

1. Rappel de l'énoncé et premières réductions

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation locale première à ℓ (exp. II, 4.3.1, exp. III, 6.1) :

Théorème 1.1. — Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X et ℓ un nombre premier inversible sur X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations (exp. II, 2.3) et telle que, pour tout $i \in I$:

- (i) X_i soit régulier et intègre,
- (ii) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

Le premier ingrédient essentiel de la démonstration de 1.1 est le résultat suivant, forme faible d'un résultat de de Jong [de Jong, 1997, 2.4] :

Théorème 1.2. — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre de schémas noethériens excellents intègres, et Z un sous-schéma fermé rare de X . Soit η le point générique de Y . On suppose que X_η est lisse, géométriquement irréductible et de dimension 1, et que Z_η est étale. Il existe alors un groupe fini G , un diagramme commutatif de G -schémas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

un diviseur effectif G -équivariant D dans X' , et un fermé rare G -équivariant T' de Y' possédant les propriétés suivantes :

- (i) f' est projectif;
- (ii) G agit trivialement sur X et Y , librement sur $Y' - T'$;
- (iii) a et b sont des altérations projectives génériquement étales, et $Y'/G \rightarrow Y$ (resp. $X'/G \rightarrow X$) induit un isomorphisme en η (resp. au point générique de X_η);
- (iv) f' est une courbe nodale, lisse hors de T' ;
- (v) D est étale sur Y' , et contenu dans le lieu lisse de f' ;
- (vi) $Z' := \alpha^{-1}(Z)$ est contenu dans $D \cup f'^{-1}(T')$.

Rappelons que dire que f' est une courbe nodale signifie que f' est plat, à fibres géométriques connexes de dimension 1, ayant pour seules singularités des points quadratiques ordinaires.

Il suffit en effet d'appliquer *loc. cit.* au couple (f, Z) , avec le groupe G de *loc. cit.* égal à $\{1\}$. Les hypothèses faites sur X_η et Z_η assurent que (f, Z) vérifie les conditions (2.1.1) et (2.1.5) de [de Jong, 1997], et donc que le couple (a, b) vérifie (2.2.1) et (2.2.5) de *loc. cit.*, ce qui implique (iii). Le fermé T' est donné par le fermé noté D dans (*loc. cit.*, 2.5), éventuellement agrandi pour que G opère librement sur $Y' - T'$. Noter que, si Y est séparé, il en est de même de Y' , et (ii) entraîne que G opère fidèlement sur X' et Y' .

1.3. — Les premières réductions de la démonstration de 1.1 sont analogues à celles de la démonstration du théorème d'uniformisation locale faible. Il suffit de prouver 1.1 pour X de dimension finie. On raisonne par récurrence sur la dimension de X . Le théorème est connu en dimension ≤ 1 (normalisation). Soit d un entier ≥ 2 . Supposons le théorème établi en dimension $< d$. D'après (exp. III, 6.2), on peut supposer X local noethérien complet, et même normal. D'après exp. V, 3.1.3, quitte à faire une extension finie de X de degré générique premier à ℓ , on peut supposer qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

avec Y local noethérien régulier complet de dimension $d-1$ et f de type fini, à fibres de dimension 1, et un point fermé x' de X' et un fermé rare Z' de X' tels que $f(x')$ soit le point fermé de Y , g induise un isomorphisme de X sur le complété de X' en x' , et qu'enfin $Z = g^{-1}(Z')$. Comme X' est excellent, g est régulier. Le changement de base par g préserve régularité, diviseurs à croisements normaux, et familles couvrantes pour la topologie des ℓ' -altérations (exp. II, 2.3). On peut donc remplacer X par X' , donc, quitte à changer les notations, supposer X intègre de dimension d , muni d'un morphisme de type fini $f : X \rightarrow Y$, à fibres de dimension 1. Le problème

étant local pour la topologie des ℓ' -altérations, donc *a fortiori* pour la topologie de Zariski, on peut supposer X affine. Compactifiant f , on se ramène à supposer f propre. Quitte à éclater dans X un sous-schéma fermé ayant Z pour espace sous-jacent, on peut supposer que Z est un diviseur dans X . Le morphisme f n'est plus nécessairement une courbe relative, mais sa fibre générique reste de dimension 1. Soit η le point générique de Y . D'après ([ÉGA IV 4.6.6]) il existe une extension radicielle finie η' de η telle que $(X_{\eta'})_{\text{red}}$ soit géométriquement réduit, et $(Z_{\eta'})_{\text{red}}$ étale sur η' . Quitte à remplacer Y par son normalisé dans η' , X par son normalisé dans le corps des fractions de $(X_{\eta'})_{\text{red}}$, et Z par son image inverse réduite, on peut donc supposer que X_{η} est lisse et que Z_{η} est étale. Le schéma Y n'est plus nécessairement régulier, mais reste affine, normal, intègre et excellent.

Considérons la factorisation de Stein $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{q} Y$ de $f : q$ est fini surjectif, génériquement étale, f_1 est propre et surjectif, et ses fibres géométriques sont connexes. Comme $f_{1*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y_1}$ et que X est intègre, Y_1 est intègre également. Quitte à remplacer Y par Y_1 (et f par f_1), on peut donc supposer que la fibre générique de f est lisse, géométriquement connexe, et que Z_{η} est étale. On se trouve alors dans la situation de 1.2, avec Z un diviseur, et Y affine.

1.4. — Appliquons 1.2 à la situation que nous venons d'obtenir. D'après (iii), le morphisme $X'/G \rightarrow X$ est $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant. Remplaçant X par X'/G , Z par son image inverse, et Y par Y'/G , et changeant les notations, on peut donc supposer que $X = X'/G$, $Y = Y'/G$. Noter que, comme Y est affine et b, f' projectifs, les actions de G sur X' et Y' sont admissibles, et X'/G et Y'/G sont encore intègres et excellents. Soit H un sous-groupe de ℓ -Sylow de G . Considérons la factorisation

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{a_1} & X'/H & \xrightarrow{a_2} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b_1} & Y'/H & \xrightarrow{b_2} & Y \end{array} .$$

Comme a_2 est $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant, on peut (utilisant l'admissibilité de l'action de H) remplacer X par X'/H , Z par son image inverse dans X'/H , Y par Y'/H , et enfin G par H , de sorte qu'on peut supposer que G est un ℓ -groupe.

Appliquons l'hypothèse de récurrence au couple $(Y = Y'/G, T := T'/G)$. Il existe une famille finie $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante $(Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$, avec Y_i régulier connexe, et (l'espace sous-jacent à) $T_i = Y_i \times_Y T$ le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Pour chaque $i \in I$, soient Y'_i le normalisé d'une composante irréductible de $Y' \times_Y Y_i$ et $G_i \subset G$ le groupe de décomposition de cette composante. Remplaçant Y par Y_i , Y' par Y'_i , G par G_i , et les autres données par leurs images inverses par $Y_i \rightarrow Y$, $Y'_i \rightarrow Y'$, et travaillant séparément sur chaque Y_i , on se ramène à supposer que, dans le diagramme de 1.2, on a les propriétés additionnelles suivantes :

(*) $Y = Y'/G$ est affine, régulier, connexe, $T = T'/G$ est un diviseur à croisements normaux strict dans Y , $Y' - T' = Y' \times_Y (Y - T)$ est un revêtement étale galoisien de $Y - T$ de groupe G , Y' est le normalisé de Y dans $Y' - T'$, $X = X'/G$.

2. Log régularité, fin de la démonstration

Nous aurons besoin du résultat suivant, cas particulier d'un théorème de Fujiwara-Kato [Fujiwara & Kato, 1995, 3.1] :

Proposition 2.1. — Soient Y un schéma noethérien régulier, $T \subset Y$ un diviseur à croisements normaux strict, $V = Y - T$. Munissons Y de la log structure associée au couple (Y, T) (exp. VI, 1.4). Alors :

(i) Le foncteur de restriction de la catégorie des revêtements Kummer étales de Y dans celle des revêtements étales de V modérément ramifiés le long de T est une équivalence de catégories.

(ii) Si Y' est un revêtement Kummer étale de Y , Y' est le normalisé de Y dans $Y' \times_Y V$.

(iii) Si V' est un revêtement étale de V , modérément ramifié le long de T , il existe une unique log structure fs sur le normalisé Y' de Y dans V' faisant de Y' un revêtement Kummer étale de Y .

Il suffit de prouver (i) et (ii). La question est locale pour la topologie étale sur Y . On peut donc supposer Y strictement local, $Y = \text{Spec } A$, de point fermé $y = \text{Spec } k$, et $T = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{div}(t_i)$, où les t_i font partie d'un système régulier de paramètres de A . Le log schéma Y admet la carte $(\overline{M}_y = \mathbf{N}^r \rightarrow A, e_i \mapsto t_i)$. D'après le théorème de structure locale des revêtements Kummer étales (exp. VI, 2.2), tout revêtement Kummer étale Y' de Y est somme de revêtements Kummer étale standard, de la forme $Z = Y \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[\mathbf{N}^r]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$, où $\mathbf{N}^r \rightarrow Q$ est un morphisme de Kummer tel que $nQ \subset \mathbf{N}^r$ pour un entier n premier à la caractéristique de k . On a donc $Q = \mathbf{N}^r \cap L$, pour un sous-groupe L de \mathbf{Z}^r tel que $n[\mathbf{Z}^r : L] = 0$, et $Z = (\text{Spec } A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r))^G$, où $G = \text{Hom}(\mathbf{Z}^r/L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de μ_n^n opérant sur $\text{Spec } A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r)$ de la

manière naturelle. Il en résulte que Z est le normalisé de Y dans le revêtement étale $Z \times_Y V$ de V . On en déduit (ii), et la pleine fidélité en (i), par la considération de graphes de morphismes entre revêtements Kummer étales de Y . L'essentielle surjectivité découle du lemme d'Abhyankar ([SGA 1 XIII 5.3]) donnant la structure du groupe fondamental modéré de V , qui implique que le normalisé de Y dans un revêtement étale modéré connexe de V est de la forme Z décrite précédemment.

2.2. — Partons de la situation obtenue à la fin de 1.4. D'après 2.1, compte tenu de (*), il existe sur Y' une unique log structure faisant de Y' un revêtement Kummer étale de Y (muni de la log structure définie par T), galoisien de groupe G . En particulier, le couple (Y', T') est log régulier. D'après (exp. VI, 1.9), le couple $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$ est log régulier, et pour la log structure correspondante sur X' , f' est log lisse. De plus, l'image inverse Z' de Z dans X' est un diviseur contenu dans $D' = f'^{-1}(T') \cup D$.

L'action de G sur X' est modérée (G est un ℓ -groupe), mais pas nécessairement très modérée (exp. VI, 3.1). Si elle l'était, le couple $(X = X'/G, D'/G)$ serait alors log régulier (exp. VI, 3.2), et l'on pourrait terminer la démonstration de 1.1 comme dans (exp. VII, 4), à l'aide de la résolution des singularités des couples log réguliers. On se ramène à ce cas grâce au théorème de modification (exp. VIII, 1.1), dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 2.3. — Soit (X, Z) un couple log régulier (exp. VI, 1.4), muni d'une action d'un groupe fini G . On suppose que X est noethérien, séparé, et que l'action de G sur X est modérée et génériquement libre. Soit T le complément du plus grand ouvert G -stable de X où G opère librement. Il existe alors une modification projective G -équivariante $f : X' \rightarrow X$ telle que, si $Z' = f^{-1}(Z \cup T)$, le couple (X', Z') soit log régulier, et l'action de G sur X' très modérée.

2.4. — Le couple (X', D') de 2.2 vérifie les hypothèses sur (X, Z) de 2.3 : (X', D') est log régulier, X' est séparé (car projectif sur Y), l'action de G sur X' est modérée, et libre sur $X' - f'^{-1}(T')$, en particulier génériquement libre. De plus, l'action de G sur X' est admissible. Il existe donc un diagramme commutatif G -équivariant

$$\begin{array}{ccc} (X'', D'') & \longrightarrow & (X''/G, D''/G) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ (X', D') & \longrightarrow & (X, D) = (X'/G, D'/G) \end{array},$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques, p est une modification projective (G -équivariante), (X'', D'') est log régulier, avec $X'' - D'' \subset p^{-1}(X' - D')$, et l'action de G sur (X'', D'') est très modérée. D'après exp. VI, 3.2, le couple $(X''/G, D''/G)$ est donc log régulier. Appliquons à ce couple le théorème de désingularisation de Kato-Nizioł ([Kato, 1994, 10.3, 10.4], [Nizioł, 2006, 5.7], [Gabber & Ramero, 2013, 9.6.32]) : il existe un morphisme log étale $e : \tilde{X} \rightarrow X''/G$, projectif, surjectif et birationnel sur les schémas sous-jacents, avec \tilde{X} régulier, et un diviseur à croisements normaux strict \tilde{D} tels que $\tilde{X} - \tilde{D} = e^{-1}(X''/G - D''/G)$. Alors $\tilde{Z} := (qe)^{-1}(Z)$ a pour support un diviseur contenu dans \tilde{D} , donc strictement à croisement normaux. Comme q est une modification, qe en est une également, et 1.1 est démontré.

Références

- [de Jong, 1997] de Jong, A. J. (1997). Families of curves and alterations. *Ann. Inst. Fourier*, 47(2), 599–621. ↑ 1
[Fujiwara & Kato, 1995] Fujiwara, K. & Kato, K. (1995). Logarithmic étale topology theory. Manuscrit non publié. ↑ 2
[Gabber & Ramero, 2013] Gabber, O. & Ramero, L. (2013). Foundations for almost ring theory. [arXiv:math/0409584v8](https://arxiv.org/abs/math/0409584v8). ↑ 3
[Kato, 1994] Kato, K. (1994). Toric singularities. *Amer. J. Math.*, 116(5), 1073–1099. ↑ 3
[Nizioł, 2006] Nizioł, W. (2006). Toric singularities: log-blow-ups and global resolutions. *J. Algebraic Geom.*, 15(1), 1–29. ↑ 3