ -module de M engendré par m est unipotent, d'après ce qu'on vient de montrer, ce module est annulé par une puissance de I_G , en particulier, m est annulé par I_G^n pour un certain entier naturel n . Inversement, supposons que tout élément de M soit annulé par une puissance de I_G . Si on considère un sous- $A[G]$ -module de type fini N de M , en appliquant l'hypothèse aux éléments d'un ensemble fini de générateurs de N , on obtient que N est annulé par I_G^n pour un certain entier naturel n , et donc que N est unipotent. Ceci achève la démonstration de (vii). On sait donc qu'un $A[G]$ -module discret M est ind-unipotent si et seulement si $M = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Fil}_n M$. Comme la filtration $\text{Fil}_n M$ ne dépend pas de la topologie de G ni de l'anneau des coefficients A , on peut obtenir (v). La propriété (ix) est une conséquence immédiate de (vii). La stabilité par sommes directes et sous-quotients du caractère ind-unipotent en résulte aussi, ce qui établit (x).

Supposons G profini et montrons la stabilité par extensions des $A[G]$ -modules discrets ind-unipotents, ce qui achèvera la démonstration de (ii). D'après (v), on peut supposer que $A = \mathbf{Z}$. On se donne une suite exacte courte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de $\mathbf{Z}[G]$ -modules discrets avec M' et M'' ind-unipotents. Soit N un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de type fini de M . Il s'agit de montrer que N est unipotent. On peut considérer l'image N'' de N dans M'' , et N' le noyau de la projection $N \rightarrow N''$. Le $\mathbf{Z}[G]$ -module N' (resp. N'') est un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de M' (resp. de M''). Par passage à des sous-objets, N' et N'' sont ind-unipotents. Le groupe G étant profini et N un $\mathbf{Z}[G]$ -module discret, N est un groupe abélien de type fini ; les groupes abéliens N' et N'' qui en sont des sous-quotients sont eux aussi de type fini. D'après (ix), N' et N'' sont unipotents ; d'après (i), N est unipotent, ce qui achève la démonstration de (ii).

(iii) résulte aussitôt de (i) et (ii). Enfin, (xi) découle de (vii), (viii) et (x).

REMARQUE 11.2.2. Si $H \rightarrow G$ est un morphisme de groupes topologiques et M un $A[G]$ -module unipotent (resp. ind-unipotent), alors, en tant que $A[H]$ -module, M est unipotent (resp. ind-unipotent).

11.3. Modules ind-unipotents pour un sous-groupe distingué. Soit A un anneau. Soit G un groupe topologique. Soit H un sous-groupe distingué (fermé) de G . Si M est un $A[G]$ -module discret, on peut se demander si en tant que $A[H]$ -module, M est unipotent (resp. ind-unipotent).

Dans cette situation, on note $\text{Fil}_\bullet M$ la filtration de la définition 11.1.2 pour le groupe H . Le fait que H soit distingué dans G permet d'obtenir aussitôt que cette filtration $\text{Fil}_\bullet M$ est constituée de sous- $A[G]$ -modules de M . De cette remarque et de la proposition 11.2.1 (iv), on tire :

PROPOSITION 11.3.1. *Soit M un $A[G]$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- en tant que $A[H]$ -module, M est unipotent ;
- il existe une filtration finie de M par des sous- $A[G]$ -modules telle que H agisse trivialement sur les quotients successifs.

PROPOSITION 11.3.2. *Soit M un $A[G]$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- en tant que $A[H]$ -module, M est ind-unipotent ;
- tout sous- $A[G]$ -module de type fini de M est unipotent pour H .

Il s'agit de montrer que si un sous- $A[H]$ -module N de M de type fini est unipotent, alors le sous- $A[G]$ -module (de type fini) de M engendré par N est unipotent pour H . Pour montrer cela, il suffit d'établir le lemme suivant :

LEMME 11.3.3. *Soit M un $A[H]$ -module unipotent. En tant que $A[H]$ -module, $A[G] \otimes_{A[H]} M$ est unipotent.*

Notons $\rho: H \rightarrow \text{Aut}_A(M)$ le morphisme définissant l'action de H sur M . Pour tout $g \in G$, notons $c_g: H \rightarrow H$ l'application $h \mapsto ghg^{-1}$ et M^g le H -module défini par le morphisme $\rho \circ c_g: H \rightarrow \text{Aut}_A(M)$. Le $A[H]$ -module $A[G] \otimes_{A[H]} M$ s'identifie à $\bigoplus_{i \in I} H^{g_i}$ où $(g_i)_{i \in I}$ est un ensemble de représentants de G/H . Comme H est unipotent, il est évident que les $A[H]$ -modules M^{g_i} sont unipotents et qu'ils ont tous le même ordre d'unipotence. On en déduit facilement que $A[G] \otimes_{A[H]} M$ est unipotent pour H .

Maintenant que les définitions d'unipotence et de ind-unipotence pour le sous-groupe distingué H sont clarifiées, on peut énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 11.3.4. *Les énoncés de la proposition 11.2.1 restent vrais si on remplace « unipotent » par « unipotent pour H », « ind-unipotent » par « ind-unipotent pour H » et I_G par I_H , et que, comme ci-dessus, on définit la filtration $\text{Fil}_\bullet$ relativement au groupe H .*

Compte tenu des clarifications faites ci-dessus, c'est trivial.

12. Le morphisme de bidualité

Le morphisme de bidualité $L \rightarrow D_K D_K L$ étudié dans cet exposé a été défini en XVI-4.7.7. Nous allons ici établir ses compatibilités par rapport aux foncteurs f^* et Rf_* . Ces compatibilités résultent de [Calmès & Hornbostel, 2009], mais, en le développant ici quelque peu, nous voudrions montrer toute la pertinence de l'argument donné par Deligne dans [SGA 4½ [Dualité] 1.2].

12.1. Accouplements. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un bifoncteur que nous noterons $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. On suppose donné un isomorphisme de symétrie $s_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ fonctoriel en X et Y tel que $s_{Y,X}^{-1} = s_{X,Y}$: on dira que $\otimes$ est un bifoncteur symétrique. On suppose également que « $\otimes$ admet un adjoint à droite **Hom** », c'est-à-dire un bifoncteur **Hom**: $\mathcal{C}^{\text{opp}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ muni de bijections trifonctorielles dites « chères à Cartan » :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{Hom}(Y, Z)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) .$$

DÉFINITION 12.1.1. Un **accouplement** dans $\mathcal{C}$ consiste en la donnée de trois objets M_1, M_2, K et d'un morphisme $M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{a} K$. On dit que a est un accouplement entre M_1 et M_2 à valeurs dans K . Si on dispose de morphismes $M'_1 \rightarrow M_1, M'_2 \rightarrow M_2$ et $K \rightarrow K'$, l'accouplement a induit par fonctorialité un accouplement $a' : M'_1 \otimes M'_2 \rightarrow K'$.

PROPOSITION 12.1.2. La donnée d'un accouplement $a : M_1 \otimes M_2 \rightarrow K$ équivaut par adjonction à la donnée d'un morphisme $b : M_1 \rightarrow \mathbf{Hom}(M_2, K)$: on dit que b est la **description adjointe** de l'accouplement a . Si on dispose de morphismes $M'_1 \rightarrow M_1, M'_2 \rightarrow M_2$ et $K \rightarrow K'$, en utilisant la bifonctorialité de $\mathbf{Hom}$ et la composition avec $M'_1 \rightarrow M_1$, on obtient un morphisme $b' : M'_1 \rightarrow \mathbf{Hom}(M'_2, K')$ qui n'est autre que la description adjointe de l'accouplement $a' : M'_1 \otimes M'_2 \rightarrow K'$ défini par fonctorialité dans la définition 12.1.1.

Cette proposition ne fait que reformuler l'adjonction entre $\otimes$ et $\mathbf{Hom}$ et la trifonctorialité de l'isomorphisme « cher à Cartan ».

DÉFINITION 12.1.3. Si $a : M_1 \otimes M_2 \rightarrow K$ est un accouplement entre M_1 et M_2 à valeurs dans K , on définit l'accouplement a^τ entre M_2 et M_1 à valeurs dans K déduit par symétrie de a comme étant le morphisme composé $M_2 \otimes M_1 \xrightarrow{s_{M_2, M_1}} M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{a} K$. (Cette construction est évidemment compatible à la trifonctorialité mise en évidence sur les accouplements.)

DÉFINITION 12.1.4. Soit $K \in \mathcal{C}$. On note $D_K := \mathbf{Hom}(-, K)$. L'identité $D_K M \xrightarrow{\text{Id}} D_K M = \mathbf{Hom}(M, K)$ est la description adjointe (cf. définition 12.1.1) d'un accouplement $\text{ev} : D_K M \otimes M \rightarrow K$ (c'est le « morphisme d'évaluation ») qui induit par symétrie (cf. définition 12.1.3) un accouplement $M \otimes D_K M \rightarrow K$ dont la description adjointe est un morphisme que l'on note $\beta_M : M \rightarrow D_K D_K M$ et que nous appellerons **morphisme de bidualité** (de M).

12.2. Fonctorialité. Supposons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ soient deux catégories munies de bifoncteurs symétriques notés $\otimes$ et que ceux-ci admettent des adjoints à droite $\mathbf{Hom}$ comme dans le §12.1. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur muni d'un morphisme $FX \otimes FY \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} F(X \otimes Y)$ bifonctoriel en les objets X et Y de $\mathcal{C}$. On fait l'hypothèse que F est symétrique, c'est-à-dire que pour tous X et Y , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ s_{FX,FY} \downarrow \sim & & F(s_{X,Y}) \downarrow \sim \\ FY \otimes FX & \xrightarrow{\varphi_{Y,X}} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

DÉFINITION 12.2.1. Soit $a : M_1 \otimes M_2 \rightarrow K$ un accouplement dans $\mathcal{C}$. L'accouplement $F[a] : FM_1 \otimes FM_2 \rightarrow FK$ dans $\mathcal{D}$ déduit de a par application de F est le morphisme composé suivant :

$$FM_1 \otimes FM_2 \xrightarrow{\varphi_{M_1, M_2}} F(M_1 \otimes M_2) \xrightarrow{F(a)} FK.$$

(Cette construction est évidemment compatible à la fonctorialité en les trois variables M_1, M_2 et K .)

La clef de l'argument de Deligne dans [SGA 4½ [Dualité] 1.2] réside dans la proposition suivante :

PROPOSITION 12.2.2. La construction de la définition 12.2.1 commute à la symétrie.

Si $a : M_1 \otimes M_2 \rightarrow K$ est un accouplement dans $\mathcal{C}$, on peut utiliser la symétrie dans $\mathcal{C}$ puis appliquer F pour obtenir un accouplement $FM_2 \otimes FM_1 \rightarrow FK$ dans $\mathcal{D}$. On peut aussi commencer par appliquer F puis utiliser la symétrie dans $\mathcal{D}$. L'énoncé de la proposition signifie que les deux accouplements ainsi obtenus sont égaux. Cette compatibilité n'est rien d'autre que l'hypothèse de symétrie faite sur le foncteur F .

DÉFINITION 12.2.3. Supposons que M et K soient des objets de $\mathcal{C}$. On dispose d'un accouplement canonique $\text{ev} : \mathbf{Hom}(M, K) \otimes M \rightarrow K$ dont la description adjointe est l'identité de $\mathbf{Hom}(M, K)$ (cf. définition 12.1.4). La définition 12.2.1 donne lieu à un accouplement $F[\text{ev}] : F\mathbf{Hom}(M, K) \otimes FM \rightarrow FK$ dans $\mathcal{D}$ dont la description adjointe est un morphisme que nous noterons $\mathbf{F} : F\mathbf{Hom}(M, K) \rightarrow \mathbf{Hom}(FM, FK)$. (Ce morphisme est évidemment fonctoriel en les deux variables M et K .)

PROPOSITION 12.2.4. *Supposons que $b: M_1 \rightarrow \mathbf{Hom}(M_2, K)$ soit la description adjointe d'un accouplement $a: M_1 \otimes M_2 \rightarrow K$ dans $\mathcal{C}$. Alors, l'accouplement $F[a]: FM_1 \otimes FM_2 \rightarrow FK$ déduit de a par application de F admet pour description adjointe le morphisme composé suivant que nous noterons $F[b]$:*

$$F[b]: FM_1 \xrightarrow{F(b)} F\mathbf{Hom}(M_2, K) \xrightarrow{F} \mathbf{Hom}(FM_2, FK) .$$

Par construction de F , c'est vrai si b est l'identité et le cas général s'en déduit en utilisant la fonctorialité par rapport à M_1 .

THÉORÈME 12.2.5. *Soit $K \in \mathcal{C}$. On note $D_K := \mathbf{Hom}(-, K)$ et $D_{FK} := \mathbf{Hom}(-, FK)$. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on note $F_X: FD_K X \rightarrow D_{FK} FX$ le morphisme $F: F\mathbf{Hom}(X, K) \rightarrow \mathbf{Hom}(FX, FK)$ de la définition 12.2.3. Alors, pour tout $M \in \mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{F(\beta_M)} & FD_K D_K M \\ \beta_{FM} \downarrow & & \downarrow F_{D_K M} \\ D_{FK} D_{FK} FM & \xrightarrow{D_{FK}(F_M)} & D_{FK} FD_K M \end{array}$$

Considérons l'accouplement canonique $D_K M \otimes M \xrightarrow{a} K$ dont la description adjointe est l'identité de $D_K M$. Par symétrie, a induit un accouplement $a^\tau: M \otimes D_K M \rightarrow K$ dont la description adjointe est le morphisme de bidualité $\beta_M: M \rightarrow D_K D_K M$. On a défini un accouplement $F[a^\tau]: FM \otimes FD_K M \rightarrow FK$ dont la description adjointe est donc $F[\beta_M]$ par la proposition 12.2.4 :

$$F[\beta_M]: FM \xrightarrow{F(\beta_M)} FD_K D_K M \xrightarrow{F_{D_K M}} D_K FD_K M .$$

Par ailleurs, puisque $a: D_K M \otimes M \rightarrow K$ est l'accouplement canonique, le morphisme $F[a]: FD_K M \otimes FM \rightarrow FK$ admet pour description adjointe le morphisme $F_M: FD_K M \rightarrow D_{FK} FM$ (cf. définition 12.2.3). Si on note $\alpha: D_{FK} FM \otimes FM \rightarrow FK$ l'accouplement canonique donné par le morphisme d'évaluation, ceci signifie que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FD_K M \otimes FM & \xrightarrow{F[a]} & FK \\ F_M \otimes \text{Id} \downarrow & & \parallel \\ D_{FK} FM \otimes FM & \xrightarrow{\alpha} & FK \end{array}$$

Par symétrie, on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FM \otimes FD_K M & \xrightarrow{F[a]^\tau} & FK \\ \text{Id} \otimes F_M \downarrow & & \parallel \\ FM \otimes D_{FK} FM & \xrightarrow{\alpha^\tau} & FK \end{array}$$

La description adjointe de α^τ étant par définition le morphisme de bidualité β_{FM} de FM , on en déduit que la description adjointe de $F[a]^\tau$ est égale à la composition suivante :

$$FM \xrightarrow{\beta_{FM}} D_{FK} D_{FK} FM \xrightarrow{D_{FK}(F_M)} D_{FK} FD_K M .$$

La proposition 12.2.2 énonce que $F[a]^\tau$ et $F[a^\tau]$ sont les mêmes accouplements $FM \otimes FD_K M \rightarrow FK$. Leurs descriptions adjointes (décrites ci-dessus) sont donc égales, ce qui achève la démonstration du théorème 12.2.5.

Le théorème 12.2.5 admet la généralisation suivante :

THÉORÈME 12.2.6. *Soit $K \in \mathcal{C}$. Soit $K' \in \mathcal{D}$. On suppose donné un morphisme $FK \xrightarrow{\varepsilon} K'$. On note $D_K := \mathbf{Hom}(-, K)$ et $D_{K'} := \mathbf{Hom}(-, K')$. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on note $F_{\varepsilon X}: FD_K X \rightarrow D_{K'} FX$ le morphisme*

composé $FD_K X = F \mathbf{Hom}(X, K) \xrightarrow{F} \mathbf{Hom}(FX, FK) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbf{Hom}(FX, K') = D_{K'} FX$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{F(\beta_M)} & FD_K D_K M \\ \beta_{FM} \downarrow & & \downarrow F_{\varepsilon D_K M} \\ D_{K'} D_K' FM & \xrightarrow{D_{FK}(F_{\varepsilon M})} & D_{K'} FD_K M \end{array}$$

Si $\alpha: M_1 \otimes M_2 \rightarrow K$ est un accouplement dans $\mathcal{C}$, on peut définir $F_\varepsilon[\alpha]: FM_1 \otimes FM_2 \rightarrow K'$ comme étant l'accouplement obtenu par composition

$$FM_1 \otimes FM_2 \xrightarrow{F[\alpha]} FK \xrightarrow{\varepsilon} K'.$$

Tout comme la construction $F[\alpha]$, celle-ci commute à la symétrie, et le théorème 12.2.6 se démontre comme le théorème 12.2.5 en remplaçant $F[-]$ par $F_\varepsilon[-]$.

12.3. Application à f^* .

PROPOSITION 12.3.1. Soit $f: (\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs. Notons $Lf^*: D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ le foncteur défini au §8.3.2. Soit $K \in D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. On note $D_K := R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, K)$ et $D_{Lf^*K} := R\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}'}(-, Lf^*K)$. Alors, pour tout $M \in D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, le diagramme suivant est commutatif dans $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$:

$$\begin{array}{ccc} Lf^*M & \xrightarrow{Lf^*(\beta_M)} & Lf^*D_K D_K M \\ \beta_{Lf^*M} \downarrow & & \downarrow Lf^*_{D_K M} \\ D_{Lf^*K} D_{Lf^*K} Lf^*M & \xrightarrow{D_{Lf^*K}(Lf^*_M)} & D_{Lf^*K} Lf^*D_K M \end{array}$$

Ceci résulte du théorème 12.2.5 appliqué au foncteur $Lf^*: D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$.

12.3.2. Si $f: X' \rightarrow X$ est un morphisme de schémas, on peut appliquer cette proposition au morphisme de topos $X'_{\text{ét}} \xrightarrow{f} X_{\text{ét}}$ (ces topos étant munis d'un faisceau d'anneaux constant). Dans certains cas favorables (cf. proposition 6.2.3.2), les morphismes $f^*D_K M \rightarrow D_{f^*K} f^*M$ sont des isomorphismes, auquel cas la proposition 12.3.1 énonce que pour certains objets M et K dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, l'image par f^* du morphisme de bidualité pour M s'identifie au morphisme de bidualité pour f^*M .

12.4. Le morphisme de Künneth.

PROPOSITION 12.4.1. Supposons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ soient des catégories munies de bifoncteurs symétriques $\otimes$ admettant un adjoint à droite $\mathbf{Hom}$. Soit $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur symétrique. On suppose que pour tous X et Y dans $\mathcal{D}$, le morphisme $\varphi_{X,Y}: GX \otimes GY \rightarrow G(X \otimes Y)$ est un isomorphisme. Supposons que G admette un adjoint à droite $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Alors, F est naturellement muni d'une transformation naturelle symétrique $FX \otimes FY \rightarrow F(X \otimes Y)$ pour tous X et Y dans $\mathcal{C}$.

Si X et Y sont des objets de $\mathcal{C}$, l'adjonction entre G et F définit des morphismes $GFX \rightarrow X$ et $GFY \rightarrow Y$, ce qui permet de définir un morphisme $GFX \otimes GFY \rightarrow X \otimes Y$ dont la source s'identifie à $G(FX \otimes FY)$ grâce à notre hypothèse. Le morphisme $G(FX \otimes FY) \rightarrow X \otimes Y$ qu'on en déduit correspond par adjonction au morphisme voulu $FX \otimes FY \rightarrow F(X \otimes Y)$.

12.4.2. Si $f: (\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ est un morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs, en appliquant la proposition 12.4.1 à Lf^* , on obtient le morphisme de Künneth $Rf_* X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'} Rf_* Y \rightarrow Rf_*(X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} Y)$.

COROLLAIRE 12.4.3. Soit $f: (\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ un morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs. Soit $K' \in D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Soit $K \in D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. On suppose donné un morphisme $Rf_* K' \xrightarrow{\varepsilon} K$ dans $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$.

On note $D_K := \mathbf{RHom}_{\mathcal{A}}(-, K)$ et $D_{K'} := \mathbf{RHom}_{\mathcal{A}'}(-, K')$. On note $f_\varepsilon: \mathbf{Rf}_* D_{K'} \rightarrow D_K \mathbf{Rf}_*$ la transformation naturelle canonique. Alors, le diagramme suivant est commutatif pour tout $M' \in \mathbf{D}(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Rf}_* M' & \xrightarrow{\mathbf{Rf}_*(\beta_{M'})} & \mathbf{Rf}_* D_{K'} D_{K'} M' \\ \beta_{\mathbf{Rf}_* M'} \downarrow & & \downarrow f_\varepsilon \\ D_K D_K \mathbf{Rf}_* M' & \xrightarrow{D_K(f_\varepsilon)} & D_K \mathbf{Rf}_* D_{K'} M' \end{array}$$

12.4.4. Si $f: X' \rightarrow X$ est un morphisme propre entre $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens et $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut poser $K' := f^! K$ et noter $\varepsilon: \mathbf{Rf}_* K' \rightarrow K$ le morphisme d'adjonction. On peut appliquer le corollaire 12.4.3 à cette situation. Le morphisme $f_\varepsilon: \mathbf{Rf}_* \mathbf{RHom}(M', f^! K) \rightarrow \mathbf{RHom}(\mathbf{Rf}_* M', K)$ est un isomorphisme si $M' \in \mathbf{D}^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ grâce à la formule d'adjonction [SGA 4 XVIII 3.1.10]. Si on sait que M' et $D_{K'} M'$ sont dans $\mathbf{D}^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (par exemple, si on sait que $M' \in \mathbf{D}_c^b(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ et que $D_{K'}$ préserve $\mathbf{D}_c^b(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$), le corollaire énonce que l'image par $\mathbf{Rf}_*$ du morphisme de bidualité $\beta_{M'}: M' \rightarrow D_{K'} D_{K'} M'$ s'identifie au morphisme de bidualité $\beta_{\mathbf{Rf}_* M'}: \mathbf{Rf}_* M' \rightarrow D_K D_K \mathbf{Rf}_* M'$.

Cohomological dimension: First results

Luc Illusie

In this exposé we establish Gabber's bound on cohomological dimension stated in the introduction (in the comments on the proof of the finiteness theorem).

1. Bound in the strictly local case and applications

THEOREM 1.1. *Let X be a strictly local, noetherian scheme of dimension $d > 0$, and let ℓ be a prime number invertible on X . Then, for any open subset U of X , we have*

$$(1.1.1) \quad \mathrm{cd}_\ell(U) \leq 2d - 1.$$

Recall that, for a scheme S , $\mathrm{cd}_\ell(S)$ (ℓ -**cohomological dimension** of S) denotes the infimum of the integers n such that for all ℓ -torsion abelian sheaves F on S , and all $i > n$, $H^i(S, F) = 0$.

COROLLARY 1.2. *Let $X = \mathrm{Spec} A$ be as in 1.1, and assume A is a domain, with fraction field K . Then*

$$(1.2.1) \quad \mathrm{cd}_\ell(K) \leq 2d - 1.$$

Indeed, it suffices to show that if F is a finitely generated $\mathbf{F}_\ell$ -module over $\eta = \mathrm{Spec} K$, then $H^i(\eta, F) = 0$ for $i > 2d - 1$. But η is a filtering projective limit of affine open subsets U_α of X , F is induced from a locally constant constructible $\mathbf{F}_\ell$ -sheaf F_{α_0} on U_{α_0} , and $H^i(\eta, F) = \varinjlim H^i(U_\alpha, F_\alpha)$, where $F_\alpha = F_{\alpha_0}|_{U_\alpha}$ for $\alpha \geq \alpha_0$ ([SGA 4 VII 5.7]).

REMARK 1.3. (a) The proof shows that, given X as in 1.1, with X integral, then, if (1.1.1) holds for any affine open subset U , (1.2.1) holds, too.

(b) If X is an integral noetherian scheme of dimension d , with generic point $\mathrm{Spec} K$, and ℓ is a prime number invertible on X , then $\mathrm{cd}_\ell(K) \geq d$ ([SGA 4 x 2.5]). Gabber can prove that under the assumptions of 1.2 one has $\mathrm{cd}_\ell(K) = d$ (see XVIII_B).

COROLLARY 1.4. *Let Y be a noetherian scheme of finite dimension, $f : X \rightarrow Y$ a morphism of finite type, and ℓ a prime number invertible on Y . Then*

$$\mathrm{cd}_\ell(Rf_*) < \infty,$$

i.e. there exists an integer N such that for any ℓ -torsion abelian sheaf F on X , $R^q f_* F = 0$ for $q > N$.

Proof of 1.4. We may assume Y affine. Covering X by finitely many open affine subsets U_i ($0 \leq i \leq n$), and using the alternating Čech spectral sequence

$$E_1^{pq} = \bigoplus R^q(f|_{U_{i_0 \dots i_p}})_*(F|_{U_{i_0 \dots i_p}}) \Rightarrow R^{p+q} f_* F,$$

where $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$, we may assume f separated. Repeating the procedure, we may assume X affine. Choose an immersion $X \rightarrow \mathbf{P}_Y^n$, and replace $\mathbf{P}_Y^n$ by the scheme-theoretic closure of X . We get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \overline{X} \\ \downarrow f & \nearrow g & \\ Y & & \end{array}$$

with j open and g projective of relative dimension $\leq n$. By the proper base change theorem we have $\mathrm{cd}_\ell(Rg_*) \leq 2n$. By the Leray spectral sequence $R^p g_* R^q j_* F \Rightarrow R^{p+q} f_* F$ it thus suffices to prove 1.4 for

j , in other words, we may assume that f is an open immersion. Let d be the dimension of Y . Let y be a geometric point of Y , and let $U = Y_{(y)} \times_Y X$ be the corresponding open subset of the strictly local scheme $Y_{(y)}$ (of dimension $\leq d$, that we may assume to be > 0). Then

$$R^i f_* (F)_y = H^i(U, F)$$

(where we still denote by F its inverse image on U). The conclusion follows from 1.1.

REMARKS 1.5. (a) Under the assumptions of 1.1, if X is quasi-excellent and U is affine, then by Gabber's affine Lefschetz theorem (XV-1.2.4) we have $\text{cd}_\ell(U) \leq d$. More generally, see XVII-3.2.1 for a proof of 1.1 for X quasi-excellent.

(b) Gabber can show that, under the assumptions of 1.1, one has $\text{cd}_\ell(U) \geq d$ if U is not empty and does not contain the closed point and that for each n such that $d \leq n \leq 2d - 1$, there exists a pair (X, U) as in 1.1, with U affine, such that $\text{cd}_\ell(U) = n$ (by (a), for $n > d$, X is not quasi-excellent). These results are proved in XVIII_B.

2. Proof of the main result

LEMMA 2.1. *Let X be as in 1.1, and let x be the closed point of X . Then (1.1.1) holds for $U = X - \{x\}$.*

Proof. It suffices to show that for any constructible $\mathbf{F}_\ell$ -sheaf F on U , $H^i(U, F) = 0$ for $i \geq 2d$. Let $\widehat{X}$ be the completion of X at $\{x\}$ and set $\widehat{U} := \widehat{X} \times_X U = \widehat{X} - \{x\}$. Let $\widehat{F}$ be the inverse image of F on $\widehat{U}$. By Gabber's formal base change theorem ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]), the natural map

$$H^i(U, F) \rightarrow H^i(\widehat{U}, \widehat{F})$$

is an isomorphism for all i . Therefore we may assume X complete, and in particular, excellent. Let $(f_1, \dots, f_d)$ be a system of parameters of X , and let $U_i = X_{f_i}$, so that $U = \bigcup_{1 \leq i \leq d} U_i$. Consider the (alternate) Čech spectral sequence

$$E_1^{pq} = \bigoplus H^q(U_{i_0 \dots i_p}, F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F),$$

with $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ as above. By definition, $E_1^{pq} = 0$ for $p \geq d$. On the other hand, as X is excellent, by Gabber's affine Lefschetz theorem (XV-1.2.4), we have $E_1^{pq} = 0$ for $q \geq d + 1$. Therefore $E_1^{pq} = 0$ for $p + q \geq 2d$, hence $H^i(U, F) = 0$ for $i \geq 2d$. $\square$

LEMMA 2.2. *Let X be a noetherian scheme of finite dimension, Y a closed subset, ℓ a prime number invertible on X . Then, for any ℓ -torsion sheaf F on X ,*

$$H_Y^i(X, F) = 0$$

for

$$i > \sup_{x \in Y} (\text{cd}_\ell(k(x)) + 2 \dim \mathcal{O}_{X,x}).$$

In particular,

$$\text{cd}_\ell(X) \leq \sup_{x \in X} (\text{cd}_\ell(k(x)) + 2 \dim \mathcal{O}_{X,x}).$$

Proof. For $p \geq 0$, let Φ^p be the set of closed subsets of Y of codimension $\geq p$ in X . We have $\Phi^p = \emptyset$ for $p > \dim(X)$. Consider the (biregular) coniveau spectral sequence of the filtration (Φ^p) (cf. [Grothendieck, 1968, 10.1]),

$$(2.2.1) \quad E_1^{pq} = H_{\Phi^p / \Phi^{p+1}}^{p+q}(X, F) \Rightarrow H_Y^{p+q}(X, F).$$

We have

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{x \in Y^{(p)}} H_{\{x\}}^{p+q}(X_x, F|_{X_x}),$$

where $Y^{(p)}$ denotes the set of points of Y of codimension p in X , and $X_x = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$. For $x \in Y^{(p)}$ (i.e. $\dim \mathcal{O}_{X,x} = p$), let $\bar{x}$ be a geometric point above x . Consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc} \{\bar{x}\} & \xrightarrow{i_{\bar{x}}} & X_{(\bar{x})} & \xleftarrow{j} & \bar{U} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{x\} & \xrightarrow{i_x} & X_x & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

where $U = X_x - \{x\}$, $\bar{U} = X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$. We have

$$R\Gamma_{\{x\}}(X_x, F|_{X_x}) = R\Gamma(\{x\}, Ri_x^!(F|_{X_x})).$$

The stalk of $Ri_x^!(F|_{X_x})$ at $\bar{x}$ is

$$Ri_x^!(F|_{X_x})_{\bar{x}} = Ri_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}}),$$

as $(Rj_*(F|_U))_{\bar{x}} = R\bar{j}_*(F|_{\bar{U}})_{\bar{x}}$. We thus have a spectral sequence

$$(2.2.2) \quad E_2^{rs} = H^r(k(x), R^s i_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}})) \Rightarrow H_{\{x\}}^{r+s}(X_x, F|_{X_x}),$$

It suffices to show that, in the initial term of (2.2.1),

$$(2.2.3) \quad H_{\{x\}}^{p+q}(X_x, F|_{X_x}) = 0$$

for $p + q > \text{cd}_\ell(k(x)) + 2p$. If $p = 0$, then $Ri_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}}) = F_{\bar{x}}$, and, in (2.2.2), $E_2^{rs} = 0$ for $s > 0$, $E_2^{r0} = 0$ for $r > \text{cd}_\ell(k(x))$, so (2.2.3) is true in this case. Assume $p > 0$. We have

$$(2.2.4) \quad R^s i_{\bar{x}}^! F = H^{s-1}(\bar{U}, F|_{\bar{U}})$$

for $s \geq 2$, where, as above, $\bar{U} = X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$. By 2.1, $H^{s-1}(\bar{U}, F|_{\bar{U}}) = 0$ for $s - 1 \geq 2p$, hence, by (2.2.4), $R^s i_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}}) = 0$ and $E_2^{rs} = 0$ for $s \geq 2p + 1$. If $r + s \geq \text{cd}_\ell(k(x)) + 2p + 1$ and $s \leq 2p$, then $r > \text{cd}_\ell(k(x))$, hence $E_2^{rs} = 0$ as well. Therefore, by (2.2.2), (2.2.3) holds, which finishes the proof. $\square$

Proof of 1.1. We prove 1.1 by induction on d . For $n \geq 0$ consider the assertion

G_n : For every strictly local, noetherian scheme X of dimension n , all open subsets U of X and any prime number ℓ invertible on X , we have $\text{cd}_\ell(U) \leq \sup(0, 2n - 1)$.

Let $d > 0$. Assume G_n holds for $n < d$, and let us prove G_d . Let X be as in 1.1. If $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$ are the reduced irreducible components of X and $U_i = U \times_X X_i$, we have $\text{cd}_\ell(U) \leq \sup(\text{cd}_\ell(U_i))$, hence we may assume X integral. Let x be the closed point of X , and $U = X - \{x\}$ the punctured spectrum. Let $j : V \rightarrow U$ be a nonempty open subset of U , and F be a constructible $\mathbb{F}_\ell$ -sheaf on V . As $F = j^* j_! F$, by 2.1 it suffices to show that, for any constructible $\mathbb{F}_\ell$ -sheaf L on U , the restriction map

$$(*) \quad H^i(U, L) \rightarrow H^i(V, j^* L)$$

is an isomorphism for $i \geq 2d$. Let $Y = U - V$. Consider the exact sequence

$$H_Y^i(U, L) \rightarrow H^i(U, L) \rightarrow H^i(V, j^* L) \rightarrow H_Y^{i+1}(U, L).$$

By 2.2, we have $H_Y^i(U, L) = 0$ for $i > \sup_{y \in Y}(\text{cd}_\ell(k(y)) + 2 \dim \mathcal{O}_{X,y})$. For $y \in Y$, denote by Z the closed, integral subscheme of X defined by the closure of $\{y\}$ in X . As X is integral and V nonempty, Z is a strictly local scheme of dimension $n < d$, with generic point y . By 1.3 (a) and G_n (inductive assumption), we have $\text{cd}_\ell(k(y)) \leq 2n - 1$. We have $2n - 1 + 2 \dim \mathcal{O}_{X,y} \leq 2d - 1$. Hence, for $i \geq 2d$, $H_Y^i(U, L) = H_Y^{i+1}(U, L) = 0$, and $(*)$ is an isomorphism, which finishes the proof.

REMARK 2.3. Gabber has an alternate proof of 1.1, based on the theory of Zariski-Riemann spaces. By 2.2, it suffices to show 1.2. Here is a sketch, pasted from an e-mail of Gabber to Illusie of 2007, Aug. 15 :

"For $Y \rightarrow X$ proper birational with special fiber Y_0 , consider $i : Y_0 \rightarrow Y$ and $j : \eta \rightarrow Y$, η the generic point. We have by proper base change a spectral sequence

$$H^p(Y_0, i^* R^q j_* F) \rightarrow H^{p+q}(\eta, F)$$

for F an ℓ -torsion Galois module. We take the direct limit and get a spectral sequence involving cohomologies on the étale topos of ZRS_0 defined as the limit of étale topoi of Y_0 or viewing ZRS_0 as a locally ringed topos and applying a universal construction in the book of M. Hakim. The limit of the $R^q j_* F$ is $R^q(\eta \rightarrow ZRS)_* F$. By a classical result of Abhyankar, also proved in Appendix 2 of the book of Zariski-Samuel Vol. II, if R is a noetherian local domain of dimension d and V a valuation ring of $\text{Frac}(R)$ dominating R , the sum of the rational rank and the residue transcendence degree is at most d . For a strictly henselian valuation ring V with residue characteristic exponent p and value group Γ , the absolute Galois group of $\text{Frac}(V)$ is an extension of the tame part (product for ℓ prime not equal to p of $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z}_\ell(1))$) by a p -group, so the ℓ -cohomological dimension is the dimension of Γ tensored with the prime field $\mathbf{F}_\ell$, which is at most the dimension of Γ tensored with the rationals. If A is an ℓ -torsion sheaf on the étale topos of ZRS_0 , let $\delta(A)$ be the sup of transcendence degrees of points where the stalk is non-zero. I claim that $H^n(ZRS_0, A)$ vanishes for $n > 2\delta(A)$. One reduces it to the finite type case (passage to the limit [SGA 4 VI 8.7.4]) using that the δ of the direct image of A to Y_0 is at most $\delta(A)$. In Y_0 the transcendence degrees over the closed point of X are at most $d - 1$ by the dimension inequality. Summing up, for the limit spectral sequence the q -th direct image sheaf restricted to the special fiber has δ at most $\min(d - 1, d - q)$, giving vanishing for certain $E_2^{p,q}$ and the result."

Dimension cohomologique : raffinements et compléments

Fabrice Orgogozo

Notre premier objectif est de démontrer que pour tout nombre premier ℓ il existe un ouvert *affine* d'un schéma noëthérien strictement hensélien régulier de dimension 2 dont la ℓ -dimension cohomologique est égale à 3. Outre les ingrédients cohomologiques — pureté, morphisme de Gysin et comparaison à la complétion —, on utilise une construction dont le principe est dû à Nagata : utilisant des « dilatations formelles », on construit un schéma noëthérien strictement hensélien X de dimension 2, de complété $\widehat{X}$ régulier de dimension 2, et une courbe irréductible C dans X devenant le ℓ -ième multiple d'un diviseur régulier dans $\widehat{X}$. Cette construction est ensuite étendue au cas, plus délicat, de la dimension supérieure. À partir de là, on construit aisément des schémas dont l'existence a été annoncée dans la première partie (XVIII_A-1.5). Pour vérifier que leur dimension cohomologique est bien celle attendue, on fait appel à une majoration assez générale établie sans hypothèse d'excellence. Enfin, on termine par une minoration de la dimension cohomologique d'un ouvert (non nécessairement affine) du spectre épointé d'un schéma noëthérien intègre strictement local.

1. Préliminaires

1.1. Dilatations formelles. Soient R un anneau, π un élément non diviseur de 0 et f un élément de la complétion π -adique $\widehat{R}$ de R . Pour tout $n \geq 0$, choisissons un $f_n \in R$ tel que $f \equiv f_n$ modulo π^n .

DÉFINITION 1.1.1. On note $\mathrm{Dil}_\pi^f R$ la sous- R -algèbre de $R[\pi^{-1}, F]$, où F est une indéterminée, colimite des R -algèbres $R[\frac{F-f_n}{\pi^n}]$.

On notera également F l'image de cette variable dans $\mathrm{Dil}_\pi^f R$.

REMARQUE 1.1.2. Notons que les R -algèbres considérées sont toutes isomorphes à une algèbre de polynômes en une variable sur R .

1.1.3. On vérifie immédiatement les faits suivants :

- (i) la construction ne dépend pas des choix des f_n , et ne dépend de l'élément π qu'à travers l'idéal qu'il engendre ;
- (ii) les morphismes $R \rightarrow \mathrm{Dil}_\pi^f R$ et $\mathrm{Dil}_\pi^f R \rightarrow \widehat{R}$, $\frac{F-f_n}{\pi^n} \mapsto \frac{f-f_n}{\pi^n}$, induisent des *isomorphismes* sur la complétion π -adique.

1.2. Platitude et noëthérianité.

1.2.1. Rappelons que si un morphisme $A \rightarrow B$ est fidèlement plat, A est noëthérien si B l'est ([ÉGA IV₂ 2.2.14]). Pour vérifier la platitude, il est parfois commode d'utiliser le critère suivant ([Raynaud & Gruson, 1971, II.1.4.2.1]).

PROPOSITION 1.2.2. Soient M un R -module, et $\pi \in R$. On suppose que π n'est diviseur de zéro ni dans R ni dans M . Alors, M est plat sur R si et seulement si M/π l'est sur R/π et $M[\pi^{-1}]$ l'est sur $R[\pi^{-1}]$.

REMARQUE 1.2.3. Pour démontrer la noëthérianité des anneaux considérés ci-après, on pourrait également utiliser le critère de Cohen rappelé en XIX-3.2, en vérifiant notamment que les idéaux de hauteur 1 sont principaux.

1.3. Gonflements.

1.3.1. Soit A un anneau local noethérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Suivant [Bourbaki, AC, IX, appendice, §2], on note $A[t]$ et on appelle **gonflement (élémentaire)** de A le localisé de l'anneau de polynômes $A[t]$ en l'idéal premier $\mathfrak{m}A[t]$. C'est un anneau local noethérien. (Il est noté $A(t)$, par analogie avec les fractions rationnelles, dans [Nagata, 1962, p. 17—18]; voir aussi [Matsumura, 1980b, p. 138].) Plus généralement, on peut considérer un ensemble arbitraire de variables t_e , $e \in E$, et définir l'anneau $A[t_e, e \in E]$, localisé de $A[t_e, e \in E]$ en l'idéal premier engendré par $\mathfrak{m}$. Rappelons le fait suivant ([Bourbaki, AC, IX, appendice, prop. 2 et corollaire]).

PROPOSITION 1.3.2. *L'anneau $A[t_e, e \in E]$ est local noethérien de même dimension que A .*

1.3.3. Notons que le cas d'un nombre fini de variables est très élémentaire et que le cas général résulte du lemme [ÉGA 0_{III} 10.3.1.3], reproduit en XIX-3.1, par passage à la (co)limite. Pour une autre démonstration, voir également [Bourbaki, AC, III, §5, exercice 7].

1.3.4. Observons également que si le corps résiduel de A est κ , celui de $A[t_e, e \in E]$ est canoniquement isomorphe à son extension transcendante pure $\kappa(t_e, e \in E)$. De plus, on montre que si F est un sous-ensemble de E , le morphisme $A[t_e, e \in F] \rightarrow A[t_e, e \in E]$ est *fidèlement plat*. (Voir [Bourbaki, AC, IX, appendice, prop. 2] pour une démonstration dans le cas où $F = \emptyset$, auquel on se ramène immédiatement.)

2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique

2.1. Dilatation relativement à une série transcendante.

2.1.1. Soit W un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_W = (\pi)$, corps résiduel k , corps des fractions K et de complété $\widehat{W}$. On note $\widehat{K}$ le corps des fractions de $\widehat{W}$. Supposons qu'il existe un élément $\varphi \in \widehat{W}$ transcendant sur K . C'est le cas si W est dénombrable ou, par exemple, lorsque $W = k[t]_{(t)}$ auquel cas $\varphi = \sum_n t^{n!}$ convient. Par translation, on peut supposer que φ appartient à l'idéal maximal de $\widehat{W}$.

2.1.2. Fixons un entier $\ell \geq 1$ et considérons l'élément $f = (y - \varphi)^\ell$ du complété π -adique $\widehat{W}[y]$ de $W[y]$. Notons que ce complété s'injecte dans la complétion totale $\widehat{W}[[y]]$ et que f appartient au sous-anneau $\widehat{W}[y]$ de $\widehat{W}[[y]]$ et $\widehat{W}[[y]]$. En conséquence, le morphisme canonique $\mathrm{Dil}_\pi^f W[y] \rightarrow \widehat{W}[y]$ se factorise en un morphisme $\mathrm{Dil}_\pi^f W[y] \rightarrow \widehat{W}[y]$.

PROPOSITION 2.1.3. *Le morphisme $\mathrm{Dil}_\pi^f W[y] \rightarrow \widehat{W}[y]$ est plat.*

Démonstration. Notons pour simplifier $\mathcal{D}$ la source de ce morphisme. D'après le critère de platitude rappelé ci-dessus, il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{D}[\pi^{-1}] \rightarrow \widehat{W}[y][\pi^{-1}]$ est plat car $\mathcal{D} \rightarrow \widehat{W}[y]$ induit visiblement un isomorphisme modulo π . Or, lorsque l'on inverse π , les $W[y]$ -algèbres dont $\mathcal{D}$ est par définition la colimite sont toutes isomorphes à un anneau de polynômes $K[y, F]$ où, rappelons-le, K est le corps des fractions $W[\pi^{-1}]$ de W . Par conséquent, il nous faut montrer que le morphisme $K[y, F] \rightarrow \widehat{W}[y][\pi^{-1}]$, composé des morphismes

$$\begin{cases} K[y, F] \rightarrow K[y, F'] \\ F \mapsto F^\ell \end{cases} \quad \begin{cases} K[y, F'] \rightarrow \widehat{K}[y] \\ F' \mapsto y - \varphi \end{cases}$$

est plat. La platitude du premier est évidente. Pour le second, on se ramène par translation et changement de base à montrer que le morphisme $K[F'] \rightarrow \widehat{K}$, $F' \mapsto \varphi$, est plat. Il se factorise en le composé du passage aux fractions $K[F'] \rightarrow K(F')$ avec l'injection $K(F') \hookrightarrow \widehat{K}$ déduite de φ . Chacun de ces morphismes est plat. $\square$

REMARQUE 2.1.4. La construction de l'anneau de dilatation $\mathrm{Dil}_\pi^f W[y]$ est inspirée de celle de [Nagata, 1958], qui considère le cas $\ell = 2$. (Voir aussi [Nagata, 1962, appendice, E4.1] et [Heinzer et al., 1997].)

2.2. Le diviseur $C = V(F)$.

2.2.1. On conserve les notations précédentes. Soit A le localisé de l'anneau de dilatation $\mathcal{D}$ en l'idéal premier image inverse de l'idéal $(\pi, y) \subset \widehat{W}[y]$. C'est un anneau noëthérien par fidèle platitude, de corps résiduel k .

LEMME 2.2.2. *L'anneau A satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) *il est régulier et la suite (π, F) est régulière ;*
- (ii) *son quotient A/F est intègre ;*
- (iii) *l'intersection schématique du fermé $V(F)$ avec le spectre épointé de A est un schéma régulier.*

Démonstration. (i) Il suffit d'établir les deux énoncés pour $\mathcal{D}$. Pour se faire, on peut compléter π -adiquement (cf. par exemple [Bourbaki, AC, X, §4, n°2, cor. 3]). Le complété de $\mathcal{D}$ est isomorphe à $\widehat{W}[y]$ de sorte que la régularité de l'anneau et de la suite (π, F) — c'est-à-dire l'injectivité de la multiplication par π , et par F modulo π — sont évidents. (ii) Si on inverse π , l'anneau A devient une localisation de l'anneau de polynômes $K[y, F]$. La restriction du diviseur à cet ouvert est intègre. La multiplication par π dans le quotient A/F étant injective d'après (i), l'intégrité de A/F résulte de celle de $A[\pi^{-1}]/F$. Le quotient est non nul car $F \in \mathfrak{m}_A$. (iii) Sur l'ouvert complémentaire de $V(\pi)$, l'élément F est une indéterminée de sorte que le résultat est clair. D'autre part, l'intersection du complémentaire de $V(y)$ avec le diviseur est contenu dans le complémentaire de $V(\pi)$ car l'équation est — dans le complété π -adique — de la forme $(y - \varphi)^\ell$, avec $\varphi \in (\pi)$. Ceci suffit pour conclure. $\square$

2.2.3. Notons le fait suivant, trivial mais crucial : par construction, le diviseur $V(F)$ devient $V((y - \varphi)^\ell)$ dans le complété $\widehat{A}$ de A relativement à son idéal maximal.

2.3. Hensélisation. Pour simplifier les notations, on suppose dorénavant le corps k séparablement clos.

2.3.1. Soient A^{hs} le hensélisé de A en son point fermé, $\widehat{A}$ le complété de A (ainsi que de A^{hs}), et notons $X = \text{Spec}(A^{\text{hs}})$ et $\widehat{X} = \text{Spec}(\widehat{A})$ leurs spectres respectifs, ainsi que $\star$ et $\widehat{\star}$ les points fermés. Comme $\text{Spec}(A)$, le schéma X est intègre. De plus, le diviseur C d'équation $F = 0$ dans X est réduit, cette propriété étant également conservée par hensélisation.

2.3.2. Vérifions que le diviseur C est irréductible. D'après le théorème de comparaison de Elkik, le morphisme $\pi_0(\widehat{C} - \widehat{\star}) \rightarrow \pi_0(C - \star)$ est une bijection. Or, $\widehat{C} - \widehat{\star}$ est connexe : dans un anneau local régulier B , le spectre $\text{Spec}(B/g^\ell)$ est irréductible pour tout $g \in \mathfrak{m}_B - \mathfrak{m}_B^2$. Ainsi, l'ouvert $C - \star$ de C est connexe et, finalement, C est irréductible.

2.4. Application cohomologique. On suppose dorénavant l'entier ℓ inversible sur X .

2.4.1. Notons pour simplifier G l'élément $y - \varphi$ de $\widehat{A}$, de sorte que — par construction — on a l'égalité $F = G^\ell$ dans $\widehat{A}$. Notons U l'ouvert affine $X - C$ du schéma strictement local X . Soient j l'immersion ouverte de U dans le spectre épointé $X - \star$ et i l'immersion fermée $C - \star \hookrightarrow X - \star$.

2.4.2. Le triangle

$$i_* i^! \rightarrow \text{Id} \rightarrow Rj_* j^*$$

sur $X - \star$ induit la suite exacte

$$H_{C-\star}^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow H^3(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow H_{C-\star}^4(X - \star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = H^2(C - \star, i^! \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}[2]).$$

Par pureté (XVI-3.1.1), le faisceau de cohomologie locale $i^! \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ est constant concentré en degré 2. Or le groupe de cohomologie $H^2(C - \star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est nul : la cohomologie du corps des fractions d'un anneau B strictement local intègre de dimension 1 est nul en degré ≥ 2 . (On se ramène au cas bien connu d'un anneau de valuation discrète en observant que le normalisé de B dans son corps des fractions est un anneau noëthérien, de Dedekind, et strictement local car colimite locale d'anneaux strictement locaux.) Il en résulte que la flèche de restriction $H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow H^3(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est surjective ; nous allons voir que c'est un isomorphisme.

2.4.3. Comme rappelé ci-dessus, le morphisme $H^3_{C-\star}(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ s'identifie, par pureté, au morphisme de Gysin $\text{Gys}(f) : H^1(C-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(C-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{Gys}(F)} & H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\widehat{C}-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{Gys}(F) = \text{Gys}(G^\ell)} & H^3(\widehat{X}-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}), \end{array}$$

de l'égalité $\text{Gys}(F) = \ell \cdot \text{Gys}(G)$ et enfin du fait que les flèches verticales sont des isomorphismes (comparaison à la complétion, [Fujiwara, 1995, 6.6.4]) que le morphisme $\text{Gys}(F)$ est nul. (La commutativité du diagramme résulte par exemple de la définition XVI-2.3.1 et de XVI-2.2.3.1.) Ainsi, le morphisme de restriction induit un isomorphisme

$$H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^3(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}).$$

Or le terme de gauche est non nul, à nouveau par pureté. Le schéma affine $\mathcal{U}$ est donc de dimension cohomologique > 2 . CQFD.

3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique

On étend la construction précédente en dimension arbitraire ≥ 2 .

3.1. Une série formelle et sa décomposition.

3.1.1. Soit A un anneau commutatif. Rappelons que l'application A -linéaire

$$\sum_{i=1}^n A[x_{j \neq i}] [[x_i]] \rightarrow A[[x_1, \dots, x_n]]$$

somme des injections canoniques est *surjective* : si $G \in A[[x_1, \dots, x_n]]$, on peut par exemple regrouper pour chaque $i \in [1, n]$ les termes $\alpha x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \in A[[x_1, \dots, x_n]]$ de G pour lesquels $\beta_i = \max_{j \in [1, n]} \beta_j$ et $\beta_1, \dots, \beta_{i-1} < \beta_i$. (Cette dernière condition n'est là que pour définir i de façon non ambiguë ; tout autre choix conviendrait.) La somme g_i de ces termes appartient à $A[x_{j \neq i}] [[x_i]]$, et $G = g_1 + \cdots + g_n$.

3.1.2. On fixe maintenant deux entiers non nuls n et ℓ et on considère

$$S = (y + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{\infty} t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell \in \mathbf{Z}[y, t_{i \in [1, n], \alpha \geq 1}] [[x_1, \dots, x_n]].$$

Il résulte de l'observation précédente que l'on peut écrire cette série sous la forme

$$y^\ell + f_1 + \cdots + f_n$$

où chaque f_i est une série formelle en x_i , à coefficients polynomiaux en les autres variables.

3.1.3. Afin que la proposition de platitude ci-dessous soit vraie, on procède de façon légèrement différente pour définir les séries formelles $f_i \in \mathbf{Z}[y, t_{j\alpha}, x_{k \neq i}] [[x_i]]$ telles que $S - y^\ell = \sum_{i=1}^n f_i$. Écrivons

$$S = y^\ell + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha \right)^\ell + (\text{élément de degré} < \ell \text{ en les } t_{j\beta}).$$

Soient $i \in [1, n]$ et $\alpha \geq 1$ des indices. On considère les termes $\alpha x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ de $(\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell$ pour lesquels i est le plus grand indice tel que $\beta_i \neq 0$, c'est-à-dire les termes de $(\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell$ qui sont dans $\mathbf{Z}[t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}, x_1, \dots, x_i]$ mais pas dans $\mathbf{Z}[t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}, x_1, \dots, x_{i-1}]$. À i fixé, la somme sur α de ces termes est un élément $f_{i,=\ell}$ de $\mathbf{Z}[t_{j\beta}, x_{k \neq i}] [[x_i]]$. Par construction, on a l'égalité $\sum_{\alpha=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell = \sum_{i=1}^n f_{i,=\ell}$. Enfin, on décompose le terme restant, $S - y^\ell - \sum_{i=1}^n f_{i,=\ell}$, en une somme $\sum_{i=1}^n f_{i,<\ell}$ où chaque $f_{i,<\ell}$ appartient à $\mathbf{Z}[y, t_{j\beta}, x_{k \neq i}] [[x_i]]$, en procédant par exemple comme en 3.1.1. On pose alors $f_i = f_{i,=\ell} + f_{i,<\ell}$; chacun de ces éléments est de degré total en les $t_{j\beta}$ inférieur ou égal à ℓ , et appartient donc également à $\mathbf{Z}[y, t_{j,\beta \neq \alpha}] [[x_1, \dots, x_n]] [t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}]$ pour chaque $\alpha \geq 1$.

PROPOSITION 3.1.4. Fixons $\alpha \geq 1$. Notons $T_i = t_{i\alpha}$ pour chaque $i \in [1, n]$ et R_α l'anneau $\mathbb{Z}[y, t_{j, \beta \neq \alpha}][x_1, \dots, x_n]$. Le morphisme

$$R_\alpha[F_1, \dots, F_n] \rightarrow R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$$

$$F_i \mapsto f_i$$

est libre, donc plat, au-dessus de l'ouvert $x_1 \cdots x_n \neq 0$ de $\text{Spec}(R)$.

Démonstration. Par construction, chaque f_i est une somme $f_{i,=\ell} + f_{i,<\ell}$, où $f_{i,=\ell}$ (resp. $f_{i,<\ell}$) est un polynôme dans $R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$ de degré total égal (resp. strictement inférieur) à ℓ . De plus, $f_{i,=\ell}$ est, comme polynôme en T_i , de la forme $x_i^{\alpha\ell} T_i^\ell + \sum_{m<\ell} c_m T_i^m$ où les c_m appartiennent à $R_\alpha[T_{j< i}]$. Munissons les monômes de $R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$ de l'ordre lexicographique gradué suivant : $T_1^{d_1} \cdots T_n^{d_n} \preceq T_1^{d'_1} \cdots T_n^{d'_n}$ si et seulement si $\sum d_i < \sum d'_i$ ou $\sum d_i = \sum d'_i$ et $d_i < d'_i$ pour le plus grand i tel que $d_i \neq d'_i$. Il est clair que le terme de tête $\text{in}_{\preceq}(g)$ pour cet ordre d'un polynôme $g = f_1^{q_1} \cdots f_n^{q_n}$ en les f_i est $T_1^{q_1\ell} \cdots T_n^{q_n\ell}$, à multiplication près par un monôme en les x_i . Il en résulte immédiatement qu'en inversant les x_i , l'anneau $R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$ est libre sur $R_\alpha[F_1, \dots, F_n]$ de base les monômes $T_1^{r_1} \cdots T_n^{r_n}$, avec $0 \leq r_i < \ell$. $\square$

3.1.5. Soit A un anneau local noëthérien régulier de dimension n dont on note $x_1, \dots, x_n$ un système régulier de paramètres. On pourra penser par exemple au localisé $k[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$ d'un anneau de polynômes sur un corps. On considère le gonflement $A]_{\underline{t}}[$ défini en 1.3, où $\underline{t}$ est l'ensemble des variables $\{t_{i\alpha} : i \in [1, \dots, n], \alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$.

3.2. Construction d'un anneau local régulier pathologique. Soit $i \in [1, \dots, n]$. Notons encore f_i l'image de la série formelle à coefficients entiers considérée en 3.1.3 dans le complété x_i -adique de $A]_{\underline{t}}[y]$, et $\mathcal{D}_i$ l'anneau de dilatation $\widehat{\text{Dil}}_{x_i}^{f_i} A]_{\underline{t}}[y]$. Le produit tensoriel $\mathcal{P}$ de ces $A]_{\underline{t}}[y]$ -algèbres s'envoie naturellement dans le complété $\widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$, où la première complétion est faite relativement à l'idéal maximal $(x_1, \dots, x_n)$ de $A]_{\underline{t}}[$. On note $\mathcal{D}$ le localisé de $\mathcal{P}$ en l'image de l'idéal maximal $(x_1, \dots, x_n, y)$ de $\text{Spec}(\widehat{A]_{\underline{t}}[[y]])$.

PROPOSITION 3.2.1. Le morphisme $\mathcal{D} \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$ est fidèlement plat.

Il en résulte que l'anneau $\mathcal{D}$ est local noëthérien, régulier.

REMARQUE 3.2.2. Notons qu'il est clair que $\mathcal{D}$ est « quasi-régulier ». En effet, le gradué de $\mathcal{D}$ relativement à l'idéal $(x_1, \dots, x_n, y)$ est une algèbre symétrique : pour chaque entier r , le morphisme $A]_{\underline{t}}[y] \rightarrow \mathcal{P}$ induit un isomorphisme modulo $(x_1, \dots, x_n)^r$.

Démonstration. Il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{D} \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$ est plat. D'après le critère de platitude rappelé précédemment (1.2.2), il suffit de montrer la platitude sur l'ouvert $x_1 \cdots x_n \neq 0$. En effet, le cas où seuls certains x_i sont nuls se ramène à ce cas particulier : en tensorisant par $A]_{\underline{t}}[y]/x_i$ le morphisme $\mathcal{D} \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$, on obtient une flèche du même type définie par l'anneau A/x_i de dimension $n - 1$ et des séries qui coïncident avec l'évaluation en $x_i = 0$ des $f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n$. Pour chaque i , $\mathcal{D}_i[x_i^{-1}]$ est une algèbre de polynômes $A]_{\underline{t}}[y, F_i][x_i^{-1}]$ de sorte que le morphisme dont on souhaite montrer la platitude est

$$A]_{\underline{t}}[y, F_1, \dots, F_n] \left[\frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right] \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]} \left[\frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right],$$

$$F_i \mapsto f_i.$$

Il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble fini $\mathcal{T}$ des variables $\underline{t}$, le morphisme

$$A]_{\underline{t}} \in \mathcal{T}[y, F_1, \dots, F_n] \left[\frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right] \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]} \left[\frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right]$$

est plat. Quitte à agrandir un tel ensemble $\mathcal{T}$, on se ramène au cas où $\mathcal{T}$ est *cofini*, de complémentation des variables $t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}$ pour un indice $\alpha \geq 1$ quelconque. Posant alors $R_\alpha = A]_{t_{i, \beta \neq \alpha}}[$ et $R' = A]_{\underline{t}}[$, il suffit de montrer que le morphisme $R_\alpha[y, F_1, \dots, F_n] \rightarrow R'[[y]]$ est plat au-dessus de l'ouvert $x_1 \cdots x_n \neq 0$. Un dernier dévissage nous ramène à montrer la platitude du morphisme

$R_\alpha[y, F_1, \dots, F_n] \rightarrow R_\alpha[y, t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}]$, au-dessus du même ouvert. Ce dernier point résulte de la proposition 3.1.4. $\square$

PROPOSITION 3.2.3. *Le diviseur $C = V(y^\ell + F_1 + \dots + F_n)$ de $\text{Spec}(\mathcal{D})$ est régulier hors du point fermé.*

Dans cet énoncé, on note abusivement F_i l'image dans $\mathcal{D}$ de l'élément de $\mathcal{D}_i$ correspondant à f_i (cf. 1.1).

Démonstration. Il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble strict E de $[1, n]$, l'intersection schématique de C avec le sous-schéma $X_E = \{x_i = 0, i \in E; x_i \neq 0, i \notin E\}$ de $\text{Spec}(\mathcal{D})$ est un diviseur régulier de X_E . Si $E = \emptyset$, cela résulte du fait que le schéma $X_\emptyset$ est le localisé d'une algèbre de polynômes en les $y, F_1, \dots, F_n$. Le cas général se ramène aisément à ce cas particulier. (Remarquons que si $x_i = 0$, il en est de même de F_i .) $\square$

PROPOSITION 3.2.4. *L'image inverse de C dans un localisé strict de $\text{Spec}(\mathcal{D})$ est irréductible.*

Démonstration. Même argument qu'en dimension 2. $\square$

COROLLAIRE 3.2.5. *Pour tout entier $d \geq 1$, il existe un schéma noethérien strictement local régulier de dimension d possédant un ouvert affine de ℓ -dimension cohomologique $2d - 1$.*

Démonstration. La même démonstration qu'en dimension 2 nous permet de minorer la dimension cohomologique par $2d - 1$. D'après XVIII_A-1.1.1, c'est une égalité. $\square$

4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique »

4.1. Énoncé.

THÉORÈME 4.1.1. *Soit $R \rightarrow R'$ un morphisme local essentiellement de type fini d'anneaux noethériens strictement locaux intègres. Notons K le corps des fractions de R . Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur R , on a la majoration*

$$\text{cd}_\ell(R' \otimes_R K) \leq \dim(R'),$$

où le terme de gauche désigne la ℓ -dimension cohomologique étale du spectre de l'anneau $R' \otimes_R K$ et le terme de droite désigne la dimension de Krull de R' .

4.1.2. Dans cet énoncé, l'hypothèse de finitude sur f signifie que R' est une colimite de R -algèbres de type fini à morphismes de transition étales.

COROLLAIRE 4.1.3. *Soit R un anneau strictement local noethérien intègre de corps des fractions K et soit ℓ un nombre premier inversible sur R . Alors, on a la majoration*

$$\text{cd}_\ell(K) \leq \dim(R).$$

REMARQUE 4.1.4. Réciproquement, il résulte par passage à la limite des résultats de § 6 *infra* que, sous les hypothèses du corollaire, si U est un ouvert non vide strict de $\text{Spec}(R)$, alors $\text{cd}_\ell(U) \geq \dim(R)$ et que, lorsque $R' \otimes_R K \neq 0$, la majoration du théorème 4.1.1 est une égalité, excepté dans le cas trivial $R' \xrightarrow{\sim} R' \otimes_R K$. Une autre façon de procéder serait d'utiliser une variante de la méthode (également due à O. Gabber) exposée dans [Gabber & Orgogozo, 2008, § 6.1] et reposant sur une « astuce quadratique ». Rappelons pour terminer que la minoration « limite » $\text{cd}_\ell(K) \geq \dim(R)$ est élémentaire : on procède par spécialisations successives en codimension 1 (voir [SGA 4 X 2.4]).

4.2. **Démonstration.** On procède par récurrence sur $d' = \dim(R')$ et l'on se ramène au cas excellent.

4.2.1. Notons $X = \text{Spec}(R)$, $Y = \text{Spec}(R')$ et respectivement X^* et Y^* les spectres époutés. Considérons l'ouvert $Y_* = Y \times_X X^*$ de Y^* , $V = \text{Spec}(R' \otimes_R K)$ la fibre générique de $Y \rightarrow X$ et enfin j le morphisme $V \hookrightarrow Y^*$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que pour chaque faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -modules sur V , le complexe $\Phi_{\mathcal{F}} = Rj_*\mathcal{F}$ appartient à $D^{\leq \text{cod}}(Y^*)$, où cod est la fonction de perversité $y \mapsto \dim \mathcal{O}_{Y,y}$. (Ceci est encore vrai avec $y \mapsto d' - \dim \overline{\{y\}}$.) On veut montrer que $H^r(V, \mathcal{F}) = H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$ est nul pour $r > d'$. Fixons un tel r et une classe $c \in H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$.

4.2.2. On suppose $d \geq 2$, et on choisit un système de paramètres $x_1, \dots, x_d$ pour l'anneau strictement local R . Soit $Z = Y \setminus \{t_1, \dots, t_{d-1}\}$ le « gonflement étale », hensélisé strict de $\mathbf{A}_Y^{d-1} = Y[t_1, \dots, t_{d-1}]$ en un point générique géométrique de la fibre spéciale sur Y . L'« hyperplan » $H = V(t_1 x_1 + \dots + t_{d-1} x_{d-1} + x_d)$ de Z est de codimension 1, essentiellement lisse au-dessus de Y_* . Considérons le triangle distingué

$$R\Gamma_{H_*}(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow R\Gamma(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow R\Gamma(Z_* - H_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{+1},$$

où l'on note Z_* le produit fibré $Z \times_Y Y_*$ et, abusivement, $\Phi_{\mathcal{F}}$ ses diverses images inverses. Soit i l'immersion fermée $H_* \hookrightarrow Z_*$, où $H_* = H \times_Z Z_*$. Le morphisme $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \rightarrow i^! \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(1)[2]$ de complexes sur H_* est un isomorphisme par pureté relative. On montre par dévissage qu'il en est de même de la flèche $\Phi_{\mathcal{F}|H_*} \rightarrow i^! \Phi_{\mathcal{F}|Z_*}(1)[2]$ obtenue par tensorisation à partir de la précédente. On utilise ici le fait que la restriction de $\Phi_{\mathcal{F}}$ à Z_* provient de la base Y_* . On en tire le morceau de suite exacte :

$$H^{r-2}(H_*, \Phi_{\mathcal{F}})(-1) \rightarrow H^r(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^r(Z_* - H_*, \Phi_{\mathcal{F}}).$$

Notons que $Z_* - H_* = Z - H$ car H contient la fibre spéciale de $Z \rightarrow X$. Soient $\hat{Y}$ le complété ($m_{R'}$ -adique) de Y et $\tilde{Z}$ un hensélisé strict du produit fibré $Z \times_Y \hat{Y}$. Notons que le morphisme $\tilde{Z} \rightarrow Z$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux induisant un isomorphisme sur la complétion le long de la fibre spéciale sur Y . Il résulte donc du théorème de comparaison de Fujiwara-Gabber ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]) que le morphisme $H^r(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^r(\tilde{Z}_*, \Phi_{\mathcal{F}})$ est un *isomorphisme* pour chaque r . Il en est de même de $H^{r-2}(H_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^{r-2}(\tilde{H}_*, \Phi_{\mathcal{F}})$, où $\tilde{H}_* = H_* \times_{Z_*} \tilde{Z}_*$. Le schéma $\tilde{Z}_* - \tilde{H}_*$ est un ouvert affine, qui coïncide avec $\tilde{Z} - \tilde{H}$, d'un schéma strictement local essentiellement de type fini sur le schéma local noethérien complet $\hat{Y}$. Comme l'appartenance de $\Phi_{\mathcal{F}}$ à $D^{\leq \text{cod}}$ est préservée par complétion, il résulte du théorème de Lefschetz affine (XV-1.2.2), dans le cas excellent, que le groupe de cohomologie $H^r(\tilde{Z}_* - \tilde{H}_*, \Phi_{\mathcal{F}})$ est nul pour chaque $r > \dim(Z) = \dim(Y) = d'$. En conséquence, le morphisme $H^r(\tilde{Z}_*, \Phi) \rightarrow H^r(\tilde{Z}_* - \tilde{H}_*, \Phi)$ est nul pour les mêmes r . De ce fait, des théorèmes de comparaisons susmentionnés et de la compatibilité du morphisme de Gysin à la complétion, il résulte formellement que toute classe $c \in H^r(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}})$ provient d'une classe dans $H^{r-2}(H_*, \Phi_{\mathcal{F}})(-1)$ et est donc tuée par restriction à $Z_* - H_*$.

4.2.3. Il existe donc un voisinage étale $e : W \rightarrow \mathbf{A}_Y^{d-1}$ dont l'image rencontre la fibre spéciale sur Y tel que la classe $c \in H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$ soit tuée par restriction à $W - H_W$. Notons k' le corps résiduel de Y , et k celui de X . L'ensemble k^{d-1} est dense dans $\mathbf{A}_{k'}^{d-1}$, car k est infini. Il en résulte qu'il existe une section $\sigma : Y \rightarrow \mathbf{A}_Y^{d-1}$, correspondant à des spécialisations des t_i à valeurs dans R , telle que W_σ ait une fibre spéciale sur Y non vide. Le schéma Y étant strictement local, on relève cette section en $Y \rightarrow W_\sigma \rightarrow W$. La classe de cohomologie c est donc nulle sur $Y - H_Y$, où H_Y est maintenant une hypersurface d'équation $x_d + t_1 x_1 + \dots + t_{d-1} x_{d-1}$ à coefficients t_i dans R . Cet ouvert affine $Y - H_Y$ contient la fibre générique $V = Y \otimes_R K$ car l'élément $x_d + t_1 x_1 + \dots + t_{d-1} x_{d-1} \in R$ est non nul, les x_i constituant un système de paramètres de R . Finalement la restriction de $c \in H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$ à $H^r(V, \Phi_{\mathcal{F}}) = H^r(V, \mathcal{F})$, qui est la classe dont on est parti, est nulle. CQFD.

5. Majoration : amélioration

5.1. Énoncé.

5.1.1. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces topologiques sobres non vides. On note

$$\dim.\text{cat}(f) = \sup \{n \in \mathbf{N} : \exists y_0 \rightsquigarrow y_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow y_n, f(y_0) \neq f(y_1) \neq \dots \neq f(y_n)\} \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$$

la **dimension caténaire** de f , où chaque $y_i \rightsquigarrow y_{i+1}$ est une spécialisation.

5.1.2. Par construction, $\dim.\text{cat}(f : Y \rightarrow X)$ est majorée par les dimensions de X et de Y avec égalité par exemple lorsque f est l'identité. Plus généralement, lorsque f est un morphisme *générissant* ([ÉGA I' 3.9.2]) — comme c'est le cas d'un morphisme plat de schémas — la dimension caténaire coïncide avec la dimension de l'image.

REMARQUE 5.1.3. Si f est un morphisme dominant essentiellement de type fini (c'est-à-dire Zariski-localement comme en 4.1.2) entre schémas noëthériens intègres, on peut montrer que la dimension caténaire de f est la dimension de l'image d'une platification de f .

THÉORÈME 5.1.4. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme essentiellement de type fini entre schémas noëthériens strictement locaux et soit V un ouvert affine de Y . Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X , on a la majoration

$$\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \max(0, \dim.\mathrm{cat}(f) - 1).$$

COROLLAIRE 5.1.5. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme essentiellement de type fini entre schémas noëthériens strictement locaux, où $\dim(X) \geq 1$, et soit V un ouvert affine de Y . Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X , on a la majoration

$$\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \dim(X) - 1.$$

COROLLAIRE 5.1.6. Soit $d \geq 1$ un entier et soit n un entier dans l'intervalle fermé $[d, 2d - 1]$. Il existe un schéma noëthérien strictement local X , régulier de dimension d , et un ouvert affine U de ce schéma tel pour tout nombre premier ℓ inversible sur X on ait l'égalité

$$\mathrm{cd}_\ell(U) = n.$$

Démonstration du corollaire 5.1.6. Il suffit de montrer que pour tout entier $d \geq 1$, et tout entier $r \geq 0$, il existe un schéma noëthérien strictement local régulier Y de dimension $d + r$ et un ouvert affine V de Y de ℓ -dimension cohomologique égale à $2d + r - 1$. Soient X et f comme en 3.2.5 : l'ouvert affine $U = X[f^{-1}]$ est de dimension d , ℓ -dimension cohomologique $\delta = 2d - 1$. Plus précisément, il résulte de la démonstration qu'il existe une classe non nulle dans $H^\delta(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Considérons maintenant $Y = X[T]_{(0)}$ un hensélisé strict de la droite affine sur X en l'origine de la fibre spéciale, $g = fT \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ et V l'ouvert affine $Y[g^{-1}]$. On a $\dim(Y) = d + 1$. Par pureté cohomologique, on vérifie immédiatement que le groupe de cohomologie $H^{d+1}(V, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est également non nul. Par récurrence, on obtient une paire (Y, V) comme ci-dessus telle que $\mathrm{cd}_\ell(V) \geq 2d + r - 1$. D'après le corollaire précédent, on a également la majoration $\mathrm{cd}_\ell(V) \leq 2d + r - 1$, d'où l'égalité. $\square$

5.2. Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension caténaire de f .

5.2.1. $\dim.\mathrm{cat}(f) = 0$. Cette égalité se produit si et seulement si Y est contenu dans la fibre spéciale. Le théorème est donc connu dans ce cas : on est sur un corps donc dans une situation excellente.

5.2.2. $\dim.\mathrm{cat}(f) = 1$. On peut supposer les schémas X et Y réduits. Quitte à procéder par récurrence sur la dimension de Y , on peut également supposer Y irréductible : si Y est la réunion de deux fermés stricts Y_1 et Y_2 , considérer par exemple le morphisme $\pi : Y_1 \amalg Y_2 \rightarrow Y$ et la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \pi^*\mathcal{F} \rightarrow i_*\mathcal{H} \rightarrow 0$, où i est l'immersion fermée $Y_1 \cap Y_2 \hookrightarrow Y$ et $\mathcal{H}$ un faisceau sur cette intersection. Quitte à remplacer X par l'adhérence de l'image de f , on peut également supposer la base intègre et f dominant. Soit η (resp. s) le point générique (resp. fermé) de X et η' (resp. s') le point générique (resp. fermé) de Y . Comme tout point y de Y s'insère dans une suite de spécialisations $\eta' \rightsquigarrow y \rightsquigarrow s'$, d'image $\eta \rightsquigarrow f(y) \rightsquigarrow s$, il résulte de l'hypothèse $\dim.\mathrm{cat}(f) = 1$ que $f(y) = \eta$ ou $f(y) = s$. Soient $\widehat{X}$ le complété de X et $\widetilde{Y}$ un hensélisé strict du produit fibré $Y \times_X \widehat{X}$. C'est un schéma strictement local de dimension $\dim(Y)$ et *excellent* car essentiellement de type fini sur le schéma local noëthérien complet — donc excellent — $\widehat{X}$. On note $\widetilde{V}$ l'ouvert $V \times_Y \widetilde{Y}$. Il résulte de [SGA 4½ [Th. finitude] 1.9] qu'au-dessus de η , et donc au-dessus de $X - \{s\}$, la formation des images directes par $j : V \hookrightarrow Y$ commute au changement de base $\widetilde{Y} \rightarrow Y$. En d'autres termes, si $V' = V \cup (Y - Y_s)$ et j' désigne l'immersion intermédiaire $V \hookrightarrow V'$, la formation de Rj'_* commute à $\widetilde{Y} \rightarrow Y$. Il en est de même pour $j'' : V' \rightarrow Y$ d'après le théorème de comparaison à la complétion de Fujiwara-Gabber ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]). On utilise ici le fait que si F est un fermé de Y inclus dans la fibre spéciale alors les complétés de Y le long de F et celui de l'hensélisé de $\widetilde{Y}$ (en le point correspondant au point fermé de Y) sont naturellement isomorphes. Finalement, le foncteur $R\Gamma(V) = R\Gamma(Y) \circ Rj_*$ s'identifie au foncteur $R\Gamma(\widetilde{Y}) \circ Rj'_* = R\Gamma(\widetilde{V})$, appliqué à l'image inverse. Ainsi on a l'inégalité $\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \mathrm{cd}_\ell(\widetilde{V})$. Le schéma $\widetilde{Y}$ est quasi-excellent, le terme de droite est donc justiciable du théorème de Lefschetz affine. L'inégalité $\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y)$ résulte alors de l'égalité $\dim(Y) = \dim(\widetilde{Y})$.

REMARQUE 5.2.3. Lorsque $\dim(X) = 1$, on a vu en XIII-2.3 que le théorème peut également se démontrer par normalisation.

5.2.4. $\dim.\text{cat}(f) > 1$. Notons à nouveau j l'immersion ouverte $V \hookrightarrow Y$. Par restriction à la fibre générique, on a un isomorphisme $R\Gamma(V_\eta, \mathcal{F}) = R\Gamma(Y_\eta, (Rj_*\mathcal{F})|_{Y_\eta})$. Si y est un point géométrique de Y localisé en Y_η , la fibre $(R^q j_*\mathcal{F})_y$ est nulle dès lors que $q > \dim(\mathcal{O}_{Y_\eta, y})$. Cela résulte par passage à la limite du théorème d'Artin pour les schémas affines de type fini sur un corps et du fait trivial que $Y_{(y)} \rightarrow Y$ se factorise à travers Y_η . Soient $q \geq 0$ un entier, $\mathcal{G}$ un sous-faisceau constructible de $(R^q j_*\mathcal{F})|_{Y_\eta}$ et S l'adhérence dans Y de son support. D'après ce qui précède, on a la majoration $\text{codim}(S_\eta, Y_\eta) \geq q$. Il en résulte que $\text{codim}(S, Y) \geq q$, et ce sans hypothèse de caténarité sur les schémas. De la suite spectrale de composition des foncteurs et du théorème 4.1.1, on déduit que le groupe de cohomologie $H^n(V_\eta, \mathcal{F})$ est nul lorsque $n > \dim(Y)$.

Considérons la flèche d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow k_* k^* \mathcal{F}$, où k est l'immersion $V_\eta \hookrightarrow V$, et $\mathcal{K}$ son noyau. Par construction, la restriction de $\mathcal{K}$ à V_η est nulle. La dimension de l'adhérence du support de $\mathcal{K}$ est donc au plus $\dim(Y) - 1$. Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que le résultat d'annulation désiré est connu pour $\mathcal{K}$. Procédant de même pour le conoyau de l'adjonction précédente, on se ramène à démontrer l'annulation du groupe $H^p(V, R^0 k_* k^* \mathcal{F})$ pour $p \geq \dim(Y) + \dim.\text{cat}(f) (> \dim(Y))$. Compte tenu du résultat d'annulation précédemment établi pour $R\Gamma(V_\eta, \mathcal{F}) = R\Gamma(V, Rk_* k^* \mathcal{F})$ et de la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = H^p(V, R^q k_* k^* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(V_\eta, \mathcal{F})$, il suffit de montrer que pour chaque tel q , les groupes $H^{p-q-1}(V, R^q k_* k^* \mathcal{F})$ sont nuls pour $q > 0$. Fixons q . Soit y un point géométrique de Y tel que la fibre de $R^q k_* k^* \mathcal{F}$ en y soit non nulle et x le point image de y dans X . Le schéma $\eta \times_X X_{(x)}$ se décompose en un coproduit de spectres de corps η_α ; de même, le produit fibré $Y_{(y)} \times_X \eta$, dont on considère la cohomologie, est isomorphe au coproduit des $Y_{(y)} \times_{X_{(x)}} \eta_\alpha$. D'après *op. cit.* (4.1.1), ces derniers n'ont de cohomologie qu'en degré $q \leq \dim Y_{(y)} \leq \dim(Y) - \dim\{\overline{y}\}$. Il en résulte que la dimension du support de chacun des sous-faisceaux constructibles de $R^q k_* k^* \mathcal{F}$ est au plus $\dim(Y) - q$. De plus, la dimension caténaire du morphisme f restreint à un tel support est au plus $\dim.\text{cat}(f) - 1$. Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que les groupes $H^{p-q-1}(V, R^q k_* k^* \mathcal{F})$ sont nuls lorsque $p - q - 1 \geq (\dim(Y) - q) + (\dim.\text{cat}(f) - 1)$. CQFD.

6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre épointé : minoration

THÉORÈME 6.1. Soient X un schéma intègre strictement local noethérien de dimension d et Ω un ouvert non vide du spectre épointé. Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X , on a

$$\text{cd}_\ell(\Omega) \geq d.$$

La première démonstration occupe les deux paragraphes suivants.

6.2. Construction combinatoire locale.

6.2.1. *Notations.* Soit X un schéma strictement local noethérien régulier de dimension $d \geq 2$ et soit $t_1, \dots, t_{d-1}, t_d$ un système régulier de paramètres. Pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, on note également π l'élément t_d . Pour chaque $1 \leq i \leq d-1$, on note H_i le diviseur régulier $V(t_i)$; pour $i = d$, on pose $H_d = V(t_1 + \dots + t_{d-1} - \pi)$. Enfin on note U l'ouvert affine $X[\pi^{-1}]$, k l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ et j l'immersion ouverte $U = \bigcup_{i=1}^d H_i \hookrightarrow U$. On fixe un nombre premier ℓ inversible sur X et on pose $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

6.2.2. Soit P une partie de $\{1, \dots, d\}$. Notons H_P l'intersection $\bigcap_{p \in P} H_p$, et désignons par H'_P l'intersection $H_P \cap U$ — ouverte dans H_P et fermée dans U —, et k_P l'immersion ouverte $H'_P \hookrightarrow H_P$. Pour chaque entier q , le groupe de cohomologie $H^q(U, \Lambda_{H'_P})$ est isomorphe au groupe $H^q(H'_P, \Lambda)$. Comme $H_P - H'_P$ est le diviseur régulier défini par π dans H_P , il résulte de la pureté cohomologique que $H^q(U, \Lambda_{H'_P})$ est nul pour $q > 1$, isomorphe à Λ pour $q = 0$ et de rang 1, engendré par la classe de Kummer de π pour $q = 1$. Ceci vaut également pour $P = \emptyset$, avec la convention évidente que $H_\emptyset = X$ et $H'_\emptyset = U$.

6.2.3. Considérons maintenant le quasi-isomorphisme

$$j_! \Lambda \xrightarrow{\sim} \left(\Lambda \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq d} \Lambda_{H'_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{|P|=d-1} \Lambda_{H'_P} \rightarrow 0 \right)$$

de faisceaux de Λ -modules sur U , où le premier terme du complexe de droite est placé en degré 0. (On utilise ici le fait que $H'_P = \emptyset$ si $|P| = d$ car H_P est alors le point fermé de X .) Les différentielles sont des sommes, avec des signes, de flèches de restriction. À cette résolution est associée — via la filtration « stupide » — la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(U, \bigoplus_{|P|=p} \Lambda_{H'_P}) \Rightarrow H^{p+q}(U, j_! \Lambda).$$

D'après les observations du paragraphe précédent, toute classe de $E_1^{d-1,1} = \bigoplus_{|P|=d-1} H^1(U, \Lambda_{H'_P})$ n'appartenant pas à l'image de $E_1^{d-2,1}$ survit dans l'aboutissement $H^d(U, j_! \Lambda)$.

6.2.4. De même que le faisceau $j_! \Lambda$ est isomorphe au produit tensoriel

$$(U - H'_1 \hookrightarrow U)_! \Lambda \otimes \cdots \otimes (U - H'_d \hookrightarrow U)_! \Lambda,$$

le complexe quasi-isomorphe à $j_! \Lambda$ ci-dessus est isomorphe au produit tensoriel des complexes $(\Lambda \rightarrow \Lambda_{H'_i})$, $1 \leq i \leq d$, où la flèche est l'unité de l'adjonction, isomorphes respectivement aux $(U - H'_i \hookrightarrow U)_! \Lambda$. De cette observation, jointe à (6.2.2), on en déduit que le complexe $E_1^{\bullet,1}$ est quasi-isomorphe à la troncation naïve $\sigma_{\leq d-1}((\Lambda \xrightarrow{\text{Id}} \Lambda)^{\otimes d})$ obtenue en remplaçant le d -ième terme, isomorphe à Λ , par zéro. Il est bien connu que ce complexe (« de Koszul ») produit tensoriel est acyclique (avant troncation), cf. par exemple [ÉGA III₁ § 1.1]. (L'exactitude résulte également du quasi-isomorphisme ci-dessus, appliqué à d'autres fermés.) En particulier, l'image de la différentielle $E_1^{d-2,1} \rightarrow E_1^{d-1,1}$ est naturellement le noyau d'une forme linéaire non nulle (explicite) sur $E_1^{d-1,1}$ et n'est donc pas $E_1^{d-1,1}$ tout entier. Il existe donc des sommes directes de classes de Kummer de π qui survivent dans $H^d(U, j_! \Lambda)$.

6.3. Éclatement et normalisation partielle.

6.3.1. Soit maintenant $X = \text{Spec}(R)$ un schéma strictement local noethérien intègre de dimension $d \geq 2$, de point fermé x , et soit Ω un ouvert non vide strict de X . Nous allons montrer qu'après éclatement et « normalisation partielle » l'ouvert Ω est — localement et « modulo des nilpotents » — un schéma régulier du type du schéma U considéré ci-dessus. Ceci permet de produire une classe de cohomologie non nulle de degré d sur Ω .

6.3.2. Soit $Y = \widehat{\text{Écl}}_x(X)$. Notons j l'immersion ouverte de $Y - Y_x$ dans Y . On désigne par $\widehat{X}$ le complété du schéma local X , par Y' le produit fibré $Y \times_X \widehat{X}$ et par $Y'_{\text{réd}}$ la réduction de Y' . Notons que le schéma Y' est *excellent* car $\widehat{X}$ l'est.

6.3.3. Soit $\mathcal{O}_Y^{\circledast}$ la normalisation de $\mathcal{O}_Y$ dans $j_* \mathcal{O}_{Y-Y_x}$. On définit de même $\mathcal{O}_{Y'}^{\circledast}$ et $\mathcal{O}_{Y'_{\text{réd}}}^{\circledast}$. La $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbre $\mathcal{O}_Y^{\circledast}$ est colimite (filtrante) de ses sous- $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbres finies $\mathcal{A}_\lambda$.

PROPOSITION 6.3.4. *Le foncteur envoyant une sous- $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbre $\mathcal{B}$ de $j_* \mathcal{O}_{Y-Y_x}$ sur l'image de $(Y' \rightarrow Y)^* \mathcal{B}$ par l'adjonction $(Y' \rightarrow Y)^* j_* \mathcal{O}_{Y-Y_x} \rightarrow j'_* \mathcal{O}_{Y'-Y_x}$ induit une bijection entre les sous- $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbres finies de $j_* \mathcal{O}_{Y-Y_x}$ et les sous- $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbres finies de $j'_* \mathcal{O}_{Y'-Y_x}$. De plus, les algèbres $\mathcal{O}_Y^{\circledast}$ et $\mathcal{O}_{Y'}^{\circledast}$ se correspondent par ce foncteur.*

Démonstration. On se ramène au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ et $Y_x = V(t)$. Il suffit de montrer que si A est une R -algèbre intègre et $A' = A \otimes_R \widehat{R}$ alors le morphisme $A[t^{-1}]/A \rightarrow A'[t^{-1}]/A'$ est un isomorphisme et que les normalisations se correspondent. Notons que les anneaux A et A' ont même complétion t -adique. Le premier point résulte alors du fait que si M est un A -module dont chaque élément est tué par une puissance de t , on a $M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A A'$. Enfin, soit $(f'/t^r)^d + a'_1(f'/t^r)^{d-1} + \cdots + a'_d = 0$ une relation de dépendance intégrale où f' et les a'_i appartiennent à A' . Soit N un entier assez grand. Écrivons $f' = f + t^N g'$, $a'_i = a_i + t^N b'_i$ où f et les a_i appartiennent à A . La relation précédente devient $(f/t^r)^d + a_1(f/t^r)^{d-1} + \cdots + a_d \in A' \cap A[t^{-1}] = A$. Il en résulte que l'élément $f'/t^r = f/t^r + t^{N-r} g'$ est, modulo un élément de A' , dans l'image de $A^{\circledast}$. $\square$

6.3.5. Par excellence, l'algèbre $\mathcal{O}_{Y'_{\text{red}}}^{\circ}$ est finie sur $\mathcal{O}_{Y'_{\text{red}}}$. L'anneau $\mathcal{O}_{Y'_{\text{red}}}^{\circ}$ en est l'« image inverse » par la surjection naturelle. De ces observations et de la proposition précédente, on déduit qu'il existe un indice λ tel que, si $Z = \text{Spec}(\mathcal{A}_{\lambda})$ et $Z' = Z_{\widehat{X}}$, alors Z'_{red} est intégralement clos dans Z'_{red} privé de l'image inverse de Y_X . Notons que Z et Y sont isomorphes hors de Y_X .

6.3.6. Soit E une composante de dimension $d - 1$ de Y_X et soit e un point maximal de E'_{red} dans Z'_{red} . Le localisé en e est un anneau de valuation discrète : c'est un anneau local réduit de dimension 1, intégralement clos dans le complémentaire du point fermé. Par excellence de Z' il existe un ouvert dense de E'_{red} le long duquel Z'_{red} est régulier. On peut également supposer que E'_{red} est régulier sur cet ouvert. (Pour ce dernier point il suffit de constater que E'_{red} est de type fini sur un corps.) Soit U'_{red} un ouvert de Z'_{red} induisant l'ouvert de E'_{red} ci-dessus et U un ouvert de Z induisant l'ouvert correspondant de E . (Le morphisme $Z' \rightarrow Z$ est un isomorphisme sur E .) On a $U' \subset U \times_Z Z'$. Ci-dessous, on s'autorise à rétrécir les ouverts U et U' , sous réserve qu'ils contiennent tous les points maximaux de E . On suppose de plus que $U \cap Y_X = U \cap E$.

6.3.7. On note t une équation de E dans U et π une équation de E'_{red} dans U'_{red} de sorte qu'il existe une unité u et un entier e tels que l'on ait l'égalité $t = u \times \pi^e$ sur U'_{red} . L'existence d'un relèvement montre que l'on peut supposer l'équation π définie sur U' . Vérifions que l'on peut également supposer π défini sur U . Les schémas Z' et Z ayant même complétion t -adique, il suffit d'observer que si a est une fonction sur U' , on a l'égalité d'idéaux $(\pi) = (\pi + at^2)$, du moins lorsque $1 + ua\pi^{2e-1} \in G_m(U')$, ce que l'on peut supposer quitte à restreindre U' .

6.3.8. Soit Ω un ouvert non vide de $X - \{x\}$ (cf. 6.3.1). On note également Ω ses images inverses dans Y et Z ; elles lui sont isomorphes. Sur un voisinage ouvert des points maximaux de E , l'ouvert Ω coïncide avec le complémentaire de E . Génériquement sur E , on a donc $\Omega = Z[\pi^{-1}]$. Soit z un point fermé de Z appartenant à un tel ouvert ainsi qu'à l'ouvert U . Soient $t_1, \dots, t_{d-1}$ des fonctions de $\mathcal{O}_{Z'_{\text{red}}, z}$ constituant, avec π , un système régulier de paramètres. On peut supposer qu'elles s'étendent à U'_{red} . Utilisant à nouveau le fait que le morphisme $Z' \rightarrow Z$ est un isomorphisme au-dessus de E , on peut également supposer qu'elles proviennent de U , quitte à les changer modulo π . Pour chaque $i < d$, considérons l'adhérence schématique $H_i \subset Z$ de l'hypersurface $V(t_i)$ dans U et H_d l'adhérence schématique de $V(t_1 + \dots + t_{d-1} - \pi)$. On note $H'_i = H_i \cap \Omega$.

6.3.9. *Stratégie.* On va construire une classe non nulle dans le groupe de cohomologie $H^d(\Omega, j_! \Lambda_{\Omega - \bigcup_1^d H'_i})$, où j est l'immersion ouverte $\Omega - \bigcup_1^d H'_i \hookrightarrow \Omega$ et $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec n inversible sur X . *Localement*, ces groupes de cohomologie sont invariants par passage à la complétion de la base X (et bien sûr au schéma réduit) de sorte que l'on va pouvoir utiliser les calculs de 6.2. Il faut cependant prendre garde ici au fait que l'intersection $\bigcap_1^d H'_i$ n'est pas nécessairement vide, contrairement au cas local précédemment étudié : l'analogue du complexe 6.2.3 a donc un terme de plus (en degré d). Malgré tout, on va relever à Ω une classe de degré d « locale » — c'est-à-dire du schéma $\Omega \times_Z Z_{(\bar{z})}$ (ou plutôt l'analogue sur Z'_{red}) — à coefficients dans $j_! \Lambda$.

6.3.10. Considérons à nouveau la suite spectrale du 6.2.3 :

$$E_1^{p,q} = H^q(\Omega, \Lambda_p) \Rightarrow H^{p+q}(\Omega, j_! \Lambda),$$

où l'on note Λ_p la somme directe des $\Lambda_{H'_p}$ avec $|P| = p$. Pour chaque $P \subset [1, d]$ de cardinal $d - 1$, l'intersection H_P des hypersurfaces correspondantes de Z est propre sur X . Par construction, elle est aussi *quasi-finie* au voisinage du point fermé z . Il en résulte par le théorème de changement de base propre pour l'ensemble des composantes connexes (ou le théorème principal de Zariski) — d'après lequel sa décomposition en composantes connexes se lit sur la fibre spéciale — que chaque H_P se décompose en le coproduit d'un schéma local fini sur X et d'un schéma ne rencontrant pas z . Ainsi, $H^1(\Omega, \Lambda_{d-1})$ a un facteur direct isomorphe à $H^1(Z_{(\bar{z})}[\pi^{-1}], \Lambda_{d-1})$ et, par comparaison à la complétion, à $H^1(Z'_{\text{red}(z)}[\pi^{-1}], \Lambda_{d-1})$. De plus, la différentielle $E_1^{d-1,1} \rightarrow E_1^{d,1}$ envoie ce facteur sur 0 dans $H^1(\Omega, \Lambda_d)$ car l'intersection de $H_{[1,d]}$ avec Ω est vide au voisinage de z . En effet, si $t_1 = t_2 = \dots = t_{d-1} = t_1 + \dots + t_{d-1} - \pi = 0$ alors $\pi = 0$; d'autre part, au voisinage de z , $\Omega = Z[\pi^{-1}]$. Ainsi, toute classe de cohomologie du facteur direct « local » induit une classe dans $H^d(\Omega, j_! \Lambda)$ qui relève la classe

correspondante dans $H^d(Z'_{\text{red}(Z)}[\pi^{-1}], j_! \Lambda)$. On a vu (6.2.4) qu'il existe de telles classes non nulles. En conséquence, $H^d(\Omega, j_! \Lambda) \neq 0$ et finalement $\text{cd}_n(\Omega) \geq d$. CQFD.

6.4. Joints d'anneaux henséliens et dimension cohomologique.

6.4.1. *Joints*. Commençons par énoncer une variante du résultat principal de [Artin, 1971], auquel nous nous ramenons.

PROPOSITION 6.4.1.1. *Soient A un anneau, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux idéaux premiers et C une composante du produit tensoriel $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_A A_{\mathfrak{q}}^h$. L'anneau C est local hensélien. De plus, si ni $A_{\mathfrak{p}}^h \rightarrow C$ ni $A_{\mathfrak{q}}^h \rightarrow C$ ne sont locaux, il est strictement hensélien.*

Ici, $A_{\mathfrak{p}}^h$ désigne l'hensélisé de A en $\mathfrak{p}$. Par « composante connexe », on entend — comme en *op. cit.*, §3 — l'anneau de fonctions sur une composante connexe du spectre. Notons que le premier énoncé n'est mis que pour mémoire (*op. cit.*, 3.4 (i)) ; le second généralise *loc. cit.* (ii) car si $A_{\mathfrak{p}}^h \rightarrow C$ est local, on a l'inclusion $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ (et de même pour $\mathfrak{q}$, *mutatis mutandis*).

COROLLAIRE 6.4.1.2. *Soient A un anneau et $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ deux idéaux premiers. Si $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$, toute composante connexe du produit tensoriel $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_A A_{\mathfrak{q}}^h$ est strictement hensélienne.*

Ici, $A_{\mathfrak{q}}^h$ désigne un hensélisé strict de A en $\mathfrak{q}$.

Démonstration du corollaire. Soit C' une composante du produit tensoriel $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_A A_{\mathfrak{q}}^h$ et C la composante correspondante de $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_A A_{\mathfrak{q}}^h$. L'anneau C est local hensélien ; le morphisme $C \rightarrow C'$ étant ind-fini étale, l'anneau C' est également local hensélien. Par hypothèse, le morphisme $A_{\mathfrak{p}}^h \rightarrow C$ n'est pas local. Deux cas se présentent. Si $A_{\mathfrak{q}}^h \rightarrow C$ n'est pas local non plus, l'anneau C est (local) *strictement* hensélien et il en est de même de C' . Si $A_{\mathfrak{q}}^h \rightarrow C$ est local, il en est de même du morphisme ind-étale $A_{\mathfrak{q}}^h \rightarrow C'$. Les corps résiduels de $A_{\mathfrak{q}}^h$ et C' sont donc isomorphes. En particulier, l'anneau hensélien C' est *strictement* hensélien. $\square$

Démonstration de la proposition. Écrivons A comme un quotient d'un anneau intègre normal A' et notons encore $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers de A' correspondant à ceux de A . Pour toute composante connexe C' de $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_{A'} A_{\mathfrak{q}}^h$ — nécessairement locale hensélienne —, le quotient $C' \otimes_{A'} A$ est soit nul soit local hensélien. Les composantes connexes de $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_A A_{\mathfrak{q}}^h$ sont exactement les quotients locaux henséliens ainsi obtenus. Ceci nous permet de supposer A intègre normal. (On pourrait également supposer A de type fini sur $\mathbb{Z}$; cf. *op. cit.*, démonstration du théorème 3.4.) Comme dans *op. cit.*, 2.1, on peut choisir une clôture algébrique $\bar{K}$ de $K = \text{Frac}(A)$ et plonger nos anneaux dans un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{K} & & \\
 & & | & & \\
 & & C & & \\
 & \swarrow & \cup & \searrow & \\
 \bar{A}_1 & \subset & A_{\mathfrak{p}}^h & \bar{A} & A_{\mathfrak{q}}^h \supset \bar{A}_2 \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

où C est le sous-anneau de $\bar{K}$ engendré par $A_{\mathfrak{p}}^h$ et $A_{\mathfrak{q}}^h$ — c'est le « joint », noté $[A_{\mathfrak{p}}^h, A_{\mathfrak{q}}^h]$, de *op. cit.* —, et $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ et $\bar{A}$ sont les clôtures intégrales de A dans les corps de fractions de, respectivement, $A_{\mathfrak{p}}^h, A_{\mathfrak{q}}^h$ et C . Notons que l'anneau C est normal : c'est une composante de la A -algèbre ind-étale $A_{\mathfrak{p}}^h \otimes_A A_{\mathfrak{q}}^h$. D'autre part, l'anneau $A_{\mathfrak{p}}^h$ est un localisé (Zariski) de $\bar{A}_1$ en un idéal premier ; cet idéal premier admet — par la propriété de Hensel — un unique relèvement en un idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ de C . De même pour $\mathfrak{q}$. L'anneau C est aussi le joint des anneaux henséliens $\bar{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ et $\bar{A}_{\bar{\mathfrak{q}}}$. Rappelons que, par hypothèse, aucun des morphismes $A_{\mathfrak{p}}^h \rightarrow C$ et $A_{\mathfrak{q}}^h \rightarrow C$ n'est local ; il en est donc de même de $\bar{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} \rightarrow C$ et $\bar{A}_{\bar{\mathfrak{q}}} \rightarrow C$ et, en

particulier, $\bar{p} \not\subset \bar{q}$ et $\bar{q} \not\subset \bar{p}$. Ces réductions étant faites, le fait que C soit strictement hensélien résulte de [Artin, 1971, théorèmes 2.2 et 2.5]. $\square$

6.4.2. *Comparaison à la cohomologie d'un corps discrètement valué hensélien.* Voyons maintenant une conséquence cohomologique de la proposition précédente.

Soit X un schéma tel que toute paire de points appartienne à un ouvert affine. Soit $x \in X$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit (local) noëthérien intègre de dimension 1 et enfin $\Omega \subset X$ un ouvert tel que $\Omega \cap \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ soit le point générique $\text{Spec}(K)$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Notons enfin K^h l'anneau total des fractions $\mathcal{O}_{X,x}^h \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$ de l'hensélisé $\mathcal{O}_{X,x}^h$ et ε le morphisme $\text{Spec}(K^h) \rightarrow \Omega$.

PROPOSITION 6.4.2.1. *Pour tout entier $j > 0$, on a $R^j \varepsilon_* = 0$. Ainsi, pour tout faisceau étale abélien $\mathcal{F}$ sur $\text{Spec}(K^h)$, et tout entier $i \geq 0$, le morphisme*

$$H^i(\Omega, \varepsilon_* \mathcal{F}) \rightarrow H^i(\text{Spec } K^h, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tout nombre premier ℓ , on a la minoration $\text{cd}_\ell(\Omega) \geq \text{cd}_\ell(K^h)$.

Démonstration. Seul le résultat d'annulation est à démontrer ; il résulte immédiatement de la proposition précédente par passage aux fibres en des points géométriques de U . $\square$

Il n'est pas difficile d'en déduire une démonstration alternative du théorème 6.1 (voir aussi 4.1.4) que nous rappelons ici sous la forme d'un corollaire.

COROLLAIRE 6.4.2.2. *Soit R un anneau strictement local noëthérien intègre de corps des fractions K et soit ℓ un nombre premier inversible sur R . Pour tout ouvert non vide strict Ω de $\text{Spec}(R)$, on a la minoration*

$$\text{cd}_\ell(\Omega) \geq \dim(R).$$

Démonstration. Posons $X = \text{Spec}(R)$ et considérons, comme en § 6.3, l'éclatement Y de X en son point fermé. Soit y le point générique d'une composante irréductible de dimension $\dim(X) - 1$ de la fibre spéciale. D'après la proposition 6.4.2.1 appliquée au point y de Y et à l'ouvert Ω (vu dans Y), on a la minoration $\text{cd}_\ell(\Omega) \geq \text{cd}_\ell(K^h)$, où K^h désigne l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{Y,y}^h$. D'après le théorème de Krull-Akizuki, le normalisé de $\mathcal{O}_{Y,y}$ dans K^h est un produit fini d'anneaux de valuation discrète henséliens, de corps résiduels finis sur $\kappa(y)$. Il résulte alors de la formule $\text{cd}_\ell(\text{Frac } A) = 1 + \text{cd}_\ell(\kappa)$ — où A est un trait hensélien de corps résiduel κ de caractéristique $\neq \ell$ ([SGA 4 x 2.2.(i)]) —, et de la formule $\text{cd}_\ell(\kappa) = \deg. \text{tr.}(\kappa/k)$ — où κ est une extension de type fini d'un corps séparablement clos k de caractéristique $\neq \ell$ ([SGA 4 x 2.1]) —, que la ℓ -dimension cohomologique de K^h est $\dim(R)$. CQFD. $\square$

REMARQUES 6.4.2.3. Le même argument permet d'obtenir une nouvelle démonstration, plus simple, des résultats de [Gabber & Orgogozo, 2008, § 6.2].

Enfin, signalons que l'on peut étendre 6.4.2.2 à tout sous-ensemble non vide Ω du schéma épointé X^* qui est stable par générisation : un tel ensemble est une intersection d'ouverts et on peut définir son topos étale, par passage à la limite ([SGA 4 VI § 8]) ou bien via le topos étale d'un topos annelé [Hakim, 1972, chap. IV, § 5].

Un contre-exemple

Yves Laszlo

1. Introduction

L'exposé est destiné à construire, suivant Gabber ([**Gabber, 2001**]), un exemple d'immersion ouverte $j : U \rightarrow X$ de schémas noethériens telle que $R^1 j_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne soit pas constructible. Ceci montre que l'hypothèse de quasi-excellence du théorème de constructibilité de Gabber (**XIII-1.1.1**) est indispensable. D'un point de vue géométrique, la construction est intéressante : U est le complémentaire d'un diviseur D dans une surface régulière X mais possède une infinité de points doubles ordinaires ; en particulier, son lieu régulier n'est pas ouvert ce qui lui interdit d'être quasi-excellent. Ce diviseur est un exemple de diviseur dans une surface régulière localement à croisements normaux (au sens de de Jong) mais pas globalement (**5.5**).

2. La construction

Si K est un corps et $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on note $K[\underline{x}]$ le hensélisé à l'origine de l'anneau de polynômes $K[\underline{x}]$. On choisit un corps parfait infini k , au plus dénombrable tel que k^*/k^{*2} est infini. Par exemple, on peut prendre pour k un corps de nombres.

REMARQUE 2.1. Pour toute extension finie L/k , le groupe L^*/L^{*2} est infini. En effet, d'après la théorie de Kummer, le noyau de

$$k^*/k^{*2} \rightarrow L^*/L^{*2}$$

paramètre les extensions quadratiques intermédiaires de L/k qui sont en nombre fini car L/k est séparable.

On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k . Dans la suite, on note $\Lambda = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On commence par regarder le plan $\mathbf{A}^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ privé des courbes irréductibles ne coupant pas la droite $\Delta = \text{Spec}(k[x])$ d'équation $y = 0$. Ces courbes sont exactement les courbes irréductibles d'équation $u(1 + yg(x, y))$, $u \in k^*$. On pose donc

$$A_0 = (1 + yk[x, y])^{-1}k[x, y].$$

Le morphisme de localisation $k[x, y] \rightarrow A_0$ identifie $\text{Spec}(A_0)$ au sous-ensemble du plan $\mathbf{A}^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ cherché. Les points de $\text{Spec}(A_0)$ sont de trois sortes

- Le point générique de $\mathbf{A}^2$;
- Les points génériques des courbes irréductibles du plan qui rencontrent Δ ;
- Les points de $\text{Spec}(A_0)$ fermés dans $\mathbf{A}^2$ (qui sont les points fermés de Δ comme on va le voir).

Notons qu'un point générique d'une courbe C qui coupe Δ se spécialise dans $\text{Spec}(A_0)$ sur n'importe quel point fermé de $C \cap \Delta$ et donc n'est pas fermé dans $\text{Spec}(A_0)$.

Par ailleurs, un point de $\text{Specmax}(A_0)$ est donc défini par $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{k}$. Si $\bar{y}$ est non nul, étant algébrique sur k , son inverse est dans $k[\bar{y}]$ ce qui entraîne $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \text{Spec}(A_0)(\bar{k})$. L'immersion fermée

$$\text{Spec}(k[x]) = \text{Spec}(A_0/yA_0) \hookrightarrow \text{Spec}(A_0)$$

induit donc un homéomorphisme $\text{Specmax}(k[x]) \xrightarrow{\sim} \text{Specmax}(A_0)$.

Si $\xi \in \text{Specmax}(A_0)$, on note $\pi_\xi \in k[x]$ le générateur unitaire des polynômes nuls en ξ et on choisit une racine de π_ξ dans $\bar{k}$ définissant un point géométrique $\bar{\xi}$ au-dessus de ξ . On le voit comme

un élément de A_0 via le plongement tautologique $k[x] \hookrightarrow A_0$. Le couple (π_ξ, y) est un système de coordonnées locales de A_0 en ξ , i.e. on a un isomorphisme⁽ⁱ⁾

$$(2.1.1) \quad k(\xi)\{\pi_\xi, y\} \xrightarrow{\sim} A_{0,\xi}^h.$$

Comme k est dénombrable, $\text{Specmax}(k[x])$ est dénombrable. On note $[i], i \geq 0$ la suite de ses points qu'on peut voir aussi comme la suite des idéaux maximaux de A_0 . On note alors $P(i)$ l'image de $P \in k[X]$ dans $k([i])$.

Commençons par un lemme type Bertini élémentaire.

LEMME 2.2. Soit $P, Q \in k[X]$. Supposons $P' \neq 0$ ou $Q' \neq 0$ et $\text{PGCD}(P, Q) = 1$. Alors, pour tout $t \in k$ sauf un nombre fini $P + tQ$ est séparable.

Démonstration. Puisque $\text{PGCD}(P, Q) = 1$, le système linéaire (P, Q) est sans point base et définit un morphisme

$$\mathbf{A}_k^1 \xrightarrow{(P:Q)} \mathbf{P}_k^1.$$

Le point $(T : 1) \in \mathbf{P}_k^1(k(T))$ est générique de sorte que la fibre géométrique

$$F_\eta \subset \mathbf{A}_{k(T)}^1$$

a pour équation

$$P(X) - TQ(X) = 0.$$

Le polynôme en T

$$P(X) - TQ(X)$$

est primitif ($\text{PGCD}(P, Q) = 1$) et de degré 1. Il est donc irréductible dans $k[X, T] = k[T][X]$ et donc dans $k(T)[X]$. Par ailleurs, $P'(X) - TQ'(X)$ n'est pas nul. Sinon, P' serait nul et donc Q' aussi, ce qui n'est pas. Donc, le polynôme irréductible $P(X) - TQ(X) \in k(T)[X]$ est premier avec sa dérivée ce qui assure la lissité de F_η . On conclut grâce au théorème de lissité générique. $\square$

LEMME 2.3. Il existe des suites $\xi_n \in \text{Specmax}(k[X])$, $g_n \in k[X]$ telles que

- (i) les g_n sont deux à deux premiers entre eux ;
- (ii) ξ_n zéro de multiplicité 2 de g_n ;
- (iii) les autres zéros de g_n sont simples ;
- (iv) pour tout $i \leq n$, $g_n(i) \neq 0$ et

$$(g_n(i) \bmod k([i])^{*2}) \notin \mathbf{F}_2\langle (g_j(i) \bmod k([i])^{*2}), j < n \mid g_j(i) \neq 0 \rangle \subset k([i])^*/k([i])^{*2}.$$

Démonstration. Supposons les $\xi_i, g_i, i < n$ construits (condition vide si $n = 0$). Choisissons $\xi_n \in \text{Specmax}(k[X])$ différent des zéros de $g_m, m < n$ et des $[i], i \leq n$.

Pour tout $i \leq n$, choisissons un polynôme P_i tel que

$$P_i(i) \neq 0 \text{ et } (P_i(i) \bmod k([i])^{*2}) \notin \mathbf{F}_2\langle g_j(i) \mid g_j(i) \neq 0, j < n \rangle$$

ce qui est possible d'après (2.1). Posons $P_i = 1$ si $i > n$. Soit $V \subset \text{Specmax}(k[X])$ l'ensemble des zéros des $g_m, m < n$.

Choisissons alors $\tilde{g}_n$ tel que

$$\tilde{g}_n \equiv \pi_{\xi_n}^2 \bmod \pi_{\xi_n}^3 \text{ et } \tilde{g}_n \equiv P_i \bmod [i] \text{ si } i \leq n \text{ ou si } [i] \in V.$$

Par construction, $(\tilde{g}_n, \xi_n)$ satisfait toutes les propriétés requises sauf la troisième. Soit

$$P = \tilde{g}_n \pi_{\xi_n}^{-2} \text{ et } Q = \pi_{\xi_n} \prod_{j < n} \tilde{g}_j \prod_{j \leq n} \pi_{[j]}.$$

⁽ⁱ⁾On devrait plutôt dire que le morphisme $k[X, Y]_{(0,0)} \rightarrow A_{0,\xi}$ qui envoie X sur π_ξ et Y sur y induit un unique isomorphisme $k(\xi)\{\pi_\xi, y\} \xrightarrow{\sim} A_{0,\xi}^h$.

Comme Q s'annule à l'ordre 1 en ξ_n , sa dérivée n'est pas identiquement nulle de sorte que (2.2) on peut choisir $t \in k$ tel que

$$P + tQ$$

soit séparable. Par construction,

$$(g_n = \pi_{\xi_n}^2(P + tQ), \xi_n)$$

satisfait les propriétés requises dans le lemme. $\square$

On définit alors

$$A_{n+1} = A_n[z_n]/(z_n^2 - y - g_n) \text{ et } A = \text{colim } A_n.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Par construction, $\text{Spec}(A_n)$ est un schéma régulier intègre de dimension 2 fini au-dessus de $\text{Spec}(A_0)$. Comme l'extension d'anneaux intègres $A_n \hookrightarrow A$ est entière, on peut choisir un point géométrique $\bar{\xi}_{n,\infty}$ de $\text{Spec}(A)$ au dessus de ξ_n . Il définit donc des points géométriques $\bar{\xi}_n$ au-dessus de ξ_n .

Par construction, l'inclusion $A_{n+1} \hookrightarrow A$ définit un isomorphisme (cf. la note (i))

$$\bar{k}[\pi_{\xi_n}, y, z_n]/(z_n^2 - y - g_n) \xrightarrow{\sim} A_{\bar{\xi}_{n,\infty}}^{\text{hs}}$$

compatible à (2.1.1), i.e. tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{k}[\pi_{\xi_n}, y, z_n]/(z_n^2 - y - g_n) & \xrightarrow{\sim} & A_{\bar{\xi}_{n,\infty}}^{\text{hs}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{k}[\pi_{\xi_n}, y] & \xrightarrow{\sim} & A_{0, \bar{\xi}_n}^{\text{hs}} \end{array}$$

commute (rappelons que l'hensélisation stricte commute aux limites inductives filtrantes, cf. [ÉGA IV₄ 18.8.18]).

LEMME 2.4. *Le diviseur $D = V(y)$ de la surface $\text{Spec}(A)$ est intègre.*

Démonstration. Montrons que c'est déjà vrai des diviseurs D_n de $\text{Spec}(A_n)$. La fibre de $D_n \rightarrow \Delta$ au-dessus de $[0]$ est définie par les équations

$$z_i^2 = g_i(0), \quad i \leq n$$

dans $A_{k[0]}^n$. C'est le spectre d'un corps car les $g_i(0)$, $i \leq n$ sont non nuls et linéairement indépendants mod $k[[0]]^{*2}$ ce qui permet d'invoquer la théorie de Kummer. Si maintenant on avait deux composantes dans D_n , elles se projetteraient sur Δ (propreté et platitude) et donc la fibre au-dessus de $[0]$ ne serait pas réduite. $\square$

Avec ces préparatifs, on peut énoncer le résultat principal.

PROPOSITION 2.5. *Soit j l'immersion ouverte $\text{Spec}(A[1/y]) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$ et η le point générique de $D = V(y)$.*

- (i) *A est noethérien.*
- (ii) *Pour tout n , la dimension (sur Λ) de $(R^1 j_* \Lambda)_{\bar{\xi}_{n,\infty}}$ est 2, alors que la dimension de $(R^1 j_* \Lambda)_{\bar{\eta}}$ est 1.*
- (iii) *En particulier, $R^1 j_* \Lambda$ n'est pas constructible.*

REMARQUE 2.6. Notons que le diviseur (intègre donc) $D = V(y)$ de la surface régulière $\text{Spec}(A)$ admet chaque $\xi_{n,\infty}$ comme point double (ordinaire). Il n'est donc pas quasi-excellent puisque son lieu régulier (ou normal, c'est la même chose ici) n'est pas ouvert. On obtient alors un contre-exemple à la constructibilité avec un schéma ambiant régulier (mais certes pas excellent) !

Le point (iii) découle immédiatement des points (i) et (ii). Le reste de l'exposé est destiné à prouver les points (i) et (ii), seuls points restant à montrer.

3. Noéthérianité de A

On va adapter (cf. proposition 3.4) à la situation (en l'utilisant) le critère usuel de noéthérianité des limites inductives que l'on rappelle :

THÉORÈME 3.1 ([ÉGA 0_{III} 10.3.1.3]). *Soit (A_i, m_i) un système inductif filtrant d'anneaux locaux noethériens. On suppose que tous les A_i sont noethériens et que les morphismes de transitions sont locaux et plats. Alors, si pour tout $i \leq j$, on a $m_i A_j = m_j$, alors $\text{colim } A_i$ est noethérien.*

On utilisera sans le rappeler ensuite le critère de noéthérianité de Cohen ([Nagata, 1962, 3.4]) :

PROPOSITION 3.2 (Cohen). *Un anneau est noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini.*

Soit $A_i, i \geq 0$ un système inductif d'anneaux et $A_\infty = \text{colim } A_i$. On suppose

- les morphismes $A_i \rightarrow A_{i+1}$ sont finis et injectifs ;
- chaque A_i est noethérien (ou, ce qui revient au même, que A_0 est noethérien).

En particulier, $\text{Spec}(A_{i+1}) \rightarrow \text{Spec}(A_i)$ est fini et surjectif et $\text{Spec}(A_\infty) \rightarrow \text{Spec}(A_i)$ est entier et surjectif pour tout i ce qu'on utilisera sans plus de précaution. Leurs fibres sont de dimension nulle. Pour $p \in \text{Spec}(A_0)$, on note $\tilde{\kappa}_p$ la propriété

Propriété $\tilde{\kappa}_p$: *Il existe i tel que pour tout $j \geq i$ et tout $q \in \text{Spec}(A_j)$ au-dessus de p , l'idéal qA_∞ est premier.*

PROPOSITION 3.3. *A_∞ est noethérien si et seulement si tout idéal premier p de A_0 vérifie la propriété $\tilde{\kappa}_p$.*

Démonstration. On note $f : \text{Spec}(A_\infty) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$. Suffisance. Soit $q_\infty \in \text{Spec}(A_\infty)$ et p son image dans $\text{Spec}(A_0)$. Montrons que q_∞ est de type fini. Choisissons i comme dans $\tilde{\kappa}_p$ et soit $q = q_\infty \cap A_i$. On a d'une part $qA_\infty \subset q_\infty$ et, d'autre part

$$q_\infty \cap A_i \subset qA_\infty \subset q_\infty$$

ce qui assure l'égalité $p = q_\infty \cap A_0 = qA_\infty \cap A_0$ de sorte que qA_∞ se spécialise sur q_∞ dans $f^{-1}(p)$ qui est de dimension 0. On a donc $q_\infty = qA_\infty$ ce qui prouve que q_∞ est de type fini comme q et on invoque 3.2.

Nécessité. Supposons A_∞ noethérien et soit $p \in \text{Spec}(A_0)$. La fibre

$$f^{-1}(p) = \text{Spec}(A_\infty \otimes_{A_0} \kappa(p))$$

est noethérienne de dimension nulle, donc de cardinal fini. Comme A_∞ est noethérien, on peut donc supposer que tous les idéaux premiers de $f^{-1}(p)$ sont engendrés par des éléments de A_i pour i convenable. Soit alors $q \in \text{Spec}(A_j), j \geq i$ au-dessus de p . Soit $q' \in \text{Spec}(A_\infty)$ au-dessus de q . Comme q' est engendré par $q' \cap A_i$, il l'est par $q' \cap A_j = q$, de sorte que $qA_\infty = q'$ qui est donc premier. $\square$

PROPOSITION 3.4. *On garde les hypothèses et les notations de 3.3. Si de plus les extensions A_{i+1}/A_i sont plates, A_∞ est noethérien si et seulement si tout idéal maximal m de A_0 vérifie la propriété $\tilde{\kappa}_m$.*

Démonstration. La nécessité découle de 3.3. Il suffit donc de prouver la suffisance. Supposons donc que tout idéal maximal m de A_0 vérifie la propriété $\tilde{\kappa}_m$. Soit alors $p \in \text{Spec}(A_0)$ et montrons que p vérifie $\tilde{\kappa}_p$.

LEMME 3.5. *Sous les conditions de la proposition, la propriété $\tilde{\kappa}_p$ est équivalente à la propriété*

Propriété $\star_p$: *Il existe i tel que pour tout $l \geq j \geq i$ et tout $q \in \text{Spec}(A_j)$ au-dessus de p , l'idéal qA_l est premier.*

Démonstration. Supposons $\star_p$ vérifiée. Soit alors $q \in \text{Spec}(A_j)$ au-dessus de p . On déduit déjà $1 \notin qA_\infty$. De plus, si $xy \in qA_\infty$, il existe $l \geq j$, tel que $x, y \in A_l$. Quitte à choisir l plus grand, on peut également supposer $xy \in qA_l$ et donc par exemple $x \in qA_l \subset qA_\infty$. On a donc $\star_p \Rightarrow \tilde{\kappa}_p$ (sans hypothèse de platitude). L'autre implication découle directement de l'égalité $qA_\infty \cap A_l = qA_l$ (fidèle platitude). $\square$

La clef est de constater que la condition $\star_p$ ne dépend que des fibres schématiques de $f_i : \text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ et donc est *invariante par localisation*, ce qui va permettre de se ramener au cas local pour appliquer (3.1). Précisons.

LEMME 3.6. Soit $p \in \text{Spec}(A_0)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- La propriété $\star_p$ est satisfaite.
- Il existe i tel que pour tout $l \geq j \geq i$ le morphisme induit

$$\phi : f_l^{-1}(p) \rightarrow f_j^{-1}(p)$$

entre les fibres schématiques soit bijectif à fibres réduites.

Démonstration. Supposons $\star_p$ vérifiée et choisissons $i \leq j \leq l$ comme dans $\star_p$. Soit $q \in f_j^{-1}(p)$ et posons $A = A_j/q$ et $B = A_l/qA_l$. La fibre schématique $\phi^{-1}(q)$ est le $k(q) = \text{Frac}(A)$ -schéma $\text{Spec}(B \otimes_A \text{Frac}(A))$. Comme qA_l est premier, B est intègre et donc $B \otimes_A \text{Frac}(A)$ également (la tensorisation par $\text{Frac}(A)$ est une localisation). Comme A_l/A_j est finie, l'extension B/A est finie de sorte que $B \otimes_A \text{Frac}(A)$ est à la fois de dimension finie sur $\text{Frac}(A)$ et intègre, donc c'est un corps, ce qui entraîne la seconde condition.

Inversement, supposons que $\phi^{-1}(q)$ soit le spectre d'un corps. Autrement dit, on suppose que $B \otimes_A \text{Frac}(A)$ est intègre et on veut montrer que B est intègre. Mais on a

SOUS-LEMME 3.7. Soient $\phi : A \rightarrow B$ un morphisme plat d'anneaux. Supposons A intègre. Alors, B est intègre si et seulement si la fibre générique $B \otimes_A \text{Frac}(A)$ est intègre.

Démonstration. En tensorisant l'inclusion $A \hookrightarrow \text{Frac}(A)$ par B , on obtient (platitude) que le morphisme tautologique

$$B \rightarrow B \otimes_A \text{Frac}(A) = (A - \{0\})^{-1}B$$

est injectif.

Supposons B intègre. Comme B est non nul, il en est de même de $(A - \{0\})^{-1}B$. De plus, si, avec des notations évidentes, $b/ab'/a' = 0$ dans $(A - \{0\})^{-1}B$, il existe $\alpha \in A - \{0\}$ tel que $\alpha bb' = 0$ (dans B). Donc, αb ou b' est nul, et donc $b/1$ ou $b'/1$ est nul dans $(A - \{0\})^{-1}B$.

Inversement, si $B \otimes_A \text{Frac}(A)$ est intègre, il en est de même de B en tant que sous-anneau. □

□

Terminons la preuve de la proposition 3.4 en se ramenant donc au cas local. Choisissons m maximal dans A_0 contenant p . D'après (3.5), m vérifie la propriété $\star_m$. Choisissons alors i comme dans $\star_m$. Soit $m_i \in \text{Specmax}(A_i)$ au-dessus de m ($\text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ fini et surjectif).

Par construction, l'idéal $m_i A_j$ est premier pour tout $j \geq i$. Mais on a $m_i A_j \cap A_i = m_i$ (A_j/A_i est fidèlement plate) de sorte que $m_i A_j$ est maximal (A_j/A_i est finie) et définit par localisation l'idéal maximal de A_{j,m_i} . On a donc $A_{j,m_i} = A_{j,m_i A_j}$ de sorte qu'on peut appliquer (3.4) et en déduire que

$$A_{m_i} = \text{colim}_{j \geq i} A_{j,m_i}$$

est un anneau noethérien. Autrement dit, les localisés A_{m_i} de A_m en $m_i \in \text{Specmax}(A_{i,m})$ sont noethériens. Mais $A_{i,m}$ est semi local (car fini sur $A_{0,m}$ qui est local) donc A_m est noethérien (exercice). Posons alors

$$A'_j = A_{j,m} \text{ et } p' = pA_{0,m}$$

D'après (3.3), (3.5) et (3.6), quitte à changer i , pour tout $l \geq j \geq i$, le morphisme entre les fibres schématiques $\phi' : f_l^{-1}(p') \rightarrow f_j^{-1}(p')$ est bijectif à fibres réduites. Comme Φ' s'identifie à Φ , d'après (3.3), (3.5) et (3.6) on déduit que A est noethérien, ce qui termine la preuve de 3.4. □

Dans la situation de la proposition 2.5, les idéaux maximaux m de A_0 vérifient $\star_m$ par construction (c'est là où sert pleinement la condition d'indépendance linéaire des $g_n(i) \bmod k([i])^{*2}$) ce qui termine la preuve du point (i) de *loc. cit.*

4. Étude des points doubles

Reste à prouver le point (ii) de la proposition 2.5.

La restriction de l'immersion fermée $D = V(y) \hookrightarrow \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_\eta)$ étant une immersion d'un diviseur régulier dans un schéma régulier, le théorème de pureté (XVI-3.1.4) assure que la dimension de $(R^1j_*\Lambda)_{\bar{\eta}}$ est 1.

Pour alléger les notations, on pose $x = \pi_{\varepsilon_n}$, $z_n = z$, $g = g_n$ et $R = \bar{k}\{x, y, z\}/(z^2 - y - g)$ et on rappelle l'écriture

$$g = x^2 u(x)$$

où $u(x) \in \bar{k}\{x\}$ qu'on peut supposer vérifier $u(0) = 1$. Il existe une unique racine carrée $\sqrt{u(x)} \in \bar{k}\{x\}$ de $u(x)$ telle que $\sqrt{u(x)}(0) = 1$ qui définit une coordonnée locale $X = x\sqrt{u(x)}$ de $\bar{k}\{x\}$ (rappelons que la caractéristique de k est différente de 2.). Dans ces nouvelles coordonnées X, y, z de $\bar{k}\{x, y, z\}$, on a

$$z^2 - y - g = z^2 - y - X^2$$

et on invoque de nouveau (XVI-3.1.4) pour conclure⁽ⁱⁱ⁾. Ceci termine la preuve de la proposition 2.5.

5. D est localement mais pas globalement un diviseur à croisements normaux

Commençons par une définition. Dans cette section D désigne un diviseur effectif d'un schéma régulier X et $j : U = X - D \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire.

DÉFINITION 5.1. On conserve les notations précédentes.

- On dit que D est **localement un diviseur à croisements normaux** (en abrégé, *localement dcn*) si pour tout $x \in D$, le localisé de Zariski $\text{Spec}(\mathcal{O}_{D,x})$ est un diviseur à croisements normaux de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$.
- Supposons D localement dcn. On note $\varepsilon(x)$, $x \in D$ le nombre de branches analytiques de l'hensélisé strict $D_{(\bar{x})}$ où $\bar{x}$ est un point géométrique au-dessus de x et $\zeta(x)$ son nombre de composantes irréductibles. La fonction $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$ (resp. $\zeta : x \mapsto \zeta(x)$) est appelée fonction de comptage analytique (resp. fonction de comptage Zariski).

Avec les notations précédentes, si $\bar{x}$ est un point géométrique au-dessus de $x \in D$ avec D localement à croisements normaux, l'hensélisé strict $D_{(\bar{x})}$ est un diviseur à croisements normaux strict de $X_{(\bar{x})}$. On a alors la caractérisation suivante :

LEMME 5.2. Avec les notations précédentes, supposons de plus que D est localement dcn et $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ avec ℓ un nombre premier inversible sur X . Alors, les propositions suivantes sont équivalentes.

- $R^1j_*\Lambda$ est constructible ;
- $R^pj_*\Lambda$ est constructible pour tout p ;
- la fonction de comptage analytique ε est constructible.

Démonstration. D'après le théorème de pureté (XVI-3.1.4), la fibre $(Rj_*\Lambda)_{\bar{x}}$ est l'algèbre extérieure sur

$$(R^1j_*\Lambda)_{\bar{x}} = \Lambda^{\varepsilon(x)}.$$

Le lemme en découle immédiatement grâce à la caractérisation des faisceaux constructibles à fibres finies ([SGA 4 IX prop. 2.13 (iii)]). $\square$

L'intérêt de ce lemme réside dans la proposition suivante.

PROPOSITION 5.3. Avec les notations précédentes, supposons de plus que D est localement dcn. Alors, ε est constructible si et seulement si D est un diviseur à croisements normaux.

⁽ⁱⁱ⁾ On peut éviter si on veut le recours au théorème général de pureté en utilisant la suite exacte de Kummer pour se restreindre à calculer le $H^1(-, \Lambda)$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux strict dans le spectre d'un anneau local régulier.

Démonstration. La constructibilité de ε si D est à croisements normaux découle directement des définitions (cf. [de Jong, 1996]). Supposons donc ε constructible et montrons que D est à croisements normaux. Soit $\bar{x}$ un point géométrique au-dessus de $x \in D$. Puisque $D_{(\bar{x})}$ est un diviseur à croisements normaux strict, il existe un voisinage étale $\pi : X' \rightarrow X$ de $\bar{x}$ dans X , tel que le diviseur $D' = \pi^{-1}(D)$ est la somme de diviseurs D'_i qui sont réguliers en x' (image de $\bar{x}$ dans X') et qui se coupent transversalement en x' . La fonction de comptage analytique ε' de D' est la somme des fonctions de comptage analytiques ε'_i . Comme ε' ne dépend que de l'hensélisé strict, on a donc

$$\varepsilon' = \varepsilon \circ \pi = \sum \varepsilon'_i.$$

En particulier, ε' est constructible comme ε . La fonction de comptage Zariski ζ' de D' certainement constructible de sorte que la différence $\varepsilon' - \zeta'$ l'est aussi. Par hypothèse, $\varepsilon' - \zeta'$ s'annule sur $\text{Spec } \mathcal{O}_{X',x'}$, donc sur l'ensemble des générations de x' . Comme elle est constructible, elle est nulle sur un voisinage ouvert U' (Zariski) de x' . Comme $\varepsilon'_i \geq \zeta'_i$, on a $\varepsilon'_i = \zeta'_i$ sur U' de sorte que, quitte à restreindre U' , chaque diviseur D_i est régulier sur U' . En se restreignant au localisé strict de chaque point de U' , sur lequel on sait que D' est un diviseur à croisements normaux, on obtient que les D_i se coupent transversalement de sorte que la restriction de D' à U' est un diviseur à croisements normaux strict. $\square$

REMARQUE 5.4. L'argument précédent appliqué à ζ assure que si le localisé Zariski de D en tout point est un diviseur à croisements normaux strict alors D est un diviseur à croisements normaux strict.

Avec les notations de la proposition 2.5, on a donc obtenu le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.5. *Le diviseur D de la surface régulière $\text{Spec } A$ est localement à croisements normaux mais pas globalement.*

Rigidité

Yves Laszlo et Alban Moreau

1. Introduction

Le but de cet exposé est de démontrer les deux résultats techniques 2.1.1 (comparaison des torsseurs sur l'ouvert complémentaire $\text{Spec } A - V(I)$ défini par un couple hensélien non nécessairement noethérien et l'ouvert correspondant de $\text{Spec } \hat{A}$ où A désigne le complété I-adique de A) et 5.3.1 (rigidité de la ramification). Ils permettront dans l'exposé suivant de montrer l'énoncé de finitude suivant (XXI-1.4) :

THÉORÈME. *Soit A un anneau strictement local de dimension 2. On suppose que A est normal, excellent, et on note $X' = \text{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ son spectre époinché. Alors, pour tout groupe fini G , l'ensemble $H^1(X', G)$ est fini.*

Ce résultat est la clef pour démontrer le résultat de finitude général suivant (XXI-1.2) :

THÉORÈME. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini entre schémas quasi-excellents. Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers inversibles sur X . Pour tout faisceau constructible de groupes F sur $Y_{\text{ét}}$ de $\mathbb{L}$ -torsion, le faisceau $R^1 f_*(F)$ sur $X_{\text{ét}}$ est constructible.*

Par des techniques d'ultrafiltres, chères aux théoriciens des modèles, on est ramené à étudier des revêtements étales de spectres époinchés d'anneaux *non noethériens*, ce qui explique qu'on soit contraint de démontrer les énoncés techniques hors de tout cadre noethérien.

REMARQUE. Soit X un schéma. On considérera des champs en groupoïdes $\mathcal{C}$ sur $X_{\text{ét}}$ (on dira simplement champs). En général, la catégorie fibrée $\mathcal{C}$ n'est pas scindée de sorte que si x, y sont deux objets de $\mathcal{C}(S)$ où $S \rightarrow X$ est étale, il faut quelques précautions pour parler du faisceau $\underline{\text{Hom}}(x, y)$ sur $S_{\text{ét}}$. Précisément, suivant [Giraud, 1971, I.2.6.3.1], on considère l'équivalence de catégories fibrées $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}$ entre $\mathcal{C}$ et la catégorie libre $\mathcal{L}\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{C}$, catégorie libre qui elle est scindée. On définit alors

$$\underline{\text{Hom}}(x, y)(S') = \text{Hom}_{\mathcal{L}\mathcal{C}(S')}(\mathcal{L}x', \mathcal{L}y')$$

où $\mathcal{L}x', \mathcal{L}y'$ sont les images inverses par le morphisme étale $S' \rightarrow S$ de x, y dans $\mathcal{C}(S)$. Bien entendu ([Giraud, 1971, I.2.6.3.2 (1)]), $\mathcal{L}$ induit une bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(S)}(x, y) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \underline{\text{Hom}}(x, y)).$$

Ces remarques justifient qu'on puisse si besoin supposer sans dommage que les champs que l'on considérera sont scindés.

2. Lemme de rigidité

Soit (A, I) un couple hensélien (V-1.2.1 ou [ÉGA IV₄ 18.5.5]) non nécessairement noethérien, avec I de type fini⁽ⁱ⁾. Soit U un ouvert de $X = \text{Spec}(A)$ contenant $\text{Spec}(A) - V(I)$. On note $\hat{A}$ le complété⁽ⁱⁱ⁾ I-adique de A et $\hat{U}$ l'image inverse de U par le morphisme de complétion $\pi : \hat{X} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow X$. On suppose pour simplifier U quasi-compact (cf. 2.1.4).

⁽ⁱ⁾Cette hypothèse sera utilisée pour comparer les gradués I-adiques de A et de son complété $\hat{A}$ ([Bourbaki, AC, III, §2, n° 12])

⁽ⁱⁱ⁾On dira simplement complété pour séparé complété.

2.1. Énoncés. Rappelons [SGA 4 IX 1.5] qu'un faisceau de groupes $\mathcal{F}$ sur X est ind-fini si pour tout ouvert étale $u : U \rightarrow X$ avec U quasi-compact, le groupe $\mathcal{F}(u)$ est limite inductive filtrante de ses sous-groupes finis. On dit alors qu'un champ en groupoïdes $\mathcal{C}$ sur X est ind-fini si pour tout ouvert étale $u : U \rightarrow X$ avec U quasi-compact et tout $x_u \in \mathcal{C}(u)$, le faisceau en groupes $\pi_1(\mathcal{C}, x_u) = \text{Aut}_{\mathcal{C}}(x_u)$ est ind-fini.

Le but de cette section est de démontrer le théorème de rigidité suivant.

THÉORÈME 2.1.1 (Théorème de rigidité de Gabber). *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur $U_{\text{ét}}$. Alors on a*

- (i) *la flèche naturelle $H^0(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{F})$ est bijective ;*
- (ii) *si $\mathcal{F}$ est de plus un faisceau en groupes ind-fini, la flèche naturelle $H^1(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{F})$ est bijective.*

Les deux énoncés du théorème précédent sont conséquence du théorème suivant, apparemment plus fort, forme champêtre du théorème de rigidité⁽ⁱⁱⁱ⁾.

THÉORÈME 2.1.2 (Théorème de rigidité de Gabber, forme champêtre). *Soit $\mathcal{C}$ un champ en groupoïdes ind-fini sur $U_{\text{ét}}$. Alors, la flèche naturelle $\gamma(\mathcal{C}) : \Gamma(U, \mathcal{C}) \rightarrow \Gamma(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{C})$ est une équivalence.*

REMARQUE 2.1.3. En fait, le théorème de rigidité 2.1.1 est *a priori* équivalent à la version champêtre 2.1.2. C'est ce qui ressort par exemple de l'énoncé 6.3.2. Mais, formellement, on n'a pas besoin de démontrer cela à ce stade.

REMARQUE 2.1.4. Les résultats précédents sont également valables lorsque U n'est pas nécessairement quasi-compact. Cela résulte du fait que la catégorie des sections d'un champ sur U est équivalente à la 2-limite projective des sections sur les ouverts quasi-compacts de U contenant $\text{Spec}(A) - V(I)$. L'hypothèse de quasi-compacité est utilisée dans un argument d'éclatement ci-dessous (cf. 2.4.2).

2.2. Réduction au cas constant. Le résultat est le suivant

PROPOSITION 2.2.1. *Supposons que pour tout U comme plus haut,*

- (i) *pour tout ensemble fini F , la flèche $H^0(U, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}, F)$ est bijective. Alors, 2.1.1 (i) est vrai, c'est-à-dire le théorème de rigidité 2.1.2 est vrai pour les champs discrets.*
- (ii) *pour tout groupe fini G , la flèche $\text{Tors}(U, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}, G)$ est une équivalence et 2.1.1 (i) est vrai. Alors le théorème de rigidité 2.1.2 est vrai.*

Démonstration. D'après [SGA 4 XII prop. 6.5], il suffit pour prouver 2.1.1 (i) (resp. 2.1.2) de prouver que pour tout $U' \rightarrow U$ fini et tout ensemble fini F (resp. groupe fini G), la flèche

$$(2.2.1.1) \quad H^0(U', F) \rightarrow H^0(\widehat{U'}, F) \quad (\text{resp. } \text{Tors}(U', G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U'}, G))$$

est bijective (resp. une équivalence) où $\widehat{U'} = \widehat{U} \times_U U'$.

LEMME 2.2.2. *Il existe un schéma affine $\text{Spec}(B)$ et un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & \text{Spec}(B) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

où B est fini sur A . Le morphisme $U' \rightarrow \text{Spec}(B)$ s'identifie à l'immersion ouverte $U_B \hookrightarrow \text{Spec}(B)$. De plus, U_B contient $\text{Spec}(B) - V(IB)$.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Les champs (ind-finis) en groupoïdes discrets s'identifient aux faisceaux d'ensembles : on dira parfois un *champ discret*.

Démonstration. Comme $U' \rightarrow U$ est fini, il est projectif ([ÉGA II 6.1.11]). Comme U est quasi-compact, l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ est quasi-affine ([ÉGA II 5.1.1]), donc quasi-projective de sorte que le composé $f : U' \rightarrow U \rightarrow X$ est quasi-projectif ([ÉGA II 5.3.4]). Comme $X = \text{Spec}(A)$ est affine, $\mathcal{O}_X$ est certainement ample (cf. la définition ou [ÉGA II 5.1.2]). Les hypothèses du théorème principal de Zariski ([ÉGA IV₃ 8.12.8]) sont donc vérifiées. Il existe donc $X' \rightarrow X$ fini de sorte que f se factorise en $U' \hookrightarrow X' \rightarrow X$ où $U' \hookrightarrow X'$ immersion ouverte et $X' \rightarrow X$ fini. L'adhérence schématique de U' dans X' est fermée dans X' : elle s'écrit donc $\text{Spec}(B)$ où B est fini sur A . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U' & \longrightarrow & U_B & \hookrightarrow & \text{Spec}(B) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & U & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

où les flèches non horizontales sont finies. La flèche $U' \rightarrow U_B$ est donc propre. Comme c'est aussi une immersion ouverte d'image dense, c'est un isomorphisme. L'ouvert U contenant $\text{Spec}(A) - V(I)$, on déduit que $U' = U_B$ contient $\text{Spec}(B) - V(IB) = (\text{Spec}(A) - V(I))_B$. $\square$

D'après le lemme, la flèche (2.2.1.1) s'identifie à

$$(2.2.2.1) \quad H^0(U_B, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}_B, F) \text{ (resp. } \text{Tors}(U_B, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}_B, G))$$

(où ${}_B$ est l'extension des scalaires du A -schéma $?$ à $\text{Spec}(B)$). Il s'agit donc de montrer que (2.2.2.1) est bijectif (resp. une équivalence).

Par définition, on a

$$\widehat{U}_B = \pi_C^{-1}(U)$$

où π_C est la projection naturelle

$$\pi_C : \text{Spec}(C) \rightarrow \text{Spec}(A), \text{ avec } C = \widehat{A} \otimes_A B.$$

Dans le cas noethérien, C est le complété IB -adique $\widehat{B}$ de B ce qui prouve la proposition dans ce cas — appliquer l'hypothèse 2.2.1 (i) à $\mathcal{F}$ constant de valeur F sur U_B —. Dans le cas général, la flèche $C \rightarrow \widehat{B}$ n'est pas en général un isomorphisme.

LEMME 2.2.3. Avec les notations précédentes, on a

- (i) Soit (A_n, I_n) un système projectif de couples henséliens. Le couple $(A_\infty, I_\infty) = (\varprojlim A_n, \varprojlim I_n)$ est hensélien.
- (ii) Le complété I -adique $\widehat{A}$ de A est $\widehat{I}$ -hensélien.
- (iii) Les couples (B, IB) et (C, IC) sont henséliens et ont même complété I -adique.

Démonstration. Soit P un polynôme de $A_\infty[x]$ et $\bar{a} \in A_\infty/I_\infty$ une racine simple (c'est-à-dire telle que $P'(\bar{a})$ inversible dans A_∞/I_∞). L'image $\bar{a}_n$ de $\bar{a}$ dans A_n/I_n est une racine simple de P . Elle se relève donc de façon unique en une racine $a_n \in A_n$ de P d'après le lemme de Hensel. Comme I_{n+1} s'envoie dans I_n , par unicité des relèvements, l'image de a_{n+1} dans A_n est égale à a_n de sorte que la suite $a = (a_n) \in A_\infty$ est le relèvement cherché de $\bar{a}$ ce qui prouve (i) d'après [Crépeaux, 1967, Prop. 1].

Puisque $A \rightarrow A/I^n$ est notoirement entier, les couples $(A/I^n, IA/I^n)$ sont henséliens de sorte que (ii) découle de (i).

Par associativité du produit tensoriel, le morphisme naturel $B/I^n B \rightarrow C/I^n C$ s'identifie à la tensorisation par B du morphisme naturel $A/I^n A \rightarrow \widehat{A}/I^n \widehat{A}$. Comme ce dernier est un isomorphisme ([Bourbaki, AC, III, §2, n°12, prop. 15 et cor. 2]), B et C ont même complété I -adique. (iii) suit alors de (ii) car un couple fini sur un hensélien est hensélien. $\square$

On a donc $\widehat{(U_B)} = \widehat{(U_C)}$. D'après le lemme précédent, sous les hypothèses de 2.2.1 (i) (resp. (ii)), la flèche naturelle

$$H^0(U_B, F) \rightarrow H^0(\widehat{(U_B)}, F) = H^0(\widehat{(U_C)}, F) \leftarrow H^0(U_C, F) = H^0(\widehat{U}_B, F)$$

(resp.

$$\mathrm{Tors}(\mathcal{U}_B, G) \rightarrow \mathrm{Tors}(\widehat{(\mathcal{U}_B)}, G) = \mathrm{Tors}(\widehat{(\mathcal{U}_C)}, G) \leftarrow \mathrm{Tors}(\mathcal{U}_C, G) = \mathrm{Tors}(\widehat{\mathcal{U}_B}, G))$$

est alors une bijection (resp. équivalence), ce qu'on voulait. $\square$

2.3. Réduction au cas strictement hensélien. Résumons les notations dans le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{U} \\ \widehat{j} \downarrow & \square & \downarrow j \\ \widehat{X} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

avec $\mathcal{U}$ quasi-compact contenant $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$. Montrons le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3.1. *Supposons que pour tout $\mathcal{U}$ comme plus haut,*

- (i) *pour tout ensemble fini F , la flèche $H^0(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^0(\widehat{\mathcal{U}}, F)$ est bijective si A est de plus strictement local. Alors, 2.1.1 (i) est vrai (que A soit strictement local ou non).*
- (ii) *pour tout groupe fini G , la flèche $\mathrm{Tors}(\mathcal{U}, G) \rightarrow \mathrm{Tors}(\widehat{\mathcal{U}}, G)$ est une équivalence si A est de plus strictement hensélien et 2.1.1 (i) est vrai. Alors, 2.1.2 est vrai (que A soit strictement local ou non).*

Démonstration. Commençons par un lemme.

LEMME 2.3.2. *Supposons que pour tout $\mathcal{U}$ comme plus haut,*

- (i) *pour tout ensemble fini F , la flèche $H^0(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^0(\widehat{\mathcal{U}}, F)$ est bijective si A est de plus strictement local. Alors, la flèche de changement de base*

$$\gamma : \pi^* j_* F \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* F = \widehat{j}_* F$$

est un isomorphisme (que A soit strictement local ou non).

- (ii) *pour tout groupe fini G , la flèche $\mathrm{Tors}(\mathcal{U}, G) \rightarrow \mathrm{Tors}(\widehat{\mathcal{U}}, G)$ est une équivalence si A est de plus strictement hensélien et 2.1.1 (i) est vrai. Alors, la flèche de changement de base*

$$\gamma : \pi^* j_* \mathrm{Tors}(\mathcal{U}, G) \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathrm{Tors}(\mathcal{U}, G) = \widehat{j}_* \mathrm{Tors}(\widehat{\mathcal{U}}, G),$$

où l'égalité résulte de [Giraud, 1971, III.2.1.5.7], est une équivalence (que A soit strictement local ou non).

Démonstration. Les formules $j^* j_* = \mathrm{Id}$ et $\widehat{j}^* \widehat{j}_* = \mathrm{Id}$ assurent qu'on a

$$\widehat{j}^* \pi^* j_* = \pi^* j^* j_* = \pi^* = \widehat{j}^* \widehat{j}_* \pi^*$$

de sorte que l'image inverse sur $\widehat{\mathcal{U}}$ de la flèche de changement de base

$$(2.3.2.1) \quad \pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathcal{C}$$

est une équivalence pour tout champ en groupoïdes $\mathcal{C}$.

Soit $\hat{x}$ un point géométrique de $\widehat{X}$ d'image le point géométrique $x = \pi \circ \hat{x}$ de X et montrons que la fibre de la flèche de changement de base (2.3.2.1) en $\hat{x}$ est une équivalence. D'après ce qui précède, on peut supposer $\hat{x} \notin \widehat{\mathcal{U}}$. En particulier, $x \in V(I)$.

Soit A^{hs} (resp. $X_{(x)}$) l'hensélisé strict de A (resp. X) en x et $\widehat{A}^{\mathrm{hs}}$ (resp. $\widehat{X}_{(\hat{x})}$) celui de $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{X}$) en $\hat{x}$. On a un diagramme commutatif où les flèches sont les flèches de fonctorialité, complétion ou stricte hensélisation

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{X_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & \widehat{X_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & \widehat{X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{X_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & X_{(x)} & \longrightarrow & X
\end{array}$$

On note alors

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{U_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & \widehat{U_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & \widehat{U} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{U_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & U_{(x)} & \longrightarrow & U
\end{array}$$

l'image inverse du diagramme par l'immersion ouverte $U \rightarrow X$. En particulier, $U_{(x)}$ (resp. $\widehat{U_{(\hat{x})}}$) désigne l'image inverse de l'hensélisé strict $X_{(x)}$ (resp. $\widehat{X_{(\hat{x})}}$) de X (resp. $\widehat{X}$) en x (resp. $\hat{x}$) par j (resp. $\hat{j}$). Comme U est quasi-compact, il en est de même des ouverts $U_{(x)}$, $\widehat{U_{(\hat{x})}}$ de $X_{(x)}$, $\widehat{X_{(\hat{x})}}$.

Les morphismes $j, \hat{j}$ étant cohérents, dans le cas (i), la fibre $\gamma_{\hat{x}}$ s'identifie à la flèche naturelle

$$H^0(U_{(x)}, F) \rightarrow H^0(\widehat{U_{(\hat{x})}}, F)$$

tandis que dans le cas (ii) elle s'identifie à

$$\text{Tors}(U_{(x)}, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U_{(\hat{x})}}, G).$$

On déduit que les flèches naturelles

$$H^0(U_{(x)}, F) \rightarrow H^0(\widehat{U_{(\hat{x})}}, F) \text{ et } H^0(\widehat{U_{(\hat{x})}}, F) \rightarrow H^0(\widehat{U_{(\hat{x})}}, F)$$

sont bijectives dans le cas (i) et que les flèches

$$\text{Tors}(U_{(x)}, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U_{(\hat{x})}}, G) \text{ et } \text{Tors}(\widehat{U_{(\hat{x})}}, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U_{(\hat{x})}}, G)$$

sont des équivalences dans le cas (ii). Il suffit donc de voir que la flèche naturelle

$$(2.3.2.2) \quad \widehat{U_{(\hat{x})}} \rightarrow \widehat{U_{(x)}}$$

est un isomorphisme, ou encore que

$$A^{\text{hs}} \text{ et } \widehat{A}^{\text{hs}} \text{ ont même I-complété.}$$

Puisque l'anneau local A^{hs} est hensélien, il est a fortiori I-hensélien (V-1.2.1). Utilisant (2.2.3), on constate que le I-complété $\widehat{A}^{\text{hs}}$ est hensélien. Comme son corps résiduel est celui de A^{hs} , il est strictement hensélien. La flèche $\widehat{A} \rightarrow \widehat{A}^{\text{hs}}$ induit donc une flèche $\widehat{A}^{\text{hs}} \rightarrow \widehat{A}^{\text{hs}}$ et donc, par I-complétion, une flèche

$$(*) \quad \widehat{A}^{\text{hs}} \rightarrow \widehat{A}^{\text{hs}}.$$

Par ailleurs, la flèche de complétion $A \rightarrow \widehat{A}$ induit par hensélisation stricte puis complétion une flèche

$$(**) \quad \widehat{A}^{\text{hs}} \rightarrow \widehat{A}^{\text{hs}}.$$

Les flèches (*) et (**) sont inverses l'une de l'autre, d'où le lemme. $\square$

On a le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{U} & \xrightarrow{\pi} & U \\
 \downarrow \widehat{j} & \square & \downarrow j \\
 \widehat{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 X_I = \operatorname{Spec}(A/I) & &
 \end{array}$$

Comme on l'a observé, les paires (A, I) et $(\widehat{A}, I\widehat{A})$ sont henséliennes. La flèche $H^0(\widehat{X}, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X_I, \mathcal{C}_{|X_I})$ est donc une équivalence pour tout champ ind-fini $\mathcal{C}$ sur $X_{\text{ét}}$ d'après [Gabber, 1994, théorème 1'].

On déduit d'une part

$$H^0(U, F) = H^0(X, j_* F) = H^0(X_I, (j_* F)_{|X_I})$$

et, d'autre part

$$H^0(\widehat{U}, F) = H^0(\widehat{X}, \widehat{j}_* F) \stackrel{2.3.2}{=} H^0(\widehat{X}, \pi^* j_* F) = H^0(X_I, (\pi^* j_* F)_{|X_I})$$

ce dernier n'étant autre que $H^0(X_I, (j_* F)_{|X_I})$ (bien entendu l'isomorphisme induit

$$H^0(U, F) \xrightarrow{\sim} H^0(\widehat{U}, F)$$

est la restriction).

De même, on a

$$H^0(U, \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)) = H^0(X, j_* \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)) = H^0(X_I, j_* \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)_{|X_I})$$

et, d'autre part

$$\begin{aligned}
 H^0(\widehat{U}, \underline{\operatorname{Tors}}(\widehat{U}, G)) &= H^0(\widehat{X}, \widehat{j}_* \underline{\operatorname{Tors}}(\widehat{U}, G)) \\
 &\stackrel{2.3.2}{=} H^0(\widehat{X}, \pi^* j_* \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)) \\
 &= H^0(X_I, \pi^* j_* \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)_{|X_I})
 \end{aligned}$$

ce dernier n'étant autre que $H^0(X_I, j_* \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)_{|X_I})$, l'équivalence induisant bien entendu

$$H^0(U, \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)) \xrightarrow{\sim} H^0(\widehat{U}, \underline{\operatorname{Tors}}(\widehat{U}, G)).$$

Reste à invoquer 2.2.1. □

2.4. Fin de la preuve de 2.1.2. D'après 2.3.1, pour prouver 2.1.2, il suffit de prouver l'énoncé suivant

PROPOSITION 2.4.1. *Supposons A strictement hensélien (et $I \subset \operatorname{rad}(A)$) et soit U comme plus haut.*

- (i) *pour tout ensemble fini F , la flèche $H^0(U, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}, F)$ est bijective.*
- (ii) *pour tout groupe fini G , la flèche $\operatorname{Tors}(U, G) \rightarrow \operatorname{Tors}(\widehat{U}, G)$ est une équivalence.*

La formule $\pi^* \underline{\operatorname{Tors}}(U, G) = \underline{\operatorname{Tors}}(\widehat{U}, G)$ ([Giraud, 1971], III.2.1.5.7) permet de réécrire 2.4.1 sous la forme suivante

PROPOSITION 2.4.2. *Supposons A strictement hensélien (et $I \subset \operatorname{rad}(A)$) et soit U comme plus haut. Désignons par $\mathcal{C}$ le champ discret F_U ou bien $\underline{\operatorname{Tors}}(U, G)$. Alors, la flèche $H^0(U, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{C})$ est une équivalence.*

Démonstration. On va se ramener par éclatement au cas où l'idéal J définissant le complémentaire de U est principal.

Pour tout idéal $\tilde{I}$ d'un anneau $\tilde{A}$, on note

$$\text{Écl}_{\tilde{I}}(\tilde{A}) = \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \tilde{I}^n\right)$$

l'éclatement de $\tilde{I}$ dans $\text{Spec}(\tilde{A})$. Si $\tilde{I}$ est de type fini, le morphisme structural $e : \text{Écl}_{\tilde{I}}(\tilde{A}) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{A})$ est projectif, en particulier propre.

On suppose donc A strictement hensélien de corps résiduel k et $\mathcal{F} = F_U$ comme plus haut. On a déjà observé que $\hat{A}$ était aussi strictement hensélien. Il suit en particulier que l'ensemble des sections globales de tout faisceau étale sur X ou $\hat{X}$ s'identifie à sa fibre spéciale, ce qu'on utilisera sans plus de précaution.

Comme U est quasi-compact, il existe un idéal J de type fini tel que $U = \text{Spec}(A) - V(J)$. Comme U contient $\text{Spec } A - V(I)$ et que I est de type fini, on peut supposer $I \subset J$. Soit

$$Y = \text{Écl}_J(A) \text{ et } Y' = \text{Écl}_J(\hat{A}).$$

(On aurait dû écrire $\text{Écl}_{J\hat{A}}(\hat{A})$ pour $\text{Écl}_J(\hat{A})$). Pour des raisons de cohérences, on notera simplement X' le schéma $\hat{X} = \text{Spec}(\hat{A})$ (resp. U' sa restriction $\hat{U} = \pi^{-1}(U)$ à U).

SOUS-LEMME 2.4.3. Soient n, m des entiers ≥ 0 . Le morphisme de complétion définit des isomorphismes

$$A/I^m J^n \simeq \hat{A}/I^m J^n \hat{A} \text{ et } A/J^n \simeq \hat{A}/J^n \hat{A}$$

induisant un isomorphisme

$$J^n/I^m J^n \simeq J^n \hat{A}/I^m J^n \hat{A}.$$

Démonstration. Comme I est de type fini, le morphisme de complétion induit des isomorphismes

$$A/I^{m+n} \simeq \hat{A}/I^{m+n} \hat{A} \text{ et } A/I^n \simeq \hat{A}/I^n \hat{A}$$

d'après [Bourbaki, AC, III, §2, n°12, cor. 2 de la prop. 16]. Mais comme J contient I , on a

$$I^{m+n} \subset I^m J^n \text{ et } I^n \subset J^n,$$

de sorte que les changements de base

$$A/I^{m+n} \rightarrow A/I^m J^n \text{ et } A/I^n \rightarrow A/J^n$$

donnent alors des isomorphismes

$$A/I^m J^n \simeq \hat{A}/I^m J^n \hat{A} \text{ et } A/J^n \simeq \hat{A}/J^n \hat{A}$$

qui donnent 2.4.3. □

La flèche naturelle $Y' \rightarrow Y$ est donc un isomorphisme au-dessus de $\text{Spec}(A/I) \subset X$ car elle est induite par le morphisme gradué

$$\bigoplus J^n/IJ^n \rightarrow J^n \hat{A}/IJ^n \hat{A}$$

qui est un isomorphisme. On identifiera ces restrictions par la suite. En particulier, le morphisme $p_s : Y'_s \rightarrow Y_s$ entre fibres spéciales (c'est-à-dire au-dessus du point fermé de $s \in \text{Spec}(A/I) \subset X$) est un isomorphisme grâce auquel nous les identifierons. Regardons le solide commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{U} = U' & \xrightarrow{j'} & Y' & \xleftarrow{i'} & Y_s \\
\downarrow p & & \downarrow p & \square & \downarrow e \\
U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Y_s \\
& & & & \downarrow e \\
& & & & X \\
& & & & \downarrow \pi \\
& & & & \text{Spec}(k)
\end{array}$$

Admettons pour un temps le résultat suivant.

LEMME 2.4.4. Soit $\mathcal{C} = F_U$ (resp. $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(U, G)$). Alors, la flèche de changement de base

$$\gamma : p^* j_* \mathcal{C} \rightarrow j'_* p^* \mathcal{C}$$

est bijective (resp. une équivalence).

Déduisons alors l'équivalence cherchée

$$H^0(U, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} H^0(U', \mathcal{C}) = H^0(U', p^* \mathcal{C})$$

grâce au théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck ([Giraud, 1971] dans le cas noethérien et théorème 7.1 dans le cas général) appliqué aux faces inférieure et supérieure du diagramme précédent. On a en effet un diagramme essentiellement commutatif où toutes les flèches sont les flèches naturelles (obtenues par adjonction)

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(U, \mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & H^0(Y, j_* \mathcal{C}) & \xrightarrow{b} & H^0(Y_s, i^* j_* \mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & H^0(Y_s, i'^* p^* j_* \mathcal{C}) \\
\downarrow \alpha & & \downarrow a & & \downarrow & & \swarrow c \\
H^0(U', p^* \mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & H^0(Y', j'_* p^* \mathcal{C}) & \xrightarrow{d} & H^0(Y_s, i'^* j'_* p^* \mathcal{C}) & &
\end{array}$$

Les flèches b, d sont bijectives (resp. des équivalences) grâce au théorème de changement de base propre (7.1) tandis que c est une bijection (resp. une équivalence) grâce à 2.4.4. Il suit que a et α sont des bijections (resp. des équivalences).

Preuve du lemme 2.4.4. Soit x' un point géométrique de Y' d'image x dans Y . On peut supposer $x' \in V(J\mathcal{O}_{Y'})$. Soit B l'hensélisé (strict) de Y en x et B' celui de Y' en x . On doit étudier la flèche

$$(\star) \quad H^0(\text{Spec}(B) - V(JB), \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\text{Spec}(B') - V(JB'), \mathcal{C})$$

Observons que par définition de l'éclatement, JB (resp. JB') est un idéal principal engendré par un élément non diviseur de zéro et non inversible $t \in B$ (resp. $t' \in B'$) (équation locale du diviseur exceptionnel). Par ailleurs, les couples (B, JB) et (B', JB') sont henséliens car B, B' sont locaux henséliens (exercice). Les isomorphismes

$$J^n A / J^{n+m} A \xrightarrow{\sim} J^n \hat{A} / J^{n+m} \hat{A}, n, m \geq 0$$

assurent que B et B' ont même complété J -adique $\hat{B} = \hat{B}'$.

On utilise alors les généralisations des résultats d'Elkik [Elkik, 1973] — et donc de Ferrand-Raynaud pour le π_0 — au cas principal non noethérien de [Gabber & Ramero, 2003]. Précisément, le théorème 5.4.37 loc. cit. appliqué au $B[t^{-1}]$ -groupeïde discret $F_B = \text{Spec}(B[t^{-1}]) \times F$ assure qu'on a

$$H^0(\text{Spec}(B[t^{-1}]), F) = \pi_0(F_B) = \pi_0(F_{\hat{B}}) = H^0(\text{Spec}(\hat{B}[t^{-1}]), F)$$

et de même en remplaçant B, t par B', t' . Comme B et B' ont même complété J -adique, on a donc

$$H^0(\text{Spec}(B[t^{-1}]), F) = H^0(\text{Spec}(B'[t'^{-1}]), F),$$

ce qu'on voulait. Dans le cas $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}, G)$, on déduit du cas discret que $(*)$ est pleinement fidèle. Soit alors $\widehat{P}$ un revêtement galoisien de groupe G sur $\widehat{U} = \text{Spec}(\widehat{B}) - V(J\widehat{B})$. D'après le théorème 5.4.53 de [Gabber & Ramero, 2003], il provient d'un (unique) revêtement P de U . La pleine fidélité de $(*)$ assure que le groupe d'automorphismes de P est G . Dire que P est galoisien de groupe G , c'est dire que la flèche canonique

$$\phi : P \times G \rightarrow P \times_U P$$

est un isomorphisme. On peut voir cette flèche comme un morphisme de revêtements étales de U . Après image inverse sur $\widehat{U}$, elle s'identifie à la flèche analogue

$$\widehat{P} \times G \rightarrow \widehat{P} \times_{\widehat{U}} \widehat{P}$$

qui est un isomorphisme (de revêtements étales de $\widehat{P}$ donc de revêtements étales de $\widehat{U}$) par hypothèse. La pleine fidélité de $(*)$ assure que ϕ est un isomorphisme de sorte que P est bien galoisien de groupe G . On a donc obtenu que le foncteur naturel entre les catégories de G -revêtements galoisiens sur U et $\widehat{U}$ sont équivalentes. Il en est donc de même pour le foncteur les catégories de G -revêtements galoisiens sur U' et $\widehat{U}'$. On conclut en se souvenant de l'égalité $\widehat{U} = \widehat{U}'$. $\square$

REMARQUE 2.4.5. Le théorème 2.1.2 entraîne immédiatement que la flèche de changement de base

$$\pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathcal{C}$$

est une équivalence. En effet, on l'a déjà vu sur $\widehat{U}$ (2.3.2.1). Si $\widehat{x} \notin \widehat{U}$, on a déjà observé dans la preuve de 2.3.2 que $U_{(x)}$ et $\widehat{U}_{(\widehat{x})}$ avaient même complété I-adique de sorte que deux applications de 2.1.2 assurent que la fibre de

$$\pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathcal{C}$$

en $\widehat{x}$ est une équivalence.

3. Rigidité de la ramification

3.1. La condition c_2 . Rappelons ([ÉGA IV₄ 18.6.7]) que l'hensélisé A^h d'un anneau semi-local A est le produit des hensélisés des localisés de A en ses idéaux maximaux. Pour tout anneau noethérien, on note A^{nor} son normalisé, à savoir la clôture intégrale de A dans l'anneau total $K(A)$ des fractions de $A_{\text{réd}}$. Puisque $K(A)$ est le produit des $K(A/\mathfrak{p})$ où $\mathfrak{p}$ décrit les points maximaux de $\text{Spec}(A)$, le normalisé de A est le produit des normalisés des $A/\mathfrak{p}$. Si A^{nor} n'est en général pas noethérien ([Nagata, 1962, exemple 5 de l'appendice]), ses fibres réduites sur A sont finies ([Nagata, 1962, V.33.10]). En particulier, si A est local noethérien, A^{nor} est semi-local de sorte que son hensélisé est bien défini. On a alors (comparer avec [Nagata, 1962, 43.20 et exercice 43.21])

LEMME 3.2. Soit A un anneau local noethérien.

- (i) La flèche canonique $A^h \rightarrow (A^{\text{nor}})^h$ induit un isomorphisme $(A^h)^{\text{nor}} \xrightarrow{\sim} (A^{\text{nor}})^h$.
- (ii) Cette bijection induit une bijection canonique $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^*$ entre les points maximaux $\mathfrak{p}$ de $\text{Spec}(A^h)$ et les points fermés $\mathfrak{p}^*$ de $\text{Spec}(A^{\text{nor}})$ de telle sorte que les anneaux intègres $(A^h/\mathfrak{p})^{\text{nor}}$ et $(A_{\mathfrak{p}^*}^{\text{nor}})^h$ sont (canoniquement) isomorphes.

Démonstration. D'après [ÉGA IV₄ 18.6.8], le morphisme canonique $A^{\text{nor}} \otimes_A A^h \rightarrow (A^{\text{nor}})^h$ est un isomorphisme. Le morphisme canonique $A \rightarrow A^h$ étant ind-étales, il est normal. D'après [ÉGA IV₂ 6.14.4], le morphisme canonique $A^h \rightarrow A^{\text{nor}} \otimes_A A^h$ identifie $A^{\text{nor}} \otimes_A A^h$ à la fermeture intégrale de A^h dans $A^h \otimes_A K(A)$. Si maintenant, $A \rightarrow B$ est étale, la fibre au point maximal $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ s'identifie à $\text{Spec}(K(B))$. En passant à la limite, on déduit l'égalité $A^h \otimes_A K(A) = K(A^h)$ de sorte que $A^{\text{nor}} \otimes_A A^h$ s'identifie à la fermeture intégrale de A^h dans $A^h \otimes_A K(A) = K(A^h)$ et donc $(A^h)^{\text{nor}} \xrightarrow{\sim} A^{\text{nor}} \otimes_A A^h$. La composition

$$(A^h)^{\text{nor}} \xrightarrow{\sim} A^{\text{nor}} \otimes_A A^h \xrightarrow{\sim} (A^{\text{nor}})^h$$

est l'isomorphisme annoncé. Pour le second point, on observe d'une part que le spectre du normalisé de A^h est la somme disjointe des normalisés de ses composantes irréductibles

$$(3.2.1) \quad \operatorname{Spec}((A^h)^{\operatorname{nor}}) = \coprod_{\mathfrak{p} \text{ point maximal}} \operatorname{Spec}((A^h/\mathfrak{p})^{\operatorname{nor}}),$$

chaque fermé $\operatorname{Spec}((A^h/\mathfrak{p})^{\operatorname{nor}})$ étant intègre (puisque local et normal) de sorte que 3.2.1 est une la décomposition en composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}((A^h)^{\operatorname{nor}})$. D'autre part, par définition de l'hensélisé d'un anneau semi-local, on a

$$(3.2.2) \quad \operatorname{Spec}((A^{\operatorname{nor}})^h) = \coprod_{\mathfrak{p}^* \text{ point fermé}} \operatorname{Spec}((A_{\mathfrak{p}^*}^{\operatorname{nor}})^h).$$

Or, $(A_{\mathfrak{p}^*}^{\operatorname{nor}})^h$ est local et normal (comme $A_{\mathfrak{p}^*}^{\operatorname{nor}}$), donc intègre, prouvant que 3.2.2 est la décomposition en composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}((A^{\operatorname{nor}})^h)$. Le lemme suit. $\square$

PROPOSITION 3.3. *Soit Z un sous-schéma fermé d'un schéma noethérien X . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Soit $p : X^{\operatorname{nor}} \rightarrow X$ le morphisme de normalisation. Alors, $p^{-1}(Z)$ est de codimension ≥ 2 dans X^{nor} .*
- (ii) *Pour tout $z \in Z$, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}^h)$ sont de dimension ≥ 2 .*
- (ii_{bis}) *Pour tout $z \in Z$, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}^{\operatorname{hs}})$ sont de dimension ≥ 2 .*
- (iii) *Pour tout $z \in Z$, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,z})$ sont de dimension ≥ 2 .*

Démonstration. Notons $A = \mathcal{O}_{X,z}$ pour $z \in Z$. Notons d'abord que le morphisme $A^h \rightarrow A^{\operatorname{hs}}$ est injectif, entier et fidèlement plat. Ceci prouve que le morphisme $h : \operatorname{Spec}(A^{\operatorname{hs}}) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ vérifie $\dim(\overline{h(x)}) = \dim(\overline{x})$ et induit une surjection au niveau des points maximaux, ce qui prouve l'équivalence de (ii) et (ii_{bis}).

Un anneau intègre et son normalisé ainsi qu'un anneau local et son hensélisé, ont même dimension. Conservant les notations de 3.2, on a donc

$$\dim A^h/\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}^*}^{\operatorname{nor}}.$$

Or, dire $\operatorname{codim} p^{-1}(Z) \geq 2$, c'est dire $\dim A_{\mathfrak{p}^*}^{\operatorname{nor}} \geq 2$ lorsque $\mathfrak{p}^*$ décrit les points fermés de

$$\operatorname{Spec}(A^{\operatorname{nor}}) = p^{-1}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}))$$

lorsque z décrit Z . Ceci revient donc à dire que toutes les composantes irréductibles $\operatorname{Spec}(A^h/\mathfrak{p})$ de $\operatorname{Spec}(A^h)$ sont de dimension ≥ 2 prouvant l'équivalence de (i) et (ii).

Pour montrer l'équivalence de (i) et (iii), on peut supposer que $X = \operatorname{Spec}(A)$ est local hensélien et que Z est réduit à son point fermé.

Prouvons d'abord que (iii) implique (ii). Soit Y une composante irréductible de X . Le morphisme de complétion $c : \widehat{X} \rightarrow X$ étant fidèlement plat, $\widehat{Y} = c^{-1}(Y)$ est une réunion de composantes irréductibles de $\widehat{X}$ de sorte qu'on a $\dim(\widehat{Y}) \geq 2$. Comme Y est local noethérien, on a $\dim(Y) = \dim(\widehat{Y}) \geq 2$.

Prouvons la réciproque. Quitte à se restreindre à une composante irréductible (réduite), on peut supposer X intègre de dimension ≥ 2 . Soit $\hat{x}$ (resp. x) le point fermé de $\widehat{X}$ (resp. X) (ce n'est pas une composante irréductible de $\widehat{X}$ qui est de dimension ≥ 2). Si une des composantes de $\widehat{X}$ était de dimension ≤ 1 , elle serait de dimension 1 (car $\{\hat{x}\}$ n'est pas une composante) et donc son point générique serait un point isolé de $\widehat{X} - \{\hat{x}\}$ de sorte que $\widehat{X} - \{\hat{x}\}$ serait disconnexe (étant de dimension ≥ 2). Or, d'après [Ferrand & Raynaud, 1970, corollaire 4.4], la flèche

$$\pi_0(\widehat{X} - \{\hat{x}\}) = \pi_0(c^{-1}(X - \{x\})) \rightarrow \pi_0(X - \{x\})$$

est bijective. Or, comme X est intègre de dimension ≥ 2 , l'ouvert $X - \{x\}$ est intègre donc connexe. $\square$

DÉFINITION 3.4. Avec les notations de 3.3, si Z vérifie les conditions équivalentes de 3.3, on dit que Z est c_2 dans X .

REMARQUE 3.5. Si X est intègre et excellent, Z est c_2 si et seulement si $X - Z$ contient tous les points de codimension ≤ 1 . En effet, comme le morphisme de normalisation est fini et X universellement caténaire, on a $\dim \mathcal{O}_{X^{\text{nor}}, z^{\text{nor}}} = \dim \mathcal{O}_{X, p(z^{\text{nor}})}$ pour tout $z^{\text{nor}} \in p^{-1}(Z)$ (cf. [ÉGA IV₂ 5.6.10]).

PROPOSITION 3.6. Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme plat de schémas noethériens et Z un fermé de X . Alors, si Z est c_2 dans X , son image inverse $Z' = f^{-1}(Z)$ est c_2 dans X' . En particulier, la condition c_2 est invariante par localisation Zariski ou étale.

Démonstration. Soit $z' \in Z'$ d'image $z = f(z') \in Z$. On suppose donc (3.3) que toutes les composantes de $A = \widehat{\mathcal{O}_{X, z}}$ sont de dimension ≥ 2 et on veut prouver que toutes les composantes de $B = \widehat{\mathcal{O}_{X', z'}}$ sont de dimension ≥ 2 . On peut donc supposer que f est morphisme local de schémas noethériens, locaux et complets. Comme f est plat, toute composante de X' domine une composante X_0 de X et est une composante de $f^{-1}(X_0)$. On peut donc supposer X intègre de dimension > 1 , de point fermé z . D'après [SGA 2 VIII 2.3], le A -module $\mathcal{O}(X - z)$ est de type fini. Comme B est plat sur A , on déduit que $B \otimes_A \mathcal{O}(X - z) = \mathcal{O}(X' - f^{-1}(z))$ est de type fini sur B . Comme B est noethérien, le sous B -module $\mathcal{O}(X' - z')$ de $\mathcal{O}(X' - f^{-1}(z))$ est de type fini.

Supposons qu'une composante de X' soit de dimension 1. Soit η le point générique d'une telle composante et définissons alors X'_0 comme l'adhérence schématique $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X', \eta})$ dans X' . Le complémentaire $X'_0 - z'$ serait alors réduit à η qui serait isolé dans $X' - z'$. Ainsi $\mathcal{O}(X'_0 - z')$ serait un sous B -module de $\mathcal{O}(X' - z')$, donc de type fini (B est noethérien). A fortiori, $\mathcal{O}(X'_0 - z')$ serait de type fini comme $\mathcal{O}(X'_0)$ -module, ce qui contredit [SGA 2 VIII 2.3] puisque X'_0 est de dimension 1. $\square$

4. Théorème de rigidité de la ramification I : forme faible

Nous allons commencer par démontrer une variante du changement de base lisse qui est cruciale dans la preuve du théorème de rigidité 4.2.1.

4.1. Variante du théorème de changement de base lisse. Soit G un groupe fini. On va démontrer une variante du théorème de changement de base lisse [SGA 4 XVI 1.2] pour les faisceaux de G -torseurs sans hypothèse sur le cardinal de G , mais en se restreignant au cas d'immersions ouvertes (pour une preuve un peu différente, voir [Gabber & Ramero, 2013, 10.2.2]).

THÉORÈME 4.1.1. Considérons un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Supposons X excellent normal, $p : X' \rightarrow X$ lisse et $j : U \rightarrow X$ immersion ouverte telle que U contient tous les points de codimension ≤ 1 . Alors, le morphisme de changement de base $\Phi : p^*j_* \text{Tors}(U, G) \rightarrow j'_* \text{Tors}(U', G)$ est une équivalence.

Démonstration. D'après le théorème de changement de base lisse pour les faisceaux d'ensembles [SGA 4 XVI 1.2], Φ est pleinement fidèle. Il suffit de prouver l'essentielle surjectivité. Soit x' un point géométrique de X' d'image $x = p(x')$. Passant aux fibres, on est ramené à prouver que la flèche d'image inverse des toreseurs

$$(*) \quad H^1(U_{(x)}, G) \rightarrow H^1(U'_{(x')}, G)$$

est bijective, avec de plus x' fermé dans sa fibre [SGA 4 VIII 3.13 b)]. La stricte hensélisation préserve la normalité et la codimension (platitudes). Les propriétés de permanence des anneaux excellents (cf. I-8) assurent donc qu'on peut supposer $X = \text{Spec}(A)$, $X' = \text{Spec}(A')$ avec $A = \mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}}$, $A' = \mathcal{O}_{X', x'}^{\text{hs}}$, strictement locaux, normaux et excellents.

Il se peut que l'extension résiduelle $k(x')/k(x)$ soit purement inséparable. Comme dans la preuve du théorème d'acyclicité locale usuelle ([SGA 4 XV 2.1]), pour se ramener au cas séparable, donc au degré 1, on considère une extension finie $A \subset B$ telle que l'extension résiduelle contienne $k(x')/k(x)$

(on peut par exemple considérer un *gonflement* de A'/A au sens de Bourbaki). On peut supposer B intègre et normal et considérer alors

$$\pi : Y = \operatorname{Spec}(B) \rightarrow X = \operatorname{Spec}(A)$$

ainsi que $Y' = Y \times_X X'$ et V l'image inverse de U dans Y . Le couple (Y, V) vérifie les mêmes propriétés que (X, U) . Le morphisme tautologique $\underline{\operatorname{Tors}}(U, G) \rightarrow \pi_* \underline{\operatorname{Tors}}(\pi^{-1}(U), G)$ est fidèle. On peut alors invoquer 6.2.1 pour ramener la preuve de $(*)$ à l'énoncé analogue sur (Y, V) , autrement dit on peut supposer $k(x) = k(x')$.

Comme p est lisse, le choix de coordonnées locales $t_1, \dots, t_n$ de X' en x' définit un A -isomorphisme $A\{t_1, \dots, t_n\} \xrightarrow{\sim} A'$ où comme d'habitude $A\{t_1, \dots, t_n\}$ désigne l'hensélisé strict de $A[t_1, \dots, t_n]$ à l'origine. Une récurrence évidente permet de supposer $n = 1$. On s'est ramené à la situation

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & X' \\ \left(\begin{array}{c} \sigma \downarrow p \\ \downarrow j \end{array} \right) & \square & \left(\begin{array}{c} \downarrow p \\ \sigma \end{array} \right) \\ U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

avec A strictement local, normal et excellent et σ la section de p définie par l'immersion fermée d'équation $t = 0$. Comme X, X' sont locaux et normaux, ils sont intègres. Les ouverts non vides de X, X' sont donc intègres et donc connexes. Le composé

$$\pi_1(U) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_1(U') \xrightarrow{p_*} \pi_1(U)$$

étant l'identité, il suffit de prouver que σ_* est surjectif. Soit alors V' un revêtement étale connexe de U' . On doit prouver que sa restriction $V \rightarrow U$ au fermé $U \xrightarrow{\sigma} U'$ d'équation $t = 0$ est connexe.

Comme X' est excellent, la clôture intégrale Y' de X' dans V' est finie sur X' , normale et intègre (comme X'). Comme X' est hensélien, il en est de même de Y' qui est donc une union disjointe de ses composants locaux. Comme Y' est intègre, Y' est local. Soit $D \subset Y'$ le diviseur de Cartier d'équation $t = 0$: D est connexe, puisque fermé dans un schéma local.

On a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens et où les flèches verticales sont finies (et dominantes).

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \hookrightarrow & Y' & \longleftarrow & D & \longleftarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U' & \hookrightarrow & X' & \xleftarrow{\sigma} & X & \longleftarrow & U \end{array}$$

Soit x' un point de $D - V$, d'image x dans $X - U$. Comme $D \rightarrow X$ est fini, on a $\dim \overline{\{x'\}} = \dim \overline{\{x\}}$ et $\dim(D) = \dim(X)$. Comme X, D sont caténaires (ils sont même excellents) et D équidimensionnel, on en déduit l'égalité $\dim \mathcal{O}_{D, x'} = \dim \mathcal{O}_{X, x}$ ce qui assure que l'ouvert V dans D contient tous les points de codimension 1 dans D (de même que U contient tous les points de codimension 1 dans X). D'après le lemme XXI-4.2.1 appliqué au diviseur de Cartier connexe du schéma normal, excellent Y' , le schéma V est connexe. $\square$

4.2. Énoncé et réductions.

THÉORÈME 4.2.1 (Rigidité de la ramification). *Soient X, X' des schémas noethériens, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, $U \xrightarrow{\tilde{j}} X$ l'ouvert complémentaire et $X' \xrightarrow{\pi} X$ un morphisme plat. Notons $U' \xrightarrow{\tilde{j}'} X'$ l'immersion ouverte $U' = \pi^{-1}(U) \hookrightarrow X'$. On suppose que π est régulier au-dessus de Z . Soit $\mathcal{C}$ un champ en groupoïdes sur $U_{\text{ét}}$. Alors, la flèche de changement de base*

$$\Phi(\mathcal{C}) : \pi^* \tilde{j}_* \mathcal{C} \rightarrow \tilde{j}'_* \pi^* \mathcal{C}$$

est une équivalence dans les deux cas suivants :

- (i) $\mathcal{C}$ est discret (c'est-à-dire $\mathcal{C}$ équivalent à un faisceau d'ensembles).
- (ii) Z est c_2 et $\mathcal{C} = \underline{\operatorname{Tors}}(U, G)$ avec G un groupe (ordinaire) fini.

En considérant les fibres, on peut supposer que π est un morphisme local de schémas strictement locaux (la condition c_2 ne dépendant que des hensélisés stricts aux points de Z).

Soient x, x' les points fermés respectifs de X, X' . Par récurrence sur la dimension de X' , on peut supposer que $\phi(\mathcal{C})_{\bar{y}'}$ est une équivalence en tout point géométrique $\bar{y}'$ de $X' - \{x'\}$ et il suffit de prouver que $\phi(\mathcal{C})_{x'}$ est une équivalence. On peut de plus supposer $x \in Z$ (sinon $U = X$ et c'est terminé). Par hypothèse, la fibre spéciale $F = \pi^{-1}(x)$ de π est géométriquement régulière.

On a un diagramme commutatif à « carrés » cartésiens (avec des notations un peu abusives)

$$\begin{array}{ccc}
 U' & \longrightarrow & U \\
 \downarrow j' & & \downarrow j \\
 X' - F & \longrightarrow & X - \{x\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{\pi} & X
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 \tilde{j}' \\
 \curvearrowleft
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 \tilde{j} \\
 \curvearrowleft
 \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, la flèche de changement de base associée au carré supérieur est une équivalence de sorte qu'on a une équivalence $\pi^* j_* \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} j'_* \pi^* \mathcal{C}$ sur $X' - F$. Comme X, X' sont strictement henséliens, la flèche de changement de base $\phi(j_* \mathcal{C})_{x'}$

$$\begin{aligned}
 H^0(X, \tilde{j}_* \mathcal{C}) &= H^0(X - \{x\}, j_* \mathcal{C}) \\
 &\xrightarrow{\pi^*} H^0(X' - F, \pi^* j_* \mathcal{C}) \\
 &= H^0(X' - F, j'_* \pi^* \mathcal{C}) \\
 &= H^0(X', \tilde{j}'_* \pi^* \mathcal{C})
 \end{aligned}$$

s'identifie à la flèche d'image inverse

$$(4.2.1.1) \quad \pi^* : H^0(X - \{x\}, j_* \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X' - F, \pi^* j_* \mathcal{C}).$$

Notons $\widehat{X}$ le schéma complété de X le long de son point fermé et $\widehat{X'}$ le complété de X' le long de F . Pour tout S -espace $\mathcal{C}$ sur $S_{\text{ét}}$ avec $S = X, X'$, on note $\widehat{\mathcal{C}}$ son image inverse sur $\widehat{S}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{X'} & \xrightarrow{\gamma'} & X' \\
 \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \pi \\
 \widehat{X} & \xrightarrow{\gamma} & X
 \end{array}$$

où γ, γ' sont les morphismes de complétion, donc sont plats, et $\hat{\pi}$ est plat comme π est un morphisme local de schémas noethériens. Sa fibre spéciale est encore F de sorte qu'elle est géométriquement régulière. Ainsi, $\hat{\pi}$ est formellement lisse ([ÉGA IV₄ 19.7.1]) et donc régulier ([André, 1974]) puisque $\widehat{X}$ est local noethérien complet donc excellent. D'après 3.6, $\widehat{Z} = \widehat{X} - \widehat{U}$ est encore c_2 (dans le cas (ii)). D'après le théorème de rigidité de Gabber (2.1.2) appliqué aux paires henséliennes (X, x) et (X', F) , il suffit, pour prouver que le foncteur 4.2.1.1 est une équivalence, de prouver que le foncteur

$$(4.2.1.2) \quad \hat{\pi}^* : H^0(\widehat{X} - \{x\}, \widehat{j}_* \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\widehat{X'} - F, \hat{\pi}^* \widehat{j}_* \mathcal{C})$$

est une équivalence.

Si $\mathcal{C}$ est un faisceau d'ensembles, on procède comme dans (XIV-2.5.3) pour montrer la bijectivité de (4.2.1.2) et achever la preuve du théorème 4.2.1 dans le cas discret.

Dans le cas (ii), montrons un lemme.

LEMME 4.2.2. *On peut supposer que π est un morphisme essentiellement lisse de schémas strictement locaux et excellents.*

Démonstration. Mais le morphisme de changement de base

$$\iota : \gamma^* j_* \mathcal{C} = \widehat{j_* \mathcal{C}} \rightarrow \widehat{j_*} \gamma^* \mathcal{C} = \widehat{j_*} \widehat{\mathcal{C}}$$

est fidèle. En effet, en considérant les faisceaux de morphismes, il suffit démontrer que le morphisme de changement de base

$$\gamma^* j_* \mathcal{F} \rightarrow \widehat{j_*} \gamma^* \mathcal{F}$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles sur $\mathcal{U}$. La fibre de ce morphisme en un point géométrique $\hat{x}$ de $\hat{X}$ d'image ξ , dans X s'identifie au morphisme d'image inverse

$$\Gamma : H^0(\mathcal{U} \times_X X_{(\xi)}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\hat{\mathcal{U}} \times_{\hat{X}} \hat{X}_{(\hat{\xi})}, \gamma_{\xi}^* \mathcal{F})$$

par le morphisme canonique

$$\gamma_{\xi} : \hat{\mathcal{U}} \times_{\hat{X}} \hat{X}_{(\hat{\xi})} \rightarrow \mathcal{U} \times_X X_{(\xi)}.$$

Mais la platitude de γ assure que γ_{ξ} est surjectif et donc Γ injectif.

D'autre part

$$\widehat{\mathcal{C}} = \underline{\text{Tors}}(\hat{\mathcal{U}}, G)$$

d'après [Giraud, 1971, III.2.1.5.7]. Dans le cas (ii), pour prouver que (4.2.1.1) est une équivalence, on peut donc supposer d'après (6.2.1) que X est complet, donc excellent et π un morphisme local régulier.

D'après le théorème de Popescu ([Swan, 1998]), le morphisme régulier π est limite projective filtrante de morphismes locaux essentiellement lisses $\pi_i : X'_i \rightarrow X$. Notons que les X'_i sont strictement locaux et excellents comme X . Comme les X'_i sont cohérents, le foncteur section globale commute à la limite projective au sens de [SGA 4 VII 5.7] de sorte qu'il suffit de prouver le théorème pour les π_i . $\square$

4.3. Preuve de 4.2.1. On suppose donc que π est un morphisme local essentiellement lisse de schémas excellents et $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}, G)$. On doit prouver pour conclure la preuve du théorème 4.2.1 la variante suivante du théorème de changement de base lisse de Gabber (4.1.1).

PROPOSITION 4.3.1. *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{j'} & X' \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

où π est un morphisme local essentiellement lisse de schémas excellents strictement locaux. On suppose que le fermé complémentaire $Z = X - \mathcal{U}$ est non vide et c_2 (c'est-à-dire sous ces hypothèses, que $\mathcal{U}$ contient les points de codimension 1 (3.5)). Alors, le morphisme

$$\pi^* : H^0(X - \{x\}, j_* \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}, G)) \rightarrow H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \pi^* j_* \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}, G))$$

est une équivalence, où x est le point fermé de X .

Démonstration. Le morphisme de normalisation $p : X^{\text{nor}} \rightarrow X$ étant entier, son image est fermée. Comme p est (ensemblément) dominant, p est surjectif. Comme p est surjectif, le foncteur

$$j_* \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}, G) \rightarrow j_* p_* p^* \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}, G) \stackrel{[\text{Giraud, 1971, III.2.1.5.7}]}{=} p_* j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}^{\text{nor}}, G)$$

est fidèle^(iv). D'après 6.2.1 et le théorème 4.2.1 (i), il suffit de prouver que la flèche

$$(4.3.1.1) \quad \pi^* : H^0(X - \{x\}, p_* j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}^{\text{nor}}, G)) \rightarrow H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \pi^* p_* j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(\mathcal{U}^{\text{nor}}, G))$$

est une équivalence.

Considérons le diagramme cartésien

^(iv) On note $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{\text{nor}}$ le foncteur d'image inverse par p .

$$\begin{array}{ccc}
X^{\text{nor}} & \xrightarrow{\pi^{\text{nor}}} & X^{\text{nor}} \\
\downarrow p' & \square & \downarrow p \\
X' & \xrightarrow{\pi} & X
\end{array}$$

Comme p est fini (donc propre), on a $\pi^* p_* = p'_* \pi^{\text{nor}*}$ de sorte que (4.3.1.1) s'identifie à la flèche d'image inverse

(4.3.1.2)

$$\pi^{\text{nor}*} : H^0(X^{\text{nor}} - \{x\}^{\text{nor}}, j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(U^{\text{nor}}, G)) \rightarrow H^0(X'^{\text{nor}} - (\pi^{\text{nor}})^{-1}\{x\}^{\text{nor}}, \pi^{\text{nor}*} j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(U^{\text{nor}}, G)).$$

Notons que, la condition c_2 ne dépendant que du normalisé, le complémentaire Z^{nor} de U^{nor} est encore c_2 dans X^{nor} , et U^{nor} contient tous les points de codimension 1. D'après le théorème de changement de base lisse de Gabber 4.1.1, la flèche de changement de base

$$\pi^{\text{nor}*} j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(U^{\text{nor}}, G) \rightarrow j_*^{\text{nor}} \underline{\text{Tors}}(U'^{\text{nor}}, G)$$

est une équivalence de sorte que (4.3.1.2) s'identifie à l'image inverse

$$\pi^{\text{nor}*} : \text{Tors}(U^{\text{nor}}, G) \rightarrow \text{Tors}(U'^{\text{nor}}, G).$$

Il suffit alors de constater que la preuve du théorème 4.3.1 assure que $\pi^{\text{nor}*}$ est une équivalence. $\square$

4.4. Comparaison à la complétion : cas des coefficients abéliens dans le cas non nécessairement noëthérien.

Le paragraphe suivant est une *esquisse* de démonstration de l'analogue du théorème 4.2.1 pour les coefficients abéliens. Le cas des schémas noëthériens est traité dans [Fujiwara, 1995]. Nous reproduisons ici fidèlement une lettre d'Ofer Gabber aux éditeurs (20 juin 2012).

Let $(A, I) \rightarrow (A', I')$ be a map of henselian pairs with I finitely generated, $I' = IA'$, $\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A'}$ (I -adic completions). $X = \text{Spec}(A)$, $X' = \text{Spec}(A')$, $\pi : X' \rightarrow X$, $U = X - V(I)$, $U' = X' - V(I')$, $j : U \rightarrow X$, $j' : U' \rightarrow X'$.

CTC : For every torsion abelian sheaf F on U , the base change arrow $\pi^* R^q j_* F \rightarrow R^q j'_* \pi^* F$ is an isomorphism for all q .

Analogue of 4.2.1 (notations as there) : If F is a sheaf of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules on U where $n > 0$ is invertible on X , then $\pi^* R^q j_* F \rightarrow R^q j'_* \pi^* F$ are isomorphisms.

This is reduced to CTC by the same argument.

Sketch of proof of CTC using Zariski-Riemann spaces : For comparing stalks we may assume A , A' strictly henselian and I a proper ideal, and we want

$$(*) \quad H^q(U, F) \xrightarrow{\sim} H^q(U', F).$$

We call a finitely generated ideal $J \subset A$ containing a power of I *admissible*. We consider the admissible blow-ups $\text{Bl}_J(X)$ which form a cofiltered category using X -scheme morphisms. In general there can be more than one X -morphism between two admissible blow-ups but if we restrict ourselves to J 's with $V(J) = V(I)$ (set theoretically) (so that U is schematically dense in the blow-up), there is at most one. Define $J \leq J'$ iff there is an X -morphism $\text{Bl}_{J'}(X) \rightarrow \text{Bl}_J(X)$. This is a filtered preorder. When $V(J) \subset V(J')$, $J \leq J'$ is equivalent to the condition that for some $n > 0$ and ideal K , $J'^n = JK$. Thus we have an isomorphism of the preordered set of admissible J 's of full support in A and the corresponding set for A' . Let $\text{ZRS}_I(X) = \varprojlim \text{Bl}_J(X)$ (a locally ringed space). For the closed point s of X we can consider the special fiber $\text{ZRS}_I(X)_s$ and its étale topos, which for our purposes may be defined as the projective limit of the étale topoi $(\text{Bl}_J(X)_s)_{\text{ét}}$ as in [SGA 4]. It has enough points by Deligne's theorem. The points are given by "geometric points" of $\text{ZRS}_I(X)_s$ (i.e. a point and a choice of a separable closure of the residue field). For every admissible J we have

$$j_J : U \hookrightarrow \text{Bl}_J(X)$$

giving a spectral sequence (using proper base change)

$$(**) \quad H^p(\mathrm{Bl}_J(X)_s, R^q j_{J*} F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F).$$

We pass to the limit using the general theory of [SGA 4 VI]. We get a spectral sequence $(**)_\mathrm{lim}$ involving cohomology on $(\mathrm{ZRS}_J(X)_s)_{\mathrm{\acute{e}t}}$. Since the latter topos is the same for X' , to show $(*)$ we use the morphism of the limit spectral sequence to reduce to stalks of the limits of the $R^q j_{J*}$ sheaves.

Using the study in [Fujiwara, 1995] of the local rings of ZRS's and their henselizations, one reduces $(*)$ to the case of local rings at geometric points of the special fibers of ZRS's. Thus we are reduced to the case A, A' are henselian and I -valuative. Say $I = (\varphi)$. Then $A[\varphi^{-1}]$ is a henselian local ring with maximal ideal corresponding to $P = \bigcap I^n$, and A/P is a henselian valuation ring whose valuation topology is the φ -adic one. In this case to prove $(*)$ one reduces to the corresponding statement for $\mathrm{Frac}(A/P) \rightarrow \mathrm{Frac}(A'/P')$. In fact for $K \rightarrow K'$ a dense embedding of henselian valued fields, if we choose separable closures $K_{\mathrm{sep}}, K'_{\mathrm{sep}}$ and a map between them we have $\mathrm{Gal}(K'_{\mathrm{sep}}/K') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K)$, using forms of Krasner's lemma (cf. [Bourbaki, AC, VI, § 8, exercices 12, 14 a]).

Note: For admissible J , $\mathrm{Bl}_J(X') \rightarrow \mathrm{Bl}_J(X)$ gives an isomorphism on I -adic completions (as in the discussion in the proof of 2.4.4) as for every m the map

$$\bigoplus_n J^n \rightarrow \bigoplus_n J^n A'$$

is an isomorphism mod I^m .

5. Rigidité de la ramification II : forme forte

5.1. Générisations étales immédiates. On note $X_{(x)}, X_{(x)}^h$ et $\widehat{X}_{(x)}$ les localisés, hensélisés et complétés respectivement de X en x . On note $\overline{\{y\}}$ l'adhérence de y dans X munie de sa structure réduite. L'hensélisation et la complétion commutent aux immersions fermées de sorte que $\overline{\{y\}}^h, \widehat{\overline{\{y\}}}$ respectivement coïncident avec l'image inverse de $\{y\}$ par les morphismes d'hensélisation, complétion respectivement. Rappelons (XIV-2.1.2) qu'une générisation $y \in X$ d'un point x d'un schéma X est une *générisation étale immédiate* de x si l'hensélisé strict en $\bar{x}$ de l'adhérence de y a une composante irréductible de dimension 1.

LEMME 5.1.1. Soit y une générisation de x . Notons $c : \widehat{X}_{(x)} \rightarrow X_{(x)}$ le morphisme de complétion. Alors, y est une générisation étale immédiate de x si et seulement si l'un des points maximaux de $c^{-1}(y)$ est une générisation étale immédiate du point fermé de $\widehat{X}_{(x)}$.

Démonstration. Notons pour simplifier $Y = \overline{\{y\}}$. Observons d'abord qu'un des trois schémas $Y_{(x)}, Y_{(x)}^h$ et $\widehat{Y}_{(x)}$ possède un point maximal de dimension nulle si et seulement si chacun est réduit (ensemblément) à son point fermé. On peut donc exclure ce cas. Le morphisme $Y_{(\bar{x})} \rightarrow Y_{(x)}^h$ est fidèlement plat et entier. Donc, l'hensélisé strict possède un point maximal de dimension 1^(v) si et seulement si l'hensélisé $Y_{(x)}^h$ possède un point maximal de dimension 1. D'après (3.3), $Y_{(x)}^h$ possède un point maximal de dimension 1 si et seulement si $\widehat{Y}_{(x)}$ possède un point maximal de dimension 1. Par platitude de $\widehat{Y}_{(x)} \rightarrow Y$, il s'envoie nécessairement sur y , le point générique de Y . $\square$

On peut caractériser agréablement les générisations étales immédiates.

LEMME 5.1.2. Soit $f : X_{(\bar{x})} \rightarrow X_{(x)}$ le morphisme d'hensélisation strict. Les générisations étales immédiates de x sont les images $y = f(y')$ des $y' \in X_{(\bar{x})}$ tels que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$.

Démonstration. Soit $y' \in X_{(\bar{x})}$ tel que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$. L'image $y = f(y')$ est une générisation stricte de x (car par exemple les fibres de f sont discrètes). Pour cette même raison, $\overline{\{y'\}}$ est une composante de $f^{-1}(\overline{\{y\}}) = \overline{\{y\}}_{(\bar{x})}$. Inversement, si y est une générisation étale immédiate de x , le point générique

^(v)On devrait plutôt dire point maximal dont l'adhérence est de dimension 1.

y' d'une composante de dimension 1 de $\overline{\{y\}}_{(\bar{x})}$ s'envoie sur y (platitude de f) et son adhérence est de dimension 1. $\square$

EXEMPLE 5.1.3. Prenons l'exemple du pincement de [ÉGA IV₂ 5.6.11]. En conservant les notations de *loc. cit.*, l'anneau pincé C est local noethérien de dimension 2 et son normalisé a deux idéaux maximaux de hauteur 1, 2 respectivement. D'après 3.2, l'hensélisé de C a deux composantes irréductibles de dimension 1 et 2 de points génériques c, c' . Comme dans la preuve de XIV-2.1.9, ceci assure l'existence de $\bar{c}$ (au-dessus de c) dans l'hensélisé strict de C dont l'adhérence est de dimension 1 et donc que le point générique de $\text{Spec}(C)$ est une générisation étale immédiate de son point fermé.

5.2. Couples associés et condition (*). Commençons par une définition.

DÉFINITION 5.2.1. Soit x un point d'un schéma X . Choisissons une clôture séparable de $k(x)$ définissant un point géométrique $\bar{x}$ de X .

- (i) Soit G un schéma en groupes sur X . On définit les sections locales de G à support dans $\bar{x}$ par la formule

$$H_{\bar{x}}^0(G) = \text{Ker}(H^0(X_{(\bar{x})}, G) \rightarrow H^0(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}, G)).$$

- (ii) Soit $\mathcal{C}$ un champ (en groupoïdes) sur $X_{\text{ét}}$ et p un nombre premier. On dit que (x, p) est **associé** de $\mathcal{C}$ et on écrit $(x, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{C}_{\bar{x}}$ tel que $H_{\bar{x}}^0(\text{Aut}(\sigma))$ ait de la p -torsion.
- (iii) Soit $\mathcal{C}$ un champ ind-fini (en groupoïdes) sur un ouvert U de X . On dit que $\mathcal{C}$ vérifie la condition (*) si pour tout $x \in X - U$ de caractéristique $p > 0$, il n'existe pas de générisation étale immédiate y de x telle que $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$.

Remarquons que la condition (x, p) associé ne dépend pas du choix de la clôture séparable de $k(x)$.

EXEMPLE 5.2.2. Supposons X normal et G groupe fini. Soit U un ouvert de X . Alors, (x, p) est associé de $\mathcal{C} = \text{Tors}(U, G)$ si et seulement si $p \mid \text{card}(G)$ et x est un point maximal de U . En effet, l'unique objet de $\mathcal{C}_{\bar{x}}$ est le torseur trivial σ et $\text{Aut}(\sigma) = G$. Or, $X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$ est connexe (resp. vide) si x est non maximal (resp. maximal). Ainsi, on a $H_{\bar{x}}^0(\text{Aut}(\sigma)) = \{1\}$ (resp. $H_{\bar{x}}^0(\text{Aut}(\sigma)) = G$). On déduit que $\mathcal{C}$ vérifie (*) si et seulement si U contient tous les points de codimension 1 dont la caractéristique divise l'ordre de G .

LEMME 5.2.3. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat de schémas noethériens, $x \in X$ d'image $y = f(x)$ dans Y et $\mathcal{C}$ un champ en groupoïdes sur Y . Alors, $(x, p) \in \text{Ass}(f^*\mathcal{C})$ si et seulement si $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ et $x \in \text{Max}(f^{-1}(y))$.

Démonstration. Choisissons un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x , qui définit $\bar{y}$ au-dessus de y .

Supposons $(x, p) \in \text{Ass}(f^*\mathcal{C})$. Comme la flèche $(f^*\mathcal{C})_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{C}_{\bar{y}}$ est une équivalence, il existe $\sigma \in \mathcal{C}_{\bar{y}}$ et $g \in \text{Aut}(\sigma)$ tel que f^*g est d'ordre de p et de support $\{\bar{x}\}$. Notons F l'hensélisé strict de $f^{-1}(y)$ en $\bar{x}$. C'est aussi la fibre de l'hensélisé $\varphi : X_{(\bar{x})} \rightarrow Y_{(\bar{y})}$ de f au-dessus de $\bar{y}$. Si F n'était pas réduit à $\bar{x}$, un des points de F ne serait pas dans le support de f^*g de sorte que f^*g serait l'identité en ce point. Mais f^*g est constant sur $F = \varphi^{-1}(\bar{y})$ de sorte que f^*g serait l'identité également en $\bar{x} \in F$, ce qui n'est pas. Donc, F est réduit à $\bar{x}$ de sorte que $\dim \mathcal{O}_{f^{-1}(y), x} = 0$ (puisqu'un anneau local a même dimension que son hensélisé strict) et $x \in \text{Max}(f^{-1}(y))$. De plus, g est trivial sur $\varphi(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}) = Y_{(\bar{y})} - \{\bar{y}\}$ (fidèle platitude de φ) ce qui assure $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$.

Inversement, supposons $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ et $x \in \text{Max}(f^{-1}(y))$. On a donc un automorphisme g d'ordre p de $\sigma \in \mathcal{C}_{\bar{y}}$ de support $\{\bar{y}\}$. Le support de φ^*g est la fibre $\varphi^{-1}(\bar{y}) = f^{-1}(y)_{(\bar{x})}$. Comme x est maximal dans $f^{-1}(y)$, on déduit (dimension) que le schéma local $\varphi^{-1}(\bar{y})$ est de dimension nulle donc réduit à $\bar{x}$, ce qu'on voulait. $\square$

COROLLAIRE 5.2.4. Soit (X, x) un schéma local noethérien hensélien, $U = X - \{x\}$ l'ouvert complémentaire du point fermé et $c : \hat{X} \rightarrow X$ le morphisme de complétion. Alors, le champ en groupoïdes $\mathcal{C}$ sur U vérifie (*) si et seulement si $\hat{\mathcal{C}} = c^*\mathcal{C}$ vérifie (*).

Démonstration. On note encore x le point fermé de $\widehat{X}$ et on choisit un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x .

Supposons que $\mathcal{C}$ vérifie (*). Soit $(y, p = \text{car}(x)) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ et notons Y l'adhérence de y dans X . Il s'agit de montrer que toutes les composantes de $Y_{(\bar{x})}$ sont de dimension ≥ 2 , ou encore (3.3) que toutes les composantes de Y sont de dimension ≥ 2 . Mais c'est bien le cas car, d'après le lemme 5.2.3, on a $(\hat{y}, p) \in \text{Ass}(\widehat{\mathcal{C}})$ pour tout point maximal $\hat{y}$ de $\widehat{Y}$.

Inversement, supposons que $\mathcal{C}$ vérifie (*). Soit donc $(\hat{y}, p = \text{car}(x)) \in \text{Ass}(\widehat{\mathcal{C}})$ et soit $y = c(\hat{y})$. D'après le lemme 5.2.3, $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ et $\hat{y}$ est maximal dans $c^{-1}(y) = \widehat{Y}$ où $Y = \overline{\{y\}}$. Alors, toutes les composantes de $Y_{(\bar{x})}$ (donc de $\widehat{Y}$ d'après (3.3)) sont de dimension > 1 . En particulier, $\dim \{\hat{y}\} > 1$, ce qu'on voulait. $\square$

5.3. Le théorème de rigidité de la ramification.

THÉORÈME 5.3.1 (Rigidité de la ramification II). *Soit $\pi : X' \rightarrow X$ un morphisme plat de schémas noethériens, régulier au-dessus d'un sous-schéma fermé $Z \subset X$. Soit $j : U = X - Z \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire de Z et $\mathcal{C}$ un champ ind-fini sur U vérifiant la condition (*). Alors, la flèche de changement de base $\pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow j'_* \pi'^* \mathcal{C}$ est une équivalence.*

Démonstration. D'après le théorème de rigidité de la ramification I (4.2.1), le théorème est vrai dans le cas discret de sorte que $\pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow j'_* \pi'^* \mathcal{C}$ est toujours pleinement fidèle. Comme dans la preuve de 4.2.1, on peut supposer X, X' strictement locaux de point fermés x, x' et π morphisme local. Par récurrence sur la dimension de X , on peut supposer que le changement de base par π est une équivalence pour l'immersion $U \hookrightarrow X - \{x\}$ de sorte qu'on peut supposer $U = X - \{x\}$. Comme dans la preuve de 4.2.1 et en utilisant l'invariance par complétion de la condition (*) (5.2.4), on peut supposer de plus X complet et π morphisme essentiellement lisse et local et il s'agit de démontrer que la flèche

$$\pi^* : H^0(X - \{x\}, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \mathcal{C}')$$

est essentiellement surjective.

Soit donc σ' un objet de $H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \mathcal{C}')$. La condition (*) étant stable par passage aux sous-gerbes (maximales), on peut comme dans la preuve de 6.2.2 en considérant la sous-gerbe maximale de $\mathcal{C}'$ engendrée par σ' , supposer de plus que $\mathcal{C}$ est une gerbe. Comme $\mathcal{C}$ est ind-finie, on peut supposer que $\mathcal{C}$ est constructible (8.3.3).

Pour tout point maximal $y \in U$, notons i_y le morphisme canonique

$$i_y : \text{Spec}(k(y)) \rightarrow U = X - \{x\}.$$

La catégorie fibre de $i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$ sur un ouvert étale $V \rightarrow U$ s'identifie aux sections rationnelles de $\mathcal{C}$ définies au voisinage des points maximaux de V au-dessus de y . Soit

$$\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} := \prod_{y \in \text{Max}(U)} i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$$

le morphisme déduit des morphismes d'adjonction.

Pour toute section $\tau \in H^0(U, \mathcal{D})$ (vu comme un morphisme de U -espaces $\tau : U \rightarrow \mathcal{D}$), le champ des relèvements $K(\tau) = U \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$ associé est un champ en groupoïdes. Le morphisme canonique

$$K(\tau) \rightarrow \mathcal{C}$$

est fidèle ([Giraud, 1971, IV.2.5.2]). Comme $\mathcal{C}$ est constructible et vérifie (*), il en est de même des sous-gerbes maximales de $K(\tau)$.

Il suffit alors (exercice) de vérifier que la flèche de changement de base est essentiellement surjective pour

- 1) les gerbes $\mathcal{G} = i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$;
- 2) les sous-gerbes maximales du champ des relèvements $K(\tau) = U \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$ associée à $\tau \in H^0(U, \mathcal{D})$.

5.3.2. *Premier cas : changement de base pour $\mathcal{G} = i_{y*}i_y^*\mathcal{C}$.* Supposons donc $\mathcal{G} = i_{y*}i_y^*\mathcal{C}$. Quitte à changer X, U en $\overline{\{y\}}, U \cap \overline{\{y\}}$, on peut supposer que X est irréductible de point générique y .

Si la dimension de X est 1, on a $U = \{y\}$ et $\mathcal{G}_y = \text{Tors}(\text{Spec}(\overline{k(y)}), G)$ avec $p = \text{car}(y)$ ne divisant pas l'ordre de G (cf. l'argument dans l'exemple 5.2.2). On invoque alors le changement de base par un morphisme lisse usuel ([Giraud, 1971, VII.2.1.2]).

On suppose donc que la dimension de X est > 1 .

Choisissons une clôture séparable $k(y) \hookrightarrow k_y$ et notons $j_y : \text{Spec}(k_y) \rightarrow U$ est le morphisme canonique. On a

$$j_y^*\mathcal{C} = \text{Tors}(\text{Spec}(k_y), G)$$

où G est un groupe fini constant. Comme

$$i_{y*}i_y^*\mathcal{C} \rightarrow j_{y*}j_y^*\mathcal{C}$$

est fidèle, on peut (6.2.1) remplacer $\mathcal{G}$ par $j_{y*}j_y^*\mathcal{C} = j_{y*}\text{Tors}(\text{Spec}(k_y), G)$.

LEMME 5.3.3. *On a $R^1j_{y*}G = \{*\}$ et $j_{y*}\text{Tors}(\text{Spec}(k_y), G) = \text{Tors}(U, j_{y*}G)$.*

Démonstration. La seconde égalité découle de la première et de la formule ([Giraud, 1971, V.3.1.5])

$$\pi_0(j_{y*}\text{Tors}(\text{Spec}(k_y), G)) = R^1j_{y*}G.$$

Soit $\tilde{A}$ l'hensélisé strict de $X = \text{Spec}(A)$ en un point géométrique $\tilde{x}$ de X . C'est une limite inductive filtrante d'algèbres A_i de type fini qui sont génériquement étales. On déduit que $j_y^{-1}(\text{Spec}(\tilde{A}))$ est le spectre de la limite inductive filtrante des algèbres étales $B_i = k_y \otimes_{k(y)} A_i$ qui sont donc scindées puisque k_y est séparablement clos. Ainsi, les schémas considérés étant cohérents, on a

$$(R^1j_{y*}G)_{\tilde{x}} = H^1(j_y^{-1}(\text{Spec}(\tilde{A})), G) = \varinjlim H^1(\text{Spec}(B_i), G) = \{*\}.$$

□

En terme de module galoisien, $j_{y*}G$ est l'induite (continue) $\text{Hom}_c(\Gamma, G)$ où Γ est le groupe profini $\text{Gal}(k_y/k(y))$. En écrivant $\Gamma = \text{colim Gal}(K_\alpha/k(y))$ où $(K_\alpha/k(y))_\alpha$ est le système inductif des sous-extensions galoisiennes finies de $k_y/k(y)$, on trouve

$$j_{y*}G = \lim j_{\alpha*}G$$

où $j_\alpha : \text{Spec}(K_\alpha) \rightarrow \text{Spec}(k(y)) \rightarrow U$ est le morphisme canonique. Comme U, U' sont noethériens donc cohérents, on a

$$H^0(U, \text{Tors}(U, \text{colim } j_{\alpha*}G)) = \text{colim } H^0(U, \text{Tors}(U, j_{\alpha*}G))$$

et

$$\begin{aligned} H^0(U', \pi'^*\text{Tors}(U, \text{colim } j_{\alpha*}G)) &= H^0(U', \text{Tors}(U', \pi'^*\text{colim } j_{\alpha*}G)) \\ &= \text{colim } H^0(U, \text{Tors}(U', \pi'^*j_{\alpha*}G)) \end{aligned}$$

de sorte qu'on est réduit pour le cas 1) à étudier le changement de base pour la gerbe $\mathcal{G}_\alpha = \text{Tors}(U, j_{\alpha*}G)$.

Soit $p : W \rightarrow X$ la normalisation de X dans $\text{Spec}(K_\alpha) \rightarrow X$: c'est un morphisme fini (car X est excellent) et surjectif de sorte que W est semi-local et hensélien (comme X). On déduit que W est la réunion disjointe de ses hensélisés aux points fermés. Comme W est intègre, W est strictement local : on note w son point fermé w . De plus, W est normal, donc géométriquement unibranche de sorte que $j_{\alpha*}G = p_*G_{|W-w}$. Comme R^1p_*G est trivial (p est fini), on déduit l'égalité

$$\mathcal{G}_\alpha = p_*\text{Tors}(W - \{w\}, G)$$

comme dans la preuve du lemme 6.3.3 *infra*.

En utilisant le changement de base propre pour p , on est ramené à prouver que la flèche

$$\text{Tors}(W - \{w\}, G) \rightarrow \text{Tors}(W' - \pi^{-1}\{w\}, G)$$

est une équivalence.

Rappelons qu'on a supposé que la dimension de X (ou W , c'est la même chose) est > 1 . Dans ce cas, $\{w\}$ est c_2 dans W et on invoque la variante du théorème de changement de base lisse de Gabber (4.3.1).

5.3.4. *Deuxième cas : changement de base pour une sous-gerbe maximale K du champ des relèvements $K = K(\tau)$.* La gerbe K vérifie $(*)$ comme $K(\tau)$. Comme $\Psi_{\bar{y}}$ est une équivalence pour tout point maximal $\bar{y} \in \mathcal{U}$, on déduit que $K(\tau)_{\bar{y}}$ est ponctuel et donc que $K_{\bar{y}}$ est la gerbe triviale en tous ces points. Par hypothèse de récurrence, il suffit pour achever la preuve de prouver le lemme suivant.

LEMME 5.3.5. *Il existe une immersion fermée $i : F \rightarrow X$ nulle part dense telle que $K = i_* i^* K$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $\bar{y}$ maximal, il existe un ouvert de Zariski contenant $\bar{y}$ sur lequel K est triviale. Par construction, il existe un voisinage étale $V \rightarrow \mathcal{U}$ de $\bar{y}$ et $\sigma \in K(V)$. Comme $\underline{\text{Aut}}(\sigma)$ est un faisceau constructible de $V_{\text{ét}}$, l'isomorphisme

$$\{\text{Id}\}_{\bar{y}} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}(\sigma)_{\bar{y}}$$

provient d'un isomorphisme

$$\{\text{Id}\}_W \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}(\sigma)_W$$

sur un voisinage étale $W \rightarrow V \rightarrow \mathcal{U}$ de $\bar{y}$. Quitte à localiser, on peut supposer que $W \rightarrow \mathcal{U}$ est un revêtement galoisien de son image. La section σ descend sur $\mathcal{U}$ et n'a pas d'automorphisme par construction. Ainsi, la restriction à $\mathcal{U}$ de K est une gerbe neutre avec groupe d'automorphisme triviale, donc est triviale. $\square$

6. Appendice 1 : sorites champêtres

6.1. Dans la situation du théorème 2.1.2, on sait déjà (2.1.1 (i)) que le foncteur $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\widehat{\mathcal{U}}, \pi^* \mathcal{C})$ est pleinement fidèle que $\mathcal{C}$ soit ind-fini ou non.

Soit $\mathcal{C}$ un champ ind-fini sur $Y_{\text{ét}}$. On cherche des conditions assurant que l'hypothèse

HYPOTHÈSE 6.1.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. On suppose que pour tout faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur $Y_{\text{ét}}$, la flèche $H^0(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, f^* \mathcal{F})$ est bijective.

entraîne que la conclusion

CONCLUSION 6.1.2. La flèche $\phi : H^0(Y, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X, f^* \mathcal{C})$ est une équivalence de catégories.

est vraie, autrement dit assurant que l'assertion

ASSERTION 6.1.3. On a l'implication 6.1.1 $\Rightarrow$ 6.1.2.

est vraie. On sait déjà que 6.1.1 entraîne que ϕ est pleinement fidèle (cf. 2.1).

6.2. **Premières réductions.** Commençons par un lemme formel :

LEMME 6.2.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas et $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ un morphisme de champs sur Y qu'on suppose fidèle. Si 6.1.3 est vraie pour $\mathcal{C}_2$, alors 6.1.3 est vraie pour $\mathcal{C}_1$.

Démonstration. On a déjà observé (2.1) que ϕ est pleinement fidèle. Soit donc

$$c_1^X \in H^0(X, f^* \mathcal{C}_1) = \text{Hom}_X(X, f^* \mathcal{C}_1)$$

dont on cherche un antécédent dans $H^0(Y, \mathcal{C}_1)$. Son image

$$c_2^X \in H^0(X, f^* \mathcal{C}_2)$$

a un antécédent (à isomorphisme près)

$$c_2^Y \in H^0(Y, \mathcal{C}_2).$$

Le couple $(c_1^X, c_2^X = f^* c_2^Y)$ définit une section du champ des relèvements

$$K(f^* c_2^X) = X \times_{f^* \mathcal{C}_1} f^* \mathcal{C}_2.$$

Mais (associativité du produit fibré) $K(f^*c_2^Y)$ s'identifie à

$$f^*K(c_2^Y) = f^*(Y \times_{\mathcal{C}_1} \mathcal{C}_2).$$

Or, $K(c_2^Y)$ est un faisceau d'ensembles car $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ est fidèle. Donc, $(c_1^X, c_2^X = f^*c_2^Y) \in H^0(X, f^*K(c_2^Y))$ a un unique antécédent de la forme (c_1^Y, c_2^Y) et c_1^Y est bien l'antécédent cherché. $\square$

LEMME 6.2.2. Si 6.1.3 est vrai pour toute gerbe (resp. toute gerbe ind-finie), alors 6.1.3 est vrai pour tout champ (resp. tout champ ind-fini).

Démonstration. Soit $t \in H^0(X, f^*\mathcal{C})$ et $\gamma_t \subset f^*\mathcal{C}$ la sous-gerbe maximale engendrée par t dans $f^*\mathcal{C}$ ([Giraud, 1971, III.2.1.3.2])^(vi). Ceci définit une section $\tau \in \pi_0(f^*\mathcal{C})$ du faisceau d'ensembles $\pi_0(f^*\mathcal{C})$ des sous-gerbes maximales de $f^*\mathcal{C}$ (loc. cit., 2.1.4). D'après loc. cit., 2.1.5, la flèche naturelle

$$\pi_0(f^*\mathcal{C}) \rightarrow f^*\pi_0(\mathcal{C})$$

est bijective. Mais, par hypothèse, la flèche

$$H^0(Y, \pi_0(\mathcal{C})) \rightarrow H^0(X, f^*\pi_0(\mathcal{C})) = H^0(X, \pi_0(f^*\mathcal{C}))$$

est bijective de sorte qu'il existe une (unique) sous-gerbe (maximale) $\gamma \subset \mathcal{C}$ telle que $f^*\gamma = \gamma_t$, qui sera ind-finie si $\mathcal{C}$ l'est. L'image dans $H^0(Y, \mathcal{C})$ de l'antécédent de $t \in H^0(X, f^*\gamma)$ dans $H^0(Y, \gamma)$ est l'antécédent cherché. $\square$

6.3. Réduction au cas d'un champ de toseurs sous un groupe fini constant. Admettons pour un instant le résultat suivant, généralisation au cas des champs de la résolution flasque de Godement.

LEMME 6.3.1 (Lemme d'effacement). Soit γ une gerbe ind-finie sur un schéma cohérent X . Il existe un faisceau de groupes ind-fini $\mathcal{G}$ sur X et un foncteur fidèle $\gamma \hookrightarrow \underline{\text{Tors}}(X, \mathcal{G})$.

On peut alors prouver le critère suivant :

PROPOSITION 6.3.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas cohérents. On suppose que pour tout faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur Y , la flèche $H^0(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{F})$ est bijective (6.1.1). On suppose en outre que pour tout morphisme fini $p : Y' \rightarrow Y$ induisant $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ et tout groupe fini constant G , la flèche $\text{Tors}(Y', G) \rightarrow \text{Tors}(X', G)$ est une équivalence. Alors, pour tout champ ind-fini $\mathcal{C}$ sur Y , la flèche $H^0(Y, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{C})$ est une équivalence.

Démonstration. Seule l'essentielle surjectivité pose problème. Les lemmes d'effacement, 6.2.1 et 6.2.2 permettent de supposer que $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(Y, \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est un groupe ind-fini sur Y . Comme X, Y sont cohérents, la cohomologie non abélienne commute aux limites inductives filtrantes [SGA 4 VII rem. 5.14]. Comme $\mathcal{G}$ est ind-fini, il est limite inductive filtrante de faisceaux de groupes constructibles [SGA 4 IX 2.7.2] : on peut donc supposer $\mathcal{G}$ constructible. Puisque Y est cohérent, il existe (loc. cit., 2.14) une famille finie de morphismes finis $p_i : Y_i \rightarrow Y$ et des groupes finis constants G_i tels que $\mathcal{G}$ se plonge dans le produit $\prod p_{i*}G_i$. On a donc un morphisme fidèle

$$\underline{\text{Tors}}(Y, \mathcal{G}) \hookrightarrow \underline{\text{Tors}}(Y, \prod p_{i*}G_i) = \prod \underline{\text{Tors}}(Y, p_{i*}G_i)$$

grâce à [Giraud, 1971, III.2.4.4].

Utilisant à nouveau 6.2.1, on peut supposer

$$\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(Y, p_*G)$$

avec G groupe fini constant et $p : Y' \rightarrow Y$ fini.

LEMME 6.3.3. On a $\underline{\text{Tors}}(Y, p_*G) = p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)$.

Démonstration. Comme p est fini, R^1p_*G est trivial. Mais $\pi_0(p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) = R^1p_*G$ ([Giraud, 1971, V.3.1.9.1]) de sorte que $p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)$ est une gerbe, visiblement neutre et vaut donc nécessairement $\underline{\text{Tors}}(Y, p_*G)$. $\square$

^(vi)Dans loc. cit., $\pi_0(\mathcal{C})$ est noté $\text{Ger}(\mathcal{C})$, qui n'est pas actuellement la notation standard.

Le théorème de changement de base propre pour les faisceaux (trivial dans ce cas) assure qu'on a $f^*p_*G = p'_*f'^*G = p'_*G$. La flèche

$$H^0(Y, p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) \rightarrow H^0(X, f^*p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G))$$

s'identifie alors à la flèche naturelle

$$\begin{aligned} \text{Tors}(Y', G) &= H^0(Y, p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) \\ &\rightarrow H^0(X, f^*p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) \\ &= H^0(X, \underline{\text{Tors}}(X, f^*p_*G)) \quad (\text{d'après 6.3.3 et [Giraud, 1971, III.2.1.5.7]}) \\ &= H^0(X, \underline{\text{Tors}}(X, p'_*G)) \\ &= H^0(X, p'_*\underline{\text{Tors}}(X', G)) \\ &= H^0(X', \underline{\text{Tors}}(X', G)) \\ &= \text{Tors}(X', G) \end{aligned}$$

qui est bijective par hypothèse. $\square$

6.4. Preuve du lemme d'effacement. Soit X un schéma cohérent.

LEMME 6.4.1. *Il existe un schéma affine X' , un morphisme quasi-compact et surjectif $f : X' \rightarrow X$ tel que pour tout $x' \in X'$, le corps résiduel $k(x')$ est la clôture algébrique du corps résiduel $k(f(x'))$.*

Démonstration. Comme X est quasi-compact, on peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines X_i . Le morphisme $X_i \rightarrow X$ est surjectif et quasi-compact (X est quasi-séparé). Comme toutes les extensions résiduelles sont des isomorphismes, on peut donc supposer $X = \text{Spec}(A)$ affine quitte à changer X en $\coprod X_i$.

SOUS-LEMME 6.4.2. *Soient I l'ensemble des polynômes unitaires (non constants) de $A[X]$ et*

$$T'(A) = A[X_P, P \in I]/(P(X_P))$$

et

$$f : X' = \text{Spec } T'(A) \rightarrow X = \text{Spec } A.$$

Le morphisme f est surjectif et, pour tout $\xi \in X'$, le corps résiduel $k(\xi)$ est la clôture algébrique de $k(f(\xi))$.

Démonstration. Soit $x \in X$ et $\overline{k(x)}$ une clôture algébrique de $k(x)$. La fibre schématique $f^{-1}(x)$ est le spectre de

$$B = k(x)[X_P, P \in I]/(\tilde{P}(X_P))$$

où $\tilde{P}$ désigne l'image de $P \in I$ par le morphisme de localisation des coefficients

$$A[X] \rightarrow k(x)[X].$$

Le choix de racines $x_P \in \overline{k(x)}$ pour tous les polynômes P de I définit un point de $f^{-1}(x)$ assurant la surjectivité de f .

Soit alors $\xi \in f^{-1}(x)$: c'est un point fermé car f est entier et $k(\xi)$ est algébrique sur $k(x)$. Soit Q un polynôme unitaire de $k(x)$ de degré $d > 0$. Il existe $a \in A$ d'image $a(x)$ non nulle dans $k(x)$, un polynôme unitaire $P \in I$ et un entier $n > 0$ tel que

$$a^{nd}Q(X) = P(a^nX).$$

On déduit que l'image X_P/a^n dans $k(\xi)$ est une racine de Q . Comme $k(\xi)$ est algébrique sur $k(x)$, ceci assure que $k(\xi)$ est une clôture algébrique de $k(x)$. (C'est un exercice (facile) de théorie de Galois ou [Bourbaki, A, V, § 10, exercice 20].) $\square$

Comme f est quasi-compact puisqu'affine, le lemme est prouvé. $\square$

Dans un second temps, rappelons la construction de la topologie constructible sur X (cf. [ÉGA IV₁ 1.9.13]).

REMARQUE 6.4.3. Pour notre propos, on ne l'utilisera en fait que pour le schéma affine X' .

On construit l'espace topologique X^{cons} dont l'ensemble sous-jacent coïncide avec l'ensemble sous-jacent $|X|$ de X mais dont les ouverts (resp. fermés) sont les parties ind (resp. pro)-constructibles, à savoir les réunions (resp. intersections) de parties constructibles. Comme X est cohérent, X est un espace topologique compact, totalement discontinu ([ÉGA IV₁ 1.9.15]). De plus, la cohérence de X entraîne que les parties constructibles sont alors les réunions finies d'intersection $U \cap (X - V)$ avec U, V ouverts quasi-compacts ([ÉGA III₁ 9.1.3] et [ÉGA IV₁ 1.2.7]). Le complémentaire de $U \cap (X - V)$ étant $(X - U) \cup V$, il est donc également ouvert dans X^{cons} de sorte que X admet une base d'ouverts compacts.

L'identité de $|X|$ induit une application continue $X^{\text{cons}} \rightarrow X$ puisqu'un fermé est pro-constructible. Si $X = \text{Spec}(A)$ est affine, X^{cons} est naturellement homéomorphe au spectre d'une certaine A -algèbre $T(A)$ pour un certain endo-foncteur T de la catégorie des anneaux ([Olivier, 1968], proposition 5). Cet homéomorphisme est compatible à la localisation de sorte que ces structures schématiques se recollent munissant X^{cons} d'une structure naturelle de X -schéma relativement affine compatible avec l'application continue (identique !) $X^{\text{cons}} \rightarrow X$. Si $x \in |X|$, on a $\mathcal{O}_{X^{\text{cons}},x} = k(x)$.

On définit alors

$$f : X^c \rightarrow X$$

comme le composé

$$f : X^c = (X')^{\text{cons}} \rightarrow X' \rightarrow X.$$

Par construction, X^c est compact -en particulier cohérent- (réduit), totalement discontinu et admet une base de voisinages ouverts-compacts (qui sont donc ouverts-fermés puisque X^c est compact donc topologiquement séparé). Ses corps résiduels sont algébriquement clos et f est quasi-compact^(vii) et surjective (comme composé de morphismes quasi-compacts).

Rappelons que le faisceau vide sur un espace topologique est le faisceau associé au préfaisceau de valeur constante $\emptyset$. L'ensemble de ses sections sur tout ouvert non vide est $\emptyset$ et est réduit à un point sur l'ouvert vide.

LEMME 6.4.4. *Tout morphisme étale $f : Y \rightarrow X^c$ est Zariski localement trivial. En particulier, le morphisme canonique de topos $(\varepsilon^{-1}, \varepsilon_*) : X_{\text{ét}}^c \rightarrow X_{\text{Zar}}^c$ est une équivalence. Tout faisceau sur X^c ayant des sections localement a des sections globales. De plus, tout toseur sur X^c est trivial et toute gerbe est neutre.*

Démonstration. Soit $y \in Y$ d'image $x \in X^c$. Comme f est quasi-fini et $k(x)$ algébriquement clos, l'inclusion $k(x) \hookrightarrow k(y)$ est une égalité. Le morphisme composé

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_x) = \text{Spec}(k(x)) = \text{Spec}(k(y)) \rightarrow Y$$

se prolonge au voisinage de x en une section locale de f ce qui prouve le premier point.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (Zariski ou étale, c'est la même chose) sur X^c . Comme X^c est compact, on peut trouver un recouvrement fini par des ouverts compacts U_i sur lesquels $\mathcal{F}$ a une section. On montre par récurrence sur le nombre d'ouverts qu'on peut raffiner ce recouvrement en un recouvrement fini V_j par des ouverts compacts disjoints. Comme pour tout j il existe i tel que $V_j \subset U_i$, le faisceau $\mathcal{F}$ a des sections locales sur chaque V_j . Ces ouverts étant disjoints, ces sections se recollent en une section globale. Le reste suit car tout toseur (resp. toute gerbe) sur X^c a des sections localement. $\square$

La preuve du lemme d'effacement est alors facile. Soit γ une gerbe ind-finie sur X . Le foncteur d'adjonction

$$\gamma \rightarrow f_* f^* \gamma$$

est fidèle car f est surjectif. La gerbe $f^* \gamma$ ([Giraud, 1971, III.2.1.5.6]) est neutre et ind-finie (6.4.4) de sorte qu'elle est équivalente à $\text{Tors}(X^c, \mathcal{G}^c)$ pour faisceau de groupes ind-fini $\mathcal{G}^c$ convenable. Par ailleurs, comme on a déjà vu ([Giraud, 1971, V.3.1.9.1]), le faisceau des sous-gerbes maximales $\pi_0(f_* \text{Tors}(X^c, \mathcal{G}^c))$ s'identifie à $R^1 f_* \mathcal{G}^c$.

LEMME 6.4.5. *Le faisceau $R^1 f_* \mathcal{G}^c$ est trivial (constant ponctuel).*

^(vii) On appliquera ici cette construction à un ouvert (quasi-compact) d'un schéma affine, donc à un schéma séparé de sorte que f sera même affine dans ce cas.

Démonstration. Soit $U \rightarrow X$ un morphisme étale avec U quasi-compact et quasi-séparé. Comme dans la preuve de 6.4.4, $X_U^c \rightarrow X^c$ est étale et donc un isomorphisme local pour la topologie de Zariski car les corps résiduels de X^c sont algébriquement clos. On en déduit que les topos étale et Zariski de X_U^c sont équivalents. Tout $\mathcal{G}^c$ -torseur étale sur X_U^c provient donc d'un toseur Zariski. Comme $X_U^c \rightarrow X^c$ est un isomorphisme local, X_U^c a une base d'ouverts-fermés et donc est séparé. Comme X_U^c est quasi-compact (puisque f est quasi-compact et U quasi-compact comme X), l'espace topologique sous-jacent de X_U^c est de plus compact. On déduit comme dans 6.4.4 que tout toseur sur X_U^c est trivial $H^1(X_U^c, \mathcal{G}^c) = \{*\}$. En passant à la limite (on n'utilise pas ici la cohérence de f), on trouve que les fibres de $R^1 f_* \mathcal{G}^c$ sont triviales. $\square$

D'après le lemme, $\pi_0(f_* \text{Tors}(X^c, G^c))$ est le faisceau ponctuel ce qui assure que $f_* \text{Tors}(X^c, G^c)$ est une gerbe. Comme elle a une section, elle est neutre de groupe $G = f_* G^c$ et s'identifie donc à $\text{Tors}(X, G)$. Mais f est quasi-compact de sorte que G est ind-fini comme G^c [SGA 4 IX 1.6]. La preuve du lemme d'effacement est complète.

7. Appendice 2 : théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck pour les champs ind-finis sur des schémas non noethériens

On va prouver l'énoncé suivant

THÉORÈME 7.1. *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec f propre. Alors, pour tout champ ind-fini $\mathcal{C}$ sur X , la flèche de changement de base $g^* f_* \mathcal{C} \rightarrow f'_* g'^* \mathcal{C}$ est une équivalence.

Notons que ce théorème est connu dans le cas discret [SGA 4 XII 5.1] ainsi que dans le cas où Y est localement noethérien ([Giraud, 1971, VII.2.2.2]). La preuve qui suit est une adaptation de la preuve de ce dernier énoncé.

Démonstration. D'après [Giraud, 1971, VII.2.2.5], il suffit de prouver l'énoncé suivant : soit X propre sur S local hensélien et $i : X_0 \hookrightarrow X$ l'immersion de la fibre fermée. Alors, pour tout champ ind-fini $\mathcal{C}$ sur X , la flèche

$$\gamma : H^0(X, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X_0, i^* \mathcal{C})$$

est une équivalence. Notons que X/S étant propre, il est cohérent donc X est cohérent comme S [SGA 4 VI 2.5]. Ainsi, i est un morphisme cohérent de schémas cohérents. Si $\mathcal{C}$ est discret, le théorème est une conséquence immédiate du théorème de changement de base propre pour les faisceaux d'ensembles [SGA 4 XII 5.1 (i)]. On en déduit que γ est pleinement fidèle. D'après 6.3.2, il suffit de montrer que pour tout morphisme fini $X' \rightarrow X$ (induisant une immersion fermée $X'_0 \hookrightarrow X_0$) et tout groupe fini G , la flèche

$$(7.1.1) \quad \gamma : \text{Tors}(X', G) \rightarrow \text{Tors}(X'_0, G)$$

est une équivalence (et en fait est essentiellement surjective puisqu'on sait déjà qu'elle est pleinement fidèle). On applique alors [SGA 4 XII 5.5 (ii)] au morphisme propre $X' \rightarrow S$ pour conclure. $\square$

8. Appendice 3 : sorites sur les gerbes

On montre que toute gerbe ind-finie sur X noethérien est limite inductive filtrante de ses sous-gerbes constructibles (comparer avec [ÉGA IV₃ IX. 2.2 et 2.9]).

8.1. Image d'un morphisme de champs.

8.1.1. Soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un morphisme (cartésien) de champs sur $X_{\text{ét}}$. On définit l'image $\text{Im}(\varphi) = \varphi(\mathcal{C})$ comme la catégorie ayant pour objets ceux de $\mathcal{C}$ et telles que $\text{Hom}_{\varphi(\mathcal{C})}(g_1, g_2) = \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi(g_1), \varphi(g_2))$, la structure de catégorie fibrée étant déduites des structures (compatibles) de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Notons que $\text{Im}(\varphi)$ est naturellement équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}'_{\varphi}$ de $\mathcal{C}'$ dont les objets sont les images des objets de $\mathcal{C}$. On identifiera $\varphi(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}'_{\varphi}$. On notera $\widetilde{\text{Im}}(\varphi)$ le champ associé au préchamp $\text{Im}(\varphi)$. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}'_{\varphi}$ des objets localement isomorphes à l'image d'éléments de $\mathcal{C}$.

LEMME 8.1.2. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X et $f : W \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Alors,

- (i) la flèche naturelle $\text{Im}(\varphi)_{\bar{x}} \rightarrow \text{Im}(\varphi_{\bar{x}})$ est une équivalence ;
- (ii) on a une équivalence de champs, définie à isomorphisme unique près, $f^* \widetilde{\text{Im}}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{Im}}(f^* \varphi)$.

Démonstration. Les objets de $\text{Im}(\varphi)_{\bar{x}}$ et $\text{Im}(\varphi_{\bar{x}})$ coïncident avec ceux de $\mathcal{C}_{\bar{x}}$ et la flèche naturelle est simplement l'identité. Construisons l'inverse de la flèche. Soit alors $\alpha, \beta \in \mathcal{C}'_{\bar{x}}$ et $\psi \in \text{Hom}(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ qui provient de $\Psi_S \in \text{Hom}_S(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Mais Ψ_S peut être vu comme une flèche de $\text{Im}(\varphi)(S)$: on prend son germe en $\bar{x}$ pour définir l'inverse (qui ne dépend pas des choix). On vérifie que ceci définit l'inverse cherché.

Passons au second point et définissons la flèche. Par adjonction, on doit définir une flèche (cartésienne)

$$(8.1.2.1) \quad \widetilde{\text{Im}}(\varphi) \rightarrow f_* \widetilde{\text{Im}}(f^* \varphi).$$

D'après la 2-propriété universelle du champ associé, il suffit de définir un morphisme cartésien de préchamps

$$\text{Im}(\varphi) \rightarrow f_* \text{Im}(f^* \varphi).$$

Soit $S \rightarrow X$ étale. Les objets du membre de gauche sont les objets de $\mathcal{C}(S)$ tandis que ceux de droites sont ceux de $(f^* \mathcal{C})(f^{-1}(S)) = f_* f^* \mathcal{C}(S)$. La flèche d'adjonction $\mathcal{C} \rightarrow f_* f^* \mathcal{C}$ permet alors de définir la flèche $x \mapsto f^*(x)$ cherchée au niveau des objets. Soient alors x, y des objets de $\mathcal{C}(S)$ et

$$g \in \text{Hom}_S(\varphi(x), \varphi(y)) = \text{Hom}_{\text{Im}(\varphi)(S)}(x, y)$$

C'est donc une section sur S de $\underline{\text{Hom}}(\varphi(x), \varphi(y))$ qui fournit (par image inverse) une section sur $f^{-1}(S)$ de $\underline{\text{Hom}}(f^* \varphi(x), f^* \varphi(y))$ [Giraud, 1971, II.3.2.8.1 (4)], donc une flèche de

$$\text{Hom}_{f^{-1}(S)}(f^* \varphi(x), f^* \varphi(y)) = \text{Hom}_{f^{-1}(S)}((\varphi(f^* x), \varphi(f^* y))) = \text{Hom}_{f_* \text{Im}(f^* \varphi)(S)}(x, y).$$

Le foncteur ainsi défini est visiblement cartésien (comme φ). Le premier point assure que les fibres de ce foncteur, et donc également celles du foncteur correspondant (8.1.2.1), sont des équivalences, ce qui achève de prouver le lemme. $\square$

8.2. Groupoïdes libres.

8.2.1. Soit $\Gamma = E \xrightarrow[b]{s} V$ un graphe orienté (E est l'ensemble des arêtes, V l'ensemble des sommets, b, s les applications « but, source »). On associe (voir [Berger, 1995]) le groupoïde libre $L(\Gamma)$ qu'on peut décrire comme suit. Soit $E^{\pm}$ l'ensemble $E^{\pm} = \{e^{\pm}, e \in E\}$ union disjointe de deux copies de E : ses objets sont les sommets et les morphismes entre $v, v' \in V$ sont les mots (réduits), éventuellement vides,

$$e_1^{\pm} \cdots e_n^{\pm} \text{ avec } s(e_i^{\pm}) = b(e_{i+1}^{\pm}) (i = 1, \dots, n-1), s(e_n^{\pm}) = v, b(e_1^{\pm}) = v'.$$

REMARQUE 8.2.2. Il est bien connu que $L(\Gamma)$ est le groupoïde fondamental $\Pi_1(\Gamma_{\mathbf{R}})$ de la réalisation géométrique $\Gamma_{\mathbf{R}}$ de Γ .

8.2.3. Par construction, les foncteurs de $L(\Gamma)$ dans un groupoïde G s'identifient naturellement aux familles

$$(g_v) \in \text{Ob}(G)^V, (\gamma_e) \in \text{Fl}(G)^E \text{ telles que } \gamma_e \in \text{Hom}_G(g_{s(e)}, g_{b(e)}).$$

Si on préfère, L est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli Groupoïdes $\rightarrow$ Graphes.

8.2.4. La construction se globalise de la manière suivante. Considérons un diagramme de X -schémas étales

$$\Gamma_X : \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & V \\ & \searrow b \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

Par fonctorialité de la construction L , on définit une catégorie fibrée (scindée) en groupoïdes $L(\Gamma_X)$ sur $X_{\text{ét}}$ par la formule $S \mapsto L(\Gamma_X(S))$. Par construction, les fibres de $L(\Gamma_X)$ sont non vides si et seulement si $V \rightarrow X$ est surjectif. Les sections locales sont localement isomorphes si et seulement si pour tout point géométrique $\bar{x} \rightarrow X$, le graphe $E_{\bar{x}} \rightrightarrows V_{\bar{x}}$ est connexe et non vide. Par construction, on dispose de deux sections tautologiques

$$g \in \text{Ob}L(\Gamma_X)(V), \gamma \in \text{Hom}_{L(\Gamma_X)(E)}(s^*g, b^*g)$$

définies par l'identité de V et de E respectivement. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sur $X_{\text{ét}}$. On a alors la propriété d'adjonction suivante : la flèche qui à un foncteur *cartésien*

$$\varphi : L(\Gamma_X) \rightarrow \mathcal{G}$$

associe

$$\varphi(g) \in \mathcal{G}(V), \varphi(\gamma) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}(E)}(s^*\varphi(g), b^*\varphi(g))$$

est une équivalence.

8.3. Constructibilité de sous-gerbes. Considérons un hyperrecouvrement^(viii) de X , à savoir un diagramme de X -schémas étales (de type fini)

$$H_X : \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & V \\ & \searrow b \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

où les flèches $V \rightarrow X$ et $(s, b) : E \rightarrow V \times_X V$ sont surjectives. Pour tout point géométrique $\bar{x} \rightarrow X$, le graphe $H_{\bar{x}}$ est connexe de sorte que $L(H_X)$ est une gerbe. Soit

$$\tilde{g} \in \mathcal{G}(V), \tilde{\gamma} \in \text{Hom}_{\mathcal{G}(E)}(s^*\tilde{g}, b^*\tilde{g})$$

définissant un morphisme cartésien $\varphi : L(H_X) \rightarrow \mathcal{G}$.

DÉFINITION 8.3.1. Une gerbe $\mathcal{G}$ sur $X_{\text{ét}}$ est dite **constructible** si pour tout ouvert étale $S \rightarrow X$, toute section locale $\sigma \in \mathcal{G}(S)$, le faisceau en groupes $\underline{\text{Aut}}(\sigma)$ sur $S_{\text{ét}}$ est constructible.

LEMME 8.3.2. Avec les notations précédentes, supposons $\mathcal{G}$ ind-finie. Alors, l'image $I = \widetilde{\text{Im}}(\varphi)$ est constructible.

Démonstration. Comme la formation de l'image et de L commutent à l'image inverse, on peut procéder par récurrence noethérienne. Il suffit donc de prouver que I est constructible sur un ouvert non vide de X supposé intègre. La constructibilité se testant après n'importe quel changement de base surjectif localement de présentation finie, [SGA 4 IX 2.8], on peut supposer que V, E sont des revêtements étales de X complètement décomposés, autrement dit que H_X est un graphe constant fini Γ .

Soit alors $\sigma \in I(S)$. Comme Γ est constant, σ est localement isomorphe à $n = \text{card}(V)$ sections $\sigma_i \in \mathcal{G}(X)$ deux à deux isomorphes. En particulier, chaque faisceau $\underline{\text{Aut}}(\sigma_i)$ est engendré par un nombre fini de sections provenant d'une famille génératrice finie de $\pi_1(\Gamma_R, i)$ et est contenu dans un faisceau ind-finie de groupes. Ceci assure sa constructibilité (cf. la preuve de [SGA 4 IX 2.9 (iii)]). $\square$

^(viii) La terminologie est abusive : manque la section diagonale $V \rightarrow E$ pour avoir un hyperrecouvrement (tronqué).

PROPOSITION 8.3.3. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas noethériens, $\mathcal{G}$ une gerbe ind-finie sur $Y_{\text{ét}}$ et $\sigma \in H^0(X, \pi^*\mathcal{G})$. Il existe une sous-gerbe constructible $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ telle que $\sigma \in H^0(X, \pi^*\mathcal{G}_1) \subset H^0(X, \pi^*\mathcal{G})^{(ix)}$.

Démonstration. La formule $(\pi^*\mathcal{G})_{\bar{x}} = \mathcal{G}_{\pi(\bar{x})}$ assure que localement σ est isomorphe à l'image inverse d'une section locale de $\mathcal{G}$. Comme Y est quasi-compact, on peut trouver $V \rightarrow Y$ étale (surjectif de type fini) et $\tau \in \mathcal{G}(V)$ telles que $\pi^*\tau$ et σ sont localement isomorphes (pour la topologie étale) sur $X_V := X \times_Y V$ où l'on a encore noté π la seconde projection $X_V \rightarrow V$. Choisissons donc

$$e : X' \rightarrow X_V$$

étale (surjectif de type fini) et un isomorphisme

$$(8.3.3.1) \quad e^*\pi^*\tau \xrightarrow{\sim} e^*p^*\sigma$$

où p désigne la première projection $X_V \rightarrow X$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X X' & \xrightarrow{h} & V \times_Y V \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & \text{pr}_2 & \downarrow \text{pr}_2 \\ X' & \xrightarrow{\pi \circ e} & V \end{array}$$

Par définition, $p \circ e \circ \text{pr}_1 = p \circ e \circ \text{pr}_2$ de sorte que (8.3.3.1) définit un isomorphisme

$$(8.3.3.2) \quad h^*\text{pr}_1^*\tau = \text{pr}_1^*e^*\pi^*\tau \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^*e^*\pi^*\tau = h^*\text{pr}_2^*\tau$$

et donc ([Giraud, 1971, II.3.2.8]) une section globale du faisceau $h^*\underline{\text{Isom}}(\text{pr}_1^*\tau, \text{pr}_2^*\tau)$. Comme précédemment, il existe alors $(s, b) : E \rightarrow V \times_Y V$ étale (surjectif de type fini) et un isomorphisme $\gamma : s^*\tau \rightarrow b^*\tau$ induisant (8.3.3.2) localement sur $X' \times_X X'$. On vérifie alors que l'image

$$\mathcal{G}_1 = \widetilde{\text{Im}}(L(V, E) \xrightarrow{(\tau, \gamma)} \mathcal{G})$$

du morphisme d'adjonction défini par τ et γ (cf. paragraphe précédent) convient. $\square$

REMARQUE 8.3.4. On contourne ici l'absence de sorites sur les limites inductives. L'énoncé devrait être en deux parties : d'abord qu'une gerbe ind-finie sur un schéma noethérien est limite inductive filtrante de ses sous-gerbes constructibles, ce qui est pour l'essentiel le contenu du lemme précédent, ensuite que sur un schéma cohérent, le foncteur sections globales commute aux limites inductives filtrantes.

^(ix) Plus précisément, σ est dans l'image essentielle de $H^0(X, \pi^*\mathcal{G}_1)$ dans $H^0(X, \pi^*\mathcal{G})$.

Le théorème de finitude pour les coefficients non abéliens

Frédéric Déglise

À la mémoire de mon oncle Olivier.

1. Introduction

Le but de l'exposé est de démontrer les théorèmes suivants, qui généralisent le théorème d'Artin (cf. [SGA 4 XIV 1.1]) dans le cas ensembliste et non abélien :

THÉORÈME 1.1. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens. Pour tout faisceau constructible F sur $Y_{\text{ét}}$, le faisceau $f_* F$ est constructible.*

THÉORÈME 1.2. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de type fini entre schémas quasi-excellents. Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers inversibles sur X . Pour tout faisceau constructible de groupes F sur $Y_{\text{ét}}$ de $\mathbb{L}$ -torsion, le faisceau $R^1 f_*(F)$ sur $X_{\text{ét}}$ est constructible.*

THÉORÈME 1.3. *Soit X un schéma excellent, $Z \subset X$ une partie fermée telle que pour toute composante irréductible X' de X , $\text{codim}_{X'}(Z \cap X') \geq 2$. Notons $j : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire de Z . Pour tout groupe fini G , le faisceau $R^1 j_*(G_U)$ est constructible.*

THÉORÈME 1.4. *Soit A un anneau strictement local de dimension 2. On suppose que A est normal, excellent, et on note $X' = \text{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ son spectre épointé. Alors, pour tout groupe fini G , l'ensemble $H^1(X', G)$ est fini.*

Le théorème 1.1 est prouvé dans la section 2. Ce théorème est utilisé par les suivants dans le cas où X est quasi-excellent. Ce cas est beaucoup plus simple, comme nous le dégageons dans la démonstration.

Le théorème 1.2 est réduit — en trois étapes — au théorème 1.3 dans la section 3. Toutefois, le lecteur attentif notera que ce dernier théorème n'est pas un simple cas particulier car il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse sur le cardinal du groupe G .

Le théorème 1.3 est réduit au théorème 1.4 dans la section 4. Cette réduction apparaît en 4.3 et utilise deux lemmes qui ont été établis auparavant (lemmes 3.3.2 et 4.2.2).

Le dernier théorème est bien un cas particulier de 1.3. Toutefois, nous avons choisi de le dégager dans cette introduction à la fois comme un résultat important et comme un point clé. Il est démontré dans la section 5 suivant un raisonnement par l'absurde qui utilise la méthode des ultrafiltres (voir 5.2.1 pour des rappels).

Notations et conventions.

- Quand une topologie sur un schéma est sous-entendue, il s'agit de la topologie étale.
- Étant donné un ensemble D (resp. un groupe G), on notera parfois D (resp. G) pour le faisceau étale constant induit sur un schéma X lorsque X est clair d'après le contexte. Si l'on veut préciser X , on note ce faisceau D_X (resp. G_X), suivant l'usage.
- Quand on parle de la normalisation d'un schéma X , il s'agit du morphisme canonique

$$X' = \coprod_{i \in I} X'_i \rightarrow X$$

où I désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X et X'_i désigne le schéma normalisé de la composante irréductible de X correspondant à i , munie de sa structure de sous-schéma réduit. On dit aussi que X' est le schéma normalisé associé à X .

2. Image directe de faisceaux d'ensembles constructibles

Dans le cas où X est quasi-excellent, la preuve est une application de résultats déjà connus (cf. [SGA 4 IX]). Nous commençons par exposer la démonstration dans ce cas, puis dans le cas général. Toutefois, l'étape de réduction exposée dans la section qui suit est valable dans les deux cas.

2.1. Réduction du théorème. On commence par réduire le théorème 1.1 à l'assertion suivante :

($\mathcal{P}$) Soit D un ensemble fini et $j : U \rightarrow X$ une immersion ouverte entre schémas noethériens. Alors, le faisceau d'ensembles $j_*(D_U)$ est constructible.

Considérons les hypothèses du théorème 1.1. D'après [SGA 4 IX 2.14], on peut trouver un monomorphisme

$$F \rightarrow \prod_{i=1}^n \pi_{i*}(C_i) = Q$$

pour des morphismes finis $\pi_i : Y_i \rightarrow Y$ et des faisceaux constants finis C_i sur Y_i . Comme un sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible ([SGA 4 IX 2.9 (ii)]), il suffit de montrer que $f_*(Q)$ est constructible. On est donc ramené au cas de $(f\pi_i)_*(C_i)$ pour tout i , ce qui montre qu'on peut supposer $F = D_Y$ pour un ensemble fini D .

Notons que dans ce cas, le théorème est local en Y . En effet, si l'on se donne un recouvrement étale de type fini $\pi : W \rightarrow Y$, le morphisme d'adjonction

$$D_Y \rightarrow \pi_* \pi^*(D_Y) = \pi_*(D_W)$$

est un monomorphisme. En lui appliquant f_* , on en déduit un monomorphisme

$$f_*(D_Y) \rightarrow (f\pi)_*(D_W).$$

Il suffit donc de montrer que le membre de droite est constructible ([SGA 4 IX 2.9 (ii)] à nouveau). Notamment, on peut donc supposer que Y est affine.

Alors, f est séparé de type fini. On peut donc considérer une factorisation

$$Y \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} X$$

de f telle que j est une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme propre. Le résultat est connu pour $\bar{f}$ (cf. [SGA 4 XIV 1.1]) donc on est réduit au cas de l'immersion ouverte j , c'est-à-dire à l'assertion ($\mathcal{P}$).

REMARQUE 2.1.1. (i) Si l'on suppose que X est quasi-excellent, le schéma $\bar{X}$ qui apparaît dans la réduction ci-dessus est encore quasi-excellent puisque $\bar{f}$ est de type fini.

(ii) Dans cette réduction, on a vu que ($\mathcal{P}$) est locale en U .

2.2. Cas où X est quasi-excellent. Notons le lemme facile suivant :

LEMME 2.2.1. *Considérons un carré cartésien de schémas noethériens*

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

tel que j est une immersion ouverte et p un morphisme fini surjectif. Alors, pour tout ensemble fini D , si $j'_*(D_{U'})$ est constructible, $j_*(D_U)$ est constructible.

Démonstration. Par hypothèse, q est surjectif. On en déduit que le morphisme d'adjonction

$$D_U \rightarrow q_* q^*(D_U) = q_*(D_{U'})$$

est un monomorphisme. Appliquant j_* , on en déduit un monomorphisme

$$j_*(D_U) \rightarrow p_*(j'_*(D_{U'})).$$

Puisque p est fini, p_* préserve la constructibilité d'après [SGA 4 IX 2.14 (i)]. Le lemme en résulte puisqu'un sous-faisceau d'un faisceau d'ensembles constructible est constructible ([SGA 4 IX 2.9 (ii)]). $\square$

2.2.2. Avant de passer à la preuve dans le cas général, notons que la démonstration du théorème 1.1 dans le cas où X est quasi-excellent est plus simple. Grâce à la remarque précédente, on se réduit à l'assertion $(\mathcal{P})$ dans le cas où X est quasi-excellent. Dès lors, la normalisation $p : X' \rightarrow X$ de X est finie. Ainsi, le lemme précédent appliqué au carré cartésien évident nous ramène au cas où X est normal.

Seul le cas où X et U sont connexes non vides nous intéresse. Alors, d'après [SGA 4 IX 2.14.1], $j_*(D_U) = D_X$, ce qui conclut.

2.3. Cas général.

2.3.1. Considérons les hypothèses de l'assertion $(\mathcal{P})$. Celle-ci est locale en X et il suffit donc de traiter le cas où X est affine, spectre d'un anneau noethérien A . Utilisant le lemme 2.2.1 — en prenant pour X' la somme disjointe des composantes irréductibles de X — on peut supposer aussi que A est intègre. On a déjà vu que $(\mathcal{P})$ est aussi locale en U (point (ii) de la remarque 2.1.1). On peut donc se ramener au cas où $U = \text{Spec}(A_f)$ pour un élément non nul $f \in A$.

Pour prouver $(\mathcal{P})$, nous allons démontrer par induction noethérienne sur les fermés irréductibles Z de X la propriété légèrement plus forte suivante :

(*) Pour tout morphisme fini $Z' \rightarrow Z$, Z' intègre, tout ensemble fini D et toute immersion ouverte $l : V' \rightarrow Z'$, le faisceau $l_*(D_{V'})$ est constructible.

D'après ce qui précède, on est ramené à prouver $(\mathcal{P})$ pour $X = \text{Spec}(A)$ intègre et $U = \text{Spec}(A_f)$, $f \neq 0$, en supposant la propriété d'induction suivante :

($\mathcal{H}$) Pour tout fermé propre Z de X , tout morphisme fini $Z' \rightarrow Z$, tout ensemble fini D et toute immersion ouverte $l : V' \rightarrow Z'$, le faisceau $l_*(D_{V'})$ est constructible.

2.3.2. Soit A' la clôture intégrale de A dans son corps des fractions. On pose $X' = \text{Spec}(A')$, $Z = \text{Spec}(A/(f))$ et on considère le diagramme formé de carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & Z'' \\
 & & & & \downarrow h \\
 U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\
 \downarrow q & & \downarrow p & & \downarrow r \\
 U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \pi \\ \curvearrowright \end{array}$$

tel que i et j sont les immersions évidentes, p (resp. h) est la normalisation de X (resp. Z').

2.3.3. *Première étape (fibres génériques de p).* D'après [Nagata, 1962, 3.3.10], l'anneau A' est un anneau de Krull. Il en résulte que Z' n'a qu'un nombre fini de points génériques $z'_1, \dots, z'_n$. On pose $z_r = p(z'_r)$. Bien que p ne soit pas nécessairement fini, $p^{-1}(z_s)$ est fini et l'extension résiduelle $\kappa(z'_s)/\kappa(z_s)$ est finie (voir [Nagata, 1962, chap. V, 33.10]). D'après le lemme 2.2.1, on peut toujours remplacer A par une extension finie $A \subset B \subset A'$. L'hypothèse $(\mathcal{H})$ est en effet encore vérifiée pour $Y = \text{Spec}(B)$. Dès lors, on peut supposer que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (h1) Pour tout indice s , $p^{-1}(\{z_s\}) = \{z'_s\}$.
- (h2) Pour tout indice s , $\kappa(z'_s)/\kappa(z_s)$ est triviale.

Notons A_s (resp. A'_s) l'anneau localisé de X en z_s (resp. X' en z'_s). Alors, A'_s est un anneau de valuation discrète. Du fait que l'extension induite A'_s/A_s est entière, on déduit que A_s est de dimension 1, ce qui implique que z_s est un point maximal du diviseur Z de X . Comme q est surjectif, on déduit de (h1) que $z_1, \dots, z_n$ est l'ensemble des points génériques de Z .

2.3.4. *Deuxième étape (restriction à un ouvert de Z).* Puisque trivialement $j^*j_*(D_U) = D_U$, il suffit de montrer que $i^*j_*(D_U)$ est constructible. Notons les faits suivants :

- (i) q surjectif : $D_U \rightarrow q_*q^*(D_U) = q_*(D_{U'})$ est un monomorphisme.
- (ii) X' normal, j' dominante : $j'_*(D_{U'}) = D_{X'}$ (voir [SGA 4 IX 2.14.1]).
- (iii) h surjectif : $D_{Z'} \rightarrow h_*h^*(D_{Z'}) = h_*(D_{Z''})$ est un monomorphisme.

On déduit de (i) et (ii) un monomorphisme

$$j_*(D_U) \rightarrow j_*q_*(D_{U'}) = p_*(D_{X'}).$$

Notons que p est pro-fini. Le théorème de changement de base propre s'étend à ce cas, ce qui donne la relation : $i^*p_* = r_*i'^*$. Si on applique i^* au monomorphisme précédent, on déduit de cette relation et de (iii) un monomorphisme composé :

$$\sigma : i^*j_*(D_U) \rightarrow i^*p_*(D_{X'}) = r_*(D_{Z'}) \rightarrow \pi_*(D_{Z''}).$$

Considérons maintenant une immersion ouverte dense $l : V \rightarrow Z$ ainsi que le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z'' & \xleftarrow{l'} & V'' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ Z & \xleftarrow{l} & V. \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif de faisceaux d'ensembles :

$$\begin{array}{ccc} i^*j_*(D_U) & \xrightarrow{\alpha} & l_*l'^*i^*j_*(D_U) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow l_*l'^*\sigma \\ \pi_*(D_{Z''}) & \xrightarrow{\beta} & l_*l^*\pi_*(D_{Z''}). \end{array}$$

Or le morphisme β — induit par l'unité d'adjonction (l^*, l_*) — est un isomorphisme. En effet, l étant une immersion ouverte $l^*\pi_* = \pi_{V*}l'^*$ par changement de base. On obtient donc l'identification : $l_*l^*\pi_*(D_{Z''}) = \pi_{V*}l'_*(D_{V''})$. De plus, à travers cette identification⁽ⁱ⁾ par π_* de l'unité d'adjonction

$$D_{Z''} \rightarrow l'_*l'^*(D_{Z''}) = l'_*(D_{V''}).$$

Ce dernier est un isomorphisme puisque Z'' est normal et l' dense (voir [SGA 4 IX 2.14.1]). Puisque σ est un monomorphisme, on en déduit que α est un monomorphisme.

Or, d'après ($\mathcal{H}$), le faisceau d'ensembles $l_*(D_V)$ est constructible. Pour conclure, il suffit donc (d'après [SGA 4 IX 2.9 (ii)]) de trouver un ouvert dense V de Z tel que

$$(2.3.4.1) \quad j_*(D_U)|_V = D_V.$$

2.3.5. Troisième étape (composantes immergées de Z). Considérons la réunion T des composantes immergées de Z dans X . Alors, l'ouvert $V = Z - T$ satisfait la relation (2.3.4.1).

On doit montrer que pour tout point géométrique $\bar{x}$ de V , la fibre du morphisme canonique $D_V \rightarrow j_*(D_U)|_V$ au point $\bar{x}$ est un isomorphisme. Autrement dit, on doit montrer que le morphisme canonique

$$\pi_0(U \times_X X_{(\bar{x})}) \rightarrow \pi_0(X_{(\bar{x})})$$

est un isomorphisme. En raisonnant par induction sur la dimension de $X_{(\bar{x})}$, on se ramène à montrer que le morphisme suivant

$$(2.3.5.1) \quad \pi_0(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}) \rightarrow \pi_0(X_{(\bar{x})})$$

est un isomorphisme.

Soit x le point de $X = \text{Spec } A$ correspondant à $\bar{x}$. Si x n'est pas un point maximal, puisque V n'a pas de composante immergée,

$$\text{Prof}_x(A/(f)) \geq 1 \Rightarrow \text{Prof}_x(A) \geq 2.$$

D'après le théorème de Hartshorne ([SGA 2 III 3.6]), le morphisme (2.3.5.1) est donc un isomorphisme.

⁽ⁱ⁾On le vérifie facilement en revenant à la définition du morphisme de changement de base à l'aide des adjonctions (l^*, l_*) et (l'^*, l'_*) et en utilisant que la composée suivante de morphismes unités/coûinités est l'identité :

$$l_* \rightarrow l_*l^*l_* \rightarrow l_*.$$

Supposons que x est un point maximal. D'après (h1), il existe un indice i tel que $x = z_i$. Or, d'après (h2), le morphisme entier birationnel

$$X'_{(z'_i)} = \text{Spec}(A'_i) \rightarrow \text{Spec}(A_i) = X_{(z_i)}$$

est radiciel. C'est donc un homéomorphisme universel. On en déduit que le morphisme $X'_{(z'_i)} \rightarrow X_{(z_i)}$ est encore un homéomorphisme, où z'_i est le point géométrique correspondant à la clôture séparable de $\kappa(z_i)$ définie par $\bar{z}_i$. Dès lors, (2.3.5.1) est un isomorphisme puisque la propriété correspondante est vraie pour le schéma normal $X'_{(z'_i)}$. Ceci conclut.

3. Image directe dérivée de faisceaux de groupes constructibles

3.1. Réduction au cas d'un faisceau constant.

LEMME 3.1.1. *Soit $f : Y \rightarrow X$ une morphisme de type fini entre schémas noethériens et $u : F \rightarrow F'$ un monomorphisme de faisceaux de groupes constructibles sur $Y_{\text{ét}}$. Alors, $R^1 f_*(F')$ constructible implique $R^1 f_*(F)$ constructible.*

Démonstration. Posons $C = F'/F$ vu comme faisceau pointé, constructible sur $Y_{\text{ét}}$ par hypothèse. On considère la suite exacte de faisceaux pointés (cf. [SGA 4 XII 3.1])

$$f_*(F') \rightarrow f_*(C) \rightarrow R^1 f_*(F) \xrightarrow{v} R^1 f_*(F').$$

Supposant que $R^1 f_*(F')$ est constructible, on peut trouver une famille génératrice de sections locales $(e_1, \dots, e_n)$ de $R^1 f_*(F')$ où e_i est définie sur un X -schéma étale de type fini V_i . Soit Φ_i le faisceau fibre de v en e_i , défini par le diagramme cartésien de faisceaux (d'ensembles) sur $X_{\text{ét}}$:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_i & \xrightarrow{v_i} & V_i \\ \downarrow & & \downarrow e_i \\ R^1 f_*(F) & \xrightarrow{v} & R^1 f_*(F'). \end{array}$$

où on voit $e_i \in \Gamma(V_i, R^1 f_*(F'))$ comme un morphisme du topos étale de X . Pour montrer que $R^1 f_*(F)$ est constructible, il suffit de montrer qu'il est engendré par une famille finie de sections locales sur des objets quasi-compacts. Il suffit donc de montrer que pour tout i , Φ_i , vu comme un faisceau étale sur V_i grâce au morphisme v_i , est engendré par un nombre fini de sections locales. On est donc ramené à montrer que le faisceau étale Φ_i sur V_i est constructible.

Pour montrer cela, on suppose $X = V_i$ pour simplifier les notations et on utilise l'interprétation de Φ_i en termes de F -objets tordus. Le faisceau Φ_i est un prolongement par le vide d'un faisceau à fibres non vides sur un ouvert U de X . Soit $\bar{x}$ un point géométrique de U . Il existe un voisinage étale V de $\bar{x}$ dans X et une section e de Φ_i sur V/X . Quitte à restreindre le voisinage V , e provient d'un F -torseur P sur $V \times_X Y$. On peut alors tordre par P les faisceaux F , F' et C et obtenir une suite exacte sur V :

$$f_*(F^P) \rightarrow f_*(C^P) \rightarrow R^1 f_*(F^P) \xrightarrow{v^P} R^1 f_*(F'^P).$$

On sait que $\Phi_i|_V$ s'identifie avec le noyau de v^P . On en déduit $\Phi_i|_V \simeq f_*(F'^P) \setminus f_*(C^P)$. Or ce faisceau est constructible d'après le théorème 1.1. $\square$

Considérons les hypothèses du théorème 1.2. D'après [SGA 4 IX 2.14], on peut trouver un monomorphisme de faisceaux de groupes

$$F \rightarrow F' = \prod_{i=1}^r \pi_{i*}(G_i)$$

pour des morphismes finis $\pi_i : Y_i \rightarrow Y$ et des groupes finis G_i pour $i = 1, \dots, r$. Notons que d'après la preuve de *loc. cit.*, on peut supposer que les groupes G_i sont de $\mathbb{L}$ -torsion, du fait que F est de $\mathbb{L}$ -torsion. D'après le lemme précédent, on est réduit au cas de F' . Puisque π_{i*} est exact, on est donc ramené au cas du morphisme $f \circ \pi_i$ et du faisceau constant sur Y_i de groupe G_i pour chaque indice i .

3.2. Réduction au cas d'une immersion ouverte. Le lemme clé dans cette étape de réduction est le suivant :

LEMME 3.2.1. *Soit G un groupe fini. Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ h \nearrow & & \searrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

de morphismes de type fini entre schémas noethériens. Les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) *Si h est surjectif,*
 $R^1 f_*(G_Y)$ *constructible implique* $R^1 g_*(G_{Y'})$ *constructible.*
- (ii) *Si g est propre,*
 $R^1 h_*(G_Y)$ *constructible implique* $R^1 f_*(G_Y)$ *constructible.*

Démonstration. Rappelons que l'on dispose de la suite exacte de faisceaux d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ (cf. [SGA 4 XII 3.2]) :

$$* \rightarrow R^1 g_*(h_* G_Y) \xrightarrow{u} R^1 f_*(G_Y) \xrightarrow{v} g_* R^1 h_*(G_Y).$$

Considérons l'assertion (i). Puisque h est surjectif, le morphisme d'adjonction

$$G_{Y'} \rightarrow h_* h^* G_{Y'} = h_* G_Y$$

est un monomorphisme. Appliquant le lemme 3.1.1, il suffit de montrer que $R^1 g_*(h_* G_Y)$ est constructible. On peut alors conclure puisque le morphisme $u : R^1 g_*(h_* G_Y) \rightarrow R^1 f_*(G_Y)$ est un monomorphisme.

Considérons maintenant l'assertion (ii). Puisque g est propre, le théorème de changement de base propre [SGA 4 XIV 1.1] conjugué avec le théorème 1.1 montre que la source de u est constructible. Par hypothèse et une nouvelle application du théorème 1.1, le but de v est constructible.

Il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration de 3.1.1 sur les fibres du morphisme v associées à une famille finie de sections locales de $g_* R^1 h_*(G_Y)$ qui est génératrice. Chacune de ses fibres est un prolongement par le vide d'un faisceau localement isomorphe au faisceau tordu $R^1 g_*((h_* G_Y^P))$ pour une de ses sections locales représentée par un torseur P . Comme ce faisceau est toujours constructible, on peut conclure. $\square$

Considérons maintenant les hypothèses du théorème 1.2, dans le cas $F = G_Y$. Puisque Y est noethérien, il existe un recouvrement Zariski $\pi : W \rightarrow Y$ tel que W est affine. D'après l'assertion (i) du lemme ci-dessus, il suffit de montrer le théorème pour $f \circ \pi$. On peut donc supposer que Y est affine.

Le morphisme $f : Y \rightarrow X$ est alors quasi-projectif. On peut donc considérer une factorisation $Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{g} X$ de f tel que g est projectif et j est une immersion ouverte. D'après l'assertion (ii) du lemme ci-dessus, nous sommes réduit au cas de l'immersion ouverte j .

3.3. Réduction au théorème 1.3 (i.e. la codimension 2).

3.3.1. Grâce aux deux étapes de réduction précédentes, nous sommes ramenés au cas d'une immersion ouverte dense $j : U \rightarrow X$, X quasi-excellent, et d'un faisceau constant sur U de groupe G . Dans cette étape de réduction, on considère la codimension du complémentaire Z de U dans X .

Pour montrer que $R^1 j_*(G_U)$ est constructible on peut raisonner localement sur X . On peut donc supposer que X est noethérien. Considérons la normalisation $p : X' \rightarrow X$ de X ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Puisque q est surjectif, le morphisme d'adjonction $G_U \rightarrow q_* q^*(G_U)$ est un monomorphisme. D'après le lemme 3.1.1, il suffit donc de montrer que $R^1 j_*(q_* G_{U'})$ est constructible. Or p et q étant finis, $R^1 j_*(q_* G_{U'}) = p_* R^1 j'_*(G_{U'})$. On peut donc supposer que X est normal.

Dès lors, X est somme disjointe de ses composantes irréductibles, et on peut donc le supposer intègre. Notons K son corps des fonctions. Pour une extension finie L/K , on peut considérer le schéma normalisé X' de X dans L , ainsi que le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Par adjonction, on obtient un morphisme canonique

$$\phi_{U/X}^{(L)} : R^1 j_* (G_U) \rightarrow p_* R^1 j'_* (G_{U'})$$

induit par le morphisme de champs sur U qui à un G -revêtement d'un schéma étale V/U associe son pullback sur $V' = V \times_U U'$.

LEMME 3.3.2. *Considérons les hypothèses et notations précédentes. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $R^1 j_* (G_U)$ est constructible.
- (ii) Il existe une extension finie séparable L/K telle que $\phi_{U/X}^{(L)}$ est trivial.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit L/K une extension finie telle que $\phi_{U/X}^{(L)}$ est trivial. Avec les notations qui précèdent, on pose $C = q_*(G_{U'})/G_U$, faisceau sur $U_{\text{ét}}$ pointé de manière évidente. On peut alors former la suite exacte de faisceaux pointés (cf. [SGA 4 XII 3.1]) :

$$j_* q_*(G_{U'}) \rightarrow j_*(C) \rightarrow R^1 j_*(G_U) \xrightarrow{(1)} R^1 j_*(q_*(G_{U'})).$$

Notons que, puisque p est fini, $R^1 j_*(q_*(G_{U'})) = p_* R^1 j'_*(G_{U'})$ et le morphisme (1) s'identifie au morphisme $\phi_{U/X}^{(L)}$. Par hypothèse, la suite exacte ci-dessus implique donc que $R^1 j_*(G) = j_*(C)/j_* q_*(G_{U'})$ ce qui conclut d'après le théorème 1.1.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Considérons une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de sections de $R^1 j_*(G_U)$ qui soit génératrice. Le schéma X étant supposé noethérien, on peut supposer que e_i est définie sur un X -schéma étale de type fini V_i . Quitte à remplacer V_i par un recouvrement étale de type fini, on peut en outre supposer que la section e_i correspond à un revêtement $P_i \rightarrow V_i \times_X U$. Puisque $V_i \times_X U$ est quasi-compact, le schéma P_i est quasi-compact : soit L_{ij}/K la famille finie des extensions de corps correspondant aux points génériques de P_i . On considère la clôture normale L d'une extension de K composée des L_{ij}/K pour tous les indices (i, j) . Par définition, $\phi_{U/X}^{(L)}(e_i) = *$ pour tout entier i et le résultat suit puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. $\square$

REMARQUE 3.3.3. Considérons les notations qui précèdent le lemme. En termes de G -revêtements, la trivialité du morphisme $\phi_{U/X}^{(L)}$ s'interprète comme suit :

- (i) Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de Z et pour tout G -revêtement $\pi : P \rightarrow X_{(\bar{s})} - Z_{(\bar{s})}$, le revêtement $\phi_{U/X, \bar{s}}^{(L)}(P)$ est trivial.
- (ii) Pour tout schéma étale V/X et tout G -revêtement $\pi : P \rightarrow V - Z_V$, il existe un recouvrement étale $W/V \times_X X'$ tel que $\pi|_{W-Z_W}$ s'étend à W (l'extension est alors unique (à isomorphisme unique près) puisque X' est normal).

Dans le cas des immersions ouvertes, on peut renforcer le lemme 3.2.1 comme suit :

LEMME 3.3.4. *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ h \nearrow & & \searrow k \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

d'immersions ouvertes tel que $U \neq \emptyset$, X est intègre, noethérien, normal, quasi-excellent. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $R^1j_*(G)$ est constructible, alors $R^1k_*(G)$ est constructible.
- (ii) Si $R^1h_*(G)$ est constructible et pour tout morphisme fini surjectif $X' \rightarrow X$ où X' est la normalisation de X dans une extension finie de son corps des fractions, $k' = k \times_X X'$, le faisceau $R^1k'_*(G)$ est constructible, alors $R^1j_*(G)$ est constructible.

Démonstration. Remarquons que l'hypothèse sur U et X entraîne que $h_*(G_U) = G_V$ (cf. [SGA 4 IX 2.14.1]).

L'assertion (i) résulte donc simplement du fait que le morphisme canonique $R^1k_*(G_V) \rightarrow R^1j_*(G_U)$ est toujours un monomorphisme.

Considérons les hypothèses de l'assertion (ii). Soit K le corps des fonctions de X . D'après le lemme précédent appliqué à h , on peut trouver une extension finie L/K telle que $\phi_{U/V}^{(L)} = *$. Soit X' le schéma normalisé de X dans L/K , $k' : V' \rightarrow X'$ le pullback de k sur X' . Appliquant le lemme précédent à k' , on peut trouver une extension finie E/L telle que $\phi_{V'/X'}^{(E)} = *$.

On note X'' le normalisé de X dans E/K , $X'' \xrightarrow{p'} X' \xrightarrow{p} X$ les morphismes canoniques. On note h', j', k' (resp. h'', j'', k'') les pullback respectifs de h, j, k sur X' (resp. X''). On peut alors conclure grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & R^1j_*(G) & \longrightarrow & k_*R^1h_*(G) & \\
 & \searrow \text{dashed} & \downarrow \phi_{U/X}^{(L)} & \downarrow k_*\phi_{U/V}^{(L)} & \\
 p_*R^1k'_*(G) & \longrightarrow & p_*R^1j'_*(G) & \longrightarrow & (pk')_*R^1h'_*(G) \\
 \downarrow p_*\phi_{V'/X'}^{(E)} & & \downarrow p_*\phi_{U'/X'}^{(E)} & & \\
 (pp')_*R^1k''_*(G) & \longrightarrow & (pp')_*R^1j''_*(G) & &
 \end{array}$$

La flèche pointillée existe du fait de l'exactitude de la suite horizontale du milieu et de $\phi_{U/V}^{(L)} = *$. On conclut puisque $\phi_{U/X}^{(E)} = (p_*\phi_{U'/X'}^{(E)}) \circ \phi_{U/X}^{(L)}$. $\square$

LEMME 3.3.5. Soit X un schéma régulier et Z un sous-schéma fermé régulier de X . Notons $j : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit n l'ordre de G . Alors, si n est inversible sur X , $R^1j_*(G_U)$ est constructible.

Démonstration. L'assertion est Zariski locale en X . On peut donc supposer que X est affine irréductible et Z est irréductible.

Si Z est de codimension supérieure à 2 dans X , il résulte du théorème de pureté de Zariski-Nagata (cf. [SGA 1 X 3.1, 3.3]) que $R^1j_*(G) = *$ ce qui conclut.

En codimension 1, on peut supposer que Z admet un paramètre régulier $f \in A$. On considère le schéma

$$X' = \text{Spec}(A[t]/(t^n - f)).$$

Le lemme d'Abhyankar absolu (cf. [SGA 1 XIII 5.2]) montre alors précisément que pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Z , pour tout revêtement $E \xrightarrow{\pi} U \times_X X_{(\bar{y})}$ principal galoisien de groupe G , le revêtement $\pi \times_X X' : E' \rightarrow U \times_X X' \times_X X_{(\bar{y})}$ se prolonge à $X' \times_X X_{(\bar{y})}$. Il est donc trivial et le lemme 3.3.2 accompagné de la remarque 3.3.3 permet de conclure. $\square$

Revenons au cas général d'une immersion ouverte $j : U \rightarrow X$ de fermé complémentaire Z , X étant supposé intègre, noethérien, normal, et quasi-excellent. Supposons que l'ordre de G est inversible sur X .

Soit T la réunion des lieux singuliers de X et Z . Posons $V = X - T$ et $W = X - (Z \cup T)$ et considérons les immersions ouvertes correspondantes :

$$\begin{array}{ccc}
 & V & \\
 h \nearrow & & \searrow k \\
 W & \xrightarrow{v} & X \\
 l \searrow & & \nearrow j \\
 & U &
 \end{array}$$

D'après le lemme précédent, $R^1 h_*(G)$ est constructible. D'après le lemme 3.3.4, on est donc ramené à prouver que pour tout morphisme fini surjectif $X' \rightarrow X$ tel que X' est la normalisation de X dans son corps des fractions, $k' = k \times_X X'$, le faisceau $R^1 k'_*(G)$ est constructible. Cette dernière assertion est bien impliquée par le théorème 1.3.

4. Cas de codimension 2 sans hypothèse sur la torsion

4.1. Résolution des singularités.

LEMME 4.1.1. *Soit X un schéma normal, connexe et excellent, $Z \subset X$ une partie fermée de codimension supérieure à 2 et $j : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire.*

Alors, il existe une partie fermée $T \subset Z$ de codimension supérieure à 3 dans X telle que pour tous points géométriques $\bar{s}$ et $\bar{t}$ de $Z - T$ et toute spécialisation $\eta : X_{(\bar{t})} \rightarrow X_{(\bar{s})}$, le noyau du morphisme de spécialisation

$$\eta^* : R^1 j_*(G)_{\bar{s}} \rightarrow R^1 j_*(G)_{\bar{t}}$$

est trivial.

Démonstration. Dans cette preuve, on considère Z muni de sa structure réduite de sous-schéma de X .

Si l'on dénote par X_{sing} le lieu singulier de X , le sous-ensemble

$$T_0 = \overline{(X_{\text{sing}} - Z)} \cap Z$$

est de codimension supérieure à 3 dans X . On peut donc supposer que X_{sing} est inclus dans Z . Le schéma X étant excellent, Z est aussi excellent. Donc quitte à enlever une partie nulle part dense dans Z , on peut supposer que Z est régulier. On se ramène alors au cas où Z est de plus intègre et de codimension 2.

D'après [Lipman, 1978], on peut résoudre la singularité de X au point maximal de Z par une suite d'éclatements et de normalisations. Donc, quitte à retirer de nouveau une partie fermée nulle part dense de Z , on peut supposer qu'il existe un diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 Z' & \longrightarrow & X' & \xleftarrow{j'} & U' \\
 \downarrow & & \downarrow p & \swarrow f & \downarrow q \\
 Z & \longrightarrow & X & \xleftarrow{j} & U
 \end{array}$$

tel que X' est régulier, Z' est un diviseur dans X' , toute composante irréductible de Z' domine Z , p est propre et q est un isomorphisme.

On en déduit donc $R^1 j_*(G) = R^1 f_*(G)$. Comme X' est régulier et U' dominant dans X' , on obtient $j'_*(G_{U'}) = G_{X'}$ (cf. [SGA 4 IX 2.14.1]). On obtient donc un monomorphisme canonique $\rho : R^1 p_*(G) \rightarrow R^1 f_*(G)$.

Considérant les notations du lemme (où l'on a supposé $T = \emptyset$), on obtient donc un diagramme commutatif d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccc} R^1 p_*(G)_{\bar{s}} & \xrightarrow{\rho_{\bar{s}}} & R^1 f_*(G)_{\bar{s}} \\ (1) \downarrow & & \downarrow \eta^* \\ R^1 p_*(G)_{\bar{t}} & \xrightarrow{\rho_{\bar{t}}} & R^1 f_*(G)_{\bar{t}}. \end{array}$$

D'après le théorème de constructibilité appliqué à p (cf. [SGA 4 XIV 1.1]), le faisceau de groupes $R^1 p_*(G)$ est constructible. Du fait que p est un isomorphisme au-dessus de U , on obtient que quitte à retirer un fermé propre de Z , on peut même supposer que $R^1 p_*(G)$ est localement constant. Il résulte donc de [SGA 4 IX 2.13 (i)] que le morphisme (1) est injectif. D'après ce qui précède, $\rho_{\bar{t}}$ est aussi injectif. On obtient donc que la composée $\eta^* \circ \rho_{\bar{s}}$ est un monomorphisme. Il nous suffit donc de vérifier que le noyau de η^* est inclus dans l'image de $\rho_{\bar{s}}$.

Quitte à tirer la situation sur $X_{(\bar{s})}$, on peut supposer que $X = X_{(\bar{s})}$ pour simplifier les notations — notons que Z reste intègre car, étant supposé régulier, il est géométriquement unibranche. On se donne donc un G -revêtement principal $P \rightarrow U'$ qui est trivial sur $U' \times_X X_{(\bar{t})}$. Soit $\bar{P}$ la clôture normale de X' dans P/U' . Nous allons montrer que $\bar{P}/X'$ est étale et donne donc un antécédent à la classe de P/U' par l'application ρ_s comme attendu.

Par construction $\bar{P} \times_{X'} U' = P$, donc $\bar{P}/X'$ est non ramifié au-dessus de U' . Il suffit donc de montrer que $\bar{P}/X'$ est non ramifié au-dessus de Z' . D'après le théorème de Zariski-Nagata (cf. [SGA 1 x 3.1]), il suffit de montrer que $\bar{P}/X'$ est non ramifié en tout point de codimension 1 du schéma régulier X' . D'après ce qui précède, il suffit de traiter les points maximaux z' de Z' . Or, un tel point s'envoie sur le point maximal de Z par construction. Du fait que η est un morphisme de spécialisation, il résulte qu'il existe un point y' de $Z' \times_X X_{(\bar{t})}$ qui s'envoie sur z' . Du fait que $P \times_X X_{(\bar{t})}$ est trivial sur $U' \times_X X_{(\bar{t})}$, il suit que $\bar{P} \times_X X_{(\bar{t})}$ est non ramifié au-dessus de y' . On en déduit que $\bar{P}/X'$ est non ramifié au-dessus de z' ce qui conclut. $\square$

4.2. Un argument « à la Lefschetz ». Pour cet argument, nous utiliserons le lemme suivant, qui est une application des résultats liés à « la méthode de Lefschetz » de [SGA 2 x §2].

LEMME 4.2.1. *Soit X un schéma normal excellent connexe, D un diviseur de Cartier effectif connexe dans X , et $Z \subset D$ une partie fermée de codimension supérieure à 2. Alors, $D - Z$ est connexe.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout point s de Z , le schéma $(D - Z) \times_X X_{(s)}$ est connexe. Par induction sur $\dim(\mathcal{O}_{X,s})$, il suffit de montrer que $(D \times_X X_{(s)} - \{s\})$ est connexe. On peut donc supposer que X est local, de dimension supérieure à 3 et que Z est son point fermé. Considérons le complété $\hat{X}$ du schéma local X . Puisque X est excellent, $\hat{X}$ est encore normal. Puisque le morphisme $\hat{X} \rightarrow X$ est un surjectif, il suffit de montrer que $(D - Z) \times_X \hat{X}$ est connexe. On peut donc supposer en outre que X est complet.

Alors, le spectre épointé $X' = X - Z$ est normal, connexe et équicodimensionnel de dimension supérieure à 2. Il résulte du critère de normalité de Serre (cf. [Matsumura, 1989, 23.8]) que pour tout point fermé x de X' ,

$$\text{prof}(\mathcal{O}_{X',x}) \geq 2.$$

Dès lors, d'après [SGA 2 x 2.1] (voir aussi plus directement [SGA 2 IX 1.4]), on obtient un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X', \mathcal{O}) \simeq \Gamma(\widehat{X'}^D, \mathcal{O})$$

où $\widehat{X'}^D$ désigne le complété formel de X' le long de D , ce qui conclut. $\square$

LEMME 4.2.2. *Soit X un schéma normal excellent, D un diviseur de Cartier effectif dans X et $Z \subset D$ une partie fermée non vide de codimension supérieure à 2. On pose $U = X - Z$, $V = D - Z$.*

Considérons le carré cartésien formé des immersions évidentes

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j'} & D \\ i_U \downarrow & & \downarrow i \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Alors, le morphisme de changement de base associé

$$i^* R^1 j_* (G) \rightarrow R^1 j'_* (G)$$

est un monomorphisme.

Démonstration. On peut supposer que X et D sont locaux strictement henséliens. On doit montrer que le morphisme de restriction

$$H^1(U, G) \xrightarrow{i_U^*} H^1(V, G)$$

est injectif.

Remarquons que le lemme précédent nous montre déjà que V est connexe. Soit P et P' deux G -torseurs sur U qui coïncident sur V . On considère le faisceau $L = \underline{\text{Isom}}_G(P, P')$ des G -isomorphismes de P dans P' sur $U_{\text{ét}}$. On doit montrer qu'il admet une section sur U .

Comme L est localement constant constructible, il est représentable par un U -schéma étale fini noté U' . Posons $V' = U' \times_U V$. Par hypothèse, V'/V admet une section.

On va montrer que pour toute composante connexe U'_0 de U' telle que $U'_0 \times_U V/V$ admet une section, il existe une section de U'_0/U ce qui suffira pour conclure.

Quitte à remplacer U' par U'_0 , on peut supposer pour montrer cela que U' est connexe non vide. Les corps de fonctions de U' et U définissent une extension finie séparable L/K . Soit X' le schéma normalisé de X dans L/K . On pose encore $D' = X' \times_X D$ et $Z' = X' \times_X Z$.

Notons que X' est normal excellent et connexe. Dès lors, le lemme précédent implique que $V' = D' - Z'$ est connexe. Par hypothèse, le V -schéma étale V' admet une section, donc $V' = V$. Il en résulte que le revêtement étale U'/U est de degré 1 au-dessus de V , donc $U' = U$. $\square$

4.3. Réduction du théorème 1.3 au théorème 1.4. On peut supposer que X est affine réduit. Pour un anneau excellent A fixé, on démontre par induction noethérienne sur les fermés Z de $\text{Spec}(A)$ que le résultat est vrai pour les Z -schémas finis réduits. Pour cela, il suffit de démontrer le résultat pour X affine réduit en supposant le résultat vrai pour tout schéma fini sur un sous-schéma fermé strict d'une composante irréductible de X .

Montrons tout d'abord qu'on peut supposer que X est normal. Considérons la normalisation $p : X' \rightarrow X$ de X (somme des normalisations des composantes irréductibles de X) ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Puisque q est surjectif, le morphisme d'adjonction $G_U \rightarrow q_* q^*(G_U) = q_* G_{U'}$ est un monomorphisme. Il suffit donc de montrer que $R^1 j_*(q_* G_{U'})$ est constructible. Or p et q étant finis, $R^1 j_*(q_* G_{U'}) = p_* R^1 j'_*(G_{U'})$. Notons que $Z \times_X X'$ est de codimension 2 dans toute composante irréductible de X' (puisque X est universellement caténaire). On est donc ramené au cas où X est normal et on peut en outre le supposer affine et intègre.

Le cas où X est de dimension 2 résulte du théorème 1.4. On peut donc supposer que $\dim(X) > 2$.

Si $\text{codim}(Z) > 2$, on peut trouver un diviseur principal $D \xrightarrow{i} X$ qui contient Z (il suffit de prendre comme paramètre de D un élément non nul de l'anneau intègre $\mathcal{O}_X(X)$ s'annulant sur Z). Soit $j' : D - Z \rightarrow D$ le morphisme induit. D'après le lemme 4.2.2, on obtient un monomorphisme $i^* R^1 j_*(G) \rightarrow R^1 j'_*(G)$. Du fait que $R^1 j_*(G) = i_* i^* R^1 j_*(G)$, il suffit d'utiliser que $R^1 j'_*(G)$ est constructible par hypothèse de récurrence.

Plaçons nous dans le cas critique où $\text{codim}(Z) = 2$.

D'après le théorème 1.4, le résultat est connu pour le schéma semi-localisé de X aux points génériques de Z qui sont de codimension 2 dans X . Il existe donc, d'après le lemme 3.3.2, une extension finie L du corps des fonctions K de X telle que pour tout point maximal η de Z de codimension 2 dans X , $\phi_{U/X, \eta}^{(L)}$ est trivial.

Considérons X' la normalisation de X dans L/K et $p : X' \rightarrow X$ sa projection. On pose $j' = j \times_X X'$ et $Z' = Z \times_X X'$. D'après le lemme 4.1.1, il existe une partie fermée $T' \subset Z'$ de codimension supérieure à 3 dans X' telle que les noyaux des flèches de spécialisation de $R^1 j'_*(G)$ aux points de $Z' - T'$ soient triviaux.

Soit T la réunion des composantes irréductibles de Z de codimension supérieure à 3 et du fermé $p(T')$ dans Z . Considérons un point géométrique $\bar{s}$ de $Z - T$. Il existe un point maximal géométrique $\bar{t}$ de $Z - T$ et une spécialisation $\eta : X_{(\bar{t})} \rightarrow X_{(\bar{s})}$. Considérant les fibres de $\phi_{U/X'}^{(L)}$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R^1 j_*(G)_{\bar{s}} & \xrightarrow{\phi_{U/X, \bar{s}}^{(L)}} & [p_* R^1 j'_*(G)]_{\bar{s}} \\ \downarrow & & \downarrow \eta^* \\ R^1 j_*(G)_{\bar{t}} & \xrightarrow{\phi_{U/X, \bar{t}}^{(L)}} & [p_* R^1 j'_*(G)]_{\bar{t}}. \end{array}$$

D'après le choix de L/K , la composée $\eta^* \circ \phi_{U/X, \bar{s}}^{(L)}$ est triviale. Par ailleurs, puisque p est fini, η^* a un noyau trivial. On en déduit que $\phi_{U/X, \bar{s}}^{(L)}$ est trivial. D'après le lemme 3.3.2, $R^1 h_*(G)$ est constructible pour l'immersion ouverte $h : X - Z \rightarrow X - T$. D'après le lemme 3.3.4, on est donc réduit à montrer que pour tout morphisme fini surjectif $X' \rightarrow X$, $R^1 k'_*(G)$ est constructible pour l'immersion ouverte $k' : X' - T' \rightarrow X'$.

On peut trouver un diviseur principal $D \xrightarrow{i} X'$ qui contient T' . On pose $k'' = k' \times_{X'} D$.

D'après le lemme 4.2.2, on obtient un monomorphisme

$$i^* R^1 k'_*(G) \rightarrow R^1 k''_*(G).$$

On peut donc à nouveau conclure d'après l'hypothèse d'induction appliquée à k'' et du fait que $R^1 k'_*(G) = i_* i^* R^1 k'_*(G)$.

5. Revêtements principaux d'une surface strictement locale épointée

5.1. Mise en place. D'après le théorème d'algébrisation d'Elkik (cf. [Elkik, 1973], théorème 5, aussi rappelé en 1.2.6), on peut supposer que A est complet. Soit $X = \text{Spec}(A)$ et $X' = \text{Spec}(A) - \{m_A\}$. On note K le corps des fractions de A .

On commence par montrer qu'on peut supposer qu'il existe un sous-anneau régulier $R \subset A$ tel que l'extension A/R est finie et génériquement étale.

D'après les théorèmes de structure de Cohen (cf. [Bourbaki, AC, IX, §2, n°5, th. 3] si A est de caractéristique mixte et [Bourbaki, AC, IX, §3, n°4, th. 2] si A contient un corps), il existe un sous-anneau $R \subset A$ tel que A/R est finie et R est un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou sur un corps. L'anneau R est donc en particulier régulier. Soit E le corps des fractions de R et E' la clôture séparable de E dans K . Notons A_0 la clôture normale de R dans E'/E . Alors, le morphisme $X_0 = \text{Spec}(A_0) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est fini radiciel et surjectif. D'après l'invariance topologique du site étale (cf. [SGA 4 VIII 1.1]), on peut remplacer A par A_0 qui est fini génériquement étale sur R , comme attendu.

Remarquons tout d'abord le fait suivant :

LEMME 5.1.1. *Soient R un anneau local régulier de dimension 2 et A une R -algèbre finie dominante telle que A est un anneau local et normal. Soit m le degré générique de $R \rightarrow A$. Alors A est un R -module libre de rang m .*

Démonstration. Puisque A est finie dominante sur R , $\dim(A) = \dim(R) = 2$. De plus, puisque A est local normal de dimension 2, il résulte du critère de Serre que $\text{prof}(A) = 2$ (cf. [Matsumura, 1989, ex. 17.3]). Donc A est un anneau de Cohen-Macaulay. Le lemme résulte alors de [ÉGA 0_{IV} 17.3.5 (ii)]. $\square$

Faisant abstraction du groupe G , on fixe un entier $n > 0$ et on montre que l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements étales de X' de degré n est fini. Dans la suite de cette preuve, les revêtements étales considérés seront supposés connexes.

On raisonne par l'absurde. Considérons une suite $(P'_i \rightarrow X')_{i \in \mathbb{N}}$ de revêtements étales de degré n telle que pour tout $i \neq j$, P'_i est non X' -isomorphe à P'_j .

Soit K le corps des fractions de A . Pour tout entier i , P'_i/X' correspond à une extension finie séparable L_i/K . On note B_i la clôture intégrale de A dans L_i , $P_i = \text{Spec}(B_i)$. Remarquons par ailleurs que d'après le lemme précédent, A/R est libre de rang m et B_i/R est libre de rang nm .

5.1.2. *Questions de discriminant.* Rappelons pour les besoins de la preuve qui suit les considérations suivantes :

DÉFINITION 5.1.3. Soit B/A une algèbre finie libre de rang n . Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de B/A . Le déterminant de la matrice $(\text{Tr}_{B/A}(e_i e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelé le **discriminant de B/A relativement à $\mathcal{B}$** . Sa classe dans le monoïde multiplicatif $A/(A^\times)^2$ est indépendante de $\mathcal{B}$. On la note $\text{disc}_{B/A}$.

Par abus, on considérera la classe $\text{disc}_{B/A}$ comme un élément de A . Rappelons que B/A est étale si et seulement si $\text{disc}_{B/A}$ est inversible dans A . Par la suite, nous aurons besoin de la formule suivante (cf. [Ramero, 2005, 2.1.4]) : Soit B/A et C/B deux algèbres finies libres. Soit n le rang de C/B . Alors,

$$\text{disc}_{C/A} = \text{disc}_{B/A}^n \cdot N_{B/A}(\text{disc}_{C/B}).$$

Revenant à la situation du numéro précédent, on considère un idéal $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de R . Soit $A_{\mathfrak{p}}$ (resp. $B_{i,\mathfrak{p}}$) l'anneau semi-localisé de A (resp. B_i) correspondant à la fibre au-dessus de $\mathfrak{p}$.

Notons que $A_{\mathfrak{p}}$ est normal de dimension 1. Par ailleurs, comme par hypothèse B_i/A est étale finie de degré n au-dessus du spectre épointé de A , l'extension d'anneaux locaux $B_{i,\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang n . D'après la formule rappelée précédemment,

$$\text{disc}_{B_{i,\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}} = \text{disc}_{A_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}}^n \cdot N_{A_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}}(\text{disc}_{B_{i,\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}}).$$

Or A/R (resp. B_i/R) est génériquement étale et $B_{i,\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}$ est étale. On déduit de la relation précédente que l'élément $(\text{disc}_{B_i/R})(\text{disc}_{A/R}^n)^{-1}$ de $\text{Frac}(R)^\times$ appartient à $R_{\mathfrak{p}}^\times$. Comme ceci est valable pour tout $\mathfrak{p}$ et que R est normal, on en déduit :

$$(5.1.3.1) \quad \frac{\text{disc}_{B_i/R}}{\text{disc}_{A/R}^n} \in R^\times$$

5.2. Lemme clé. La technique pour trouver une contradiction à la situation dans laquelle on est parvenu à l'issue de la mise en place 5.1 repose sur l'utilisation des ultrafiltres. Dans la section qui suit, nous rappelons cette théorie et démontrons les résultats qui nous seront utiles. Le point essentiel de la preuve se résume alors à prouver le *lemme clé* 5.2.8 comme nous le montrons dans le paragraphe 5.2.9. La preuve de ce lemme est donnée dans la dernière section, 5.2.10.

5.2.1. *Ultraproducts.*

DÉFINITION 5.2.2. Soit I un ensemble et $P(I)$ l'ensemble des parties de I . Un **ultrafiltre** $\mathcal{F}$ sur I est la donnée d'un ensemble de parties de I vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\forall F \in \mathcal{F}, \forall G \in P(I), F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.
- (ii) $\forall F, G \in \mathcal{F}, F \cap G \in \mathcal{F}$.
- (iii) $\forall F \in P(I), F \in \mathcal{F}$ ou bien $I - F \in \mathcal{F}$.
- (iv) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Dans la suite de la preuve, nous entendrons un ultrafiltre $\mathcal{F}$ comme un ensemble ordonné tel pour tout $F, G \in \mathcal{F}$,

$$F \leq G \Leftrightarrow F \supset G.$$

Notons qu'il résulte alors de la définition que $\mathcal{F}$ est un ensemble filtrant.

EXEMPLE 5.2.3. Soit a un élément de I . Alors, l'ensemble des parties de I contenant a est un ultrafiltre $\mathcal{F}$ de I . Dans ce cas, on dit que $\mathcal{F}$ est **principal**.

D'après le lemme de Zorn, il existe des ultrafiltres non principaux sur un ensemble infini I .

DÉFINITION 5.2.4. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur un ensemble I et $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des limites inductives filtrantes et des produits.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le système inductif $(\prod_{i \in F} X_i)_{F \in \mathcal{F}}$ est filtrant. On définit l'**ultraproduit de $(X_i)_{i \in I}$ suivant $\mathcal{F}$** comme la limite inductive de ce système :

$$\prod_{i \in I/\mathcal{F}} X_i = \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{F}} \left(\prod_{i \in F} X_i \right).$$

Si $(X_i)_i$ est la famille constante de valeur un objet X , on note $X^{I/\mathcal{F}}$ son ultraproduit, appelé l'**ultrapuissance de X suivant $\mathcal{F}$** . On dispose toujours de l'application diagonale $X \rightarrow X^{I/\mathcal{F}}$.

On notera en particulier qu'un élément x de l'ultraproduit $\prod_{i \in I/\mathcal{F}} X_i$ est représenté par une suite $(x_i)_{i \in F}$ pour un élément $F \in \mathcal{F}$. De plus, étant donné un autre élément $y = (y_j)_{j \in G}$ de cet ultraproduit, $x = y$ si et seulement si il existe $H \in \mathcal{F}$ tel que $H \subset F \cap G$ vérifiant $\forall i \in H, x_i = y_i$.

Nous utiliserons cette notion dans le cas des anneaux ou des modules et nous utiliserons en particulier le lemme suivant :

LEMME 5.2.5. Soit I un ensemble et $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur I .

Considérons une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'anneaux. On pose $A_\infty = \prod_{i \in I/\mathcal{F}} A_i$.

- (i) Si pour tout $i \in I$, A_i est intègre (resp. un corps, un corps séparablement clos), il en est de même de A_∞ .
- (ii) Si pour tout $i \in I$, A_i est local (resp. local hensélien) d'idéal maximal $\mathfrak{m}_i$, A_∞ est local (resp. local hensélien) d'idéal maximal $\prod_{i \in I/\mathcal{F}} \mathfrak{m}_i$.

Considérons une famille d'algèbres $(B_i/A_i)_{i \in I}$, B_∞/A_∞ son ultraproduit suivant $\mathcal{F}$:

- (iii) Si pour tout $i \in I$, B_i/A_i est une extension locale d'anneaux locaux (resp. libre de rang m), il en est de même de B_∞/A_∞ .

Considérons un anneau A , et $A_\infty = A^{I/\mathcal{F}}$ son ultrapuissance.

- (iv) Si M est un A -module de présentation finie,
 $M \otimes_A A^{I/\mathcal{F}} = M^{I/\mathcal{F}}$.
- (v) Si A est cohérent, l'application diagonale $A \rightarrow A^{I/\mathcal{F}}$ est plate.

Démonstration. D'après la caractérisation des éléments d'un ultraproduit rappelée avant l'énoncé du lemme, un élément $x \in A_\infty$ est inversible (resp. nul) si et seulement s'il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que x est représenté par une famille $(x_i)_{i \in F}$ tel que pour tout indice $i \in F$, x_i est inversible (resp. nul) dans A_i .

(i) dans les deux premiers cas respectifs en résulte facilement. Pour montrer que l'ultraproduit $k_\infty = A_\infty$ de corps séparablement clos $k_i = A_i$ est encore séparablement clos, on considère un polynôme séparable P à coefficients dans k_∞ de degré $d > 0$. En raisonnant sur les coefficients du polynôme P , on peut supposer que P est représenté par une famille de polynômes $(P_i)_{i \in F}$ pour un élément $F \in \mathcal{F}$ et des polynômes P_i à coefficients dans k_i . Quitte à restreindre F , on peut supposer que pour tout $i \in F$, P_i est séparable de degré d . Il admet donc une racine x_i dans k_i . Il est alors immédiat que la famille $(x_i)_{i \in F}$ représente un élément x de k_∞ tel que $P(x) = 0$.

(ii) : on traite d'abord l'assertion non respé. Posons $\mathfrak{m}_\infty = \prod_{i \in I/\mathcal{F}} \mathfrak{m}_i$. C'est clairement un idéal de A_∞ . Soit x un élément de $A_\infty - \mathfrak{m}_\infty$, représenté par une famille $(x_i)_{i \in F}$. L'hypothèse sur x se traduit comme suit :

$$\nexists H \in \mathcal{F}, H \subset F \mid \forall i \in H, x_i \in \mathfrak{m}_i.$$

Soit $G = \{i \in F \mid x_i \notin \mathfrak{m}_i\}$. Alors, par hypothèse, $G \notin \mathcal{F}$. Donc $H = F - G$ appartient à $\mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre. Comme pour tout $i \in H$, $x_i \notin \mathfrak{m}_i$, x_i est inversible dans l'anneau local A_i . On en déduit que x est inversible d'après la caractérisation des éléments inversibles rappelée en début de preuve.

Pour montrer l'assertion respé, on raisonne comme dans le cas de l'ultraproduit de corps séparablement clos traité ci-dessus.

(iii) concernant la première assertion résulte facilement de (ii). L'assertion respé est évidente.

(iv) résulte facilement du fait élémentaire que le foncteur $M \otimes_A -$ commute aux produits si M est de présentation finie.

(v) résulte du fait que lorsque A est cohérent, un produit de A -modules plats est plat (cf. [Chase, 1960]). $\square$

REMARQUE 5.2.6. D'un point de vue conceptuel, on peut voir ce lemme comme un corollaire du théorème de Łoś (cf. [Bell & Slomson, 1969, chap. 5, §2]).

5.2.7. *Énoncé du lemme clé.* Revenons à la situation qui nous occupe. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{N}$. On note B_∞ (resp. A_∞, R_∞) l'anneau local obtenu par ultraproduit suivant $\mathcal{F}$ de $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$ (resp. A, R). Soit $\widehat{B}_\infty, \widehat{A}_\infty, \widehat{R}_\infty$ leurs complétions respectives. On en déduit les tours d'anneaux locaux suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} B_i & & B_\infty & \longrightarrow & \widehat{B}_\infty \\ \uparrow & & \uparrow \varphi & & \uparrow \hat{\varphi} \\ A & \longrightarrow & A_\infty & \longrightarrow & \widehat{A}_\infty \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & R_\infty & \longrightarrow & \widehat{R}_\infty. \end{array}$$

D'après le point (iii) du lemme 5.2.5, A_∞ et B_∞ sont des R_∞ -algèbres libres de rang fini. Si k_∞ désigne le corps résiduel de R_∞ , on en déduit que $A_\infty \otimes_{R_\infty} k_\infty$ et $B_\infty \otimes_{R_\infty} k_\infty$ sont des k_∞ -algèbres locales finies : leurs idéaux maximaux sont donc nilpotents. Il en résulte que la complétion de l'anneau local A_∞ (resp. B_∞) coïncide avec sa complétion par rapport à l'idéal maximal de R_∞ . Comme A_∞ (resp. B_∞) est un R_∞ -module libre, on en déduit :

$$\widehat{A}_\infty = A_\infty \otimes_{R_\infty} \widehat{R}_\infty, \quad \widehat{B}_\infty = B_\infty \otimes_{R_\infty} \widehat{R}_\infty.$$

Considérant le spectre des anneaux locaux sur les deux premières lignes, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} P_i & & P_\infty & \longleftarrow & \hat{P}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \hat{p} \\ X & \longleftarrow & X_\infty & \longleftarrow & \hat{X}_\infty \end{array}$$

et la discussion qui précède montre que le carré qui apparaît dans ce diagramme est cartésien. Considérant encore le spectre époiné des anneaux locaux A, A_∞ et $\widehat{A}_\infty$, on obtient par changement de base le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} P'_i & & P'_\infty & \longleftarrow & \hat{P}'_\infty \\ \downarrow & & \downarrow p' & & \downarrow \hat{p}' \\ X' & \longleftarrow & X'_\infty & \longleftarrow & \hat{X}'_\infty. \end{array}$$

Notons que les flèches de la ligne inférieure existent car, l'idéal maximal $\mathfrak{M}_A$ étant de type fini, on obtient facilement pour les idéaux maximaux respectifs de A_∞ et $\widehat{A}_\infty$:

$$\mathfrak{M}_{A_\infty} = \mathfrak{M}_A \cdot A_\infty, \quad \mathfrak{M}_{\widehat{A}_\infty} = \mathfrak{M}_A \cdot \widehat{A}_\infty.$$

LEMME 5.2.8. (1) Le schéma $\hat{X}_\infty$ est noethérien.

(2) Le morphisme $\hat{X}_\infty \rightarrow X$ est plat à fibre géométriques régulières.

(3) Le morphisme $\hat{X}_\infty \rightarrow X_\infty$ est une immersion fermée dont l'image contient tous les points fermés de X'_∞ .

- (4) Le morphisme fini $\hat{p} : \hat{P}_\infty \rightarrow \hat{X}_\infty$ est étale au-dessus de $\hat{X}'_\infty$.
 (5) Le morphisme fini $p : P_\infty \rightarrow X_\infty$ est étale au-dessus de X'_∞ .

5.2.9. *Conséquences du lemme clé.* Montrons pourquoi le lemme précédent permet de terminer la démonstration par l'absurde.

D'après le point (ii) du lemme 5.2.5, A_∞ est un anneau local hensélien. On peut donc appliquer la variante c_2 du théorème de changement de base lisse (cf. XX-4.2.1, cas (ii)) au morphisme $\hat{X}_\infty \rightarrow X$ et à l'ouvert $\hat{X}'_\infty$. On en déduit qu'il existe un revêtement étale $Q \rightarrow X'$ tel que $\hat{P}'_\infty \simeq Q \times_{X'} \hat{X}'_\infty$.

D'après le théorème de rigidité de Gabber (cf. 2.1.1) appliqué à A_∞ , pour tout groupe fini G , le morphisme

$$H^1(X'_\infty, G) \rightarrow H^1(\hat{X}'_\infty, G)$$

est un isomorphisme. On en déduit donc un isomorphisme :

$$(5.2.9.1) \quad P'_\infty \simeq Q \times_{X'} X'_\infty.$$

Pour tout élément F de l'ultrafiltre $\mathcal{F}$, on pose : $P_F = \text{Spec}(\prod_{i \in F} B_i)$, $X_F = \text{Spec}(\prod_{i \in F} A_i)$, $Y_F = \text{Spec}(\prod_{i \in F} R_i)$, et on note $p_F : P_F \rightarrow X_F$, $q_F : X_F \rightarrow Y_F$ les flèches canoniques. Par définition, le morphisme $p : P_\infty \rightarrow X_\infty$ est la limite projective suivant $F \in \mathcal{F}$ des morphismes p_F . Notons $p'_F : P'_F \rightarrow X'_F$ le pullback de p au-dessus de X' .

Puisque pour tout $i \in F$, B_i/R (resp. A_i/R) est fini et libre de rang nm (resp. m), on obtient facilement que $q_F \circ p_F$ (resp. q_F) est fini libre de rang nm (resp. m). En particulier, p_F est fini de présentation finie. On peut alors appliquer [ÉGA IV₃ 8.8.2] aux familles de X'_F -schémas P'_F et $Q \times_{X'} X'_F$ indexées par les éléments de l'ultrafiltre $\mathcal{F}$ et on obtient que l'isomorphisme (5.2.9.1) se relève pour un élément particulier $F \in \mathcal{F}$ en un isomorphisme de la forme :

$$P'_F \simeq Q \times_{X'} X'_F.$$

L'ultrafiltre $\mathcal{F}$ étant non principal, F contient au moins deux éléments distincts i et j . L'isomorphisme précédent implique donc $P'_i \simeq Q \simeq P'_j$ ce qui constitue la contradiction annoncée.

5.2.10. *Preuve du lemme clé.* Démontrons pour conclure chaque assertion du lemme 5.2.8 :

Assertion (1) : Notons que l'idéal maximal de l'anneau local A_∞ est de type fini d'après le point (ii) du lemme 5.2.5. Dès lors, le complété $\widehat{A}_\infty$ est noethérien d'après [ÉGA 0₁ 7.2.7, 7.2.8]. Il en est de même pour $\widehat{R}_\infty$ et $\widehat{B}_\infty$.

Assertion (2) : Pour montrer que $\hat{X}_\infty \rightarrow X_\infty$ est plat, il suffit, d'après le critère de platitude par fibres (cf. [ÉGA IV₃ 11.3.10]), de montrer que pour tout entier $l > 0$, le morphisme $A/m_A^l \rightarrow \widehat{A}_\infty/m_{\widehat{A}_\infty}^l$ est plat. Or, $\widehat{A}_\infty/m_{\widehat{A}_\infty}^l = (A/m_A^l)^{I/\mathcal{F}}$ et le morphisme précédent est l'application diagonale. On peut donc conclure en utilisant la propriété (v) du lemme 5.2.5 et le fait que A/m_A^l est cohérent.

Notons que l'extension résiduelle $\kappa_A^{I/\mathcal{F}}/\kappa_A$ de A_∞/A est séparable. En effet, pour toute extension finie L/κ_A , $L \otimes_{\kappa_A} \kappa_A^{I/\mathcal{F}} = L^{I/\mathcal{F}}$ est un corps d'après le point (i) du lemme 5.2.5. On en déduit que les fibres géométriques du morphisme $\hat{X}_\infty \rightarrow X$ sont régulières par application du *théorème de localisation de la lissité formelle* d'André (cf. [André, 1974]).

Assertion (3) : On commence par montrer que le morphisme $\hat{X}_\infty \rightarrow X$ est une immersion fermée. Il s'agit de montrer que $\pi : A_\infty \rightarrow \widehat{A}_\infty$ est surjectif. Or, comme on l'a déjà vu, $\widehat{A}_\infty$ est le complété⁽ⁱⁱ⁾ de A_∞ pour la topologie $\mathfrak{M}_A$ -adique. Or, $\mathfrak{M}_A$ étant de type fini, on obtient que A_∞ est complet (mais non nécessairement séparé) pour la topologie $\mathfrak{M}_A$ -adique — cela résulte du fait que c'est trivialement vrai pour les produits A^F pour un élément $F \in \mathcal{F}$. La surjectivité de π en résulte.

Pour démontrer la deuxième partie de l'assertion (3), il suffit d'appliquer le lemme suivant à l'idéal maximal de A_∞ .

⁽ⁱⁱ⁾Rappelons que complété signifie complété-séparé.

LEMME 5.2.11. Soit A un anneau et I un idéal de type fini tel que $I \subset \text{rad}(A)$. Soit $\hat{A}$ le complété I -adique de A .

Alors le morphisme induit $\text{Spec}(\hat{A}) - V(I\hat{A}) \rightarrow \text{Spec}(A) - V(I)$ est surjectif sur les points fermés du but.

Notons $f : \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Pour prouver le lemme, on doit montrer que pour tout fermé $Z \subset \text{Spec}(A)$,

$$Z \subset V(I) \Leftrightarrow f^{-1}(Z) \subset V(I\hat{A}).$$

Comme I est de type fini, ceci équivaut à montrer que pour tout idéal $J \subset A$,

$$\exists n > 0 \mid I^n \subset J \Leftrightarrow \exists n > 0 \mid I^n \hat{A} \subset J\hat{A}.$$

Or cela résulte facilement du lemme de Nakayama.

Assertion (4) : Remarquons d'abord que d'après [ÉGA IV₂ 6.14.1], l'anneau $\widehat{A_\infty}$ est normal. En effet, A est normal et le morphisme $A \rightarrow \widehat{A_\infty}$ est normal puisqu'il est plat à fibres géométriques régulières d'après le lemme 5.2.8. Or, $\widehat{B_\infty}/\widehat{R_\infty}$ est libre (de rang nm), donc sans torsion. Comme $\widehat{A_\infty}/\widehat{R_\infty}$ est entière, on en déduit que $\widehat{B_\infty}/\widehat{A_\infty}$ est sans torsion. Ainsi, $\widehat{B_\infty}/\widehat{A_\infty}$ est plat en codimension ≤ 1 .

Or, des relations (5.1.3.1) pour tout $i \in \mathbf{N}$, on déduit

$$\frac{\text{disc}_{\widehat{B_\infty}/\widehat{R_\infty}}}{\text{disc}_{\widehat{A_\infty}/\widehat{R_\infty}}^n} \in (\widehat{R_\infty})^\times.$$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur ≤ 1 de $\widehat{R_\infty}$, l'extension $(\widehat{B_\infty})_{\mathfrak{p}}/(\widehat{A_\infty})_{\mathfrak{p}}$ est sans torsion, donc libre. La relation précédente montre que $\text{disc}_{(\widehat{B_\infty})_{\mathfrak{p}}/(\widehat{A_\infty})_{\mathfrak{p}}}$ est inversible ce qui prouve que $(\widehat{B_\infty})_{\mathfrak{p}}/(\widehat{A_\infty})_{\mathfrak{p}}$ est étale, ce qui démontre (4).

Assertion (5) : D'après le critère de platitude par fibres (cf. [ÉGA IV₃ 11.3.10] appliqué à $P_\infty \rightarrow X_\infty \rightarrow \text{Spec}(R_\infty)$), pour tout point x du spectre épointé de R_∞ , le morphisme des localisés $(P_\infty)_{(x)} \rightarrow (X_\infty)_{(x)}$ est plat. Comme dans le point (4), la relation (5.1.3.1) permet de montrer que $(P_\infty)_{(x)}/(X_\infty)_{(x)}$ est étale. La propriété (5) résulte donc du point (3).

ANNEXE A

Fac-similé : Orsay

Transparents de l'exposé d'Ofer Gabber, fait le 27 juin 2005 à la conférence en l'honneur de Luc Illusie ([**Gabber, 2005a**]).

A finiteness theorem for
non abelian H^1 of excellent
schemes

Ofer Gabber
(IHES, CNRS)

1. Statements

Theorem 1.0 Let $f: X \rightarrow Y$ be a morphism of finite type of noetherian schemes and F a constructible sheaf of sets on X_{et} .

Then $f_* F$ is constructible.

The proof is by reducing to the case f proper (SGA 4) and f an open immersion (easier when normalizations are finite)

Theorem 1.1 Let $\mathbb{L}$ be a finite set of primes, $f: X \rightarrow Y$ a morphism of finite type between quasi-excellent schemes on which $\bigcap_{p \in \mathbb{L}} \mathbb{L}$ is invertible. Let F be a constructible $\mathbb{L}$ -torsion sheaf of groups on X .

Then $R^1 f_* F$ is constructible.

Also stack version.

Proved here using ultraproducts.

Theorem 1.2. $X, Y, \mathbb{L}, f$ as in 1.1.
 Y qc. If F is a constructible
 $\mathbb{L}$ -torsion abelian sheaf on X , then
the sheaves $R^i f_* F$ are constructible
and 0 for $i \gg 0$.

(Planned for Deligne's conference.
Using alterations)

2. Reductions.

Th. 1.1 known for proper f , so enough to consider open immersions. Reduce to Y normal affine, $X = Y - Z$ (Z reduced) and F constant.

Enough to find $Y' \rightarrow Y$, normalization of Y in a finite extension of $R(Y)$ which kills $R^1 f_* F$.

This exists outside $\text{Sing}(Y) \cup \text{Sing}(Z)$ (Abh. Lemma). Reduce to

Th. 2.1. Let Y be a normal excellent scheme, Z a closed subscheme of $\text{cod} \geq 2$, $j: Y - Z \rightarrow Y$, G a finite group. Then $R^1 j_* G$ is constructible.

(The order of G not necessarily inv. on Y)

This will be reduced to the following case:

Th. 2.2. Let A be a strictly henselian excellent normal local ring of dimension 2. For every finite group G

$H^1(\text{Spec}(A) - \{m\}, G)$ is finite.

3. Lefschetz

Recall (SGA 2 XIII §2)

Th. 3.0. A cnlr $f \in m$, f nonzerodivisor,

$X = \text{Spec}(A)$ $X' = X - \{m\}$, $\text{depth } \mathcal{O}_{X', x} \geq 2$

for closed points of X' . Then

$\Gamma(X', \mathcal{O}) \simeq \Gamma(\hat{X}', \mathcal{O})$ so

$\pi_0(X' \cap V(f)) \simeq \pi_0(X')$.

Cor. 1. A excellent normal nlr of $\dim \geq 3$

$f \in A$ nonzero nonunit, then the punctured spectrum of $\underset{Y}{\text{Spec}}(A/fA)$ is connected.

-6-

Y is connected in cod. 1, i.e., if $Z \subset Y$ is of cod ≥ 2 then $Y - Z$ is connected.

Cor. 2. Let X be normal excellent scheme
 $D \subset X$ effective Cartier divisor
 $Z \subset D$ closed, $\text{cod}_X Z \geq 3$

$$\begin{array}{ccc} D - Z & \xrightarrow{j'} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ X - Z & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

If L is a locally constant
 constr sheaf on $X - Z$

$$(j_* L)|_D \xrightarrow{\sim} j'_*(L|_{D-Z}).$$

$(R^1 j_* G)|_D$ injects into $R^1 j'_* G$
 for every finite group G .

4. Use of desingularization of 2 dimensional schemes.

Lemma 4.1. In the situation of Th. 2.1
 if Z_i is an irreducible component of Z
 of codim 2 in Y then there is an
 open dense $U_i \subset Z_i$ s.t. the sheaf
 of pointed sets $F = R^1 j_* G$ on U_i
 has specialization maps $F_s \rightarrow F_t$
 (for $t \rightarrow s$ map of $\underset{\text{topos pts}}{\text{geom. pts}}$ of U_i)
 with trivial kernel.

Proof. W.M.A. $Z = Z_i$ and that there
 is $p: Y' \rightarrow Y$ proper, birational, isomorphism
 outside Z , Y' regular, $p^{-1}(Z)_{\text{red}}$ is
 a normal crossings divisor with $\checkmark$ components
 dominating Z and $p^{-1}(Z) \rightarrow Z$ is
 (univ) locally 0-acyclic.
 (connected Milnor fibres)

5. Proof of Th. 2.1 assuming Th. 2.2.

WMA $Y = \text{Spec}(A)$, A excellent normal domain and that the result is known

for

normalizations of $Y' \subsetneq Y$, Y' irr, in
finite extensions of $R(Y')$.

Using section 4 there is

$\text{Spec}(A') \xrightarrow[\text{finite}]{\quad} \text{Spec}(A)$ which kills

$R^1 j_* G$ outside a cod ≥ 3 locus,

so reduce to $\mathbb{Z}$ of cod ≥ 3 and

use section 3.

6. Discriminants.

Lemma 6.1. Let $A = (A_{ij})$ be an $n \times n$ matrix of $m \times m$ matrices over a commutative ring k , with commuting A_{ij} . Let A be the resulting block $nm \times nm$ matrix.

Then $\det A = \det \det A$.

[Hint: replace A_{ii} by $A_{ii} + t$, invertible over $k' = k[t]$.]

Lemma 6.2. Let $A \subset B \subset C$ be comm. rings with C a free B -module with basis f_j ($1 \leq j \leq n$) and B a free A -module with basis e_i ($1 \leq i \leq m$).

(so $(e_i f_j)$ is an A basis of C), we use these bases to define discriminants, e.g.

$$\text{disc}_{B/A} = \det \text{Tr}_{B/A}(e_i e_j).$$

$$\text{Then } \text{disc}_{C/A} = (\text{disc}_{B/A})^n \text{Norm}_{B/A}(\text{disc}_{C/B}).$$

7. Rigidity.

Th. 7.1. Let (A, I) be a henselian pair with I finitely generated, $U \subset \operatorname{Spec}(A)$ a quasi-compact open $U \supset \operatorname{Spec}(A) - V(I)$, $\hat{A}$ the I -adic completion of A , $\hat{U} \subset \operatorname{Spec}(\hat{A})$ the inverse image of U . Let F be a sheaf of sets (resp. an ind-finite sheaf of groups) on U . Then $H^0(U, F) \xrightarrow{\sim} H^0(\hat{U}, F)$ (resp. $H^1(U, F) \xrightarrow{\sim} H^1(\hat{U}, F)$).

version for stacks.

Can reduce to case F constant, which holds by Elkik's approximation when A is noetherian and also when I is principal and $U = \operatorname{Spec}(A) - V(I)$. In general blow up a f.g. ideal defining the complement of U and use proper base change for stacks (Giraud + extension to non noeth. case) and affine base change to reduce to the principal ideal case.

Th. 7.2. (close to SGA4 XV)

$$\begin{array}{ccc} p: & X' & \longrightarrow X \\ & \downarrow j' & \downarrow j \\ & U' & \longrightarrow U \end{array}$$

p smooth, X normal excellent, $U' = p^{-1}(U)$,
 U ^{open} containing all points of $\text{cod} \leq 1$.

Then $p^* R^1 j_* G \xrightarrow{\sim} R^1 j'_* G$ (G finite).

Lemma 7.3. Let Z be a nowhere dense closed subscheme of a noetherian scheme X .

Then the following conditions are equivalent

(1) Let $p: X' \rightarrow X_{\text{red}}$ be the normalization.

Then $p^{-1}(Z)$ is of $\text{codim} \geq 2$ in X' .

(2) for every $y \in Z$, the irreducible components of $\text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{X,y}^h)$ are of $\dim \geq 2$

(3) same for $\hat{\mathcal{O}}_{X,y}$.

If this holds we say that Z is

$\subset 2$ in X .

Prop. 7.4. Let $A \longrightarrow B$ be a local homomorphism of nlr, formally smooth for m -adic topologies. Then there is a direct system of local essentially smooth A -algebras B_i with

$$\hat{B} \simeq (\varinjlim B_i)^\wedge$$

$$B_i \longrightarrow B_j \text{ flat } m_i B_j = m_j.$$

Th. 7.5. Let Z be c2 in X

$p: X' \longrightarrow X$ a flat morphism of noetherian schemes, the fibres of p above points of Z are geometrically regular.

Conclusion as in 7.2.

8. Separable projection.

Lemma 8.1. Let R be a complete noetherian local ~~ring~~ ^{domain}. Then R has a regular subring R_0 , R finite over R_0 with $\text{Frac}(R)$ separable over $\text{Frac}(R_0)$.

Only problem in equal characteristic $p > 0$.

Let k be the residue field of R and

$\{b_i\}_{i \in I}$ a p -basis of k . There is

a bijection

$\{\text{coefficient fields of } R\} \longleftrightarrow \{\text{liftings of } b_i\}.$

Fix a coefficient field.

By the proof of Nagata's Jacobian

criterion there is a finite subset $J \subset I$

s.t. if $k' = k^p(b_i, i \notin J)$ then

$\Omega = \Omega^1_R / \overline{k' R^p}$ has generic rank

$\dim(R) + \text{card}(J).$

Then change the liftings of b_i $i \in J$

s.t. their differentials are linearly

independent in Ω . With this coefficient field

one can take $k' = k$.

Let $t_1, \dots, t_d$ be a system of parameters for R and let $f_1, \dots, f_d \in R$ be s.t. df_i form a basis of $\Omega \otimes_R \text{frac}(R)$.

WMA $f_i \in \mathfrak{m}$.

Let $t'_i = t_i^p (1 + f_i)$.

Can take

$$R_0 = k[[t'_1, \dots, t'_d]].$$

9. Ultraproducts

Let I be a set. There is a bijection

$$\{\text{ultrafilters on } I\} \longleftrightarrow \text{Spec}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I)$$

$$F \longmapsto \mathfrak{p} = \{ \chi_A \mid A \notin F \}.$$

If R_i ($i \in I$) are rings then

the ultraproduct $\prod_{i \in I} R_i$ is

$\prod_i R_i / \sim$ where

$$(r_i) \sim (s_i) \iff \{i \mid r_i = s_i\} \in F,$$

In the commutative case there is a map of topological spaces

$$f: \text{Spec}(\prod_i R_i) \longrightarrow \text{Spec}((\mathbb{Z}/2)^I)$$

defined by " $f^* \chi_A = \chi_A$ ".

The fibres of f (with the restriction of the structure sheaf) are Spec of the ultraproduct.

R_i : all fields, domains, local rings,
 $\Rightarrow$ same for $\prod_{i \in F} R_i = R_\infty$

(*) If R_i are local rings whose maximal ideals are generated by n elements then R_∞ has the same property, so its completion is a complete noetherian local ring.

• If furthermore F is not ω complete

R_∞ maps onto $\hat{R}_\infty$

• If F is ω complete and R_i are noetherian
 (*),

then R_∞ is noetherian.

Lemma. If $R_i \rightarrow S_i$ ^($i \in I$) are finite maps of noetherian local rings, $\exists n$ s.t. $\forall i$ the maximal ideal of R_i and S_i have n generators as an R_i -module, F is an ultrafilter on I , $R_\infty \rightarrow S_\infty$ the corresponding map on ultraproducts then $R_\infty \rightarrow S_\infty$ is finite and $\ker(R_\infty \rightarrow R_\infty^\wedge)$ generates $\ker(S_\infty \rightarrow S_\infty^\wedge)$.

The proof uses that in all cases

$R_{\infty, \text{sep}} = \text{Im}(R_\infty \rightarrow R_\infty^\wedge)$ is noetherian.

We will use this only for complete local rings, in which case it is easily seen that R_∞ maps onto $R_\infty^\wedge$,

10. Proof of Th. 2.2.

We may assume A is complete.

View A as a finite generically étale extension of a 2 dimensional regular complete local ring R . A/R finite free rk m .

If the assertion is false there is $n > 0$ and connected pairwise non isomorphic finite étale maps $E_i \rightarrow \text{Spec}(A) - \{m_A\}$ of degree n . $\bigcup_{i \in \mathbb{N}}$ Let B_i be the normalization of A in E_i . B_i is complete normal local ring and E_i is the punctured spectrum of B_i . B_i is finite free rk nm as an R -module.

$$\text{disc}_R B_i = (\text{disc}_R A)^n \text{ up to unit.}$$

Let F be an ultrafilter on $\mathbb{N}$. Consider the ultraproducts

$$R_\infty \longrightarrow A_\infty \longrightarrow B_\infty$$

$R_\infty \rightarrow A_\infty$ free rk m

$R_\infty \rightarrow B_\infty$ free rk nm

B_∞ a finitely presented A_∞ -module
information on $\text{disc}_R B$ retained

Same for $R_\infty^\wedge \rightarrow A_\infty^\wedge \rightarrow B_\infty^\wedge$.

Note $A \rightarrow A_\infty^\wedge$ is flat : mod $m_A^\wedge$ this reduces to the fact that over a coherent ring infinite products of flat modules are flat.

The residue field of $A_\infty^\wedge$ is a regular (in particular separable) extension of the residue field of A . By "localization de la lissité formelle" the fibre rings of $A \rightarrow A_\infty^\wedge$ are geometrically regular. Hence $A_\infty^\wedge$ is normal. $B_\infty^\wedge$ is torsion free over $R_\infty^\wedge$, hence over $A_\infty^\wedge$.

Hence $B_\infty^\wedge / A_\infty^\wedge$ is finite flat over the punctured spectrum, necessarily of rank n .
By the discriminant information we get that

$\hat{B}_\infty / \hat{A}_\infty$ is finite étale on the punctured spectrum. Hence $\forall \xi \in \text{Spec}(\hat{A}_\infty) - V(m_A)$, the criterion of flatness by fibres gives that $(B_\infty)_\xi$ is flat over $(A_\infty)_\xi$, hence finite étale. But every point of $\text{Spec}(A_\infty) - V(m_A)$ is a generalization of a point of $\text{Spec}(\hat{A}_\infty) - V(m_A)$.

[If $I \subset \text{Rad}(A)$ is a f.g. ideal in a ring A and $\hat{A}$ the I -adic completion of A then all closed points of $\text{Spec}(A) - V(I)$ are in the image of $\text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$.]

This proves

Theorem. $p: \text{Spec}(\prod B_i) \rightarrow \text{Spec}(\prod A_i)$ is finite étale of deg n on $V(m_A)^c$.

Let F be a non principal ultrafilter on $\mathbb{N}$. By the rigidity facts the restriction of p to $\text{Spec}(\hat{A}_\infty) - V(m_A)$ comes from a finite étale cover of $\text{Spec}(A) - V(m_A)$. By passage to the limit $\exists T \in F$ s.t. same holds for $p|_{\text{Spec}(\prod_{i \in T} A_i) - V(m_A)}$. Contradiction.

ANNEXE B

Fac-similé : Princeton

Transparents de l'exposé d'Ofer Gabber, fait le 17 octobre 2005 à la conférence en l'honneur de Pierre Deligne ([**Gabber, 2005b**]).

- 1 -

Finiteness theorems for
étale cohomology of excellent
schemes

Ofer Gabber

IHES, CNRS

The goal is to prove

Theorem 0.1 Let $f: X \rightarrow Y$ be a morphism of finite type between quasi-excellent noetherian $\mathbb{Z}[1/n]$ schemes and F a constructible sheaf of $\mathbb{Z}/n$ -modules on $X_{\text{ét}}$. Then the $R^i f_* F$ are constructible and 0 for $i \gg 0$.

We also prove other expected properties (affine cohomological dimension, existence of dualizing complexes). We use a weak form of resolution of singularities.

Epp's theorem

Popescu's theorem

Absolute cohomological purity

We give a proof of ACP without using AKTEC (Thomason)

In SGA4 XIX Artin proves Th. 0.1 ^{equichar.} for _^excellent schemes assuming resolution. One idea (partial algebraization) comes from the proof of affine coh. dim. in loc. cit.

1. Weak local uniformization

1.1 Weak version

Let X be a quasi excellent scheme, $Z \subset X$ nowhere dense closed subset. Then there are regular $X_i \xrightarrow{\text{gen. finite}} X$ N.C.D. $Z_i \xrightarrow{\square} Z$ covering family for the h -topology.

For a scheme S , the h -topology on the category of schemes locally of finite pres. over S is the topology generated by proper surjective maps and Zariski open coverings.

1.2 Suppose X is integral $K = R(X)$ ($q.c.$, sep)

$$ZRS(X) = \{ \text{valuation rings of } K \text{ dominating some } \mathcal{O}_{X,2} \} = \varprojlim_{X' \rightarrow X \text{ proper birational}} X'$$

$$ZRS_{\bar{K}}(X) = \varprojlim_{X' \text{ integral, projective gen. finite over } X} X'$$

$$R(X) \subset \underbrace{R(X')}_{\text{normal}} \subset \bar{K}, \text{ Galois group acts on } X'.$$

Weak version $\Leftrightarrow$ every $v \in \text{ZRS}_{\bar{K}}(X)$ dominates a good local model

$\Leftrightarrow \exists$ proj. model X' ^{equiv.} and an open cover U_i of X' s.t. $U_i \rightarrow X$ factorizes through a good local model.

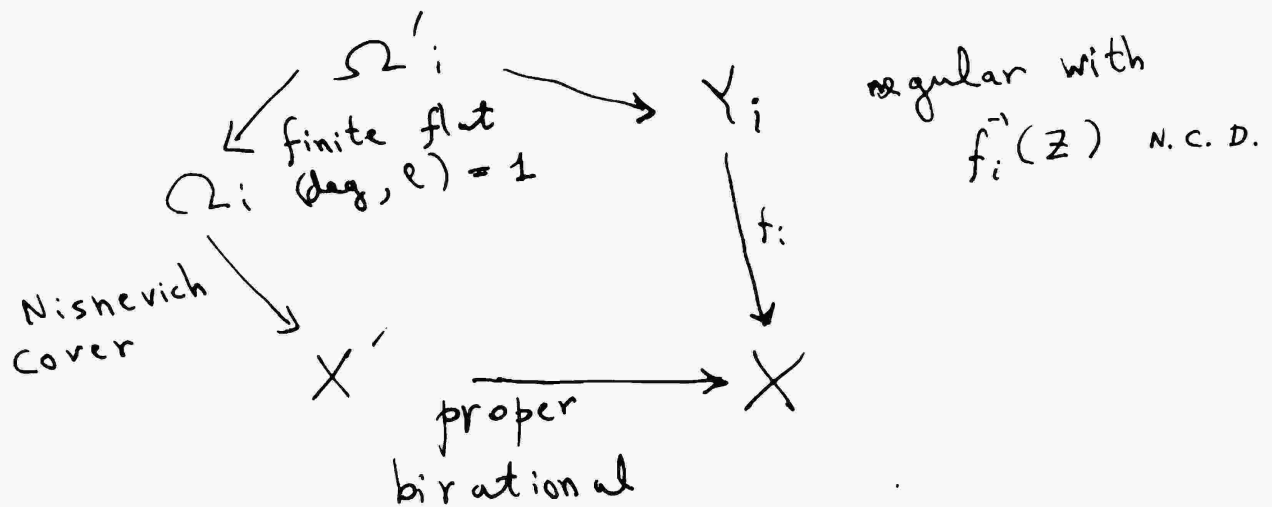
1.3 For $v \in \text{ZRS}_{\bar{K}}(X)$ define the inertia and decomposition group. These are $\varprojlim$ of inertia and dec. groups for p.e. models. The latter are upper semi continuous for the Zariski resp. constructible topology.

Strong form of Theorem: $\forall V \in \text{ZRS}_{\bar{K}}$ l invertible on X $\S$ an l -syllow of $D = \text{dec. gp of } V$, VS dominates a good local model.

$\Leftrightarrow \exists$ p.e. X' , $U_i \subset X'$ open, $H_i \subset \text{Gal}(X'/X)$ acts on U_i , s.t. U_i/H_i dominates a good local model and

$\forall x \in X' \exists i (x \in U_i \text{ and } H_i \supset l\text{-Sylow of } D(x))$

$\Leftrightarrow$ there is the following



Similarly when the condition is restricted to valuations center at $x \in X$.

Thm for $(X, x) \Leftrightarrow$ Thm for (X^h, x)

$\Leftrightarrow$ Thm for $(X^\wedge, x)$

$X^h = \text{Spec of henselization of local ring}$

$X^\wedge = \text{" completion "}$

2. Approximation.

Let R be an excellent henselian local ring. Given an algebro geometric datum of finite presentation over $\hat{R}$ it comes from a datum over a f.g. subalgebra R_1 of $\hat{R}$. By Popescu's thm ($\hat{R} = \varinjlim$ smooth R algebras) $R_1 \rightarrow \hat{R}$ can be approximated by $R_1 \rightarrow R$. Want to preserve properties of schemes and morphisms.

2.1 Let $I \subset A$ be an ideal, M, M' A -modules. An (I, c) isomorphism $M \underset{(I, c)}{\simeq} M'$ is an isomorphism

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n M / I^{n+c} M \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n M' / I^{n+c} M'$$

over $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n$.

Similarly for algebras.

2.2 (Artin-Rees) A noetherian, $(*) M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$
 an exact sequence of f.g. A -modules, I an ideal.

Then for $n \gg 0$ if $M'_1 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{g_1} M''_1$

is (I, n) -isomorphic to $(*)$ & $g_1, f_1 = 0$

then it is exact and all kernels, cokernels
 and images are $(I, n-c)$ -isomorphic to
 those of $(*)$.

Given M with a resolution $F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$
 by f.g. free-modules, if we approximate the
 matrix entries of d s.t. $dd=0$ holds we get
 an approximation of M . Conversely, approx. of M
 $\Rightarrow$ approx. of truncated resolutions.

2.3. A noetherian excellent $B = A/I$, $B' = A/J$
 is (I, n) close to B . Then B reduced near $V(I)$
 $\Rightarrow B'$ reduced near $V(I)$. Same for normal.

The assertion for "reduced" is shown by
 blowing up I . When $I = (f)$ use

-8-

Lemma. B reduced Japanese, $h \in B$ non zero divisor
 $\exists n \quad (x^2 \in h^n B \Rightarrow x \in hB).$

For the above type of approximation, $\forall x \in \text{Spec}(A/I+J)$
 $\dim B_x = \dim B'_x, \quad B_x \text{ regular} \Leftrightarrow B'_x \text{ regular}.$

3. Log regular schemes and quotients.

A locally noetherian fs log scheme X is
log regular iff $\forall x \in X$ the completion is
isomorphic to $k[[x_1, \dots, x_n]][[M]]$ (M
a sharp toric monoid) in the equal-characteristic
case, to $I[[x_1, \dots, x_n]][[M]] / (f)$
($f \mapsto p \in I, I$ cohen ring) in the mixed
characteristic case.

A canonical desingularization procedure for
excellent schemes of char. 0 gives a canonical
desingularization for toric varieties over $\mathbb{Z}$
and for log regular schemes.

A log regular scheme is normal and the log structure is determined by the locus of triviality of the log structure

$$j: U \hookrightarrow X \text{ (dense)} \quad \mu_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^* \quad (\text{étale top})$$

We say $(X, X-U)$ is log regular,

3.1 Let X be a separated scheme equipped with an action of a finite group G . We say the action is tame iff $\forall x \in X$ the order of the inertia group G_x is invertible in $k(x)$.

3.2 Lemma. Let G be a finite group acting on a noetherian ring A with $|G|^{-1} \in A$.

Then A^G is noetherian and A is finite over A^G .

3.3. Let G be a finite group generically freely acting sep. on a log regular scheme (X, Z) . We say the action is very tame at $x \in X$ iff G_x is of order prime to the char. exp. $k(x)$, G_x acts trivially on $\bar{\mu}_x$ and G_x acts trivially on the

connected stratum containing x .

[Connected component of $\{x \in X \mid \text{rk } \widehat{M}_x = i\}$]

Then G_x is abelian, $\exists$ structure
thm for completion, condition is open.

If action is very tame $(X/G, Z/G)$ is
log regular and action is free on $X-Z$.

$X-Z \rightarrow (X-Z)/G$ is a G torsor tamely
ramified at maximal points of Z/G .

Conversely, if (X', Z') is log regular and
 $V \rightarrow X'-Z'$ is a G -torsor tamely

ramified in cod. 1 then by FK purity it
extends to a ^{finite} Kummer log étale map
 $X \rightarrow X'$, X the normalization of X' in V
and G acts very tamely on (X, Z) .

3.4 Thm. Let G act generically freely
and tamely on a ^{sep, qc} log regular (X, Z) .

Then there is a projective birational
map $X' \xrightarrow{p} X$, s.t.

if $Z' = p^{-1}(Z \cup \text{locus of non free action})$

Then (X', Z') is log regular, G acts very tamely on X' .

sketch of proof. Use canonical desing. of X .

WMA X regular, Z N.C.D.

To ensure G_x act trivially on $\bar{M}_x$ need to

blow up k -uple intersections of components of Z

$k \geq 2$. (Blow up N -uple intersections, then proper transform of $(N-1)$ -uple intersections etc.)
(étale locally WMA simple NCD)

In a similar way blow up along X^H $\forall H \neq \{1\}$ and increase Z . This leads to a situation with abelian inertia groups and free action

on $X-Z$. Étale locally can increase Z s.t. action is very tame. This depends on

choosing eigenfunctions and is not unique. This

gives a log regular structure on X/G and the canonical desingularization of X/G is

shown independent of local choices by lifting

to char. 0, $Y \xrightarrow{p} X/G$. Show

$(Y, p^{-1}(Z/G))$ is log regular. Normalize Y in $X-Z$.

3.5. If in 3.4 (X, Z) is log smooth over a base S with a trivial G action then (X', Z') and its q by G are log smooth over S .

3.6. Let (X, Z) be log regular $X' \xrightarrow{f} X$ a nodal curve smooth over $X-Z$, $D \subset X'$ divisor in smooth locus étale over X . Then $(X', D \cup f^{-1}(Z))$ is log regular.

4. Absolute cohomological purity.

Recall (Azumino) That for a regular immersion $Z \subset X$ of cod. c have a global fundamental class in $H_Z^{2c}(X_{\text{ét}}, \Lambda(c))$
 $\Lambda = \mathbb{Z}/n$, n invertible on X ,

All schemes below are assumed to have an ample line bundle.

$f: X \rightarrow Y$ relative complete intersection $\Leftrightarrow$

factorizable $X \xrightarrow[\text{imm.}]{\text{reg.}} M \xrightarrow{\text{lisse}} Y$ $\text{cod}(f) = \text{cod}_Y X - \dim(M/Y)$.

Get a gysin map $\Lambda_X \rightarrow f^! \Lambda_Y(c) [2c]$
 $c = \text{cod}(f)$
 satisfying transitivity.

$$\text{Tr} : Rf_! \Lambda_X \rightarrow \Lambda_Y(c) [2c].$$

For f flat coincides with $\text{SGA}^4 \text{XVIII } 2.9$.

4.1. Suppose

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & S & \end{array}$$

rel c.i., $\text{cod}(f) = 0$

Gysin for f gives $f^* F \rightarrow f^! F \quad \forall F \in D^+$.

Get $f_! f^* F \rightarrow F$. For f proper

$F \rightarrow f_* f^* F \rightarrow F$. This is shown to
 be multiplication by $\deg(f) = \chi(Rf_* \mathcal{O}_X)$.

Let $K_X = p^! \Lambda_S(c) [2c] \quad c = \text{cod}(p), K_Y = \dots$

$$f^*(\Lambda_Y \rightarrow K_Y) \rightarrow (\Lambda_X \rightarrow K_X) \rightarrow f^!(\Lambda_Y \rightarrow K_Y).$$

commutes.

For f finite get $(\Lambda_Y \rightarrow K_Y) \rightarrow f_*(\Lambda_X \rightarrow K_X)$

$\hookrightarrow$ = mult by $\deg(f)$ on 2 terms.

Hence if f is finite of constant generic
 degree prime to n and $\Lambda_X \xrightarrow{\sim} K_X$ then
 $\Lambda_Y \xrightarrow{\sim} K_Y$.

The problem of ACP in the mixed characteristic case is reduced to the case of schemes of finite type over a trait S (complete)

and for such X , X is punctually pure

$$\text{iff } \Lambda_X \simeq K_X.$$

By de Jong $\exists$ Galois alteration

$$\begin{array}{ccc} G \hookrightarrow X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \hookrightarrow T & \longrightarrow & S \end{array} \quad \begin{array}{l} R(X') \text{ normal} \\ /R(X), \text{ Gal} = G. \end{array}$$

s.t. X' has a G -invariant log regular structure, log lisse over T with canonical log structure. (By Vidal we can even take $X' \rightarrow T$ projective regular with semistable reduction.)

$$n = l^i, \quad S_l \subset G \quad l\text{-syllow.}$$

can modify X' s.t. S_l action is very tame and $\gamma = X'/S_l$ regular, and log lisse over T/S_l .

Then X'/S_l is étale locally of the form

$$\text{Spec } \mathcal{O}_{T/S_l}[x_1, \dots, x_n] / (\prod_i x_i^{e_i} - \pi) \quad \leftarrow \text{unif. of } T/S_l$$

Such schemes are p.p. by [Rap. Zink], [Ill]

NB. punctual purity for such schemes is equivalent to $R^* j_* \Lambda = \Lambda^* R^1 j_* \Lambda$, j inclusion of general fiber. This is reduced to the case all $e_i = 1$.

Since $Y \rightarrow X$ is of generic degree prime to l , Y p.p. $\Rightarrow X$ p.p.

5. Applying Gpp.

Th. 5. 1. Let R be a complete normal n.l.r., I_i ($i \in$ finite set) ideals of R ,
(of dim. ≥ 2)

Then $\exists R' \supset R$ finite extension s.t.

R' is normal and is the completion of a ring $\overset{R''}{\vee} \overset{\text{ens.}}{\vee}$ of finite type over a $\overset{\text{regular}}{\vee} \underset{\text{complete}}{\vee}$ n.l.r. of dimension $\dim(R) - 1$, and $I_i R'$ come from R'' .

In the equal characteristic case can take $R' = R$ and holds for $\dim R = 1$.

Th. 5. 2. Let $T \rightarrow R$ be an extension of complete DVR's. When the residue char. is $p > 0$ assume that the

residue field k_T is perfect and that the maximal perfect subfield of k_R is algebraic over k_T . Then $\exists$ finite ext ^{0} $T \subset T'$ s.t. $(T' \otimes_T R)_{\text{red}}^\vee$ has reduced special fibre over T' .

(Trivial in char. 0)

5.3. Consider the situation of Th. 5.1 in the case of mixed characteristic $(0, p)$. Let k_0 be the maximal perfect subfield of k_R .

$$W = W(k_0) \longrightarrow R$$

$\exists W \longrightarrow W'$ finite, $R' = (R \otimes W')^\vee$ reduced fibre over max. ideal of W' . For every connected component of R' choose a coefficient field k of the special fibre $\bar{R}'$ over which $\bar{R}'$ is analytically separable:

$$\exists k \underset{\text{gen. étale.}}{[\![t_1, \dots, t_{d-1}]\!]} \xrightarrow{\text{finite}} \bar{R}'$$

- 17 -

Extend k' to a Cohen ring I mapping to R' . $I[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow R'$ finite, changing coordinates wma it is étale at p ($\pi, t_1, \dots, t_{d-2}$), hence étale outside $V(f)$ for $f \in I[[t_1, \dots, t_{d-2}]][[t_{d-1}]]$ monic.

Using Elkik's approximation descend to $I[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$ (henselian power series).

5.4. Prove weak form (1.1) by induction on the dimension.

6. First proof of Th. 0.1.

This proof gives that each $R^i f_* F$ is constructible. For schemes of finite Krull dimension have bounds $\rightarrow$ (cde open in $\text{Spec}(R)$, R str. local $\leq 2 \dim(R) - 1$), [Hu].

6.1. Let $X \xrightarrow{\varepsilon} X$ be an h -hypercover.

Then $F \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* \varepsilon^* F \quad \forall F \in D^+(X, \mathbb{Z}/n).$

If
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ f. \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{z} & Y \end{array}$$
 cartesian, rows h -hypercov.

$$Rf_* F = R\varepsilon_* (Rf_* F).$$

Analyzing the proof of this get also that this holds for pull-backs by an arbitrary $T \rightarrow Y$.

Reduce 0.1 to open immersions f_i can choose hypercovers s.t. $\forall i \leq N \quad Y_i$ is regular and $X_i \subset Y_i$ is for every connected component empty or complement of N.C.D.

Use generic constructibility (SGA 4 $\frac{1}{2}$).

- 19 -

7. Second proof of Th. 0.1.

(P_c) For open immersion $U \xrightarrow{j} X$, $F \in D_c^b(U)$,
 $\exists T \subset X$ of Cod. $> c$ s.t. $Rj_* F|_{X-T} \in D_c^b$.

prove this inductively.

$c=0$ trivial

$c=1$ reduce to X normal and constant coefficients. Use ACP.

$\forall c$ (P_c) $\Rightarrow$ Theorem easy

Assume (P_{c-1}). Let T_α be an irr. comp. of cod. c of T . We allow to restrict to neighborhoods of the generic points of T .

Consider the diagram of page 3. Let

$T' \subset X'$ be the locus coming from (P_{c-1})

for X' . We may assume $T' = \coprod T'_{\alpha\beta}$

$T'_{\alpha\beta}$ irreducible finite over T_α . $\forall \beta \exists i$

$\Omega_i \rightarrow X'$ is an isomorphism over $T'_{\alpha\beta}$.

Given $Z \subset Y \xrightarrow{p} X$

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{j_Y} Y$$

Denote

$$Rq_*((Rj_{Y*} F)_Z) = \varphi(Z, Y)$$

$$\begin{array}{ccc} T''_\beta \subset \Omega'_\beta & \xrightarrow{\quad} & Y_\beta \supset T'''_\beta \\ \downarrow \Omega_\beta & & \downarrow \\ T'_\beta \subset \Omega_\beta & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T'_\beta & & T \end{array}$$

Using inductive assumption

$$\varphi(T, X) \longrightarrow \bigoplus_\beta \varphi(T'_\beta, X')$$

has cone in D_c^b .

$$\varphi(T'_\beta, X') \xrightarrow{\sim} \varphi(T'_\beta, \Omega_\beta) \xrightarrow{\quad} \varphi(T''_\beta, \Omega'_\beta)$$

has left inverse

$$\varphi(T, X).$$

$\varphi(T, X) \longrightarrow \varphi(T''_\beta, \Omega'_\beta)$ factorizes through an object in D_c^b since on Y_β have good open immersion (N.C.D)

8. Affine morphisms.

$f: X \rightarrow Y$ affine ^{s.t.}, assume $\underbrace{Y \text{ universally catenarian and } \exists \text{ dimension}}$

function δ on Y ($\exists$ étale locally on a quasi excellent scheme), i.e. $\delta(y') = \delta(y) + 1$ if y is an immediate specialization of y' .

Want to prove $\delta(R^i f_* F) \leq \delta(F) - i$

(cf. SGA4 XIX).

Reduce to

Th. 8.1 $Y = \text{Spec}(R)$ strictly local excellent $\dim = d$, $f \in R$, then $H^i(\text{Spec } R[f^{-1}], \mathbb{Z}/n) = 0$ $\forall i > d$.

Let $Y. \rightarrow Y$ be a truncated

h -hypercovers as in first proof of finiteness.

$U. \rightarrow U$ $U. \subset \bar{U}$ have log structure

$H^i(U) = H^i(\text{closed fibre of } \bar{U} \text{ with Kummer étale topology})$

By formally smooth base change w.r.t. R complete, quotient of $\mathbb{I}[X_1, \dots, X_m]$.

Approximate to a quotient of $\mathbb{I}\{X_1, \dots, X_m\}$.

9. Top cohomology of the punctured spectrum

9.1 Transition maps.

Let $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ be an immediate specialization of geometric points of a quasiexcellent scheme X . So $\bar{y} \rightarrow X(\bar{x})$ is centered at y corresponding to a 1-dimensional $C \subset X(\bar{x})$, $C^\vee$ is a trait.

$F \in D^+(X, \mathbb{Z}/n)$.

$$\begin{aligned} H_{\bar{y}}^i(F) &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{y}/y), H_{\bar{y}}^i(F)(1)) \rightarrow H_y^{i+1}(F)(1) \quad (\text{sign!}) \\ &\rightarrow H^{i+1}(X(\bar{x}) - \{\bar{x}\}, F(1)) \rightarrow H_{\bar{y}}^{i+2}(F)(1) \end{aligned}$$

divided by the degree of the (inseparable) residue field extension for $C^\vee \rightarrow C$.

9.2. Thm. For every strictly local $\sqrt[n]{\text{normal}}$ excellent X $d = \dim(X)$, n invertible on X have an

isomorphism

$$H_{\bar{s}}^{2d}(X, \mathbb{Z}/n(d)) \rightarrow \mathbb{Z}/n$$

compatible with transition maps

compatible with trace for finite $X' \rightarrow X$ (up

to residue extension).

- 23 -

For $\dim(X) = 2$ let $X' \xrightarrow{p} X$ be a desingularization $p^{-1}(\xi)_{\text{red}} \stackrel{(\text{simple})}{N \subset D} \bigcup_i D_i$

$$j: U = X - \{\xi\} \hookrightarrow X'$$

$$d_2: H^0(X'_\xi, R^2 j_* \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^2(X'_\xi, R^1 j_* \mathbb{Z}/n) \cong \bigoplus \wedge_{D_i} (-1)$$

can compute d_2 ,

$$\text{Coker}(d_2) = H^3(U).$$

For $\dim(X) > 2$ let X' be the normalization of $\text{bl}_q(X)$, q an $\mathfrak{m}$ -primary ideal.

$$E_2^{p,q} = H^p(X'_\xi, R^q j_* \Lambda)$$

concentrated in $0 \leq p \leq 2d-2$, $0 \leq q \leq d$

$p \leq 2(d-q)$ using fs.

can avoid using this by showing that the limit of $E_2^{p,q}$ over all X' vanishes outside this range.

$$H^{2d-4}(X'_\xi, R^2 j_* \Lambda) \rightarrow H^{2d-2}(X'_\xi, R^1 j_* \Lambda) \rightarrow H^{2d-1}(U, \Lambda) \rightarrow 0.$$

Using the information from the 2 dimensional case show the image of d_2 identifies the contributions of the irreducible components of X'_F .

check compatibility with transition map

for curves $C \subset X$ whose proper transform is regular and meets $(X'_F)_{\text{red}} = E$ transversally at a regular point.

For X regular every C becomes transversal on some X' .

10. Dualizing complexes.

10.1 Given any specialization $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$

define $H^i_{\bar{y}}(F) \rightarrow H^{i+2c}_{\bar{x}}(F(c))$

by decomposing to immediate specializations.

It is independent of the choice. (scheme p. exc.)

Assume X universally catenarian with a dimension function δ .

Definition 10.2. A candidate dualizing (c.d.) complex on X is $K \in D^+(X, \Lambda)$ equipped with $R\Gamma_{\bar{x}}(K) \simeq \Lambda(\delta(x)) [2\delta(x)]$ compatible with transition maps.

10.3. If $Y \xrightarrow{f} X$ is of finite type and K is c.d. on X then $f^! K$ is c.d. on Y w.r.t. $\delta(Y) = \delta(f(Y)) + \text{tr. deg.}(Y/f(Y))$.

10.4. If $Y \xrightarrow{f} X$ is flat with geometrically regular fibres and K is c.d. on X then $f^* K$ is c.d. on Y w.r.t.

$$\delta(Y) = \delta(f(Y)) - \dim(\mathcal{O}_{f^{-1}(f(Y)), Y}).$$

Th. 10.5. A c.d. complex exists and is unique up to a unique isomorphism.

$$\Lambda_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Iso } R\text{Hom}(K, K).$$

Remark. K is (-2δ) -perverse

for X normal irreducible with generic point $j: \eta \rightarrow X$, $\delta(\eta) = 0$,
 $K = \tau_{\leq \varphi} Rj_* \mathbb{A}$

$$\varphi(x) = \max(0, 2 \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - 2).$$

In the proof of 10.5 we may assume it is known for schemes finite over proper closed subschemes of X .

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xhookrightarrow{i'} & X' = X_{\text{red}}^\nu \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xhookrightarrow{i} & X \end{array}$$

$X - Y$ = normal locus of X_{red} .

Have $K_{Y'} = p'^! K_Y = i'^! K_{X'}$.

$$p'_* K_{Y'} \longrightarrow K_Y \oplus p_* K_{X'}$$

show cone of this is c.d. for X .

10.6 $K \in D_{\text{ctf}}^b(X)$, compatible with change of $\mathbb{A}$,

$D_K: D_c^b \rightarrow D_c^b$. For a constructible sheaf F

show $F \simeq \tau_{\leq 0} D_K D_K F$ by reducing to the

case of constant sheaves.

- 27 -

10.7 show $\mathcal{H}^r(\text{Cone}(F \rightarrow D_K D_K^* F)) = 0$
by induction on $(\dim X, r)$.

The proof of [Th. Finitude] extends to
(biduality for excellent schemes of $\dim \leq d$)
 $\Rightarrow$ (biduality for schemes of finite type over
excellent schemes of $\dim \leq d$).

Enough to embed F in a sheaf for which
biduality is known. Use 5.1.

Bibliographie

- [Abbes & Gros, 2011a] Abbes, A. & Gros, M. (2011a). Sur la correspondance de Simpson p-adique. I : étude locale. [arXiv:1102.5466](#). ↑ [154](#)
- [Abbes & Gros, 2011b] Abbes, A. & Gros, M. (2011b). Topos co-évanescents et généralisations. [arXiv:1107.2380](#). ↑ [147](#), [154](#), [157](#), [158](#)
- [Abramovich & de Jong, 1997] Abramovich, D. & de Jong, A. J. (1997). Smoothness, semistability, and toroidal geometry. *J. Algebraic Geom.*, 6, 789–801. ↑ [134](#)
- [Abramovich et al., 2013] Abramovich, D., Denef, J., & Karu, K. (2013). Weak toroidalization over non-closed fields. *Manuscripta math.*, 142(1-2), 257–271. ↑ [140](#)
- [Abramovich & Karu, 2000] Abramovich, D. & Karu, K. (2000). Weak semistable reduction in characteristic 0. *Invent. math.*, 139(2), 241–273. ↑ [vii](#), [139](#)
- [André, 1974] André, M. (1974). Localisation de la lissité formelle. *Manuscripta math.*, 13, 297–307. ↑ [349](#), [380](#)
- [Artin, 1968] Artin, M. (1968). On the solutions of analytic equations. *Invent. math.*, 5, 277–291. ↑ [9](#)
- [Artin, 1969] Artin, M. (1969). Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 36, 23–58. ↑ [9](#)
- [Artin, 1971] Artin, M. (1971). On the joins of Hensel rings. *Adv. Math.*, 7, 282–296. ↑ [326](#), [327](#)
- [Artin et al., 1973] Artin, M., Grothendieck, A., & Verdier, J.-L. (1972–1973). *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*. Springer-Verlag. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J.-L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics numéros 269 (tome 1), 270 (tome 2), et 305 (tome 3). ↑ [436](#)
- [Ayoub, 2007] Ayoub, J. (2007). *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*, volume 314–315 des *Astérisque*. Société mathématique de France. ↑ [160](#), [219](#)
- [Bell & Slomson, 1969] Bell, J. L. & Slomson, A. B. (1969). *Models and ultraproducts: An introduction*. North-Holland Publishing Co. ↑ [379](#)
- [Berger, 1995] Berger, C. (1995). Un groupoïde simplicial comme modèle de l’espace des chemins. *Bull. Soc. math. France*, 123(1), 1–32. ↑ [361](#)
- [Berthelot et al., 1971] Berthelot, P., Grothendieck, A., & Illusie, L. (1971). *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, volume 225 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), avec la collaboration de D. Ferrand, J.-P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J.-P. Serre. ↑ [436](#)
- [Bhatt & Scholze, 2013] Bhatt, B. & Scholze, P. (2013). The pro-étale topology for schemes. [arXiv:1309.1198](#). ↑ [187](#)
- [Bierstone & Milman, 1997] Bierstone, E. & Milman, P. (1997). Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Invent. math.*, 128(2), 207–302. ↑ [76](#)
- [Bierstone et al., 2011] Bierstone, E., Milman, P., & Temkin, M. (2011). $\mathbf{Q}$ -universal desingularization. *Asian Journal of Mathematics*, 15, 229–250. ↑ [76](#)
- [Bosch et al., 1995] Bosch, S., Lütkebohmert, W., & Raynaud, M. (1995). Formal and rigid geometry IV. The reduced fibre theorem. *Invent. math.*, 119(2), 361–398. ↑ [140](#)
- [Bravo et al., 2005] Bravo, A. M., Encinas, S., & Villamayor U., O. (2005). A simplified proof of desingularization and applications. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 21(2), 349–458. ↑ [76](#)
- [Brodmann & Rothaus, 1980] Brodmann, M. & Rothaus, C. (1980). Über den regulären Ort in ausgezeichneten Ringen. *Math. Z.*, 175(1), 81–85. ↑ [8](#), [9](#)
- [Calmès & Hornbostel, 2009] Calmès, B. & Hornbostel, J. (2009). Tensor-triangulated categories and dualities. *Theory Appl. Categ.*, 22, n° 6, 136–200. ↑ [305](#)
- [Chase, 1960] Chase, S. U. (1960). Direct products of modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97, 457–473. ↑ [379](#)
- [Conrad, 1999] Conrad, B. (1999). Irreducible components of rigid spaces. *Ann. Inst. Fourier*, 49(2), 473–541. ↑ [9](#)
- [Conrad, 2000] Conrad, B. (2000). *Grothendieck duality and base change*, volume 1750 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [234](#), [235](#), [238](#), [239](#), [276](#), [281](#)
- [Conrad, 2007] Conrad, B. (2007). Deligne’s notes on Nagata compactification. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 22, 205–257. ↑ [70](#), [124](#)
- [Conrad & de Jong, 2002] Conrad, B. & de Jong, A. J. (2002). Approximation of versal deformations. *J. Algebra*, 255(2), 489–515. ↑ [25](#), [29](#)
- [Cossart et al., 2009] Cossart, V., Jannsen, U., & Saito, S. (2009). Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes. [arXiv:0905.2191v2](#). ↑ [132](#)

- [Crépeaux, 1967] Crépeaux, E. (1967). Une caractérisation des couples henséliens. *Enseignement math.*, 13, 273–279. ↑ [48](#), [339](#)
- [de Jong, 1996] de Jong, A. J. (1996). Smoothness, semistability and alterations. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 83, 51–93. ↑ [55](#), [65](#), [68](#), [96](#), [127](#), [135](#), [335](#)
- [de Jong, 1997] de Jong, A. J. (1997). Families of curves and alterations. *Ann. Inst. Fourier*, 47(2), 599–621. ↑ [vi](#), [68](#), [107](#), [111](#), [124](#), [131](#)
- [Deitmar, 2005] Deitmar, A. (2005). Schemes over F_1 . In *Number fields and function fields—two parallel worlds*, volume 239 des *Progress in Mathematics* (pp. 87–100). Birkhäuser. ↑ [79](#), [82](#)
- [Deligne, 1974] Deligne, P. (1974). Théorie de Hodge. III. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 44, 5–77. ↑ [164](#), [166](#), [180](#)
- [Deligne, 1977] Deligne, P. (1977). *Cohomologie étale*, volume 569 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. Avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier. ↑ [436](#)
- [Deligne, 1995] Deligne, P. (1995). Lettre à L. Illusie du 31 mars 1995. ↑ [154](#), [157](#), [158](#)
- [Deligne et al., 1972] Deligne, P., Grothendieck, A., & Nicholas, K. (1972). *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*. Springer-Verlag. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7). *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 288 (A. Grothendieck) et 340 (P. Deligne et N. Katz). ↑ [436](#)
- [Ekedahl,] Ekedahl, T. On the adic formalism. In *The Grothendieck Festschrift, II*. ↑ [187](#), [188](#)
- [Ekedahl, 1984] Ekedahl, T. (1984). On the multiplicative properties of the de Rham-Witt complex. I. *Ark. Mat.*, 22(2), 185–239. ↑ [187](#)
- [Elkik, 1973] Elkik, R. (1973). Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. sci. École norm. sup.*, 6, 553–603. ↑ [48](#), [344](#), [376](#)
- [Epp, 1973] Epp, H. (1973). Eliminating wild ramification. *Invent. math.*, 19, 235–249. ↑ [42](#)
- [Faltings, 1978] Faltings, G. (1978). Ein einfacher Beweis, daß geometrische Regularität formal Glattheit impliziert. *Arch. Math.*, 30(3), 284–285. ↑ [5](#)
- [Faltings, 2002] Faltings, G. (2002). Almost étale extensions. In P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, & M. Rapoport (éds), *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques*, volume 279 des *Astérisque* (pp. 185–270). Société mathématique de France. ↑ [154](#)
- [Faltings, 2005] Faltings, G. (2005). A p-adic Simpson correspondence. *Adv. Math.*, 198, 847–862. ↑ [154](#)
- [Fargues, 2009] Fargues, L. (2009). Filtration de monodromie et cycles évanescents formels. *Invent. math.*, 177(2), 281–305. ↑ [187](#)
- [Ferrand, 1972] Ferrand, D. (1972). Monomorphismes et morphismes absolument plats. *Bull. Soc. math. France*, 100, 97–128. ↑ [8](#)
- [Ferrand & Raynaud, 1970] Ferrand, D. & Raynaud, M. (1970). Fibres formelles d’un anneau local noethérien. *Ann. sci. École norm. sup.*, 3, 295–311. ↑ [11](#), [12](#), [346](#)
- [Fujiwara, 1995] Fujiwara, K. (1995). Theory of tubular neighborhood in étale topology. *Duke Math. J.*, 80(1), 15–57. ↑ [viii](#), [181](#), [202](#), [263](#), [312](#), [318](#), [321](#), [322](#), [351](#), [352](#)
- [Fujiwara, 2002] Fujiwara, K. (2002). A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In *Algebraic geometry 2000, Azumino*, volume 36 des *Advanced Studies in Pure Mathematics* (pp. 153–183). 日本数学会. ↑ [v](#), [ix](#), [202](#), [207](#), [210](#), [215](#), [217](#), [224](#), [225](#), [233](#)
- [Fujiwara & Kato, 1995] Fujiwara, K. & Kato, K. (1995). Logarithmic étale topology theory. Manuscrit non publié. ↑ [109](#)
- [Fulton, 1993] Fulton, W. (1993). *Introduction to toric varieties*, volume 131 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press. ↑ [85](#)
- [Fulton, 1998] Fulton, W. (1998). *Intersection theory*, volume 2 des *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, seconde édition. ↑ [210](#), [214](#)
- [Gabber, 1992] Gabber, O. (1992). K-theory of Henselian local rings and Henselian pairs. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 des *Contemp. Math.* (pp. 59–70). Amer. Math. Soc. ↑ [48](#)
- [Gabber, 1994] Gabber, O. (1994). Affine analog of the proper base change theorem. *Israel J. Math.*, 87(1-3), 325–335. ↑ [342](#)
- [Gabber, 2001] Gabber, O. (2001). Lettre à Fabrice Orgogozo, 28 décembre 2001. ↑ [329](#)
- [Gabber, 2004] Gabber, O. (2004). Notes on some t-structures. In A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz, & F. Loeser (éds), *Geometric aspects of Dwork theory, vol. II* (pp. 711–734). Walter de Gruyter. ↑ [241](#), [269](#)
- [Gabber, 2005a] Gabber, O. (2005a). A finiteness theorem for non abelian H^1 of excellent schemes. Notes d’un exposé donné à l’occasion de la conférence en l’honneur de Luc Illusie, Orsay. (Voir [annexe A](#)). ↑ [v](#), [viii](#), [37](#), [383](#)
- [Gabber, 2005b] Gabber, O. (2005b). Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes. Conférence en l’honneur de Pierre Deligne à l’occasion de son soixante-et-unième anniversaire, Institute for Advanced Study, Princeton. (Voir [annexe B](#)). ↑ [v](#), [ix](#), [23](#), [207](#), [241](#), [403](#)
- [Gabber, 2007] Gabber, O. (2007). Lettre à Yves Laszlo du 23 mai 2007. ↑ [9](#)
- [Gabber & Orgogozo, 2008] Gabber, O. & Orgogozo, F. (2008). Sur la p-dimension des corps. *Invent. math.*, 174(1), 47–80. ↑ [320](#), [327](#)
- [Gabber & Ramero, 2003] Gabber, O. & Ramero, L. (2003). *Almost ring theory*, volume 1800 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [243](#), [344](#), [345](#)
- [Gabber & Ramero, 2013] Gabber, O. & Ramero, L. (2013). Foundations for almost ring theory. [arXiv:math/0409584v8](#). ↑ [53](#), [68](#), [110](#), [114](#), [181](#), [347](#)

- [Gabriel, 1962] Gabriel, P. (1962). Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. math. France*, 90, 323–448. ↑ [285](#), [290](#)
- [Giraud, 1971] Giraud, J. (1971). *Cohomologie non abélienne*, volume 179 des *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag. ↑ [152](#), [166](#), [176](#), [283](#), [337](#), [340](#), [342](#), [344](#), [350](#), [354](#), [355](#), [357](#), [358](#), [359](#), [360](#), [361](#), [363](#)
- [Giraud, 1972] Giraud, J. (1972). Classifying topos. In *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, volume 274 des *Lecture Notes in Mathematics* (pp. 43–56). Springer-Verlag. ↑ [153](#)
- [Godement, 1973] Godement, R. (1973). *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, troisième édition. ↑ [176](#), [177](#)
- [Goerss & Jardine, 1999] Goerss, P. G. & Jardine, J. F. (1999). *Simplicial homotopy theory*, volume 174 des *Progress in Mathematics*. Birkhäuser. ↑ [296](#)
- [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001] Goodwillie, T. G. & Lichtenbaum, S. (2001). A cohomological bound for the h-topology. *Amer. J. Math.*, 123(3), 425–443. ↑ [v](#), [23](#), [180](#)
- [Greco, 1976] Greco, S. (1976). Two theorems on excellent rings. *Nagoya Math. J.*, 60, 139–149. ↑ [8](#)
- [Greco, 1982] Greco, S. (1982). A note on universally catenary rings. *Nagoya Math. J.*, 87, 95–100. ↑ [9](#)
- [Greco & Valabrega, 1974] Greco, S. & Valabrega, P. (1974). On the excellent property for strictly convergent power series over a complete non Archimedean valued field. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 108(3-4), 529–538. ↑ [9](#)
- [Grothendieck, 1957] Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tohoku Math. J.*, 9, 119–221. ↑ [235](#), [298](#)
- [Grothendieck, 1958a] Grothendieck, A. (1958a). La théorie des classes de Chern. *Bull. Soc. math. France*, 86, 137–154. ↑ [207](#)
- [Grothendieck, 1958b] Grothendieck, A. (1958b). Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections. In *Anneaux de Chow et applications*. Séminaire Claude Chevalley, deuxième année. ↑ [208](#)
- [Grothendieck, 1967] Grothendieck, A. (1960-1967). Éléments de géométrie algébrique (ÉGA). *Publications mathématiques de l’IHÉS*. Numéros 4 (I) ; 8 (II) ; 11,17 (III) ; 20, 24 et 28 (IV), rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné. ↑ [436](#)
- [Grothendieck, 1968] Grothendieck, A. (1968). Le groupe de Brauer III : exemples et compléments. In J. Giraud, A. Grothendieck, S. L. Kleiman, M. Raynaud, & J. Tate (éds), *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 des *Advanced studies in Pure Mathematics* (pp. 88–188). Masson et Cie, North-Holland. ↑ [312](#)
- [Grothendieck, 1977] Grothendieck, A. (1977). *Cohomologie ℓ -adique et fonctions L*, volume 589 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5). Avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre. ↑ [436](#)
- [Grothendieck, 2003a] Grothendieck, A. (2003a). *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, volume 4 des *Documents mathématiques*. Société mathématique de France. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962 (SGA 2). Augmenté d’un exposé de Mme Michèle Raynaud. ↑ [436](#)
- [Grothendieck, 2003b] Grothendieck, A. (2003b). *Revêtements étales et groupe fondamental*, volume 3 des *Documents mathématiques*. Société mathématique de France. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA 1). Augmenté de deux exposés de Mme Michèle Raynaud. Réédition du LNM n° 224. ↑ [436](#)
- [Grothendieck & Dieudonné, 1971] Grothendieck, A. & Dieudonné, J. (1971). *Éléments de géométrie algébrique I*. Springer-Verlag. ↑ [436](#)
- [Gruson, 1972] Gruson, L. (1972). Une propriété des couples henséliens. In *Colloque d’algèbre commutative (Rennes, 1972)*, exp. n°10. Université de Rennes. ↑ [48](#)
- [Hakim, 1972] Hakim, M. (1972). *Topos annelés et schémas relatifs*, volume 64 des *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag. ↑ [327](#)
- [Hartshorne, 1966] Hartshorne, R. (1966). *Residues and duality*, volume 20 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [281](#), [300](#)
- [Heinzer et al., 1997] Heinzer, W., Rotthaus, C., & Wiegand, S. (1997). Noetherian rings between a semilocal domain and its completion. *J. Algebra*, 198(2), 627–655. ↑ [316](#)
- [Heinzer et al., 2004] Heinzer, W., Rotthaus, C., & Wiegand, S. (2004). Catenary local rings with geometrically normal formal fibers. In *Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, 2000)* (pp. 497–510). Springer-Verlag. ↑ [10](#)
- [Hironaka, 1964] Hironaka, H. (1964). Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. Math.*, 79, 109–203, 205–326. ↑ [131](#)
- [Hovey, 2001] Hovey, M. (2001). Model category structures on chain complexes of sheaves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(6), 2441–2457. ↑ [298](#)
- [Illusie, 1972] Illusie, L. (1971-1972). *Complexe cotangent et déformations*, volume 239 & 283. Springer-Verlag. *Lecture Notes in Mathematics*. ↑ [78](#), [164](#)
- [Illusie, 1983] Illusie, L. (1983). Finiteness, duality, and Künneth theorems in the cohomology of the de Rham-Witt complex. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, volume 1016 des *Lecture Notes in Mathematics* (pp. 20–72). Springer-Verlag. ↑ [187](#)
- [Illusie, 2002] Illusie, L. (2002). An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology. In P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, & M. Rapoport (éds), *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques*, volume 279 des *Astérisque* (pp. 271–322). Société mathématique de France. ↑ [55](#), [56](#), [123](#)
- [Illusie, 2003] Illusie, L. (2003). Perversité et variation. *Manuscripta math.*, 112(3), 271–295. ↑ [viii](#), [181](#), [201](#), [205](#)
- [Illusie, 2004] Illusie, L. (2004). On the semistable reduction and the calculation of nearby cycles. In A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz, & F. Loeser (éds), *Geometric aspects of Dwork theory, vol. II* (pp. 785–803). Walter de Gruyter. ↑ [231](#)
- [Illusie et al., 2005] Illusie, L., Kato, K., & Nakayama, C. (2005). Quasi-unipotent logarithmic Riemann-Hilbert correspondences. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 12, 1–66. ↑ [137](#), [139](#), [140](#), [141](#)

- [Illusie et al., 2013] Illusie, L., Nakayama, C., & Tsuji, T. (2013). On log flat descent. *Proc. Japan Academy*, 89, 1–5. ↑ [56](#)
- [Kato, 1988] Kato, K. (1988). Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. In J.-i. Igusa (éd.), *Algebraic analysis, geometry and number* (pp. 191–224). The John Hopkins University Press. ↑ [53](#), [60](#), [112](#), [113](#), [136](#), [138](#), [139](#), [231](#), [232](#)
- [Kato, 1991] Kato, K. (1991). Logarithmic structures of Fontaine-Illusie II. Logarithmic flat topology. Manuscrit non publié. ↑ [56](#)
- [Kato, 1994] Kato, K. (1994). Toric singularities. *Amer. J. Math.*, 116(5), 1073–1099. ↑ [vi](#), [53](#), [54](#), [68](#), [79](#), [80](#), [83](#), [88](#), [89](#), [90](#), [110](#), [111](#), [116](#), [118](#), [137](#), [224](#), [231](#), [233](#)
- [Katz & Laumon, 1985] Katz, N. M. & Laumon, G. (1985). Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 62, 361–418. ↑ [186](#)
- [Kelly, 2012] Kelly, S. (2012). *Triangulated categories of motives in positive characteristic*. Thèse, Australian National University. [arXiv:1305.5349v1](#). ↑ [19](#)
- [Kempf et al., 1973] Kempf, G., Knudsen, F. F., Mumford, D., & Saint-Donat, B. (1973). *Toroidal embeddings I*, volume 339 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [vi](#)
- [Kiehl, 1969] Kiehl, R. (1969). Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. *J. reine angew. Math.*, 234, 89–98. ↑ [9](#)
- [Kollár, 2007] Kollár, J. (2007). *Lectures on resolution of singularities*, volume 166 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press. ↑ [76](#)
- [Kurke et al., 1975] Kurke, H., Pfister, G., & Roczen, M. (1975). *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Monographien. ↑ [47](#), [48](#)
- [Lam, 1991] Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*, volume 131 des *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [287](#)
- [Lam, 1999] Lam, T. Y. (1999). *Lectures on modules and rings*, volume 189 des *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [287](#)
- [Laumon, 1983] Laumon, G. (1983). Vanishing cycles over a base of dimension ≥ 1 . In M. Raynaud & T. Shioda (éds), *Algebraic Geometry, Proceedings, Tokyo/Kyoto 1982*, volume 1016 des *Lecture Notes in Mathematics* (pp. 143–150). Springer-Verlag. ↑ [vii](#), [143](#), [154](#), [155](#)
- [Lipman, 1978] Lipman, J. (1978). Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math.*, 107(1), 151–207. ↑ [256](#), [373](#)
- [Lipman & Hashimoto, 2009] Lipman, J. & Hashimoto, M. (2009). *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*, volume 1960 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [160](#)
- [Liu & Zheng, 2012] Liu, Y. & Zheng, W. (2012). Enhanced six operations and base change theorem for Artin stacks. [arXiv:1211.5948v2](#). ↑ [175](#)
- [Liu & Zheng, 2014] Liu, Y. & Zheng, W. (2014). Enhanced adic formalism and perverse t-structures for higher Artin stacks. [arXiv:1404.1128v1](#). ↑ [175](#), [187](#)
- [Lurie, 2009] Lurie, J. (2009). *Higher topos theory*, volume 170 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press. ↑ [176](#)
- [Matsumura, 1980a] Matsumura, H. (1980a). *Commutative algebra*, volume 56 des *Mathematics Lecture Note Series*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, seconde édition. ↑ [74](#), [84](#), [92](#), [189](#), [193](#), [197](#)
- [Matsumura, 1980b] Matsumura, H. (1980b). 可換環論. 共立出版. ↑ [36](#), [316](#), [434](#)
- [Matsumura, 1988] Matsumura, H. (1988). On the dimension of formal fibres of a local ring. In *Algebraic geometry and commutative algebra, vol. I* (pp. 261–266). Kinokuniya. ↑ [2](#)
- [Matsumura, 1989] Matsumura, H. (1989). *Commutative ring theory*, volume 8 des *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, seconde édition. Traduction anglaise de [Matsumura, 1980b]. ↑ [5](#), [31](#), [190](#), [196](#), [374](#), [377](#)
- [Mochizuki, 1999] Mochizuki, S. (1999). Extending families of curves over log regular schemes. *J. reine angew. Math.*, 511, 43–71. ↑ [53](#), [54](#)
- [Morel & Levine, 2001] Morel, F. & Levine, M. (2001). Cobordisme algébrique I. *C. R. Acad. sci. Paris*, 332(8), 723–728. ↑ [207](#)
- [Nagata, 1958] Nagata, M. (1958). An example of a normal local ring which is analytically reducible. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.*, 31, 83–85. ↑ [316](#)
- [Nagata, 1962] Nagata, M. (1962). *Local rings*, volume 13 des *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons. ↑ [11](#), [12](#), [316](#), [332](#), [345](#), [367](#)
- [Nakayama, 2009] Nakayama, C. (2009). Quasi-sections in log geometry. *Osaka J. Math*, 46, 1163–1173. ↑ [123](#)
- [Neeman, 2001] Neeman, A. (2001). *Triangulated categories*, volume 148 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press. ↑ [183](#), [300](#)
- [Nishimura & Nishimura, 1987] Nishimura, J.-i. & Nishimura, T. (1987). Ideal-adic completion of Noetherian rings II. In *Algebraic geometry and commutative algebra, vol. II* (pp. 453–467). Kinokuniya. ↑ [9](#)
- [Nisnevich, 1989] Nisnevich, Y. A. (1989). The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory. In *Algebraic K-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, 1987)*, volume 279 des *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* (pp. 241–342). Kluwer Acad. Publ. ↑ [17](#)
- [Nizioł, 2006] Nizioł, W. (2006). Toric singularities: log-blow-ups and global resolutions. *J. Algebraic Geom.*, 15(1), 1–29. ↑ [vi](#), [53](#), [54](#), [68](#), [83](#), [87](#), [88](#), [89](#), [90](#), [91](#), [110](#), [224](#), [233](#)
- [Ogoma, 1980] Ogoma, T. (1980). Noncatenary pseudogeometric normal rings. *Japan. J. Math.*, 6(1), 147–163. ↑ [10](#), [11](#)
- [Ogus, 2013] Ogus, A. (2013). *Lectures on Logarithmic Algebraic Geometry*. Projet de livre, non publié. ↑ [79](#), [81](#), [82](#)

- [Olivier, 1968] Olivier, J.-P. (1967-1968). Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits. In *Séminaire Samuel. Algèbre commutative*, volume 2, exp. n° 6. ↑ [359](#)
- [Olivier, 1971] Olivier, J.-P. (1971). Montée des propriétés par morphismes absolument plats. In *Comptes-rendus des journées d'algèbre pure et appliquée* (pp. 86–109). Univ. Sci. Tech. Languedoc. ↑ [8](#)
- [Orgogozo, 2003] Orgogozo, F. (2003). Altérations et groupe fondamental premier à p . *Bull. Soc. math. France*, 131, 123–147. ↑ [165](#), [166](#), [174](#), [181](#)
- [Orgogozo, 2006] Orgogozo, F. (2006). Modifications et cycles évanescents sur une base de dimension supérieure à un. *Int. Math. Res. Notices*, 2006, 1–38. ↑ [20](#), [150](#), [154](#), [155](#)
- [Orgogozo, 2011] Orgogozo, F. (2011). Sur les propriétés d'uniformité des images directes en cohomologie étale. Prépublication. ↑ [186](#)
- [Panin & Smyrnov, 2003] Panin, I. & Smyrnov, A. (2003). Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties II. *K-theory*:0619. ↑ [209](#)
- [Popescu, 1986] Popescu, D. (1986). General Néron desingularization and approximation. *Nagoya Math. J.*, 104, 85–115. ↑ [vi](#), [26](#)
- [Ramero, 2005] Ramero, L. (2005). Local monodromy in non-Archimedean analytic geometry. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 102, 167–280. ↑ [377](#)
- [Rapoport & Zink, 1982] Rapoport, M. & Zink, T. (1982). Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. *Invent. math.*, 68(1), 21–101. ↑ [231](#)
- [Ratliff, 1971] Ratliff, J. L. J. (1971). Characterizations of catenary rings. *Amer. J. Math.*, 93, 1070–1108. ↑ [7](#)
- [Raynaud, 1967] Raynaud, M. (1967). Un critère d'effectivité de descente. In *Séminaire Samuel. Algèbre commutative*, volume 2, exp. n° 5 (pp. 1–22). ↑ [72](#)
- [Raynaud, 1970] Raynaud, M. (1970). *Anneaux locaux henséliens*, volume 169 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [48](#), [148](#)
- [Raynaud & Gruson, 1971] Raynaud, M. & Gruson, L. (1971). Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platisation » d'un module. *Invent. math.*, 13, 1–89. ↑ [20](#), [130](#), [133](#), [315](#)
- [Rotthaus, 1977] Rotthaus, C. (1977). Komplettierung semilokaler quasiasusgezeichneter Ringe. *Nagoya Math. J.*, 76(2), 173–180. ↑ [8](#)
- [Rotthaus, 1979] Rotthaus, C. (1979). Universell japanische Ringe mit nicht offenem regulärem Ort. *Nagoya Math. J.*, 74, 123–135. ↑ [11](#)
- [Rotthaus, 1990] Rotthaus, C. (1990). Rings with approximation property. *Math. Ann.*, 287(3), 455–466. ↑ [9](#)
- [Rotthaus, 1991] Rotthaus, C. (1991). On rings with low-dimensional formal fibres. *J. Pure Appl. Algebra*, 71(2-3), 287–296. ↑ [2](#)
- [Rotthaus, 1997] Rotthaus, C. (1997). Excellent rings, henselian rings, and the approximation property. *Rocky Mountain J. Math.*, 27, 317–344. ↑ [12](#)
- [Šafarevič, 1966] Šafarevič, I. R. (1966). *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, volume 37 des *Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research. Notes de C. P. Ramanujam. ↑ [256](#)
- [Serre, 1965] Serre, J.-P. (1965). *Algèbre locale. Multiplicités*, volume 11 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [50](#), [254](#)
- [Serre, 1968] Serre, J.-P. (1968). *Corps locaux*, volume VIII des *Publications de l'Université de Nancago*. Hermann, seconde édition. ↑ [46](#), [230](#), [237](#)
- [Serre, 1978] Serre, J.-P. (1978). *Représentations linéaires des groupes finis*. Collection Méthodes. Hermann. ↑ [115](#)
- [Serre, 1994] Serre, J.-P. (1994). *Cohomologie galoisienne*, volume 5 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ [227](#), [243](#)
- [Seydi, 1970] Seydi, H. (1970). Anneaux henséliens et conditions de chaînes. *Bull. Soc. math. France*, 98, 9–31. ↑ [8](#), [9](#), [11](#)
- [Seydi, 1972] Seydi, H. (1972). Exemple d'un anneau local noethérien japonais normal qui n'est pas formellement réduit. *C. R. Acad. sci. Paris*, 274, 1334–1337. ↑ [11](#)
- [Spaltenstein, 1988] Spaltenstein, N. (1988). Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2), 121–154. ↑ [295](#), [298](#)
- [Spivakovsky, 1999] Spivakovsky, M. (1999). A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(2), 381–444. ↑ [9](#)
- [Stix, 2002] Stix, J. (2002). *Projective Anabelian Curves in Positive Characteristic and Descent Theory for Log-Étale Covers*, volume 354 des *Bonner Mathematische Schriften*. Math. Inst. der Univ. Bonn. ↑ [55](#), [56](#)
- [Swan, 1998] Swan, R. G. (1998). Néron-Popescu desingularization. In *Algebra and geometry (Taipei, 1995)*, volume 2 des *Lectures in Algebra and Geometry* (pp. 135–192). International Press of Boston. ↑ [9](#), [78](#), [350](#)
- [Temkin, 2008] Temkin, M. (2008). Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero. *Adv. Math.*, 219(2), 488–522. ↑ [3](#), [132](#), [140](#)
- [Temkin, 2010] Temkin, M. (2010). Stable modification of relative curves. *J. Algebraic Geom.*, 19, 603–677. ↑ [111](#), [131](#), [133](#)
- [Temkin, 2012] Temkin, M. (2012). Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero: the non-embedded case. *Duke Math. J.*, 161(11), 2207–2254. ↑ [71](#), [75](#), [76](#), [77](#), [132](#)
- [Tsuji, 1997] Tsuji, T. (1997). Saturated morphisms of logarithmic schemes. Manuscrit non publié. ↑ [53](#), [138](#)
- [Vidal, 2001a] Vidal, I. (2001a). Groupe fondamental logarithmique. Manuscrit non publié. ↑ [55](#)

- [Vidal, 2001b] Vidal, I. (2001b). Log schémas réguliers. Manuscrit non publié. ↑ [54](#)
- [Vidal, 2004] Vidal, I. (2004). Théorie de Brauer et conducteur de Swan. *J. Algebraic Geom.*, 13(2), 349–391. ↑ [111](#), [124](#), [127](#), [128](#), [131](#), [224](#), [233](#)
- [Włodarczyk, 2005] Włodarczyk, J. (2005). Simple Hironaka resolution in characteristic zero. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(4), 779–822. ↑ [76](#)
- [Zariski & Samuel, 1975] Zariski, O. & Samuel, P. (1975). *Commutative algebra*, volumes 28 & 29. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. ↑ [23](#), [190](#)
- [Zheng, 2009] Zheng, W. (2009). Sur l’indépendance de ℓ en cohomologie ℓ -adique sur les corps locaux. *Ann. sci. École norm. sup.*, 42(2), 291–334. ↑ [124](#), [127](#)

Sigles

- [ÉGA] = [Grothendieck, 1967]
 [ÉGA I'] = [Grothendieck & Dieudonné, 1971]
 [SGA 1] = [Grothendieck, 2003b]
 [SGA 2] = [Grothendieck, 2003a]
 [SGA 4] = [Artin et al., 1973]
 [SGA 4_{1/2}] = [Deligne, 1977]
 [SGA 5] = [Grothendieck, 1977]
 [SGA 6] = [Berthelot et al., 1971]
 [SGA 7] = [Deligne et al., 1972]

Index

- α -isomorphisme, 28
- accouplement, 306
- action (d'un groupe fini)
 - admissible, 58
 - modérée, 58
 - très modérée, 58
- action (of a finite group)
 - inertia specializing, 129
- admissible, action, 58
- altérations, topologie des, 19
- alteration
 - separable, 131
 - separable Galois, 131
- anneau
 - de Cohen, 43
 - excellent, 3
 - quasi-excellent, 3
 - universellement japonais, 3
- approximation, 30
 - d'Artin, 9
- Artin, approximation de, 9
- Artin-Rees, constante de, 29
- associated point
 - of blow up tower, 72
 - of scheme, 72
- bidualité, morphisme de, 239, 306
- blow up
 - log, 87
 - toric, 85
- blow up of a monoscheme, 82
 - center, 82
 - saturated, 82
- blow up of a scheme
 - center, 70
 - definition, 70
 - empty, 70
 - normalized, 73
- boundary of a regular log regular log scheme, 95
- c-parfait, complexe, 292
- c-pseudo-cohérent, complexe, 293
- canonical log structure associated to a monoscheme, 84
- Cartan-Whitney, relation de, 208
- caténaire
 - dimension (d'un morphisme), 321
 - schéma, 189
- center of a blow up, 70
- chart, monoscheme, 86
- Chern, classes de, 208
- classes de Chern, 208
- Cohen, anneau de, 43
- combinatoire le long d'un fermé, même, 202
- complexe
 - c-parfait, 292
 - c-pseudo-cohérent, 293
 - dualisant, 241
 - potentiel, 250
 - putatif, 250
 - K-injectif, 298
 - K-plat, 295
 - pseudo-cohérent, 293
- condition c_2 , 345
- constante d'Artin-Rees, 29
- constructible, gerbe, 362
- couple
 - log régulier, 53
 - régulier, 224
- couples associés, 353
- courbe nodale, 54
- critère d'intégrité du complété, 6
- curve, semistable multipointed, 131
- cycles
 - co-proches, 157
 - évanescents, 155
 - proches, 155
- depth (of a stratification), 96
- desingularization of a fine monoscheme, 83
 - functorial, 83
 - saturated, 83
- desingularization tower (of schemes), 74
 - functorial, 74
 - normalized, 74
- dilatation formelle, 315
- dimension
 - caténaire d'un morphisme, 321
 - fonction de, 193
 - relative virtuelle, 219
- dualisant potentiel, complexe, 250
- dualisant putatif, complexe, 250
- dualisant, complexe, 241
- éclatement modifié, 210
- effacement, 357
- épinglage, 250
- Epp, propriété de, 42
- équicodimensionnel, schéma, 196
- espace de Zariski-Riemann, 23, 351
- excellent

- anneau, 3
- schéma, 3
- faisceau pervers, 270
- fan, 81
 - canonical, 91
 - chart (of a log scheme), 88
 - functorial desingularization, 83
 - saturation, 82
- fonction de dimension, 193
- formule
 - d'excès d'intersection, 215
 - du fibré projectif, 208
- functorial desingularization tower, 74
- G-permissible, 96
- G-strict, 95
- générissant, morphisme, 15
- Gabber's magic box, 75
- générisation étale immédiate, 191
- gerbe constructible, 362
- gonflement (élémentaire), 316
- Gysin, morphisme de, 210, 214, 218, 222
- homotopiquement bicartésien, 212
- ind-fini
 - champ, 338
 - faisceau de groupes, 338
- ind-unipotent, module, 303
- inert morphism, 101
- inertia specializing action, 129
- K-injectif, complexe, 298
- K-plat, complexe, 295
- Künneth, morphisme de, 308
- Kummer étale
 - morphisme, 55
 - revêtement, 55
- Kummer, morphisme de, 55
- ℓ -cohomological dimension, 311
- ℓ' -décomposé(e)
 - recouvrement, 17
 - topologie étale, 18
- local
 - système, 282
 - topos, 148
- local homomorphism of monoids, 80
- localisé, topos, 151
- localization (of monoids), 80
- log blow up, 87
 - pullback, 88
 - saturated, 87
- log idéal, 87
- log régulier
 - couple, 53
 - log schéma, 53
- log schéma
 - fs, 53
 - log régulier, 53
- maximal, point, 15
- maximalement
 - ℓ' -fini (morphisme), 16
 - dominant (morphisme), 15
 - maximally dominating, 73
 - minimal stratum, 98
 - modérée, action, 58
 - module
 - ind-unipotent, 303
 - unipotent, 303
 - monoid
 - localization of, 80
 - sharpening of, 80
 - spectrum of a fine, 80
 - monoidal desingularization (of a log scheme), 88
 - saturated, 88
 - monoidal idéal, 85
 - monoidal space, 80
 - monoidally torsion free, 88
 - monoscheme, 81
 - (coherent) idéal, 82
 - chart, 86
 - invertible idéal, 82
 - saturation, 82
 - morphisme
 - de bidualité, 239, 306
 - de Gysin
 - immersion régulière, d'une, 214
 - morphisme d'intersection complète, d'un, 222
 - morphisme lisse, d'un, 218
 - pseudo-diviseur, d'un, 210
 - de Künneth, 308
 - de Kummer, 55
 - de spécialisation, 191
 - de transition, 254
 - génériquement fini, 16
 - générissant, 15
 - Kummer étale, 55
 - maximalement ℓ' -fini, 16
 - maximalement dominant, 15
 - maximalement fini, 16
 - $(n + 1)$ -proches, 25
 - nodale, courbe, 54
 - normalized blow up
 - of a scheme, 73
 - tower, 73
 - normalized desingularization tower, 74
 - orienté, produit, 145
 - p-rang, 36
 - paire
 - hensélienne, 47
 - partiellement algébrisable, 48
 - partition galoisienne, 284
 - permissible
 - modification, 95
 - modification tower, 95
 - pervers, faisceau, 270
 - point maximal, 15
 - polynôme de Weierstraß, 47
 - preparation lemma, Gabber's, 112
 - principe de scindage, 208
 - pro-torus, 94

- proches, $(n + 1)$ -, 25
- produit fibré de topos, 154
- produit orienté, 145
- pseudo-cohérent, complexe, 293
- pseudo-diviseur, 210
- pseudo-projective morphism, 130
- pullback
 - of log blow ups, 88
 - tower, 82
- pureté
 - couple régulier, d'un, 224
 - ponctuelle, 224
- pushforward
 - of a closed subscheme, 72
 - of blow up towers, 72
- régulier, couple, 224
- recouvrement
 - complètement décomposé, 17
 - de Nisnevich, 17
 - ℓ' -décomposé, 17
- relation de Cartan-Whitney, 208
- resolution : *voir* desingularization, 74
- resolvable, 131
- revêtement Kummer étale, 55
- rigidification, 100
- saturated
 - blow up of a monoscheme, 82
 - desingularization, 83
 - log blow up, 87
- saturation (of monoschemes or fans), 82
- saturation, toric, 84
- schéma
 - caténaire, 189
 - équicodimensionnel, 196
 - équidimensionnel, 190
 - excellent, 3
 - formellement caténaire, 190
 - formellement équidimensionnel, 190
 - quasi-excellent, 3
 - universellement caténaire, 189
 - universellement japonais, 3
- scheme, toric, 84
- scindage, principe de, 208
- section canonique (d'un produit orienté de topos), 149
- semistable multipointed curve, 131
- sharpening (of monoids), 80
- smooth morphism (of monoschemes or fans), 81
- snc [=strict normal crossings] family, 97
 - weakly, 96
- spécialisation
 - de codimension r , 191
 - étale immédiate, 191
 - morphisme de, 191
 - Zariski immédiate, 191
- spectrum of a fine monoid, 80
- stratification
 - canonique, 54
 - par l'inertie, 63
- strict transform, 70
 - of a tower of blow ups, 71
- système local, 282
 - faiblement constructible, 284
- topologie
 - des altérations, 19
 - des ℓ' -altérations, 19
 - étale ℓ' -décomposée, 18
 - h , 164
 - h -orientée, 164
- topos
 - co-évanescent, 154
 - évanescent, 154
 - local, 148
 - localisé, 151
 - produit fibré de, 154
 - produit orienté de, 145
- toric
 - blow up, 85
 - ideal, 85
 - saturation, 84
 - scheme, 84
 - smoothness, 85
- total transform, 70
- tower of blow ups, 71
 - contracted, 71
 - normalized, 73
 - pullback, 71
 - pushforward, 72
 - strict transform of, 71
 - trivial, 71
- tower of blow ups of monoschemes, 82
 - pullback, 82
 - saturated, 82
- très modérée, action, 58
- transform
 - strict, 70
 - total, 70
- transition, morphisme de, 254
- ultrafiltre, 377
- ultraproduit, 378
- ultrapuissance, 378
- unipotent, module, 303
- universellement japonais
 - anneau, 3
 - schéma, 3
- Weierstraß, polynôme de, 47
- Zariski-Riemann, espace de, 23, 351