Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tomes 1 à 3

M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier

Avec la participation de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat

version du 2015-4-27 à 14h33 TU (9c5ff63)

Table des matières

EXPOSÉ I

Préfaisceaux

A. Grothendieck et J.-L. Verdier

Dans les numéros 0 à 5 de cet exposé, on présente les propriétés élémentaires, et le plus souvent bien connues, des catégories de préfaisceaux[i]. Ces propriétés sont utilisées constamment dans la suite du séminaire et leur connaissance est essentielle pour la compréhension des exposés suivants. Les démonstrations sont immédiates ; elles sont le plus souvent omises. Dans les numéros 6 à 9 sont abordés quelques thèmes utilisés à différentes reprises dans la suite. Le lecteur pressé pourra les omettre en première lecture. Le numéro 10 fixe la terminologie employée. L'appendice 11 est dû à N. Bourbaki. 1

0. Univers

Un univers est un ensemble non-vide[1] $\mathscr{U}$ qui jouit des propriétés suivantes :

($\mathscr{U}$ 1) Si $x \in \mathscr{U}$ et si $y \in x$ alors $y \in \mathscr{U}$.
($\mathscr{U}$ 2) Si x, $y \in \mathscr{U}$, alors $\{x, y\} \in \mathscr{U}$.
($\mathscr{U}$ 3) Si $x \in \mathscr{U}$, alors $\mathscr{P}(x) \in \mathscr{U}$.
($\mathscr{U}$ 4) Si $(x_i, i \in I)$ est une famille d'éléments de $\mathscr{U}$ et $I \in \mathscr{U}$, alors $\cup_{i\in I} x_i \in \mathscr{U}$.

Des axiomes précédents on déduit facilement les propriétés : 2

- Si $x \in \mathscr{U}$, l'ensemble $\{x\}$ appartient à $\mathscr{U}$.
- Si x est un sous-ensemble de $y \in \mathscr{U}$, alors $x \in \mathscr{U}$.
- Si x, $y \in \mathscr{U}$, le couple $(x, y) = \{\{x, y\}, x\}$ (définition de Kuratowski) est un élément de $\mathscr{U}$.
- Si x, $y \in \mathscr{U}$, la réunion $x \cup y$ et le produit $x \times y$ sont des éléments de $\mathscr{U}$.
- Si $(x_i, i \in I \in \mathscr{U})$ est une famille d'éléments de $\mathscr{U}$, le produit $\prod_{i\in I} x_i$ est un élément de $\mathscr{U}$.
- Si $x \in \mathscr{U}$, alors $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\mathscr{U})$ (strictement). En particulier la relation $\mathscr{U} \in \mathscr{U}$ n'est pas vérifiée.

On peut donc faire toutes les opérations usuelles de la théorie des ensembles à partir des éléments d'un univers sans, pour cela, que le résultat final cesse d'être un élément de l'univers.

La notion d'univers a pour premier intérêt de fournir une définition des catégories usuelles : la catégorie des ensembles appartenant à l'univers $\mathscr{U}$ ($\mathscr{U}$-Ens), la catégorie des espaces topologiques appartenant à l'univers $\mathscr{U}$, la catégorie des groupes commutatifs appartenant à l'univers $\mathscr{U}$ ($\mathscr{U}$-Ab), la catégorie des catégories appartenant à l'univers $\mathscr{U}$….

Cependant le seul univers connu est l'ensemble des symboles du type $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \varnothing\}\}$ etc.. (tous les éléments de cet univers sont des ensembles finis et cet univers est dénombrable). En particulier, on ne connaît pas d'univers qui contienne un élément de cardinal

[i] Le lecteur pourra aussi consulter SGA 3 I § § 1 à 3.

[1] N.D.E. : Cette définition contredit l'appendice de Bourbaki *infra*. Toutefois l'intérêt des univers vides semble discutable…

infini. On est donc amené à ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome :
$(\mathcal{U}A)$ Pour tout ensemble x il existe un univers $\mathcal{U}$ tel que $x \in \mathcal{U}$.

3 L'intersection d'une famille d'univers étant un univers, on en déduit immédiatement que tout ensemble est élément d'un plus petit univers. On peut montrer que l'axiome $(\mathcal{U}A)$ est indépendant des axiomes de la théorie des ensembles.

On ajoutera aussi l'axiome :
$(\mathcal{U}B)$ Soit $R\{x\}$ une relation et $\mathcal{U}$ un univers. S'il existe un élément $y \in \mathcal{U}$ tel que $R\{y\}$, alors $\tau_x R\{x\} \in \mathcal{U}$.

La non-contradiction des axiomes $(\mathcal{U}A)$ et $(\mathcal{U}B)$ par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles n'est pas démontrée ni démontrable, semble-t-il.

Soit $\mathcal{U}$ un univers et $c(\mathcal{U})$ la borne supérieure des cardinaux des éléments de $\mathcal{U}(c(\mathcal{U}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{U}))$. Le cardinal $c(\mathcal{U})$ jouit des propriétés suivantes :

(FI) Si $a < c(\mathcal{U})$, alors $2^a < c(\mathcal{U})$.

(FII) Si $(a_i, i \in I)$ est une famille de cardinaux strictement inférieurs à $c(\mathcal{U})$ et si $\mathrm{card}(I)$ est strictement inférieur à $c(\mathcal{U})$, $\Sigma_{i\in I} a_i < c(\mathcal{U})$.

Les cardinaux qui possèdent les propriétés (FI) et (FII) sont appelés cardinaux fortement inaccessibles.

Le cardinal 0 et le cardinal infini dénombrable sont fortement inaccessibles.

L'axiome $(\mathcal{U}A)$ implique :

$(\mathcal{U}A')$ Tout cardinal est majoré strictement par un cardinal fortement inaccessible.

On peut montrer (11) que réciproquement la non contradiction de (UA') implique la non contradiction de (UA), et que la non contradiction de ces axiomes entraîne celle dans l'axiome $(\mathcal{U}B)$.

4 Appelons ensemble artinien tout ensemble E tel qu'il n'existe pas de familles infinies $(x_n, n \in N)$ telle que $x_\circ \in E$, $x_{n+1} \in x_n$. On peut alors montrer [loc. cit.] qu'il y a une correspondance biunivoque entre les cardinaux fortement inaccessibles et les univers artiniens, définie ainsi : à tout cardinal fortement inaccessible c on fait correspondre l'unique univers artinien U_c tel que

$$\mathrm{card}(\mathcal{U}_c) = c.$$

Soient $c < c'$ deux cardinaux fortement inaccessibles. On a :

$$\mathcal{U}_c \in \mathcal{U}'_{c'}.$$

En particulier les univers artiniens de cardinaux inférieurs à un cardinal donné forment un ensemble bien ordonné (pour la relation d'appartenance). L'axiome $(\mathcal{U}A')$ est équivalent à l'axiome :

$(\mathcal{U}A'')$. Tout ensemble artinien est élément d'un univers artinien.

Remarquons que tous les ensembles usuels $(\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \dots)$ sont des ensembles artiniens.

1. $\mathcal{U}$-catégories. Préfaisceaux d'ensembles

1.0. Dans la suite du séminaire et sauf mention expresse du contraire, les univers considérés posséderont un élément de cardinal infini. Soit $\mathcal{U}$ un univers. On dit qu'un ensemble est $\mathcal{U}$-petit (ou, quand aucune confusion n'en résulte, petit) s'il est isomorphe à un élément de $\mathcal{U}$. On utilise aussi la terminologie : petit groupe, petit anneau, petite catégorie[2] ...On supposera souvent, sans mention explicite, que les schémas, espaces to-
5 pologiques, ensembles d'indices...avec lesquels on travaille sont $\in \mathcal{U}$, où tout au moins

[2]N.D.E. : Une catégorie C est vue comme un ensemble de flèches (muni du sous-ensemble des objets, vu comme ensemble des flèches identiques et des applications « source, but »). Ainsi, les expressions « C est élément de $\mathcal{U}$ » ou « C est $\mathcal{U}$-petite » font sens.

ont un cardinal $\in \mathscr{U}$; cependant, de nombreuses catégories avec lesquelles on travaillera ne seront pas $\in \mathscr{U}$.

DÉFINITION 1.1. Soient $\mathscr{U}$ un univers et $\boldsymbol{C}$ une catégorie. On dit que $\boldsymbol{C}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie si pour tout couple (x, y) d'objets de $\boldsymbol{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(x, y)$ est $\mathscr{U}$-petit.

1.1.1. Soient $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ deux catégories et $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ la catégorie des foncteurs de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{D}$. On vérifie immédiatement les assertions suivantes :

a) Si $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont éléments d'un univers $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{U}$-petites) la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ est un élément de $\mathscr{U}$ (resp. est $\mathscr{U}$-petite).
b) Si $\boldsymbol{C}$ est $\mathscr{U}$-petite et si $\boldsymbol{D}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie, $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ est une $\mathscr{U}$-catégorie.

REMARQUE 1.1.2. Soit $\boldsymbol{D}$ une catégorie possédant les propriétés suivantes :

(C1) L'ensemble $\mathrm{ob}(\boldsymbol{D})$ est contenu dans l'univers $\mathscr{U}$.
(C2) Pour tout couple (x, y) d'objets de $\boldsymbol{D}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(x, y)$ est un élément de $\mathscr{U}$.

(Les catégories usuelles construites à partir d'un univers $\mathscr{U}$ possèdent ces deux propriétés : $\mathscr{U}$-Ens, $\mathscr{U}$-Ab,...). Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie appartenant à $\mathscr{U}$. Alors la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ ne possède pas en général les propriétés (C1) et (C2). Par exemple la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \mathscr{U}\text{-Ens})$ ne possède aucune des propriétés (C1) et (C2). C'est ce qui justifie la définition adoptée de $\mathscr{U}$-catégorie, de préférence à la notion plus restrictive par les conditions (C1) et (C2) ci-dessus.

DÉFINITION 1.2. Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie. On appelle catégorie des préfaisceaux d'en- **6**
sembles sur $\boldsymbol{C}$ relative à l'univers $\mathscr{U}$ (ou, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, catégorie des préfaisceaux sur $\boldsymbol{C}$) la catégorie des foncteurs contravariants sur $\boldsymbol{C}$ à valeur dans la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles.

On désigne par $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathscr{U}}$ (ou plus simplement, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, par $\widehat{\boldsymbol{C}}$) la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\boldsymbol{C}$ relative à l'univers $\mathscr{U}$. Les objets de $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathscr{U}}$ sont appelés $\mathscr{U}$-préfaisceaux (ou plus simplement préfaisceaux) sur $\boldsymbol{C}$. Lorsque $\boldsymbol{C}$ est $\mathscr{U}$-petite, la catégorie $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathscr{U}}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie. Lorsque $\boldsymbol{C}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie, $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathscr{U}}$ n'est pas nécessairement une $\mathscr{U}$-catégorie.

CONSTRUCTION-DÉFINITION 1.3. Soit x un objet d'une $\mathscr{U}$-catégorie $\boldsymbol{C}$. On appelle $\mathscr{U}$-foncteur représenté par x le foncteur $h_{\mathscr{U}}(x) : \boldsymbol{C}^{\circ} \to \mathscr{U}\text{-Ens}$ dont la construction suit [2]. Soit y un objet de $\boldsymbol{C}$.

a) Si $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x)$ est un élément de $\mathscr{U}$, alors :
$$h_{\mathscr{U}}(x)(y) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x)$$
b) Supposons que $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x)$ ne soit pas un élément de $\mathscr{U}$ et soit $R(Z, x, y)$ la relation : « L'ensemble Z est but d'un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x) \xrightarrow{\sim} Z$ ». On pose alors :
$$h_{\mathscr{U}}(x)(y) = \tau_Z R(Z).$$

(En vertu de l'axiome ($\mathscr{U}B$), $h_{\mathscr{U}}(x)(y)$ est un élément de $\mathscr{U}$). Soit $R'(u, x, y)$ la relation : « u est une bijection
$$u : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x) \xrightarrow{\sim} h_{\mathscr{U}}(x)(y) \text{ ».}$$
On pose alors : **7**
$$\varphi(y, x) = \tau_u R'(u).$$

[2] $\boldsymbol{C}^{\circ}$ désignera toujours la catégorie opposée à $\boldsymbol{C}$.

On remarquera qu'on a, dans les cas (a) et (b), un isomorphisme canonique :

$$\varphi(y,x) \,:\, \operatorname{Hom}_C(y,x) \xrightarrow{\sim} h_{\mathscr{U}}(x)(y).$$

(Dans le cas a) $\varphi(y,x)$ est l'identité). Soit alors $u \,:\, y \to y'$ une flèche de C. Le morphisme u définit, par la composition des morphismes, une application :

$$\operatorname{Hom}_C(u,x) \,:\, \operatorname{Hom}_C(y',x) \longrightarrow \operatorname{Hom}_C(y,x).$$

On pose alors

$$h_{\mathscr{U}}(x)(u) = \varphi(y,x)\operatorname{Hom}_C(x,u)\varphi(y,x)^{-1}.$$

On vérifie immédiatement que $h_{\mathscr{U}}(x)$, ainsi défini, est un foncteur $\widehat{C} \to \mathscr{U}$-Ens.

1.3.1. De même, on définit, à l'aide des isomorphismes φ, pour tout morphisme $y \,:\, x \to x'$ un morphisme de foncteurs :

$$h_{\mathscr{U}}(y) \,:\, h_{\mathscr{U}}(x) \longrightarrow h_{\mathscr{U}}(x')$$

et on vérifie immédiatement qu'on a défini ainsi un foncteur

$$h_{\mathscr{U}} \,:\, C \longrightarrow \widehat{C}_{\mathscr{U}}.$$

1.3.2. Soit maintenant $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$. On a alors un foncteur canonique pleinement fidèle :

$$\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens} \hookrightarrow \mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}$$

d'où un foncteur pleinement fidèle :

$$\widehat{C}_{\mathscr{U}} \hookrightarrow \widehat{C}_{\mathscr{V}}$$

8 et le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h_{\underline{U}}"] \arrow[dr, "h_{\underline{V}}"'] & \widehat{C}_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ & \widehat{C}_{\underline{V}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près. Lorsque C est un élément de $\mathscr{U}$, cet isomorphisme canonique est l'identité.

1.3.3. Dans la pratique, l'univers $\mathscr{U}$ est fixé une fois pour toutes et n'est pas mentionné. On utilise alors les notations $\widehat{C}$ (pour la catégorie des $\mathscr{U}$-préfaisceaux d'ensembles) et

$$h \,:\, C \longrightarrow \widehat{C}.$$

Pour tout objet x de C, le préfaisceau $h(x)$ est appelé le préfaisceau représenté par x et nous identifierons toujours la valeur en $y \in \operatorname{ob}(C)$ du préfaisceau $h(x)$ avec $\operatorname{Hom}_C(y,x)$.

Proposition 1.4. *Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, F un préfaisceau sur C et X un objet de C. Il existe un isomorphisme fonctoriel en X et en F :*

$$i \,:\, \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(h(X),F) \xleftarrow{\sim} F(X),$$

l'application i n'étant autre, lorsque F est de la forme $h(Y)$, que l'application :

$$h \,:\, \operatorname{Hom}(h(X),h(Y)) \longleftarrow \operatorname{Hom}(X,Y).$$

En particulier le foncteur h est pleinement fidèle.

1.4.1. Cette proposition justifie les abus de langage habituels identifiant un objet de C et le foncteur contravariant correspondant. Un préfaisceau isomorphe à un objet **9**
image par h (ou, en utilisant l'abus de langage signalé ci-dessus, isomorphe à un objet de C) est appelé préfaisceau représentable.

1.4.2. Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant un univers $\mathscr{U}$. La catégorie des $\mathscr{U}$-préfaisceaux est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathscr{V}$-préfaisceaux et par suite un $\mathscr{U}$-préfaisceau est représentable si et seulement si son image dans la catégorie des $\mathscr{V}$-préfaisceaux est un $\mathscr{V}$-préfaisceau représentable.

2. Limites projectives et inductives

Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie et I une petite catégorie. Notons $\mathrm{Fonct}(I, C)$ la catégorie des foncteurs de I dans C. La catégorie $\mathrm{Fonct}(I, C)$ est une $\mathscr{U}$-catégorie. À tout objet X de C associons la sous-catégorie $\mathscr{X}$ de C ayant pour seul objet l'objet X et pour seule flèche l'identité de X. Désignons par $i_X : \mathscr{X} \to C$ le foncteur d'inclusion. Il existe un et un seul foncteur $e_X : I \to \mathscr{X}$, et nous désignerons par $k_X : I \to C$ le foncteur $i_X \circ e_X$. (On dira que k_X est le foncteur constant de valeur X). La correspondance $X \mapsto k_X$ est visiblement fonctorielle en X, ce qui nous permet de définir, pour tout foncteur $G : I \to C$, le préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}(I,C)}(k_X, G)$.

Définition 2.1. On appelle limite projective de G et on note $\varprojlim_I G$ le préfaisceau :

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}(I,C)}(k_X, G).$$

Lorsque le préfaisceau $\varprojlim_I G$ est représentable, on désigne encore par $\varprojlim_I G$ un objet **10**
de C qui le représente. L'objet $\varprojlim_I G$ n'est donc défini qu'à isomorphisme près. Lorsqu'aucune confusion n'en résulte on emploie la notation abrégée $\varprojlim G$.

Pour G variable, $\varprojlim G$ est un foncteur de la catégorie $\mathrm{Fonct}(I, C)$ à valeurs dans $\widehat{C}$.

2.1.1. On définit de même par symétrie (renversement du sens des flèches dans C) la limite inductive d'un foncteur : c'est un foncteur covariant sur C à valeur dans la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles. Nous emploierons les notations $\varinjlim_I G$ ou bien $\varinjlim G$.

On notera que les produits, produits fibrés, noyaux sont des limites projectives. De même les sommes, sommes amalgamées, conoyaux sont des limites inductives.

Définition 2.2. Soient I et C deux catégories et $G : I \to C$ un foncteur. On dit que la limite projective de G est représentable s'il existe un univers $\mathscr{U}$ tel que :

1) La catégorie I soit $\mathscr{U}$-petite.
2) La catégorie C soit une $\mathscr{U}$-catégorie.
3) Le préfaisceau $\varprojlim G$ à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles soit représentable.

Il résulte au *n*° 1 que l'objet $\varprojlim G$ représentant le préfaisceau $\varprojlim G$ ne dépend pas, à isomorphisme près, de l'univers $\mathscr{U}$. Notons aussi qu'il existe un plus petit univers $\mathscr{U}'$ possédant les propriétés (1) et (2), et que le préfaisceau $\varprojlim G$ est nécessairement à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{U}'$-ensembles.

2.2.1. Soient I et C deux catégories. On dit que les I-limites projectives dans C **11**
sont représentables si pour tout foncteur $G : I \to C$, la limite projective de G est représentable. Enfin soient C une catégorie et $\mathscr{U}$ un univers. On dit que les $\mathscr{U}$-limites projectives dans C sont représentables si pour toute catégorie I $\mathscr{U}$-petite et pour tout foncteur $G : I \to C$, la limite projective de G est représentable.

Proposition 2.3. Soient C une catégorie et $\mathscr{U}$ un univers. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Les $\mathscr{U}$-limites projectives dans C sont représentables.
ii) Les produits, indexés par un petit ensemble sont représentables, et les noyaux de couples de flèches sont représentables.
iii) Les produits, indexés par un petit ensemble sont représentables, et les produits fibrés sont représentables.

Preuve. Il suffit de remarquer qu'il existe un isomorphisme fonctoriel en G

$$\varprojlim G = \operatorname{Ker}(\prod_{i \in \mathrm{ob}(I)} G(i) \rightrightarrows \prod_{u \in F\ell(I)} G(\mathrm{but}(u))),$$

le couple de flèches étant défini par les morphismes

$$\prod_{i \in \mathrm{Ob}(I)} G(i) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathrm{but}(u)}} G(\mathrm{but}(u))$$
$$\prod_{i \in \mathrm{Ob}(I)} G(i) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathrm{source}(u)}} G(\mathrm{source}\ (u)) \xrightarrow{G(u)} G(\mathrm{but}(u)).$$

De plus, il est clair que $\operatorname{Ker}(X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y) = X \prod_{X \times Y} X$ les deux morphismes de X dans $X \times Y$ étant $\mathrm{id}_X \times u$ et $\mathrm{id}_X \times v$.

2.3.1. Il existe évidemment des définitions et assertions analogues pour les limites
12 inductives que nous n'expliciterons pas. De même pour les limites projectives et inductives finies (i.e. relatives à une catégorie I finie).

Corollaire 2.3.2. Désignons par $\mathscr{U}$-Ens la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles et par $\mathscr{U}$-Ab la catégorie des objets groupes abéliens de $\mathscr{U}$-Ens. Les $\mathscr{U}$-limites projectives et inductives dans $\mathscr{U}$-Ens et dans $\mathscr{U}$-Ab sont représentables.

Proposition 2.3.3. Soient I une petite catégorie, $F : I \to \mathscr{U}$-Ens en foncteur et $G \in \mathrm{ob}\, I$ un petit ensemble d'objets de I tel que pour tout objet X de I il existe un objet $Y \in G$ et un morphisme $Y \to X$ (resp. $X \to Y$). Alors $\varprojlim_I F$ (resp. $\varinjlim_I F$ est représentable et on a $\mathrm{card}(\varprojlim_I F) \leq \Pi_{Y \in G} \mathrm{card}(F(Y))$ (resp. $\mathrm{card}(\varinjlim_I F) \leq \Sigma_{Y \in G} \mathrm{card}(F(Y))$).

Preuve. On vérifie immédiatement que $\varprojlim_I F'$ (resp. $\varinjlim_I F'$) est isomorphe à un sous-objet (resp. un quotient de $\Pi_{Y \in G} F(Y)$ (resp. $\amalg_{Y \in G} F(Y)$) ; d'où la proposition.

Définition 2.4.1. Soient C une catégorie où les limites projectives (resp. inductives) finies soient représentables et $u : C \to C'$ un foncteur. On dit que u est exact à gauche (resp. à droite) s'il « commute » aux limites projectives (resp. inductives) finies. Un foncteur exact à gauche et à droite est appelé un foncteur exact.

2.4.2. Il résulte de 2.3 que, pour qu'un foncteur soit exact, il faut et il suffit qu'il transforme l'objet final (= produit vide) en l'objet final, le produit de deux objets en le produit des deux objets images, et le noyaux des couples de deux flèches en le noyau des couples images ou encore, qu'il transforme l'objet final en l'objet final et les produits fibrés en produits fibrés (on suppose que dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables).

13 2.5.0. Soient I, J et C trois catégories, $G : I \times J \to C$ un foncteur (i.e. un foncteur de I à valeur dans la catégorie des foncteurs de J dans C). Supposons que les limites projectives des foncteurs

$$\begin{aligned} G_i : J &\longrightarrow C \qquad i \in \mathrm{ob}(I) \\ j &\longmapsto G(i \times j) \end{aligned}$$

soient représentables, et que le foncteur :

$$i \longmapsto \varprojlim G_i$$

admette une limite projective représentable. Il est clair qu'alors le foncteur G admet une limite projective représentable et qu'on a un isomorphisme canonique :

$$\varprojlim_{I \times J} G \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{I} \varprojlim_{J} G_i,$$

et que par suite on a un isomorphisme canonique

$$\varprojlim_{I} \varprojlim_{J} G_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{J} \varprojlim_{I} G_j.$$

Nous dirons par la suite plus brièvement que les limites projectives commutent aux limites projectives. On voit de même que les limites inductives commutent aux limites inductives. Mais il n'est pas vrai en général que les limites inductives commutent aux limites projectives.

Définition 2.5. Soient C une catégorie à produits fibrés représentables, I une catégorie, $G : I \to C$ un foncteur, $g : G \to X$ un morphisme de G dans un objet de C (i.e. un morphisme de G dans le foncteur constant associé X), $m : Y \to X$ un morphisme de C. Soit $G \times_X Y : I \to C$ le foncteur 14

$$i \longmapsto G(i) \times_X Y.$$

On dit que la limite inductive de G est universelle si pour tout objet X, tout morphisme $g : G \to X$, tout morphisme $m : Y \to X$,

a) la limite inductive du foncteur $G \times_X Y$ est représentable,
b) le morphisme canonique $\varinjlim (G \times_X Y) \to (\varinjlim G) \times_X Y$ est un isomorphisme.

Proposition 2.6. Soit $\mathscr{U}$ un univers. Les limites inductives dans $\mathscr{U}$-Ens qui sont représentables (en particulier, les $\mathscr{U}$-limites inductives (2.2.1) dans $\mathscr{U}$-Ens) sont universelles.

Nous utiliserons aussi un autre résultat de commutation entre limites projectives et inductives que nous allons présenter maintenant.

Définition 2.7. Une catégorie I est pseudo-filtrante lorsqu'elle possède les propriétés suivantes :

PS 1) Tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & j' \end{tikzcd}$$

peut être inséré dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr] & \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\ & j' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

PS 2) Tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & j \end{tikzcd}$$

15 peut être inséré dans un diagramme :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & j \arrow[r, "w"] & k \end{tikzcd}$$

tel que

$$w \circ u = w \circ v.$$

Une catégorie I est dite filtrante si elle est pseudo-filtrante, non vide et connexe, i.e. si deux objets quelconques de I peuvent être reliés par une suite de flèches (on n'impose aucune condition sur le sens des flèches) ; cela signifie aussi, en présence de PS 2, que $I \neq \varnothing$ et que pour deux objets a, b de I, il existe toujours un objet c de I et des flèches $a \to c$ et $b \to c$. On dit aussi qu'une catégorie I est cofiltrante si I° est filtrante.

Exemple 2.7.1. Si dans I les sommes amalgamées (resp. les sommes de deux objets) et les conoyaux de doubles flèches sont représentables, alors I est pseudo-filtrante (resp. filtrante).

Proposition 2.8. Soit $\mathcal{U}$ un univers. Les $\mathcal{U}$-limites inductives filtrantes dans $\mathcal{U}$-Ens commutent aux limites projectives finies.

On se ramène immédiatement à démontrer que les $\mathcal{U}$-limites filtrantes commutent aux produits fibrés. La démonstration est laissée au lecteur. On pourra utiliser la description de la limite donnée par le

Lemme 2.8.1. Soient I une petite catégorie filtrante, $i \mapsto X_i$ un foncteur de I dans $\mathcal{U}$-Ens. Sur l'ensemble somme $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i$, soit R la relation :

(R) Deux éléments $x_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ sont reliés s'il existe un objet $k \in \mathrm{ob}\, I$ et deux morphismes $u : i \to k$ et $v : j \to k$ tels que les images dans X_k de x_i et de x_j par les applications de transition u et v respectivement soient égales.

16 Alors :

1) R est une relation d'équivalence.
2) Le quotient $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i / R$ est canoniquement isomorphe à $\varinjlim_I X_i$.
3) Deux éléments $x_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ sont respectivement équivalents suivant R à deux éléments d'un même X_k.
4) Pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, deux éléments α et β de X_i sont équivalents suivant R si et seulement s'il existe un morphisme $u : i \to j$ tel que $u(\alpha) = u(\beta)$.

L'assertion 1) résulte de (PS 1) (2.7). Pour démontrer 2), on vérifie que $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i / R$ possède la propriété universelle de la limite inductive (on n'utilise que (PS 1)). L'assertion 3) résulte du fait que I est connexe. L'assertion 4) résulte de (PS 2).

Corollaire 2.9. Soit γ une espèce de structure algébrique « définie par limites projectives finies ». (Le lecteur est prié de donner un sens mathématique à la phrase précédente. Notons seulement que les structures de groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, etc... sont de telles structures). Désignons par $\mathscr{U}$-γ la catégorie des γ-objets de $\mathscr{U}$-Ens. Le foncteur qui à chaque objet de $\mathscr{U}$-γ associe l'ensemble sous-jacent, commute aux $\mathscr{U}$-limites filtrantes. Par suite les $\mathscr{U}$-limites filtrantes dans $\mathscr{U}$-γ commutent aux limites projectives finies.

Corollaire 2.10. Les $\mathscr{U}$-limites pseudo-filtrantes dans $\mathscr{U}$-Ab commutent aux limites projectives finies.

(On se ramène aux limites filtrantes en décomposant la catégorie d'indices en composantes connexes).

Notons maintenant un résultat que nous utiliserons constamment : Soient C et C' 17
deux $\mathscr{U}$-catégories, u et v deux foncteurs $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ u adjoint à gauche de v. Rappelons que ceci veut dire qu'il existe un isomorphisme entre les bifoncteurs à valeur dans $\mathscr{U}$-Ens :

$$\mathrm{Hom}_{C'}(u(X), X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C}(X, v(X')).$$

Proposition 2.11. Le foncteur u commute aux limites inductives représentables ; le foncteur v commute aux limites projectives représentables.

Cette assertion signifie que pour toute catégorie I et tout foncteur $G : I \to C'$ tel que la limite projective de G soit représentable, le foncteur $v \circ G$ admet une limite projective représentable et que l'on a un isomorphisme canonique :

$$v(\varprojlim G) \longrightarrow \varprojlim (v \circ G).$$

Le lecteur explicitera de lui-même l'assertion concernant le foncteur u.

Signalons enfin un calcul de limites projectives dans le cas où la catégorie d'indices admet des produits.

Proposition 2.12. Soient I et C deux catégories, $\mathscr{V}$ un univers. On suppose que les $\mathscr{V}$-limites projectives dans C sont représentables et qu'il existe dans I une famille d'objets $(i_\alpha)_{\alpha\in A}$, où A est un élément de $\mathscr{V}$, telle que :

1) les produits $i_\alpha \times i_\beta$ soient représentables pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$,
2) tout objet de I s'envoie dans un au moins des i_α.

Alors pour tout contra foncteur F de I dans C

$$F : I^\circ \longrightarrow C,$$

la limite projective de F existe et il existe un isomorphisme fonctoriel en F :

$$\varprojlim F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(\prod_{\alpha\in A} F(i_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta)\in A\times A} F(i_\alpha \times i_\beta)\right),$$

les deux flèches étant définies par les projections des produits $i_\alpha \times i_\beta$ sur les facteurs. 18

3. Propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux

Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $\widehat{C}$ la catégorie des préfaisceaux sur C. Les propriétés d'exactitude de $\widehat{C}$ se déduisent toutes de la proposition suivante :

Proposition 3.1. Les $\mathscr{U}$-limites projectives et inductives dans $\widehat{C}$ sont représentables. Pour tout objet X de C, le foncteur sur $\widehat{C}$:

$$F \longmapsto F(X) \qquad F \in \widehat{C}$$

commute aux limites inductives et projectives.

En d'autres termes, « les limites inductives et projectives dans $\widehat{C}$ se calculent argument par argument ». Citons quelques corollaires.

Corollaire 3.2. Soit γ une structure algébrique définie par limites projectives finies. La catégorie des foncteurs contravariants à valeurs dans $\mathscr{U}$-γ est équivalente à la catégorie des γ-objets de $\widehat{C}$.

Corollaire 3.3. Un morphisme de $\widehat{C}$ qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme. Un morphisme de $\widehat{C}$ se factorise de manière unique en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme. Les limites inductives dans $\widehat{C}$ qui sont représentables, sont universelles. Les $\mathscr{U}$-limites inductives filtrantes dans $\widehat{C}$ commutent aux limites projectives finies. Le foncteur canonique $C \to \widehat{C}$ commute aux limites projectives représentables.

19 Plus généralement on peut dire que la catégorie $\widehat{C}$ hérite de toutes les propriétés de la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles faisant intervenir des limites inductives et projectives.

3.4.0. Soit F un objet de $\widehat{C}$. On désigne par C/F la catégorie suivante : Les objets de C/F sont les couples formés d'un objet X de C et d'un morphisme u de X dans F. Soient (X, u) et (Y, v) deux objets. Un morphisme de (X, u) dans (Y, v) est un morphisme g de X dans Y tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & F & \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.4. Avec les notations de (3.4.0), le foncteur source $C/F \to \widehat{C}$ admet une limite inductive représentable dans $\widehat{C}$. Le morphisme canonique :

$$\varinjlim_{C/F} \text{source}\,(.) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Corollaire 3.5. Soient F et H deux objets de $\widehat{C}$. Il existe un isomorphisme canonique :

$$\operatorname{Hom}(F, H) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(X,u)\in \operatorname{ob}(C/F)} H(X).$$

Preuve. Le corollaire se déduit immédiatement de 3.4 et de 1.2.

20 Proposition 3.6. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ et $i : \widehat{C}_{\mathscr{U}} \to \widehat{C}_{\mathscr{V}}$ le foncteur d'injection naturel des catégories de préfaisceaux correspondantes (1.3). Le foncteur i commute aux limites inductives et projectives. De plus, pour tout objet F de $\widehat{C}_{\mathscr{U}}$, tout sous-objet de $i(F)$ est isomorphe à l'image par i d'un unique sous-objet de F (de sorte qu'on obtient une bijection de l'ensemble des sous-objets de F avec l'ensemble des sous-objets de $i(F)$).

4. Cribles

Définition 4.1. Soit C une catégorie. On appelle crible de la catégorie C une sous-catégorie pleine D de C possédant la propriété suivante : tout objet de C tel qu'il existe un morphisme de cet objet dans un objet de D est dans D. Soit X un objet de C ; on appelle (par abus de langage) cribles de X les cribles de la catégorie C/X.

Soit $\mathcal{U}$ un univers tel que C soit une $\mathcal{U}$-catégorie. Soit $\widehat{C}$ la catégorie de préfaisceaux correspondante. À tout crible de X on associe un sous-objet de X dans $\widehat{C}$ de la manière suivante : à tout objet Y de C, on fait correspondre l'ensemble des morphismes $f : Y \to X$ tels que l'objet (Y, f) appartienne au crible.

Proposition 4.2. L'application définie ci-dessus, établit une bijection entre l'ensemble des cribles de X et l'ensemble des sous-objets de X dans $\widehat{C}$.

Preuve. Montrons seulement qu'elle est l'application inverse. À tout sous-foncteur R de X on associe la catégorie C/R des objets de C au-dessus de R (3.4). On vérifie immédiatement que C/R est un crible de X.

Remarque 4.2.1. On voit de même que les cribles de C sont en correspondance biuni- **21**
voque canonique avec l'ensemble des sous-foncteurs du « foncteur final » sur C (objet « final » de $\widehat{C}$).

4.3. Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie. Par abus de langage nous appellerons aussi cribles de X, les sous-objets de X dans la catégorie $\widehat{C}$. Cet abus de langage nous permet pour tout préfaisceau F et tout crible R de X de définir $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(R, F)$ comme étant l'ensemble des morphismes du foncteur R dans F. On a d'ailleurs un isomorphisme canonique fonctoriel en F (3.5) :

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(R, F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C/R} F(.),$$

ce qui permet d'en donner une définition directe[3]. De même, la proposition 4.2 nous permet de transposer aux cribles les opérations usuelles sur les foncteurs. Citons :

4.3.1. Changement de base. Soit R un crible de X et $f : Y \to X$ un morphisme d'objets de C. Le produit fibré $R \times_X Y$ est un crible de Y qu'on appelle crible déduit de R par changement de base. La sous-catégorie correspondante de C/Y est l'image inverse de la sous-catégorie de C/X définie par R par le foncteur canonique $C/Y \to C/X$ défini par f.

4.3.2. Relation d'ordre, intersection, réunion. La relation d'inclusion sur les sous-foncteurs de X est une relation d'ordre. On peut définir la réunion et l'intersection d'une famille de cribles indexés par un ensemble quelconque comme étant la borne supérieure et la borne inférieure de la famille de sous-préfaisceaux correspondante.

4.3.3. Image, crible engendré. Soient $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de préfaisceaux et pour **22**
chaque $\alpha \in A$, un morphisme $f_\alpha : F_\alpha \to X$ où X est un objet de C. On appelle image de cette famille de morphismes la réunion des images des f_α. L'image de cette famille est donc un crible de X. En particulier si tous les F_α sont des objets de C, le crible image sera appelé le crible engendré par les morphismes f_α. La catégorie C/R est la sous-catégorie pleine de C/X formée des objets $X' \to X$ au-dessus de X tels qu'il existe un X-morphisme de X' dans un des F_α.

[3] N.D.E. : Plus simplement, C/R s'identifie à R de sorte qu'on a la formule $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(R, F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_R F$, où F désigne abusivement le composé de F et du foncteur « source » tautologique $R \to C/X \to C$.

Le lecteur pourra, à titre d'exercice, traduire en termes des catégories C/R les relations et opérations définies ici sur les sous-foncteurs. Il constatera alors que ces relations et opérations ne dépendent pas de l'univers $\mathcal{U}$ tel que C soit une $\mathcal{U}$-catégorie, et qu'elles sont par suite définies pour toute catégorie, sans que l'on soit obligé de préciser l'univers auquel les ensembles de morphismes appartiennent ; ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir a priori grâce à 3.6.

5. Fonctorialité des catégories de préfaisceaux

5.0. Soient C, C', D trois catégories et $u : C \to C'$ un foncteur. On désignera par u^* le foncteur :

$$u^* : \begin{cases} \mathcal{H}om(C'^\circ, D) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(C^\circ, D) \\ G & \longmapsto & G \circ u \end{cases}$$

obtenu en composant avec le foncteur u. Le foncteur u^* commute aux limites inductives et projectives.

23 Proposition 5.1. Supposons que C soit petite, et que, dans D, les $\mathcal{U}$-limites inductives (resp. projectives) soient représentables. Le foncteur u^* admet un adjoint à gauche $u_!$ (resp. à droite u_*). On a donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}om(C^\circ, D)}(F, u^*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}om(C'^\circ, D)}(u_!F, G)$$
$$(\text{resp. } \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}om(C^\circ, D)}(u^*G, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}om(C'^\circ, D)}(G, u_*F)).$$

Preuve. Nous n'indiquerons que la démonstration de l'existence du foncteur adjoint à gauche. La partie resp. de la proposition s'en déduira alors formellement grâce aux isomorphismes :

$$\mathcal{H}om(C^\circ, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(C, D^\circ)^\circ \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om((C^\circ)^\circ, D^\circ)^\circ.$$

Soit Y un objet de C'. Désignons par I_u^Y la catégorie suivante : Les objets de I_u^Y sont les couples (X, m) où X est un objet de C et m un morphisme $Y \to u(X)$. Soient (X, m) et (X', m') deux objets de I_u^Y. Un morphisme de (X, m) dans (X', m') est un morphisme $\xi : X \to X'$ tel que $m' = u(\xi)m$. La composition des morphismes se définit de la manière évidente.

Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de C'. Le morphisme f définit par composition un foncteur $I_u^f : I_u^Y \to I_u^{Y'}$.

On a de plus un foncteur $\mathrm{pr}_Y : I_u^Y \to C$ qui, à l'objet (X, m) associe l'objet X. Notons qu'alors le diagramme :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} I_u^Y \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"'] & I_u^f \arrow[r] & I_u^{Y'} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{Y'}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

24 Soit maintenant F un préfaisceau sur C et posons :

$$u_!F(Y) = \varinjlim_{I_u^Y} F \circ \mathrm{pr}_Y(.). \tag{5.1.1}$$

La commutativité du diagramme (*) et la fonctorialité de la limite inductive font de $u_!F$ un préfaisceau sur C'. Montrons que le foncteur $u_!$ est un adjoint à gauche du foncteur

u^*. Pour cela montrons que pour tout préfaisceau G sur C', il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}(u_! F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(F, u^* G).$$

Soit $\xi \in \mathrm{Hom}(u_! F, G)$. Pour tout objet X de C, on a donc un morphisme :

$$\xi_X : u_!(u(X)) \longrightarrow G(u(X)).$$

Mais $(u(X), \mathrm{id}_{u(X)})$ est un objet de $I_u^{u(X)}$, et par définition de la limite inductive, on a un morphisme canonique :

$$F(X) \longrightarrow u_! F(u(X)).$$

On en déduit pour tout objet X de C un morphisme :

$$\eta_X : F(X) \longrightarrow G(u(X))$$

qui est visiblement fonctoriel en X. D'où un morphisme

$$\eta : F \longrightarrow u^* G.$$

Réciproquement, soit $\eta \in \mathrm{Hom}(F, u^* G)$. On en déduit, pour tout objet Y de C, un morphisme de foncteur :

$$\eta_Y : F \circ \mathrm{pr}_Y \longrightarrow (u^* G)\, \mathrm{pr}_Y ,$$

d'où, en composant avec le morphisme évident du foncteur $(u^* G)\, \mathrm{pr}_Y$ dans le foncteur constant $G(Y)$, un morphisme :

$$\xi_Y : u_! F(Y) \longrightarrow G(Y)$$

qui est fonctoriel en Y. D'où un morphisme :

$$\xi : u_! F \longrightarrow G.$$

Le lecteur vérifiera que les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de 25
l'autre, et achèvera ainsi la démonstration.

Proposition 5.2. Supposons que dans D, les $\mathcal{U}$-limites inductives soient représentables, les limites projectives finies soient représentables et que les $\mathcal{U}$-limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. Supposons de plus que dans C les limites projectives finies soient représentables et que le foncteur u soit exact à gauche (2.3.2). Alors les limites projectives finies sont représentables dans $\mathcal{H}om(C^\circ, D)$ et dans $\mathcal{H}om(C'^\circ, D)$, et le foncteur $u_!$ est exact à gauche.

Preuve. La première assertion est triviale. Démontrons la seconde. D'après la démonstration de 5.1, pour tout préfaisceau F sur C et tout objet Y de C' on a :

$$u_! F(Y) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{I_u^Y} F \circ \mathrm{pr}_Y .$$

Il suffit donc de montrer que la catégorie $(I_u^Y)^\circ$ vérifie les axiomes (PS 1) et (PS 2) (2.7) et que cette catégorie est connexe. La vérification est laissée au lecteur.

5.3. En particularisant ces résultats au cas où D est la catégorie des $\mathcal{U}$-ensembles, on obtient une suite de trois foncteurs :

$$u_!, u^*, u_*,$$

qui est une « suite de foncteurs adjoints » dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Leurs propriétés essentielles 26
sont résumées dans la :

Proposition 5.4. Soient C une petite catégorie, C' une $\mathcal{U}$-catégorie, et $u : C \to C'$ un foncteur.

1) Le foncteur $u^* : \widehat{C'} \to \widehat{C}$ commute aux limites inductives et projectives.
2) Le foncteur $u_* : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ commute aux limites projectives. Pour tout préfaisceau F sur C et tout objet Y de C', on a :
$$u_* F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(u^*(Y), F).$$
3) Le foncteur $u_! : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ commute aux limites inductives. Le foncteur $u_!$ n'est défini qu'à isomorphisme près, mais on peut toujours le choisir tel que le diagramme
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\ C\,\widehat{} \arrow[r, "u_!"] & C'\,\widehat{} \end{tikzcd}$$
(h et h' sont les foncteurs d'inclusion canonique) soit commutatif.
Pour tout préfaisceau F sur C, on a :
$$u_! F \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} h' \circ u.$$
4) Si les limites projectives finies sont représentables dans C et si u est exact à gauche (2.3.2), le foncteur $u_!$ est exact à gauche.

Preuve. L'assertion (1) est triviale. L'assertion (2) se déduit du fait que u_* est un foncteur adjoint à droite par (2.11) et (1.4). Il en est de même pour l'assertion (3) mais on applique en plus (3.4). Enfin l'assertion (4) n'est autre que (5.2) qu'on peut appliquer grâce à (2.7).

27 Proposition 5.5. Soient C et C' deux petites catégories et $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ un couple de foncteurs, où v est adjoint à gauche de u. Il existe alors des isomorphismes, compatibles avec les isomorphismes d'adjonction :
$$v^* \xrightarrow{\sim} u_!$$
$$v_* \xrightarrow{\sim} u^* \qquad .$$

Preuve. Il suffit d'exhiber un isomorphisme $v^* \xrightarrow{\sim} u_!$; l'autre isomorphisme s'en déduira par adjonction. Soient F un préfaisceau sur C et Y un objet de C'. On a alors :
$$v^* F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(v(Y), F).$$
Puis en utilisant (3.4) :
$$\mathrm{Hom}(v(Y), F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(v(Y), .).$$
Mais v est adjoint à gauche de u et par suite :
$$\varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(v(Y), .) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(Y, u(.)).$$
Utilisant alors (5.4.3)), il vient :
$$\varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(Y, u(.)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, u_! F) \xrightarrow{\sim} u_! F(Y).$$

On a donc déterminé, pour tout objet Y de C', un isomorphisme $v^* F(Y) \xrightarrow{\sim} u_! F(Y)$ qui est visiblement fonctoriel en Y et en F, C.Q.F.D.

Corollaire 5.5.1. Soit $u : C \to C'$ un foncteur qui admet un adjoint à gauche. Le foncteur $u_! : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ commute aux limites projectives (rappelons qu'il commute aux limites inductives par (1.4.3)).

Remarque 5.5.2. On trouve ainsi une « suite de quatre foncteurs adjoints » (cf. 5.3) : **28**

$$v_!, v^* = u_!, v_* = u^*, u_*,$$

dont les trois premiers (resp. derniers) commutent donc aux $\varinjlim$ (resp. $\varprojlim$).

Proposition 5.6. Les hypothèses sont celles de 5.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur u est pleinement fidèle.
ii) Le foncteur $u_!$ est pleinement fidèle.
iii) Le morphisme d'adjonction $\mathrm{id}_{\widehat{C}} \to u^* u_!$ est un isomorphisme.
iv) Le foncteur u_* est pleinement fidèle.
v) Le morphisme d'adjonction $u^* u_* \to \mathrm{id}_{\widehat{C}}$ est un isomorphisme.

Preuve. Il est clair que ii) $\Leftrightarrow$ iii) et iv) $\Leftrightarrow$ v) (propriétés générales des foncteurs adjoints) et que ii) $\Rightarrow$ i) (5.4.3)). Montrons que i) $\Rightarrow$ iii). Les foncteurs $\mathrm{id}_{\widehat{C}}$, u^* et $u_!$ commutent aux limites inductives. D'après (3.4), il suffit donc de démontrer que $H \to u^* u_! H$ est un isomorphisme lorsque H est représentable ce qui est évident. Montrons que iii) est équivalent à v). Pour tout objet H (resp. K) de $\widehat{C}$ désignons par $\Phi(H) : H \to u^* u_! H$ (resp. par $\Psi(K) : u^* u_* \to K$) le morphisme d'adjonction. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(H, u^* u_* K) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(H,\Psi(K))"] \arrow[d, dash, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(H, K) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(u_! H, u_* K) \arrow[d, dash, "\wr"'] & \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(u^* u_! H, K) \arrow[uur, "\mathrm{Hom}(\Phi(H),K)"'] &
\end{tikzcd}.$$

Par suite $\Phi(H)$ est un isomorphisme pour tout H si et seulement si $\Psi(\mathscr{K})$ est un isomorphisme pour tout K, C.Q.F.D. **29**

Remarque 5.7. a) Les équivalences ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\Leftrightarrow$ v) sont des résultats généraux sur les foncteurs adjoints.

b) La forme explicite de $u_!$ resp. u_* donnée dans la démonstration de 1.4 montre aussitôt que, sous les hypothèses générales de 1.1, si u est pleinement fidèle, alors le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to u^* u_!$ (resp. $u^* u_* \to \mathrm{id}$) est un isomorphisme, i.e. que $u_!$ (resp. u_*) est pleinement fidèle.

5.8.0. Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies $\mathscr{U}$-γ-Ens la catégorie des γ-objets de $\mathscr{U}$-Ens, esj : $\mathscr{U}$-γ-Ens $\to$ $\mathscr{U}$-Ens le foncteur ensemble sous-jacent (pour simplifier nous supposons que l'espèce de structure envisagée a un seul ensemble de base). Soit C une catégorie. La composition avec esj fournit un foncteur noté

$$\widehat{\mathrm{esj}} : \mathscr{H}om(C^\circ, \mathscr{U}\text{-}\gamma\text{-}\mathrm{Ens}) \longrightarrow \widehat{C}.$$

Comme dans $\widehat{C}$, les limites projectives se calculent argument par argument, le foncteur $\mathrm{esj}^{\wedge}$ se factorise en une équivalence.

$$\mathscr{H}om(C^{\circ}, \mathscr{U}\text{-}\gamma\text{-}\mathrm{Ens}) \xrightarrow{\approx} \widehat{C}_{\gamma}, \tag{5.8.1}$$

où $\widehat{C}_{\gamma}$ est la catégorie des γ-objets de $\widehat{C}$, et un foncteur encore noté

$$\mathrm{esj}^{\wedge} : \widehat{C}_{\gamma} \longrightarrow \widehat{C},$$

et appelé le foncteur « préfaisceau d'ensembles sous-jacent ».

30 5.8.2. Supposons que le foncteur est : $\mathscr{U}$-γ-Ens $\to$ $\mathscr{U}$-Ens admette un adjoint à gauche Lib : $\mathscr{U}$-Ens $\to$ $\mathscr{U}$-γ-Ens [3] (on peut montrer en fait que cette condition est toujours satisfaite). La composition avec Lib fournit un foncteur

$$\mathrm{Lib}^{\wedge} : \widehat{C} \longrightarrow \mathscr{H}om(C^{\circ}, \mathscr{U}\text{-}\gamma\text{-}\mathrm{Ens})$$

et en composant avec l'équivalence (5.8.1), un foncteur encore noté

$$\mathrm{Lib}^{\wedge} : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C}_{\gamma}$$

et appelé le foncteur « préfaisceau de γ-objets libres engendré ». Le foncteur $\mathrm{Lib}^{\wedge}$ est adjoint à gauche au foncteur $\mathrm{esj}^{\wedge}$.

Proposition 5.8.3. *Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies telle que dans la catégorie des γ-objets de $\mathscr{U}$-Ens, les $\mathscr{U}$-limites inductives soient représentables* [3], *C une catégorie appartenant à $\mathscr{U}$, C' une $\mathscr{U}$-catégorie, $u : C \to C'$ un foncteur. Désignons par $\widehat{C}_{\gamma}$ (resp. $\widehat{C'}_{\gamma}$) la catégorie des γ-objets de $\widehat{C}$ (resp. $\widehat{C'}$) et par $u^{*\gamma}$ le foncteur sur les γ-objets déduit du foncteur u^{*}. Il résulte de 5.1 et de l'équivalence 5.8.1 qu'il existe un foncteur adjoint à gauche (resp. à droite) au foncteur $u^{*\gamma}$. Ce foncteur est noté $u_{!_{\gamma}}$ (resp. $u_{*_{\gamma}}$).*

(1) *Le foncteur $u^{*\gamma}$ commute aux limites inductives et projectives. Le diagramme*

(∗)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{C'}_{\gamma} \arrow[r, "u^{*\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}'^{\wedge}"'] & \widehat{C}_{\gamma} \arrow[d, "\mathrm{esj}^{\wedge}"] \\
\widehat{C'} \arrow[r, "u_{*}"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

31 *est commutatif ($\mathrm{esj}'^{\wedge}$ et $\mathrm{esj}^{\wedge}$ désignent les foncteurs « ensemble sous-jacent »),*

(2) *Le foncteur $u_{*_{\gamma}}$ commute aux limites projectives. Le diagramme*

(∗∗)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{C}_{\gamma} \arrow[r, "u_{*_{\gamma}}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}^{\wedge}"'] & \widehat{C'}_{\gamma} \arrow[d, "\mathrm{esj}'^{\wedge}"] \\
\widehat{C} \arrow[r, "u_{*}"] & \widehat{C'}
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

[3] Le foncteur Lib est le foncteur « γ-objets libre engendré ». Exemple : groupe libre, groupe commutatif libre, A-module libre, etc.

[3] On peut montrer que cette condition est toujours satisfaite.

(3) Le foncteur $u_{!_\gamma}$ commute aux limites inductives. Supposons que $\mathrm{esj}\,\widehat{}$ (resp. $\mathrm{esj}'\,\widehat{}$) admette un adjoint à gauche $\mathrm{Lib}\,\widehat{}$ (resp. $\mathrm{Lib}'\,\widehat{}$) (5.8.2). Le diagramme

$$(***)\qquad \begin{tikzcd} \widehat{C} \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\mathrm{Lib}\,\widehat{}"'] & \widehat{C'} \arrow[d, "\mathrm{Lib}'\,\widehat{}"'] \\ \widehat{C}_\gamma \arrow[r, "u_{!_\gamma}"] & \widehat{C'}_\gamma \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Supposons que $u_!$ commute aux limites projectives finies (5.4) et (5.6). Alors le diagramme

$$(****)\qquad \begin{tikzcd} \widehat{C}_\gamma \arrow[r, "u_{!_\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}\,\widehat{}"'] & \widehat{C'}_\gamma \arrow[d, "\mathrm{esj}'\,\widehat{}"'] \\ \widehat{C} \arrow[r, "u_!"] & \widehat{C'} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près, et $u_{!_\gamma}$ commute aux limites projectives finies.

Preuve. L'assertion (1) est évidente. L'assertion (2) aussi car u_* est un adjoint à droite et par suite (2.11) commute aux limites projectives et, en particulier, aux limites projectives finies ; d'où la commutativité du diagramme $(**)$. La commutativité du diagramme $(***)$ se déduit de l'unicité, à isomorphisme près du foncteur adjoint à gauche, et enfin la 32
commutativité du diagramme $(****)$ se déduit immédiatement du fait que $u_!$ commute aux limites projectives finies.

Notation 5.9. Par abus de notation, les foncteurs $u^{*\gamma}$ et $u_{*\gamma}$ seront souvent notés u^* et u_*, ce qui ne risque pas d'apporter des confusions en vertu de la commutativité des diagrammes $(*)$ et $(**)$. En revanche, lorsque $u_!$ ne commute pas aux limites projectives finies, le diagramme $(****)$ n'est pas commutatif à isomorphisme près, et les notations $u_!$ et $u_{!_\gamma}$ devront être employées pour éviter des confusions.

5.10. Soit C une petite catégorie. Pour tout objet X de $\widehat{C}$, on désigne par C/X la catégorie des flèches de but X et de source un objet de C. Le foncteur source définit un foncteur $j_X : C/X \to C$. Soit $m : Y \to X$ un morphisme de $\widehat{C}$. La composition des morphismes définit un foncteur $j_m : C/Y \to C/X$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & C/X \arrow[dl, "j_X"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il résulte de 5.1 que pour tout objet F de $(C/X)\widehat{}$ et tout objet Y de C, on a :

(5.10.1) $$j_{X!}F(Y) = \coprod_{u \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(Y,X)} F(u).$$

La formule (5.10.1) permet de définir $j_{X!}$ lorsque C est une $\mathcal{U}$-catégorie, et on vérifie que
33 le foncteur $j_{X!}$ ainsi défini est toujours adjoint à droite au foncteur $j_X^* : \widehat{C} \to (C/X)\hat{}$ (5.0).

Proposition 5.11. Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie, X un préfaisceau sur C.

1) Le foncteur
$$j_{X!} : (C/X)\hat{} \longrightarrow \widehat{C}$$
se factorise par la catégorie $\widehat{C}/X$:
$$(C/X)\hat{} \xrightarrow{e_X} \widehat{C}/X \longrightarrow \widehat{C}.$$
Le foncteur e_X est une équivalence de catégories.

2) Le foncteur $e_X \circ j_X^* : \widehat{C} \to \widehat{C}/X$ est canoniquement isomorphe au foncteur $H \mapsto (H \times X \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X)$.

Preuve. 1) Soit f l'objet final de $(C/X)\hat{}$. On a un isomorphisme canonique $f \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/X} Y$ et par suite $j_{X!}(f) = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/X} j_X(Y)$ (5.4). Or $j_{X!}(f) \simeq X$; d'où la factorisation. Pour montrer que e_X est une équivalence nous nous contenterons d'exhiber un foncteur quasi-inverse : A tout objet $H \to X$ de $\widehat{C}/X$ on associe le préfaisceau sur C/X :
$$(Y \to X) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{C}/X}((Y \to X), (H \to X)).$$

2) Le foncteur $e_X \circ j_X^*$ est adjoint à droite au foncteur d'oubli et par suite le foncteur $e_X \circ j^*$ est canoniquement isomorphe au foncteur $H \mapsto (H \times H \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X)$.

5.12. Soit $m : Y \to X$ un morphisme de $\widehat{C}$. D'après (5.11), le morphisme m est canoniquement isomorphe à l'image par e_X d'un objet de $(C/X)\hat{}$ que nous noterons $[m]$. Le foncteur e_X définit, par restriction aux sous-catégories, une équivalence
$$(C/X)/[m] \xrightarrow{e_m} C/Y.$$
34 Le diagramme
$$\begin{tikzcd}
(C/X)/[m] \arrow[rr, "e_m"] \arrow[dr, "j_{[m]}"'] & & C/Y \arrow[dl, "j_m"] \\
& C/X &
\end{tikzcd}$$
est commutatif à isomorphisme canonique près.

5.13. Signalons un résultat qui nous sera utile dans Exp. VI. Soit $u : C \to C'$ un foncteur entre petites catégories. Pour tout objet H de $\widehat{C}$ désignons par $u/H : C/H \to C'/u_! H$ le foncteur qui associe à tout morphisme $m : X \to H$ le morphisme $u_! X \xrightarrow{u_! m} u_! H$ (on sait (5.4) qu'on peut toujours poser $u_! X = uX$). Le diagramme ci-après est commutatif :

(5.13.1)
$$\begin{tikzcd}
C/H \arrow[r, "u/H"] \arrow[d, "j_H"'] & C'/u_! H \arrow[d, "j_{u_! H}"] \\
C \arrow[r, "u"] & C'
\end{tikzcd} .$$

On a donc un diagramme commutatif à isomorphisme près : et comme $(u/H)_!$ transforme l'objet final de $(C/H)\hat{}$ en l'objet final de $(C'/u_!H)\hat{}$, le diagramme :

(5.13.3)
$$\begin{tikzcd} (C/H)\hat{} \arrow[r, "(u/H)_!"] \arrow[d, "e_H"'] & (C'/u_!H)\hat{} \arrow[d, "e_{u_!H}"] \\ C\hat{}/H \arrow[r, "u_!/H"] & C'\hat{}/u_!H \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près (6.1). 35

Proposition 5.14. Soit $u : C \to C'$ un foncteur entre petites catégories. On suppose que u possède la propriété suivante :

(PPF) Pour tout objet X de C le foncteur $u/X : C/X \to C'/uX$ est pleinement fidèle.

Alors :

1) Soit f l'objet final de $\widehat{C}$. Le foncteur u se factorise en
$$C = C/f \xrightarrow{u/f} C'/u_!f \xrightarrow{j_{u_!f}} C'.$$
Le foncteur u/f est pleinement fidèle.

2) Le foncteur $u_! : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ se factorise en
$$\widehat{C} = (C/f)\hat{} \xrightarrow{(u/f)_!} (C'/u_!f)\hat{} \xrightarrow{e_{u_!f}} \widehat{C'}/u_!f \longrightarrow \widehat{C'},$$
où le foncteur $(u/f)_!$ est pleinement fidèle, le foncteur $e_{u_!f}$ une équivalence, et le foncteur $\widehat{C'}/u_!f \to \widehat{C'}$ le foncteur d'oubli.

3) En particulier le foncteur $u_!$ est fidèle et par suite le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \xrightarrow{\Phi} u^*u_!$ est un monomorphisme. De plus, pour tout morphisme $\alpha : H \to K$ de $\widehat{C}$, le diagramme :
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\Phi(H)"] \arrow[d, "\alpha"'] & u^*u_!H \arrow[d, "u.u^{\bullet}(\alpha)"] \\ K \arrow[r, hook, "\Phi(K)"] & u^*u_!K \end{tikzcd}$$
est cartésien.

Preuve. 1) La factorisation provient du diagramme (5.13.1). Le foncteur u est fidèle. Donc u/f est fidèle. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient X et Y deux objets de C, $\mathrm{can}_X : uX \to u_!f$ (resp. $\mathrm{can}_Y : uY \to u_!f$) les morphismes canoniques et 36
$$\begin{tikzcd} uX \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\mathrm{can}_X"'] & & uY \arrow[dl, "\mathrm{can}_Y"] \\ & u^{\bullet}f & \end{tikzcd}$$
un morphisme de $C'/u_!f$. On a $u_!f = \varinjlim_{Z\in \mathrm{ob}\, C} uZ$ et par suite (3.1) :
$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C'}}(uX, u_!f) = \varinjlim_{Z\in \mathrm{ob}\, C} \mathrm{Hom}_{C'}(uX, uZ).$$

Par définition de la limite inductive, dire que $\mathrm{can}_Y\, m = \mathrm{can}_X$ équivaut à dire qu'il existe

a) une suite finie d'objets de C, X_i, $i \in [0, n]$, $X_\circ = X$, $X_n = Y$,
b) pour tout i, un morphisme $m_i : uX \to uX_i (m_\circ = \mathrm{id}_X, m_n = m)$,
c) pour tout couple $(i, i+1)$ un morphisme $f_i : X_i \to X_{i+1}$ ou bien $f_i : X_{i+1} \to X_i$,

tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & uX \arrow[dl, "m_i"'] \arrow[dr, "m_{i+1}"] & \\ uX_i \arrow[rr, "u(f_i)"] & & uX_{i+1} \end{tikzcd} \quad \text{ou bien} \quad \begin{tikzcd} & uX \arrow[dl, "m_i"'] \arrow[dr, "m_{i+1}"] & \\ uX_i & & uX_{i+1} \arrow[ll, "u(f_i)"'] \end{tikzcd} ,$$

soient commutatifs.

On démontre alors immédiatement, par récurrence sur i et en utilisant la propriété (PPF), que m_i est de la forme $u(p_i)$. En particulier $m = u(p)$ et par suite u/f est pleinement fidèle.

37 2) La factorisation est immédiate. Le foncteur $(u/f)_!$ est pleinement fidèle en vertu du 5.6. Les autres assertions résultent de 5.11.

3) Le foncteur $u_!$ est composé du foncteur d'oubli qui est fidèle, et de foncteurs pleinement fidèles. Il est par suite fidèle. Il en résulte, d'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, que le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to u^* u_!$ est un monomorphisme. D'après 2) le foncteur $u_!$ apparaît comme le composé d'un foncteur pleinement fidèle $v : \widehat{C} \to \widehat{C'}/u_! f$ et du foncteur d'oubli. Le foncteur u^*, adjoint à droite de $u_!$, est donc le composé du foncteur « produit par $u_! f$ », adjoint à droite du foncteur d'oubli, et d'un foncteur w adjoint à droite de v. De plus, v étant pleinement fidèle, le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to wv$ est un isomorphisme. La dernière assertion en résulte aisément.

6. Foncteurs fidèles et foncteurs conservatifs

38 Définition 6.1. Soient E une catégorie, $(\varphi_i : E \to F_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs

$$\varphi_i : E \longrightarrow F_i.$$

On dit que la famille de foncteurs (φ_i) est fidèle si pour tout couple d'objets X, Y, de E, et tout couple de flèches u, $v : X \rightrightarrows Y$, la relation $\varphi_i(u) = \varphi_i(v)$ pour tout $i \in I$ implique $u = v$ (en d'autres termes, si l'application $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \Pi_i \mathrm{Hom}(\varphi_i(X), \varphi_i(Y))$ définie par (φ_i) est injective). On dit que la famille de foncteurs (φ_i) est conservative si toute flèche u de E, telle que $\varphi_i(u)$ soit un isomorphisme pour tout $i \in I$, est un isomorphisme. On dit que (φ_i) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les épimorphismes, resp. ...) si la condition précédente est vérifiée chaque fois que u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. ...).

6.1.1. Si on introduit le foncteur unique

$$\varphi : E \longrightarrow F = \prod_{i \in I} F_i$$

défini par la famille de foncteurs (φ_i), il est clair que celle-ci est fidèle (resp. conservative, resp. conservative pour les monomorphismes, resp. ...) si et seulement si le foncteur φ est fidèle (resp. conservatif, resp. ...) (par quoi on entend que la famille réduite au seul objet φ est fidèle, resp. conservative, resp. ...). On pourrait donc sans inconvénient majeur nous borner par la suite au cas d'une famille réduite à un seul foncteur. Pour la commodité des futures références, nous donnerons néanmoins les énoncés suivants pour les familles.

Les notions de 6.1 sont surtout utiles lorsque les φ_i satisfont à des propriétés d'exac- **39**
titude convenables, et dans ce cas ont une tendance à coïncider :

Proposition 6.2. Les notations sont celles de 5.1.

(i) Si les noyaux de doubles flèches, ou les conoyaux de doubles flèches, sont représentables dans E, et si les φ_i y commutent, alors on a l'implication

$$(\varphi_i) \text{ conservative } \Longrightarrow (\varphi_i) \text{ fidèle.}$$

(ii) Supposons que les produits fibrés (resp. les sommes amalgamées) soient représentables dans E, et que les φ_i y commutent. Supposons (φ_i) fidèle ou conservative ; alors pour toute flèche u de E, u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $i \in I$, il en est ainsi pour $\varphi_i(u)$.

(iii) Supposons que dans E les produits fibrés et les sommes amalgamées sont représentables et que les φ_i y commutent, et que toute flèche dans E qui est un bimorphisme (i.e. un monomorphisme et un épimorphisme) soit un isomorphisme. Alors on a l'implication

$$(\varphi_i) \text{ fidèle } \Longrightarrow (\varphi_i) \text{ conservative.}$$

(iv) Supposons que dans E les produits fibrés (resp. les sommes amalgamées) soient représentables, et que les φ_i y commutent. Alors, si (φ_i) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les épimorphismes) alors (φ_i) est même conservative.

(v) Soit D un type de diagramme, $F : d \mapsto F(d)$ un diagramme de type D dans E, X un objet de E et $u = (u_d)_{d \in D}$ une famille de flèches

$$X \longrightarrow F(d) \quad (\text{resp. } F(d) \longrightarrow X).$$

Supposons que (φ_i) soit conservative, que les limites projectives (resp. inductives) **40**
de type D soient représentables dans E, et que les φ_i y commutent. Alors, pour que u fasse de X une limite projective (resp. inductive) de F dans E, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $\varphi_i(u)$ fasse de $\varphi_i(X)$ une limite projective (resp. inductive) de $\varphi_i(D)$ dans E_i.

Démonstration.

(i) Pour l'énoncé non respé, il suffit, pour une double flèche donnée $u, v : X \rightrightarrows Y$, d'exprimer l'égalité $u = v$ par la condition que l'inclusion $\mathrm{Ker}(u, v) \to X$ est un isomorphisme. Ici et par la suite, on se dispense de répéter l'argument dual pour l'énoncé dual.

(ii) Si (φ_i) est fidèle, on exprime la condition que $u : X \to Y$ soit un monomorphisme par l'égalité $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2$ pour le produit fibré $X \times_Y X$. Si (φ_i) est conservatif, on l'exprime par la condition que le morphisme diagonal $\delta : X \to X \times_Y X$ soit un isomorphisme.

(iv) Comme dans ce dernier argument, le morphisme δ est un monomorphisme, on voit qu'il suffisait en fait de supposer (φ_i) conservative pour les monomorphismes. Mais ceci implique alors que (φ_i) est conservative tout court. En effet, si $u \in F\ell\, E$ est telle que les $\varphi_i(u)$ soient des isomorphismes, on en conclut que ce sont des monomorphismes d'après ce qui précède, donc des isomorphismes d'après l'hypothèse sur (φ_i).

(iii) Est une conséquence triviale de (ii).
(v) Est une conséquence triviale des définitions.

Notons la conséquence suivante de (i) (ii) (iv) :

41 Corollaire 6.3. Supposons que dans E les produits fibrés et les sommes amalgamées soient représentables et que les φ_i y commutent, et que les noyaux de double flèches ou les conoyaux de double flèches soient représentables et que les φ_i y commutent. (Il suffit par exemple que les limites projectives finies et les limites inductives finies soient représentables dans E, et que les φ_i soient des foncteurs exacts.) Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) (φ_i) est fidèle.
b) (φ_i) est conservative.
c) (φ_i) est conservative pour les monomorphismes.
c') (φ_i) est conservative pour les épimorphismes.

Signalons aussi pour mémoire :

Proposition 6.4. Soient $\varphi : E \to F$ un foncteur admettant un adjoint à droite ψ (donc $\mathrm{Hom}(\varphi(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, \psi(Y))$). Pour que φ (resp. ψ) soit fidèle, il faut et il suffit que pour tout élément X de E (resp. tout élément Y de F), le morphisme d'adjonction $X \to \psi\varphi(X)$ soit un monomorphisme. Pour que φ (resp. ψ) soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que le morphisme d'adjonction précédent soit un isomorphisme.

En effet, si X', X sont deux objets de E, l'application

$$\mathrm{Hom}(X', X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi(X'), \varphi(X)) \tag{$*$}$$

s'identifie à l'application déduite de

$$X \longrightarrow \psi\varphi(X) \tag{$**$}$$

42 par application du foncteur $\mathrm{Hom}(X', -)$. Donc pour que $(*)$ soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme) pour tout X', X étant fixé, il faut et il suffit que le morphisme d'adjonction $(**)$ soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

Proposition 6.5. Soit $p : E' \to E$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) p est fidèle, conservatif et fibrant (SGA 1 VI 6.1).
(ii) p est un foncteur fibrant à fibres des catégories discrètes.
(iii) Pour tout $X' \in \mathrm{ob}\, E'$, le foncteur $E'_{/X'} \to E_{/p(X)}$ induit par p est une équivalence de catégories, surjective sur les objets.
(iv) (Lorsque E est une $\mathcal{U}$-catégorie). Il existe un élément $F \in \mathrm{ob}\,\widehat{C}$ et une équivalence de catégories sur E (SGA 1 VI 4.3) $E' \xrightarrow{\approx} E_{/F}$ (où $E_{/F}$ est la sous-catégorie pleine de $\widehat{E}_{/F}$ formée des flèches $X \to F$ dont la source est dans E).

6.5.1. Rappelons qu'une catégorie C dite est discrète si c'est un groupoïde (i.e. toute flèche y est inversible) et si elle est rigide (i.e. le groupe des automorphismes de tout objet est réduit au groupe unité) ; il revient au même de dire que la catégorie est équivalente à la catégorie C' définie par un ensemble I (avec $\mathrm{ob}C' = I$, et comme seules flèches les flèches identiques). Quand on suppose déjà que C est un groupoïde, alors dire que C est discrète revient à dire que pour deux objets X, Y de C, il existe au plus une flèche de X dans Y, i.e. que C est isomorphe à la catégorie définie par un ensemble préordonné.

43 L'équivalence des conditions (i) et (ii) de 6.5 est une conséquence immédiate des rappels précédents et du

Lemme 6.5.2. Soit $p : E' \to E$ un foncteur fibrant. Alors :

(i) Pour que p soit conservatif, il faut et il suffit que ses catégories fibres soient des groupoïdes.

(ii) Pour que p soit fidèle, il faut et il suffit que ses catégories fibres soient des catégories ordonnées.

Démonstration de 6.5.2.

(i) Supposons p conservatif. Pour toute flèche u d'une fibre E'_X, $p(u) = \mathrm{id}_X$ est un isomorphisme, donc u est un isomorphisme dans E', donc aussi dans E'_X (car un inverse de u dans E' sera évidemment un inverse dans E'_X). Donc E'_X est un groupoïde. Inversement, supposons les E'_X des groupoïdes, et soit u' une flèche de E' telle que $p(u')$ soit un isomorphisme, prouvons que u est un isomorphisme. Pour ceci on note que, p étant fibrant, on peut factoriser $u' : X' \to Y'$ en un composé $X' \to u^*(Y') \to Y'$, où la première flèche est un X-morphisme (N.B. $X = p(X')$, $u = p(u')$) et la deuxième est un morphisme cartésien au-dessus de u. La première flèche est un isomorphisme puisque E'_X est un groupoïde, et la deuxième l'est, car un morphisme cartésien d'une catégorie fibrée est évidemment un isomorphisme dès que sa projection l'est.

(ii) Supposons p fidèle, et soient X', Y' deux objets d'une catégorie fibre E_X. Alors deux flèches de X' dans Y' sont au-dessus de la même flèche id_X de E, donc sont identiques, donc E_X est ordonnée. Inversement, supposons les catégories **44**
fibres ordonnées, et prouvons que p est fidèle. Soient donc u', $v' : X' \rightrightarrows Y'$ des flèches de E' au-dessus d'une même flèche $u : X \to Y$ de E. Elles se factorisent alors en $X' \rightrightarrows u^*(Y) \to Y'$, où les deux flèches $X' \rightrightarrows u^*(Y')$ sont des flèches de E'_X de même source et même but ; celles-ci sont donc égales, donc $u' = v'$, C.Q.F.D.

Revenons à la démonstration de 6.5. On a prouvé (i) ⇔ (ii). D'autre part (ii) ⇔ (iv) est assez claire : en effet, d'une part la catégorie $E_{/F}$ est fibrée sur E à catégories fibres les catégories discrètes définies par les ensembles $F(X)$, comme il résulte aussitôt des définitions ; d'autre part, si p est comme dans (ii), alors en vertu du sorite SGA 1 VI 8 la catégorie fibrée E' sur E est E-équivalente à la catégorie scindée sur E définie par le foncteur $E \to (\mathrm{Cat})$ définie par le foncteur $F : E \to (\mathrm{Ens})$, associant à tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de E'_X. Or cette catégorie scindée est E-isomorphe à la catégorie $E_{/F}$. Comme (iv) ⇒ (iii) est claire, il reste à prouver (iii) ⇒ (i). Or il est clair que pour que p soit fidèle (resp. conservatif) il faut et il suffit que les foncteurs induits $E'_{/X'} \to E_{/p(X)}$ le soient, a fortiori il suffit que ceux-ci soient pleinement fidèles ; donc il reste à prouver seulement que (iii) implique que p est fibrant. Mais on voit encore qu'un foncteur p est fibrant si et seulement si les foncteurs induits $E'_{/X'} \to E_{/p(X')}$ le sont. Il en est en particulier ainsi si ce sont des équivalences de catégories surjectives sur les objets.

7. Sous-catégories génératrices et cogénératrices **45**

Définition 7.1. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E. On dit que C est une sous-catégorie de E génératrice par épimorphismes stricts (resp. par épimorphismes) si pour tout objet X de E, la famille des flèches de E de but X, de source $X' \in \mathrm{ob}\, C$, est épimorphique (resp. épimorphique stricte) (1.3). On dit que C est une sous-catégorie de E génératrice (resp. génératrice pour les monomorphismes, resp. génératrice pour les monomorphismes stricts) si pour toute flèche $u : Y \to X$ (resp. tout monomorphisme de E, resp. tout monomorphisme strict de E (10.5)), telle que pour tout $X' \in \operatorname{ob} C$, l'application correspondante $\operatorname{Hom}(X', Y) \to \operatorname{Hom}(X', X)$ soit bijective, u est un isomorphisme. Enfin, on dit qu'une famille (X_i) d'objets de E est génératrice par épimorphismes stricts (resp. ...) si la sous-catégorie pleine C de E engendrée par cette famille est génératrice par épimorphismes stricts (resp. ...).

7.1.1. Notons qu'en termes de la famille $(h_{X'})_{X' \in \operatorname{ob} C}$ des foncteurs

$$h_{X'} : E \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \ (X' \in \operatorname{ob} C)$$

représentés par les $X' \in \operatorname{ob} C$, on peut exprimer la condition que C soit génératrice (resp. génératrice pour les monomorphismes, resp. génératrice pour les monomorphismes stricts) par celle que le famille $(h_{X'})$ soit conservative (resp. conservative pour les monomorphismes, resp. conservative pour les monomorphismes stricts) (6.1). Il résulte éga-
46 lement immédiatement des définitions que C est génératrice par épimorphismes si et seulement si la famille $(h_{X'})_{X' \in \operatorname{ob} C}$ est fidèle (6.1). On donnera aussi ci-dessous (7.2 (i)) une interprétation analogue pour la condition sur C d'être génératrice par épimorphismes stricts.

7.1.2. Comme pour les notions introduites dans 6.1, les notions de 7.1 sont surtout utiles lorsque E possède des propriétés d'exactitude convenables, auquel cas les diverses notions introduites ont une nette tendance à être toutes équivalentes (7.3). C'est pourquoi la question de savoir laquelle de ces notions 7.1 doit être considérée comme la plus importante ne se pose guère ; dans les cas les plus importants, ces notions coïncident et le terme « sous-catégorie génératrice » peut donc être interprété indifféremment comme se rapportant à n'importe laquelle des propriétés envisagées dans 7.1 (par exemple la première, qui est la plus forte de toute comme nous allons voir (7.2 (ii))).

7.1.3. Supposons que E soit une $\mathscr{U}$-catégorie, et considérons le foncteur canonique

$$\varphi : E \longrightarrow \widehat{C} = \mathscr{H}om(C, \mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}) \tag{7.1.3.1}$$

composé des foncteurs $E \to \widehat{E} \to \widehat{C}$, où le premier foncteur est le foncteur canonique (1.3.3), et le deuxième le foncteur restriction à C. Notons qu'il est évident qu'il revient au même de dire que le foncteur précédent φ est conservatif (resp. fidèle), ou de dire que la famille des foncteurs $h_{X'} : X \to \operatorname{Hom}(X', X) = \varphi(X)(X')$, pour $X' \in \operatorname{ob} C$ variable, est une famille conservative (resp. fidèle), c'est-à-dire aussi (7.1.2) que C est
47 génératrice (resp. génératrice par épimorphisme). De même φ est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts) si et seulement la famille des $h_{X'}(X' \in \operatorname{ob} C)$ est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts), i.e. si et seulement si la sous-catégorie C de E est génératrice pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts).

Proposition 7.2. *Soient E une $\mathscr{U}$-catégorie, C une sous-catégorie pleine.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *C est une sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts.*

b) *Pour tout $X \in \operatorname{ob} E$, désignant par $C_{/X}$ la sous-catégorie pleine de $E_{/X}$ formée des flèches $X' \to X$ de source $X' \in \operatorname{ob} C$, la flèche naturelle du foncteur d'inclusion $j : C_{/X} \to E$ dans le foncteur constant sur $C_{/X}$ de valeur X fait de X une limite inductive de j :*

$$X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{C_{/X}} X'.$$

c) *Le foncteur canonique φ de (7.1.3.1) est pleinement fidèle.*

(ii) *On a entre les notions de 7.1 les implications suivantes :*

48 (iii) *On a les implications conditionnelles suivantes :*

a) Si dans E les familles épimorphiques de flèches sont épimorphiques strictes, on a 2) ⇒ 1). Si dans E les monomorphismes sont stricts, on a 5) ⇒ 4).
b) Si dans E les noyaux de couples de flèches (resp. les produits fibrés) sont représentables, alors on a 3) ⇒ 2) (resp. 4) ⇒ 3)).
c) Si dans E toute famille de morphismes $X_i \to X$ de même but X se factorise en une famille épimorphique stricte (resp. épimorphique) $X_i \to Y$ suivie d'une monomorphisme (resp. d'une monomorphisme strict) $Y \to X$, alors on a 4) ⇒ 1) (resp. 5) ⇒ 2)).

Signalons tout de suite le

Corollaire 7.3. Toutes les notions envisagées dans 6.1 (et reprises dans le diagramme d'implications de (ii) ci-dessus) sont équivalentes dans chacun des deux cas suivants :

(i) Dans E, les noyaux de doubles flèches et les produits fibrés sont représentables, les monomorphismes sont stricts et les familles épimorphiques de flèches sont épimorphiques strictes.
(ii) Dans E, toute famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ de flèches de même but X se factorise en une famille épimorphique $(X_i \to Y)$ suivie d'un monomorphisme $Y \to X$, tout monomorphisme de E est strict, et toute famille épimorphique de flèches de E est stricte.

En effet, dans le cas (i) on a 4) ⇒ 3) et 3) ⇒ 2) grâce à b), et 5) ⇒ 4) et 2) ⇒ 1) grâce **49**
à a). Dans le cas (ii) on a grâce à c), les implications 4) ⇒ 1) et 5) ⇒ 2). On conclut donc grâce au diagramme d'implications 6.2 (ii).

Démonstration de 7.2.

(i) L'implication b) ⇒ a) résulte aussitôt des définitions. Prouvons a) ⇒ b). Donc sous l'hypothèse a), il faut prouver que pour tout $X, Y \in \operatorname{ob} E$, tout système de flèches

$$u_{X'} : X' \longrightarrow Y$$

indexé par les $X' \in \operatorname{ob} C_{/X}$, telle que l'on ait $u_{X'} f = u_{X''}$ pour toute flèche $f : X'' \to X'$ dans $C_{/X}$, se factorise par une flèche (nécessairement unique par l'hypothèse a)) $X \to Y$. D'après l'hypothèse a), il suffit de vérifier que pour tout objet Z de $E_{/X}$ et tout couple de morphismes $v' : Z \to X'$, $v'' : Z \to X''$ dans $E_{/X}$, avec X' et X'' dans $C_{/X}$, on a $u_{X'} v' = u_{X''} v''$. Or, grâce à l'hypothèse a), la famille des flèches $w : X''' \to Z$, avec $X''' \in \operatorname{ob} C$, est épimorphique, et il suffit donc de vérifier que pour toute telle w, on a $(u_{X'} v')w = (u_{X''} v'')w$, ce qui s'écrit aussi $u_{X'}(v' w) = u_{X''}(v'' w)$ et résulte aussitôt de l'hypothèse faite sur la famille des u.

Prouvons maintenant l'équivalence des conditions b) et c). Pour ceci notons que pour tout $X \in \operatorname{ob} E$, l'objet $\varphi(X)$ de $\widehat{C}$ est limite inductive dans $\widehat{C}$ du foncteur canonique $\widehat{C}_{/\varphi(X)} \to \widehat{C}$ (3.4) ; or $\widehat{C}_{/\varphi(X)}$ est canoniquement isomorphe à $C_{/X}$, de sorte qu'on a dans $\widehat{C}$

$$\varphi(X) = \varinjlim_{C_{/X}} X',$$

où on identifie l'objet X' de C avec le foncteur $\in \widehat{C}$ qu'il représente. On a par **50** suite, pour un deuxième objet Y de E, un isomorphisme canonique

$$(*)\qquad \begin{aligned}\operatorname{Hom}(\varphi(X),\varphi(Y)) \simeq \varprojlim_{C_{/X}} \operatorname{Hom}(X',\varphi(Y)) &\simeq \varprojlim_{C_{/X}} \varphi(Y)(X')(1.4)\\ &\simeq \varprojlim_{C_{/C}} \operatorname{Hom}(X',Y).\end{aligned}$$

Ceci posé, l'application

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\varphi(X),\varphi(Y))$$

définie par φ n'est autre, via l'isomorphisme entre les membres extrêmes de $(*)$, que l'application

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \longrightarrow \varprojlim_{C_{/X}} \operatorname{Hom}(X',Y)$$

déduite du système inductif de flèches $X' \to X$ indexé par $C_{/X}$ envisagé dans 7.2 (i) b). Donc la première application est bijective pour tout Y (X étant fixé) si et seulement si X est une limite inductive du foncteur d'inclusion $j : C_{/X} \to E$, ce qui prouve l'équivalence de b) et c).

(ii) Les implications 1) ⇒ 2) et 3) ⇒ 4) ⇒ 5) sont triviales en vertu des définitions. L'implication 1) ⇒ 3) s'obtient en interprétant la propriété 1) par la pleine fidélité de φ grâce à (i), et en observant qu'un foncteur pleinement fidèle est conservatif. Or on a déjà observé (7.1.1) que 3) signifie que φ est conservatif.

51 (iii) L'assertion a) est une tautologie. L'assertion b) résulte de 6.2 (i) (resp. 6.2 (iv)) appliqué au foncteur φ, compte tenu que ce dernier est exact à gauche. Prouvons enfin c). Considérons, pour un $X \in \operatorname{ob} E$, la famille de tout les morphismes $X_i \to X$, avec $X_i \in \operatorname{ob} C$; par hypothèse sur E elle se factorise en une famille $X_i \to Y$ épimorphique effective (resp. épimorphique) suivie d'un monomorphisme (resp. d'un monomorphisme strict) $Y \to X$. Alors l'hypothèse 4) (resp. 5)) implique que $Y \to X$ est un isomorphisme, donc la famille envisagée est épimorphique stricte (resp. épimorphique), C.Q.F.D.

Proposition 7.4. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E, X un objet de E. On suppose C génératrice dans E (resp. C génératrice pour les monomorphismes, et que le produit fibré de deux sous-objets de X sur X est représentable dans E). Alors un sous-objet strict (10.11) (resp. un sous-objet) X' de X est connu quand on connaît, pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, la partie de $\operatorname{Hom}(T,X)$ image de $\operatorname{Hom}(T,X')$. Par suite, le cardinal de l'ensemble des sous-objets stricts (resp. de l'ensemble des sous-objets) de X est majoré par $\prod_{T\in \operatorname{ob} C} 2^{\operatorname{card}\operatorname{Hom}(T,X)}$, et si $X \in \operatorname{ob} C$, il est majoré par $2^{\operatorname{card} F\ell\, C}$.

Prouvons d'abord l'assertion respée. Soient X', X'' deux sous-objets de X tels que pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, les images de $\operatorname{Hom}(T,X')$ et $\operatorname{Hom}(T,X'')$ dans $\operatorname{Hom}(T,X)$ soient égales. Elles sont donc aussi égales à l'image de $\operatorname{Hom}(T,X''')$, où X''' est le produit fibré de X' et X'' sur X. Comme C est génératrice pour les monomorphismes, il s'ensuit que
52 les monomorphismes $X''' \to X'$ et $X''' \to X''$ sont des isomorphismes, donc X' et X'' sont égaux, étant séparément égaux au sous-objet X''' de X.

Prouvons l'assertion non respée. Par définition de la notion de sous-objet strict, il suffit de vérifier que la connaissance de la partie $\operatorname{Hom}(T,X')$ de $\operatorname{Hom}(T,X)$ pour tout $T \in \operatorname{ob} C$ implique la connaissance de celles des doubles flèches $X \overset{u,v}{\rightrightarrows} T$ telles que $ui = vi$, où $i : X' \to X$ est l'injection canonique. Or comme C est génératrice, la relation $ui = vi$ équivaut à la relation $(ui)f = (vi)f$ pour tout $f \in \operatorname{Hom}(T,X')$, i.e. à

$ug = vg$ pour tout $g \in \mathrm{Hom}(T, X)$ provenant de $\mathrm{Hom}(T, X')$ (i.e. de la forme if, avec $f \in \mathrm{Hom}(T, X')$), ce qui prouve notre assertion.

Corollaire 7.5. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice, X un objet de C. Alors un quotient strict (10.8) X' de X est connu quand on connaît, pour tout $T \in \mathrm{ob}\, C$, la partie de $\mathrm{Hom}(T, X)^2$ formée des couples (u, v) tels que $qu = qv$, où $q : X \to X'$ est le morphisme canonique. Donc le cardinal de l'ensemble des quotients stricts de X est majoré par $\prod_{T \in \mathrm{ob}\, C} 2^{\mathrm{card}\, \mathrm{Hom}(T,X)^2}$.

En effet, par définition, un quotient strict X' de X est connu quand on connaît, pour tout objet Y de E, la partie de $\mathrm{Hom}(Y, X) \times \mathrm{Hom}(Y, X)$ formée des couples (u, v) tels que $qu = qv$, où $q : X \to X'$ est le morphisme canonique. Or la relation $qu = qv$ équivaut à la relation $(qu)f = (qv)f$ pour tout morphisme $f : T \to Y$ de source T dans C, puisque C est génératrice. Cette relation s'écrit encore $q(uf) = q(vf)$, ce qui prouve la première assertion de 7.5. La seconde en résulte aussitôt.

7.5.1. On peut généraliser 7.5, en introduisant, pour une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$ **53**
de E, la notion de quotient strict dans E de la famille, par quoi on entend une famille épimorphique stricte $(p_i : X_i \to X')_{i \in I}$ de morphismes de E, — étant entendu, comme pour les quotients ordinaires, qu'on identifie deux telles familles $(p_i : X_i \to X')$ et $(q_i : X_i \to X'')$ si on peut trouver un isomorphisme $v : X' \to X''$ (nécessairement unique) tel que l'on ait $f p_i = q_i$ pour tout $i \in I$. Avec cette terminologie, la démonstration de 7.5 s'applique ne varietur pour donner la

Variante 7.5.2. Soient E, C comme dans 7.5, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de E. Alors un quotient strict X' de $(X_i)_{i \in I}$ dans E (7.5.1) est connu quand on connaît, pour tout $T \in \mathrm{ob}\, C$, et tout couple $(i, j) \in I \times I$, la partie de $\mathrm{Hom}(T, X_i) \times \mathrm{Hom}(T, X_j)$ formée des couples (u, v) tels que $p_i u = p_j v$, où pour tout $i \in I$, $p_i : X_i \to X'$ désigne le morphisme canonique. Par suite, le cardinal de l'ensemble des quotients stricts de $(X_i)_{i \in I}$ dans E est majoré par $\prod_{T \in \mathrm{ob}\, C} \prod_{i,j \in I} 2^{\mathrm{card}\, \mathrm{Hom}(T,X_i) \times \mathrm{card}\, \mathrm{Hom}(T,X_j)}$.

7.5.3. On voit tout de suite que la conclusion analogue est vraie si on suppose seulement que C est génératrice pour les monomorphismes stricts, pourvu que l'on suppose que les produits $X_i \times X_j$ sont représentables et que l'on se borne aux quotients effectifs de la famille $(X_i)_{i \in I}$, i.e. aux quotients stricts X' tels que les produits fibrés $X_i \times_{X'} X_j$ soient représentables dans E (ce qui n'est pas une restriction si E est stable par produits fibrés).

Proposition 7.6. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E géné- **54**
ratrice par épimorphismes (7.1), $\Pi_\circ$ = un cardinal infini $\geq \mathrm{card}\, F\ell C$, $\Pi \geq \Pi_\circ$ un cardinal, $(u_i : X_i \to X)_{i \in I}$ une famille épimorphique universelle (10.3) dans E formée de morphismes quarrables (10.7) à sources $X_i \in \mathrm{ob}\, C$, et telle que $\mathrm{card}\, I \leq \Pi$. Alors $\mathrm{card}\, F\ell C_{/X} \leq \Pi^{\Pi_\circ}$.

Soit $T \in \mathrm{ob}\, C$, il suffira de prouver qu'on a

$$\mathrm{card}\, \mathrm{Hom}(T, X) \leq \Pi^{\Pi_\circ}, \tag{7.6.1}$$

car on en conclura successivement

$$\mathrm{card}\, \mathrm{ob}\, C_{/X} \leq (\Pi^{\Pi_\circ}) \times \mathrm{card}\, \mathrm{ob}\, C_{/X} \leq (\Pi^{\Pi_\circ}) \times \Pi_\circ = \Pi^{\Pi_\circ},$$

enfin $\mathrm{card}\, F\ell C_{/X} \leq ((\Pi^{\Pi_\circ})^2) \times \Pi_\circ = \Pi^{\Pi_\circ}$, puisque pour deux objets S, T de $C_{/X}$, on a $\mathrm{card}\, \mathrm{Hom}_{C_{/X}}(S, T) \leq \mathrm{car}\, \mathrm{Hom}_C(S, T) \leq \Pi_\circ$. Pour prouver 7.5.3, notons d'abord le

Lemme 7.6.2. Soit J un ensemble tel que $\operatorname{card} J = \Pi_\circ$. Pour tout objet T de C, et tout homomorphisme $f : T \to X$, il existe une famille $(v_j : S_j \to T)_{j\in J}$ épimorphique, à sources $S_j \in \operatorname{ob} C$, et pour tout $j \in J$ un $i(j) \in I$ et un $g_j : S_j \to X_{i(j)}$ tels que l'on ait $u_{i(j)} g_j = f v_j$.

En effet, la famille des $X_i \times_X T \to$ est épimorphique par hypothèse, d'autre part, comme C est génératrice par épimorphismes stricts, pour tout i, la famille des flèches $S \to X_i \times_X T$ de source $S \in \operatorname{ob} C$ est épimorphique, donc par transitivité la famille des flèches $v : S \to T$ de source dans $\operatorname{ob} C$ qui se factorisent par un des $X_i \times_X T$ est épimorphique. Or ce sont les flèches $v : S \to T$ de source dans C pour lesquelles
55 il existe un $i \in I$ et un $g : S \to X_i$ tel que $u_i g = f v$. Comme l'ensemble de ces flèches $v : S \to T$ est contenu dans $F\ell\, C$, donc de cardinal $\leq \Pi_\circ$, il peut s'indexer par l'ensemble d'indices J, d'où le lemme.

Notons maintenant qu'un morphisme $f : T \to X$ est connu quand on connaît les $f v_j$, qui sont connus quand on connaît les g_j. donc $\operatorname{card}\operatorname{Hom}(T, X)$ est majoré par le cardinal de l'ensemble des familles $(i(j), S_j, v_j, g_j)_{j\in J}$; comme le cardinal de l'ensemble des applications $j \to I$ est $\leq \Pi^{\Pi_\circ}$, et comme pour une telle application $j \mapsto i(j)$ fixée, le cardinal de l'ensemble des familles correspondantes S_j, f_j, v_j est majoré par celui de l'ensemble des applications de J dans $F\ell C \times F\ell C$, qui est $\leq \Pi_\circ^{\Pi_\circ}$ puisque $\operatorname{card}(F\ell C \times F\ell C) = \Pi_\circ^2 = \Pi_\circ$, on trouve que le premier membre de (7.6.1) est majoré par $\Pi^{\Pi_\circ} \times \Pi_\circ^{\Pi_\circ} = \Pi^{\Pi_\circ}$, ce qui achève la démonstration de 7.6.

Proposition 7.7. Soient E une catégorie où les produits fibrés sont représentables, $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'objets de E génératrice, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs $\varphi_i : E \to E_i$ commutant aux produits fibrés. Pour que (φ_i) soit conservative (5.1), il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in A$ et pouf tout sous-objet X' de X_α distinct de X_α, il existe un $i \in I$ tel que $\varphi_i(X') \to \varphi_i(X_\alpha)$ ne soit pas un isomorphisme. Dans ce cas, si E est une $\mathscr{U}$-catégorie et si A est $\mathscr{U}$-petit, il existe une partie $\mathscr{U}$-petite J de I telle que $(\varphi_j)_{j\in J}$ soit déjà une famille conservative de foncteurs.

La nécessité de la condition envisagée de conservativité étant évidente, prouvons sa suffisance. En vertu de 6.1 (iv), il suffit de prouver que (φ_i) est conservative pour
56 les monomorphismes. Soit $u : Y' \to Y$ un monomorphisme dans E qui n'est pas un isomorphisme, il faut prouver qu'il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(u)$ n'est pas un isomorphisme. Par hypothèse sur (X_α), il existe un α et un morphisme $X_\alpha \to Y$ qui ne se factorise pas par Y', en d'autres termes, tel que l'image inverse X' de Y' soit un sous-objet de X_α distinct de X_α. Par hypothèse, il existe un $i \in I$ tel que $\varphi_i(X') \to \varphi(X)$ ne soit pas un isomorphisme. Comme $\varphi_i(X') \simeq \varphi(X_\alpha) \times_{\varphi_{i(Y)}} \varphi_i(Y')$, il s'ensuit bien que $\varphi_i(Y') \to \varphi_i(Y)$ n'est pas un isomorphisme.

La deuxième assertion de 7.7 résulte aussitôt de la première, compte tenu de 7.4.

Corollaire 7.7.1. Soient E une $\mathscr{U}$-catégorie où les produits fibrés sont représentables, et admettant une famille génératrice d'objets qui soit $\mathscr{U}$-petite. Alors pour toute famille génératrice $(Y_i)_{i\in I}$ de E, il existe une sous-famille génératrice $\mathscr{U}$-petite $(Y_j)_{j\in J}$ ($\operatorname{card} J \in \mathscr{U}$).

Il suffit en effet d'appliquer 7.7 à une $\mathscr{U}$-petite famille génératrice $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E et à la famille des foncteurs φ_i ($i \in I$) représentés par les Y_i.

Proposition 7.8. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts, D une catégorie, $\mathscr{H}om'(E, D)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om(E, D)$ formée des foncteurs qui commutent aux limites inductives du type $C_{/X}$, où X est un objet quelconque de E. Alors le foncteur $F \to F|C$ induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{H}om'(E, D) \longrightarrow \mathcal{H}om(C, D).$$

Par suite, si $\mathcal{H}om(C, D)$ est une $\mathcal{U}$-catégorie (1.1.), par exemple (1.1.1. b)) si C est $\mathcal{U}$-petite **57**
et D est une $\mathcal{U}$-catégorie, alors $\mathcal{H}om(E, D)$ est également une $\mathcal{U}$-catégorie.

Soient $F, G : E \to D$ deux foncteurs dans le premier membre, et $u : F \to G$ un homomorphisme. Si $X = \varinjlim X_i$ dans E et si F et G commutent à la limite inductive envisagée, alors $u(X) : F(X) \to G(X)$ s'identifie à la limite des morphismes $u(X_i) : F(X_i) \to G(X_i)$, et est donc connu quand on connaît les $u(X_i)$. Ceci montre que le foncteur envisagé dans 7.8 est fidèle, compte tenu de l'implication a) $\Rightarrow$ b) dans 7.2 (i). Soit inversement $v : F|D \to G|D$ un homomorphisme, prouvons qu'il provient d'un homomorphisme $u : F \to G$. On définira, pour tout $X \in \mathrm{ob}\, E$,

$$u(X) : F(X) = \varinjlim_{C_{/X}} F(X_i) \longrightarrow G(X) = \varinjlim_{C_{/X}} G(X_i)$$

comme la limite inductive des $v(X_i)$. Il est immédiat que l'on obtient bien un homomorphisme fonctoriel en X, donc un $u : F \to G$, en enfin que le morphisme induit par u de $F|C'$ dans $G|C'$ est v, ce qui achève la démonstration.

7.9. Familles et sous-catégories cogénératrices. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E. On dit que C est cogénératrice par monomorphismes stricts (resp. cogénératrice par monomorphismes, resp. cogénératrice, resp. cogénératrice pour les épimorphismes, resp. cogénératrice pour les épimorphismes stricts) si la sous-catégorie pleine C° de E° est génératrice par épimorphismes stricts (resp. etc.). Terminologie analogue pour les familles. Tous les résultats du présent numéro concernant la notion de **58**
sous-catégorie génératrice et ses variantes (7.1), redonnent donc des résultats correspondants pour les notions duales, que nous laissons au lecteur le soin de formuler pour sa satisfaction personnelle.

Proposition 7.10. Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice (7.1), D une sous-catégorie pleine de E. Pour que D soit cogénératrice (7.9), il faut et il suffit que pour toute double flèche $T \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E de source $T \in \mathrm{ob}\, C$, avec $u \neq v$, il existe une flèche $w : X \to I$ de but $I \in \mathrm{ob}\, D$, telle que $wu \neq wv$.

Par définition, dire que D est cogénératrice signifie que pour toute double flèche $Y \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E telle que $u \neq v$, il existe une flèche $w : X \to I$, avec $I \in \mathrm{ob}\, D$, telle que $wu \neq wv$. Donc 7.10 signifie simplement qu'il suffit de tester cette propriété lorsque $Y \in \mathrm{ob}\, C$. Or comme C est génératrice, l'hypothèse $u \neq v$ implique qu'il existe $f : T \to Y$ telle que $uf \neq vf$, d'où par hypothèse l'existence d'une $w : X \to I$ de but $I \in \mathrm{ob}\, D$ telle que $w(uf) \neq w(vf)$, d'où $wu = wv$, C.Q.F.D.

Corollaire 7.11. Les notations étant celles de 7.10, supposons que les objets I de D sont des objets injectifs de E, i.e. tels que pour tout monomorphisme $X \to Y$ dans E, l'application $\mathrm{Hom}(Y, I) \to \mathrm{Hom}(X, I)$ correspondante soit surjective. Supposons de plus que toute double flèche $T \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E se factorise en une double flèche épimorphique (resp. épimorphique effective) $Y \overset{u',v'}{\rightrightarrows} X$ suivie d'un monomorphisme $i : X' \to X$. Alors dans le critère 7.10 pour que D soit cogénératrice, on peut se borner aux doubles flèches (u, v) qui sont épimorphiques (resp. épimorphiques effectives).

On en conclut : 59

Corollaire 7.12. Soit E une $\mathscr{U}$-catégorie admettant une petite sous-catégorie génératrice C, et telle que tout objet de E soit source d'un monomorphisme dans un objet injectif de E. Supposons de plus que pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, la somme $T \amalg T$ dans E soit représentable, et que tout morphisme de source $T \amalg T$ se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme. Alors E admet une petite sous-catégorie pleine D cogénératrice. De façon précise, on peut prendre D telle que $\operatorname{card} \operatorname{ob} D \leq \prod_{T,T' \in \operatorname{ob} C} 2^{\operatorname{card}(\operatorname{Hom}(T', T \coprod T))^2}$.

En effet, en vertu de 7.11, il suffit pour tout $T \in \operatorname{ob} C$ et pour tout quotient effectif X de $T \amalg T$, de choisir un plongement de X dans un objet injectif I de E, et de prendre pour D la sous-catégorie pleine de E engendrée par ces I. La conclusion résulte alors de 7.5.

Exemples 7.13. Pour construire de petites sous-catégories cogénératrice en termes de petites sous-catégories génératrices, on est donc amené à chercher des conditions pour qu'une $\mathscr{U}$-catégorie E admette « suffisamment d'injectifs », i.e. que tout objet se plonge dans un objet injectif (par un monomorphisme). Il est bien connu [Tohoku] que cette condition est satisfaite dans une $\mathscr{U}$-catégorie abélienne à (petites) limites inductives filtrantes exactes (axiome AB 5 de loc. cit.) admettant une petite famille génératrice. La construction de loc. cit. n'est d'ailleurs pas liée de façon essentielle aux catégories abéliennes, et marche également dans la catégorie des faisceaux de $\mathscr{U}$-ensembles sur un espace topologique $X \in \mathscr{U}$. Nous n'énoncerons pas ici les propriétés d'exactitude qui
60 font marcher la construction en question, et nous bornerons à signaler que dans le cas particulier de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, on se ramène immédiatement au cas de loc. cit. de la façon suivante. On note que si $\mathscr{O}_X$ est un Anneau sur X, alors tout objet injectif I de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules est aussi injectif en tant qu'objet de la catégorie des faisceaux d'ensembles. En effet, si F est un faisceau d'ensembles, et $\mathscr{O}_X[F]$ le « $\mathscr{O}_X$-Module libre engendré par F », on a par définition un homomorphisme de faisceaux d'ensembles

$$F \longrightarrow \mathscr{O}_X[F] \tag{$*$}$$

donnant lieu à un isomorphisme, fonctoriel en F

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X[F], I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(F, I).$$

Comme le foncteur $F \mapsto \mathscr{O}_X[F]$ transforme manifestement monomorphisme en monomorphisme, il s'ensuit aussitôt que si I est un $\mathscr{O}_X$-Module injectif, c'est aussi un faisceau d'ensembles injectif. Il s'ensuit que si le morphisme $(*)$ est un monomorphisme (ce qui est le cas si on prend pour $\mathscr{O}_X$ un Anneau constant de valeur un anneau $A \neq 0$), alors un plongement de $\mathscr{O}_X[F^*]$ dans un $\mathscr{O}_X$-Module injectif I donne un plongement de F dans le faisceau d'ensembles injectif sous-jacent à I.

Le même argument s'applique, sans changement, au cas de la catégorie des faisceaux de $\mathscr{U}$-ensembles sur un $\mathscr{U}$-site, qui sera introduite dans l'exposé suivant.

L'intérêt de l'existence d'une petite sous-catégorie cogénératrice réside surtout dans le critère de représentabilité 8.12.7 plus bas.

8. Ind-objets et pro-objets

61

8.1. Fonceurs cofinaux et sous-catégories cofinales.

Définition 8.1.1. Soit

$$\varphi : I \longrightarrow I' \tag{8.1.1.1}$$

un foncteur. On dit que φ est un foncteur cofinal si pour toute catégorie C et pour tout foncteur $u : I' \to C$, considérant $\varinjlim u$ et $\varinjlim u \circ \varphi$ comme des objets de $\mathscr{H}om(G(\mathscr{V}\text{-Ens}))^{\circ}$ (2.1, 2.3.1) (où $\mathscr{V}$ est un univers tel que $I, I' \in \mathscr{V}$, et que C soit une $\mathscr{V}$-catégorie), le morphisme canonique

$$\varinjlim u \circ \varphi \longrightarrow \varinjlim u \tag{8.1.1.2}$$

est un isomorphisme. Lorsque φ est le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie de I', on dit que I est une sous-catégorie cofinale si φ est cofinal.

8.1.2. Remarquons que pour φ, u données, la bijectivité de (8.1.1.2) ne dépend pas du choix de l'univers $\mathscr{V}$.

Revenant à la définition des termes figurant dans (8.1.1.2) (2.1, 2.3.1), on voit que dire que φ est cofinal signifie aussi que pour tout univers $\mathscr{V}$ tel que I et I' soient $\mathscr{V}$-petits, et tout foncteur

$$v : I'^{\circ} \longrightarrow (\mathscr{V}\text{-Ens}),$$

l'homomorphisme canonique

$$\varprojlim v \longrightarrow \varprojlim v \circ \varphi \tag{8.1.2.1}$$

est un isomorphisme i.e. une bijection. Pour voir que cette condition est bien nécessaire, on observera, posant $v = v^{\circ}$, qu'elle signifie aussi que la condition de la définition 8.1.1 est remplie quand on y fait $C = (\mathscr{V}\text{-Ens})^{\circ}$ (ce qui implique que les limites inductives 62
envisagées dans (8.1.1.2) sont représentables dans C).

. Il est immédiat sur la définition que le composé de deux foncteurs cofinaux est cofinal.

Proposition 8.1.3. Soit $\varphi : I \to I'$ un foncteur.

a) Pour que φ soit cofinal, il faut que φ satisfasse la condition :
   F 1) Pour tout objet i' de I', il existe un objet i de I tel que $\varphi(i)$ majore i' (i.e. tel que $\mathrm{Hom}(i', \varphi(i)) \neq \phi$).
b) Supposons I filtrante. Pour que φ soit cofinal, il faut et il suffit que φ satisfasse la condition (F 1) ainsi que la condition suivante :
   F 2) Pour tout objet i de I et toute double flèche $i' \overset{f',g'}{\rightrightarrows} \varphi(i)$ dans I' de but $\varphi(i)$, il existe une flèche $h : i \to j$ dans I telle que $\varphi(h)f' = \varphi(h)g'$.
   De plus, si φ est cofinal, I' est filtrante.
c) Supposons I' filtrante, et φ pleinement fidèle. Pour que φ soit cofinal, il faut et il suffit qu'il satisfasse la condition F 1) de a). Cela implique que I est filtrante.

Démonstration. Pour la nécessité dans a) et b), on utilisera la définition 8.1.1 dans le seul cas où u est le foncteur d'inclusion canonique (1.3.3)

$$u : I' \hookrightarrow \hat{I}'$$

(un univers $\mathscr{U}$ tel que I, I' soient $\mathscr{U}$-petits étant choisi). On peut alors interpréter (8.1.1.2) comme une flèche de $\hat{I}'$ (3.1), dont le but est le foncteur final sur I' 3.4). On voit immé- 63
diatement que la condition F 1) exprime que cette flèche est un épimorphisme de $\hat{I}'$, i.e. est surjective sur chaque argument (compte tenu que les limites inductives dans $\hat{I}'$ se calculent « argument par argument »). Cela prouve a). Supposons maintenant I filtrante et φ cofinal. Alors I est filtrante : en effet, la condition que deux objets de I' soient

majorés par un troisième résulte aussitôt de la même condition sur I, et de F 1), et il faut seulement encore prouver la condition PS 2) de 2.7, i.e. que pour toute double flèche

$$f', g' : i' \rightrightarrows j'$$

dans I', il existe une flèche $h' : j' \to k'$ de I' telle que $h'f' = h'g'$. Or en vertu de F 1) on peut supposer k' de la forme $\varphi(i)$. Mais comme par l'hypothèse φ cofinal, pour tout objet i' de I' $\varinjlim_i \operatorname{Hom}(i', \varphi(i))$ est l'ensemble réduit à un élément, il résulte de la description standard des limites inductives filtrantes dans (Ens) (2.8.1) que cela implique l'existence d'une flèche $h : i \to j$ dans I telle que $\varphi(h)f' = \varphi(h)g'$. Cela achève donc de prouver que I' est filtrant, et prouve en même temps la condition F 2).

Pour prouver que les conditions énoncées dans b) sont suffisantes pour que φ soit cofinal, on utilise la forme 8.1.2 de la définition. On constate aussitôt que la condition F 1) implique que (8.1.2.1) est un monomorphisme i.e. est injectif sur chaque argument, tandis que la condition F 2) (jointe à F 1) assure qu'il est bijectif (compte tenu du calcul des limites projectives dans $\widehat{I'^{\circ}}$ argument par argument). Cela prouve donc b).

64 Enfin, si I' est filtrante et φ pleinement fidèle, alors il est immédiat que la condition F 1) implique que I est filtrante, et implique la condition F 2). Donc c) résulte de a) et de b).

8.1.4. Lorsque I' est une catégorie filtrante, I une sous-catégorie pleine de I', on voit donc par 8.1.3 c) que la condition que I soit cofinale dans I' ne dépend que de la partie $\operatorname{Ob} I$ de l'ensemble préordonné $OB\ I'$ (pour la relation de préordre « $x \leq y$ » $\Leftrightarrow$ « $\operatorname{Hom}(x, y) \neq \varnothing$ »). Si J' est un ensemble préordonné, J une partie de J', on dira parfois que J est une partie cofinale de J' lorsque tout élément de J' est majoré par un élément de J. Lorsque J' est filtrante, cela signifie donc que le foncteur d'inclusion $\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{J}'$ pour les catégories associées est cofinal.

8.1.5. Dans la suite, nous n'utiliserons la notion de foncteur cofinal que dans les cas où les catégories I et I' sont filtrantes. Classiquement, on se bornait même à des catégories associées à des ensembles préordonnés (i.e. dans lesquelles il existe au plus une flèche de source et de but donnés). Il apparaît cependant que cette restriction est gênante dans les applications, les catégories filtrantes « naturelles » qui s'introduisent dans de nombreuses applications n'étant pas des catégories ordonnées. Le résultat suivant, dû à P. Deligne, montre cependant qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les deux points de vue :

65 Proposition 8.1.6. Soit I une petite catégorie filtrante. Alors il existe un petit ensemble ordonné E, et un foncteur cofinal $\varphi : \mathscr{E} \to I$, où $\mathscr{E}$ désigne la catégorie associée à E.

Supposons d'abord que l'ensemble préordonné $\operatorname{Ob} I$ n'ait pas de plus grand élément. Appelons sous-diagramme de I un couple $D = (\mathcal{O}, F)$ formé d'une partie F de $F\ell(I)$ et d'une partie $\mathcal{O}$ de $\operatorname{Ob} I$, tel que pour toute $f \in F$, la source et le but de f appartiennent à $\mathcal{O}$. Un élément e de $\mathcal{O}$ est appelé objet final du sous-diagramme D si pour tout $x \in D'$, l'ensemble $\operatorname{Hom}(x, e) \cap F$ des flèches de D de source x et de but y a exactement un élément f_x, si pour toute flèche $g : x \to y$ de D, on a $f_x = f_y \circ g$ et si $f_e = \mathrm{id}_e$. Soit E l'ensemble des sous-diagrammes finis D de I ayant un élément final unique $\varphi(D)$, et ordonnons E par inclusion. Si D, D' sont deux éléments de E et $D \subset D'$, alors il existe une unique flèche $\varphi(D', D)$ de D' de source $\varphi(D)$, de but $\varphi(D')$, et si on a des inclusions $D \subset D' \subset D''$ dans E, on a évidemment $\varphi(D'', D) = \varphi(D'', D')\varphi(D', D)$; on a également $\varphi(D, D) = \mathrm{id}_{\varphi(D)}$. On trouve donc un foncteur $\varphi : \mathscr{E} \to I$, et tout revient à prouver que E est filtrant et que φ est cofinal. Compte tenu de 8.1.3 b), on doit faire trois vérifications :

1) Condition F 1) de 8.1.3 : pour tout $i \in I$, on prend pour D le sous-diagramme de I réduit à l'objet i et sa flèche identique, alors $i \leq \varphi(D) = i$. Cette condition F 1) montre en même temps que $E \neq \varnothing$.
2) Condition F 2) : Pour tout $i \in \operatorname{Ob} I$, tout $D \in E$ et toute double flèche $i \rightrightarrows \varphi(D)$, trouver un diagramme $D' \in E$, contenant D, tel que $\varphi(D', D) : \varphi(D) \to \varphi(D')$ égalise la double flèche. Or comme I est filtrant, il existe un objet j de I et une **66** flèche $f : \varphi(D) \to j$ qui égalise la double flèche. Comme I n'a pas de plus grand élément, on peut supposer que j est un majorant strict de $\varphi(D)$, ce qui implique qu'il est distinct de tous les autres objets de D. Soit alors D' le sous-diagramme de I dont l'ensemble d'objets est $\mathscr{O} \cup \{j\}$, et l'ensemble des flèches est formé des flèches de D, plus les composés $x \xrightarrow{f_x} \varphi(D) \xrightarrow{f} j$, où x est un objet de D et f_x est l'unique flèche de D de source x et de but $\varphi(D)$, et id_j. Il est clair alors que D' est un sous-diagramme fini de I, qu'il admet j comme unique objet final, donc $D' \in E$, et D' satisfait à la condition voulue.
3° Deux sous-diagrammes $D, D' \subset E$ sont contenus dans un même $D'' \in E$. On peut en effet trouver un majorant strict j de $\varphi(D)$ et de $\varphi(D')$,

$$\begin{tikzcd}
\varphi(D) \arrow[dr, "f"] & \\
& j \\
\varphi(D') \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd},$$

et on prend pour D'' le sous-diagramme dont l'ensemble des objets est la réunion de l'ensemble des objets de D, de D' et de $\{j\}$, et l'ensemble des flèches est la réunion de l'ensemble des flèches de D, de D', de l'ensemble des composés $f \circ f_x$ (x objet de D) et $f' \circ f'_{x'}$ (x' objet de D'), et $\{\mathrm{id}_j\}$. On obtient bien ainsi un sous-diagramme fini de E, montrons que, quitte à remplacer j, f, f' par j', gf, gf' avec $g : j \to j'$ convenable, on peut obtenir que j soit un objet final de D'. Il revient au même de dire que pour tout x qui est à la fois objet de D et de D', on a $f f_x = f' f'_{x'}$. Or c'est là d'un ensemble fini de doubles-flèches qu'il s'agit d'égaliser par un $g : j \to j'$, ce qui est possible puisque I est filtrante. **67**

Cela achève la démonstration dans le cas envisagé. On ramène le cas général à celui-ci, en introduisant la catégorie filtrante $\mathbf{N}$ associée à l'ensemble ordonné $\mathbf{N}$ des entiers naturels, et en notant que la catégorie $\mathbf{N} \times I$ est filtrante, qu'elle n'a pas de plus grand élément, et que la projection $\mathbf{N} \times I \to I$ est un foncteur cofinal.

Corollaire 8.1.7. Soit I une $\mathscr{U}$-catégorie. Pour qu'il existe un petit ensemble ordonné filtrant E, et un foncteur cofinal $\mathscr{E} \to I$, il faut et il suffit que I soit filtrante et que $\operatorname{Ob} I$ admette une petite partie cofinale I' (8.1.4).

C'est nécessaire en vertu de 8.1.3 a), et suffisant en vertu de 8.1.6 appliqué à la sous-catégorie pleine de I définie par I'.

Définition 8.1.8. Soit I une catégorie filtrante. On dit que I est essentiellement petite si I est une $\mathscr{U}$-catégorie, et si elle satisfait aux conditions équivalentes de 8.1.7.

8.2. Ind-objets et foncteurs ind-représentables.

8.2.1. Nous fixons dans la suite une $\mathscr{U}$-catégorie C, que nous considérons toujours comme plongée dans la catégorie $\widehat{C}$ des $\mathscr{U}$-préfaisceaux à l'aide du foncteur canonique (1.3.1)

$$h : C \hookrightarrow \widehat{C}. \tag{8.2.1.1}$$

Nous appellerons ind-objet de C (ou système inductif de C), tout foncteur

$$\varphi : I \longrightarrow C, \tag{8.2.1.2}$$

68 où I est une catégorie filtrante (2.7), appelée la catégorie d'indices du ind-objet. (I est par ailleurs quelconque, et nous n'exigeons pas, notamment, que I soit une $\mathscr{U}$-catégorie.) Il sera souvent commode de désigner un ind-objet φ par la notation indicielle $(X_i)_{i\in \mathrm{ob}\, I}$, ou même (par nouveau abus de notation) $(X_i)_{i\in I}$, ou $(X_i)_i$ ou (X_i), où $X_i = \varphi(i)$ pour $i \in \mathrm{ob}\, I$. Cette notation n'est ni plus ni moins abusive que la notation utilisée classiquement pour les systèmes inductifs indexés par les ensembles ordonnés filtrants (où la mention des morphismes de transition est également absente). Les X_i s'appellent les objets composants du ind-objet $\mathscr{X}$. On fera attention que dans le cas général envisagé ici, les « morphismes de transition » $\varphi(f)$ du système inductif sont indexés par l'ensemble $F\ell\, I$ des flèches de I, qui ne s'identifie pas en général à une partie de $\mathrm{Ob}\, I \times \mathrm{Ob}\, I$; en d'autres termes, pour i et j donnés, j majorant i, il peut exister plus d'un morphisme de transition de X_i dans X_j.

8.2.2. Les ind-objets $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ de C les plus utiles sont ceux pour lesquels la catégorie d'indices I est essentiellement petite (8.1.8) ; un tel ind-objet est appelé essentiellement petit. Si $(X_i)_{i\in I}$ est ainsi, utilisant le fait que dans $\widehat{C}$ les petites limites inductives sont représentables (3.1), on peut considérer

$$L(\mathscr{X}) \overset{def}{=} \varinjlim h \cdot \mathscr{X} = \varinjlim_i X_i \in \mathrm{ob}\, \widehat{C}, \tag{8.2.2.1}$$

où la dernière limite est prise dans $\widehat{C}$. Donc $L(\mathscr{X})$ est le préfaisceau

$$L(\mathscr{X}) : Y \longmapsto \varinjlim_i \mathrm{Hom}(Y, X_i) \tag{8.2.2.2}$$

69 sur C. On dit que ce préfaisceau est le préfaisceau ind-représenté par le ind-objet $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ de C. Un préfaisceau F sur C est appelé un préfaisceau ind-représentable s'il est isomorphe à un préfaisceau $L(\mathscr{X})$ ind-représenté par un ind-objet essentiellement petit. Il résulte d'ailleurs de 8.1.6 que dans cette définition, on peut supposer que I est une petite catégorie, et même que I est associée à un ensemble ordonné $\in \mathscr{U}$.

8.2.3. Considérons un ind-objet $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$, donné par un foncteur $\varphi : I \to C$, et soit

$$u : I' \longrightarrow I$$

un foncteur, où I est une deuxième catégorie filtrante. Alors le foncteur $\varphi \circ u$ est un ind-objet $\mathscr{X}'$ de C de catégorie d'indices I', qui en notation indicielle s'écrit $(X_{u(i')})_{i'\in I'}$, qu'on appelle le ind-objet de C déduit de $(X_i)_{i\in I}$ par changement de catégories d'indices à l'aide du foncteur u. Si I et I' (i.e. $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$) sont essentiellement petits, on trouve un morphisme canonique

$$L(\mathscr{X}') = \varinjlim_{i'} X_{u(i')} \longrightarrow L(\mathscr{X}) = \varinjlim_i X_i \tag{8.2.3.1}$$

entre les préfaisceaux ind-représentés par $\mathscr{X}'$ et $\mathscr{X}$ respectivement. Lorsque u est un foncteur cofinal (8.1.1), alors $\mathscr{X}$ est essentiellement petit si et seulement si $\mathscr{X}'$ l'est (8.1.7), et l'homomorphisme précédent (8.2.3.1) est un isomorphisme

(8.2.3.2) $$L(\mathscr{X}') \simeq L(\mathscr{X}).$$

8.2.4. Soient **70**

(8.2.4.1) $$\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}, \mathscr{Y} = (Y_j)_{j \in I}$$

deux ind-objets de C essentiellement petits, indexés par des catégories (filtrantes et essentiellement petites) I et J. On appelle morphisme du ind-objet $\mathscr{X}$ dans le ind-objet $\mathscr{Y}$ tout morphisme

(8.2.4.2) $$L(\mathscr{X}) \longrightarrow L(\mathscr{Y})$$

entre les préfaisceaux qu'ils ind-représentent. On pose

(8.2.4.3) $$\mathrm{Hom}_{\text{ind-ob}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(L(\mathscr{X}), L(\mathscr{Y})).$$

(On supprime l'indice ind-ob au Hom si on ne craint pas de confusion). On définit la composition des ind-objets de $\mathscr{C}$ comme le composition des morphismes des préfaisceaux qu'ils ind-représentent. Si $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$ est un univers contenant $\mathscr{U}$, et si on se borne aux ind-objets essentiellement petits qui sont $\in \mathscr{V}$, ceux-ci forment donc l'ensemble d'objets d'une catégorie, dont l'ensemble des flèches est formé des triples $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, u)$, où $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont des ind-objets essentiellement petits $\in \mathscr{V}$ et où $u : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de ind-objets, i.e. un morphisme $L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y})$. La catégorie ainsi obtenu est notée

(8.2.4.4) $$\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}).$$

Lorsque $\mathscr{V} = \mathscr{U}$, on la note simplement

(8.2.4.5) $$\mathrm{Ind}_{\mathscr{U}}(C) \text{ ou } \mathrm{Ind}(C),$$

et on l'appelle catégorie des ind-objets de C relativement à $\mathscr{U}$, en supprimant la mention de $\mathscr{U}$ quand aucune confusion n'est à craindre.

Évidemment, si $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}'$ sont deux univers contenant $\mathscr{U}$, $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U})$ est une sous- **71**
catégorie pleine de $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}'}(, \mathscr{U})$; il résulte alors de 8.2.3 que le foncteur d'inclusion est une équivalence de catégories :

(8.2.4.6) $$\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}'}(C, \mathscr{U}).$$

Cela montre en particulier que tout ind-objet essentiellement petit de C définit un élément de $\mathrm{Ind}(C)$, à isomorphisme unique près. Cette constatation justifie l'abus de langage, assez courant en pratique, consistant à identifier tout ind-objet essentiellement petit de C à un objet de $\mathrm{Ind}(C)$.

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout univers $\mathscr{V}$, nous avons un foncteur canonique

(8.2.4.7) $$L : \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \longrightarrow \widehat{C}$$

qui est pleinement fidèle. Ces foncteurs sont évidemment connus à isomorphisme unique près, grâce à (8.2.4.6), lorsqu'on connaît l'un d'eux, et en particulier lorsqu'on connaît le foncteur canonique

(8.2.4.8) $$L : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \widehat{C}.$$

Comme ce foncteur est pleinement fidèle, on l'utilise fréquemment pour identifier un objet du premier membre avec le foncteur qu'il pro-représente, voire pour identifier $\mathrm{Ind}(C)$ avec son image essentielle dans $\widehat{C}$, formée des préfaisceaux ind-représentables. On fera attention cependant que cette identification présente nettement plus d'inconvénients que l'identification analogue de C à une sous-catégorie pleine de $\widehat{C}$ par le foncteur h (8.2.1.1), car contrairement à ce dernier, le foncteur (8.2.4.8) n'est pas en général injectif sur les objets.

72 8.2.5. Explicitons la définition (8.2.4.3) en termes des expressions indicielles (8.2.4.1) des ind-objets considérés. On trouve, compte tenu de la définition (8.2.2.1) :

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i,\mathscr{Y}) \overset{dfn}{=} \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i, L(\mathscr{Y})) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_C(X_i,Y_j),$$

la dernière égalité provenant de (8.2.2.2) appliqué à $\mathscr{Y}$. On trouve donc une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}((X_i)_{i\in I},(Y_j)_{j\in J}) \simeq \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_C(X_i,Y_j). \tag{8.2.5.1}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la composition des morphismes de ind-objets sur cette formule. Notons qu'il résulte aussitôt de cette formule que l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ d'homomorphismes de ind-objets est $\mathscr{U}$-petit, i.e. que les catégories (8.2.4.4) sont des $\mathscr{U}$-catégories. Il revient au même de dire (en vertu de (8.2.4.6)) que la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ est une $\mathscr{U}$-catégorie, i.e. que le deuxième membre de (8.2.5.1) est petit lorsque I, $J\in\mathscr{U}$, ce qui résulte aussitôt du fait que C est une $\mathscr{U}$-catégorie donc les $\mathrm{Hom}_C(X_i,Y_j)$ sont petits.

8.2.6. Soit I une catégorie filtrante essentiellement petite. Alors on voit sur (8.2.5.1), ou sur la fonctorialité de la limite inductive d'un foncteur $I\to\widehat{C}$ par rapport au dit foncteur, qu'on a un foncteur canonique

$$\mathscr{H}\!om(I,C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C). \tag{8.2.6.1}$$

On fera attention que ce foncteur n'est pas en général pleinement fidèle, ni même fidèle.

73 Remarque 8.2.7. Les définitions de 8.2.4 rendent claire la notion d'isomorphie de deux ind-objets (essentiellement petits), qui signifie aussi l'isomorphie des préfaisceaux qu'ils ind-représentent. On fera attention que c'est une notion d'isomorphie très faible, si on la compare à la notion d'isomorphie dans des catégories de la forme $\mathscr{H}\!om(I,C)$. Ainsi, un grand nombre de relations assez naturelles qu'on peut imposer à un ind-objet (tel que celle d'avoir ses composantes dans une sous-catégorie strictement pleine donnée, ou celle d'être strict (8.12 ci-dessous)) ne sont pas stables par isomorphisme. Il faudra donc, si on tient à travailler avec des notions stables par isomorphisme de ind-objets, « saturer » les notions envisagées en passant à la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ engendrée par la sous-catégorie de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des objets satisfaisant à la condition envisagés. Voir par exemple la notion de ind-objet essentiellement constant, introduite plus bas (8.4).

Exercice 8.2.8. Soient $\mathscr{U}\subset\mathscr{V}$ deux univers et C un $\mathscr{U}$-catégorie qui appartienne à $\mathscr{V}$. On désigne par $\mathrm{SysInd}(C)$ la catégorie suivante :

a) Les objets de $\mathrm{SysInd}(C)$ sont les foncteurs $\varphi : I\to C$ où I est une catégorie filtrante essentiellement $\mathscr{U}$-petite appartenant à $\mathscr{V}$.
b) Soient (I,φ) et (J,ψ) deux objets de $\mathrm{SysInd}(C)$. Un morphisme de $\mathrm{SysInd}(C)$ de (I,φ) dans (J,ψ) est une couple (m,u), où $m : I\to J$ est un foncteur et où $u:\varphi\to\psi\circ m$ est un morphisme de foncteurs. La composition des morphismes dans $\mathrm{SysInd}(C)$ se définit de manière évidente.

74 Notons S l'ensemble des morphismes $(m,u) : (I,\varphi)\to(J,\Psi)$ de $\mathrm{SysInd}(C)$ tel que m soit cofinal et u un isomorphisme. Soit (I,φ) un objet de $\mathrm{SysInd}(C)$. La catégorie $F\ell(I)$

des flèches de I s'envoie par deux foncteurs naturels dans I : la source et le but. De plus ces deux foncteurs sont liés par le morphisme canonique de foncteurs v : source → but. D'où deux morphismes dans $\mathrm{SysInd}(C)$ de $(F\ell(I), \varphi \circ \text{ source})$ dans (I, φ) : $p_1(I, \varphi) = (\text{source, id})$, $p_2(I, \varphi) = (\text{but}, \varphi^* v : \varphi \circ \text{source } \to \varphi \circ \text{ but})$. Notons $p : \mathrm{SysInd}(C) \to \mathrm{Ind}(C)$ le foncteur évident. Soit B une catégorie. Montrer que le foncteur $F \mapsto F \circ p$:

$$\mathscr{H}om(\mathrm{Ind}(C), B) \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathrm{SysInd}(C), B)$$

est pleinement fidèle, et qu'un foncteur $G : \mathrm{SysInd}(C) \to B$ appartient à l'image essentielle si et seulement s'il possède les deux propriétés suivantes :

1) Pour tout $s \in S$, $F(s)$ est un isomorphisme de B.
2) Pour tout objet (I, φ) de $\mathrm{SysInd}(C)$, $F(p_1(I, \varphi)) = F(p_2(I, \varphi))$.

8.3. Caractérisation des foncteurs ind-représentables.

Proposition 8.3.1. Soit F un préfaisceau ind-représentable sur C. Alors F est exact à gauche, i.e. (2.3.2) pour toute catégorie finie J et tout foncteur $\varphi : J \to C$ tel que $\varinjlim \varphi$ soit représentable (i.e. $\varprojlim \varphi^\circ$ soit représentable), l'application canonique

$$F(\varinjlim \varphi) \longrightarrow \varprojlim F \circ \varphi$$

est bijective.

En effet, les préfaisceaux représentables étant évidemment exacts à gauche, il résulte **75**
aussitôt de 2.8 qu'il en est de même de toute limite inductive filtrante de tels foncteurs, C.Q.F.D.

8.3.2. F étant un préfaisceau sur C, nous aurons à travailler souvent avec la catégorie

$$C_{/F} \hookrightarrow \widehat{C}_{/F}, \tag{8.3.2.1}$$

qui désigne la sous-catégorie pleine du deuxième membre formée des flèches $X \to F$ de source dans C. Il résulte de 1.4 que les objets de cette catégorie s'identifient aux couples (X, u), où X est un objet de C et $u \in F(X)$. Un morphisme de (X, u) dans (X', u') s'interprète alors comme une flèche $f : X \to X'$ dans C telle que l'on ait $F(f)(u') = u$. Le foncteur « oubli du but » de $\widehat{C}_{/F}$ dans $\widehat{C}$ induit un foncteur (qualifié de canonique).

$$C_{/F} \longrightarrow C, \tag{8.3.2.2}$$

déjà considéré dans 3.4, où on prouve que la limite inductive de ce foncteur existe dans $\widehat{C}$ (sans condition de petitesse sur $C_{/F}$!) et est isomorphe canoniquement à F.

. Notons que si dans C les limites inductives finies sont représentables, et si F est exact à gauche (i.e. les transforme en limites projectives finies de (Ens)), alors il en est de même dans $C_{/F}$, et fortiori (2.7.1) $C_{/F}$ est filtrante. Si, plus généralement, dans C les sommes de deux objets et les conoyaux de doubles flèches sont représentables, et si F les transforme en produits resp. en noyaux, alors $C_{/F}$ est stable sous les mêmes types de **76**
limites inductives finies, donc elle est filtrante si et seulement si elle est non vide, i.e. si et seulement si le foncteur F n'est pas le foncteur constant de valeurs $\varnothing$.

Théorème 8.3.3. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, et $F \in \operatorname{ob} \widehat{C}$, $F : C^\circ \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ un $\mathscr{U}$-préfaisceau sur C. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est ind-représentable (8.2.2).
(ii) La catégorie $C_{/F}$ (8.3.2) est filtrante et essentiellement petite.
(iii) (si dans C les limites inductives finies sont représentables.) Le foncteur F est exact à gauche, et $\operatorname{ob} C_{/F}$ admet une petite partie cofinale (8.1.4).

(iii bis) (Si dans C les sommes de deux objets et les conoyaux de doubles flèches sont représentables.) Le foncteur F transforme somme de deux objets de C en produits, conoyaux de doubles flèches de C en noyaux, la catégorie $C_{/F}$ est non vide i.e. le foncteur F n'est pas le foncteur constant de valeur $\varnothing$, enfin il existe une petite famille d'objets de $C_{/F}$ telle que tout objet X de $C_{/F}$ soit majoré par un objet X_i, i.e. admette un F-morphisme $X_i \to X$.

(iv) (si la catégorie C est équivalente à une petite catégorie.) La catégorie $C_{/F}$ est filtrante.

(v) (Si la catégorie C est équivalente à une petite catégorie, et si les limites inductives filtrantes y sont représentables.) Le foncteur F est exact à gauche.

77 Démonstration. (i) ⇒ (ii). Supposons F ind-représenté par $(X_i)_{i \in I}$, avec I petit. Prouvons que $C_{/F}$ est filtrante. Soient X, X' deux objets de $C_{/F}$, i.e. des objets de C munis de morphismes $X \to F$, $X' \to F$, prouvons qu'ils sont majorés par un troisième objet de $C_{/F}$. Or les morphismes $X \to F$, $X' \to F$ proviennent de morphismes $X \to X_i$, $X' \to X'_i$, et quitte à remplacer i, i' par un majorant commun dans $\operatorname{Ob} I$, on peut supposer $i = i'$, et on prend comme majorant commun de X, X' l'objet X_i muni du morphisme canonique $X_i \to F$. Soit maintenant $X \overset{f,g}{\rightrightarrows} X' \xrightarrow{h} F$ une double flèche dans $C_{/F}$, prouvons qu'elle est égalisée par une flèche $X' \to X''$ de $C_{/F}$. Or $h : X' \to F$ est donné par un morphisme $h_i : X' \to X_i$, et la condition $hf = hg$ signifie qu'il existe $\alpha : i \to j$ dans I tel que $\varphi(\alpha)(h_i f) = \varphi(\alpha)(h_i g)$, i.e. quitte à remplacer h_i par $\varphi(\alpha)h_i$, on égalise f et g. Cela prouve que $C_{/F}$ est filtrante. Il est alors immédiat qu'elle est essentiellement petite puisque les objets $(X_i \to F)_{\in \operatorname{Ob} I}$ forment une petite famille dans $\operatorname{Ob} C_{/F}$ qui est cofinale.

(ii) ⇒ (i). Posons $I = C_{/F}$, et considérons le foncteur canonique (8.3.2.1)

$$\varphi : I = C_{/F} \longrightarrow F.$$

On sait que le préfaisceau représenté par cet ind-objet de C est F (3.4), donc F est ind-représentable par définition (8.2.2).

(ii) ⇔ (iii). En effet, (ii) ⇒ (iii) car un foncteur ind-représentable est exact à gauche (8.3.1), et (iii) ⇒ (ii) car on a signalé (8.3.1), que F exact à gauche implique que $C_{/F}$ est
78 filtrante, et on applique la définition 8.1.8 pour conclure que cette catégorie est essentiellement petite.

(ii) ⇔ (iii bis) se prouve de même que (ii) ⇔ (iii).

Les équivalences (ii) ⇔ (iv) et (iii) ⇔ (v) sont triviales, puisque pour C équivalente à une petite catégorie, $C_{/F}$ est évidemment équivalente également à une petite catégorie et a fortiori elle est automatiquement essentiellement petite dès qu'elle est filtrante. Cela achève la démonstration de 8.3.3.

Remarque 8.3.4. Soit $F : C' \to C''$ un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories. Il apparaît que la notion d'exactitude à gauche (2.3.2) ne présente guère d'intérêt en pratique que si dans C' les limites projectives finies sont représentables. Dans le cas où $C'' = (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, et où C' est $\mathscr{U}$-petit, écrivant C' sous la forme C° (donc $C = C'^\circ$), il convient de considérer que la « bonne notion » qui remplace, dans le cas général, celle d'exactitude à gauche est celle de ind-représentabilité de F (considéré comme préfaisceau sur C° ; i.e. celle de pro-représentabilité de F, considéré comme foncteur sur C', cf. 8.10). Cette notion coïncide bien avec celle d'exactitude à gauche lorsque dans C' les limites projectives finies sont représentables i.e. dans C les limites inductives finies sont représentables (8.3.3). Lorsque l'on ne suppose plus C' $\mathscr{U}$-petit ou tout au moins équivalente à une catégorie

$\mathscr{U}$-petite, alors les deux notions pour un foncteur F, d'exactitude à gauche et de pro-représentabilité, ne coïncident plus nécessairement, même si dans C' les limites projectives finies sont représentables (cf. 8.12.9). En fait, il semble que dans ce cas, les foncteurs exacts à gauche non ind-représentables doivent être considérés comme étant de nature pathologique, les « bons » objets restant les foncteurs ind-représentables ; comparer 8.13.3. Pour le cas des foncteurs $F : C' \to C''$, avec C' et C'' à nouveau des $\mathscr{U}$-catégories quelconques, nous développerons plus bas (8.11.5), plus généralement, une notion qui « améliore » celle d'exactitude à gauche, (savoir celle d'un foncteur admettant un foncteur pro-adjoint). **79**

8.4. Ind-objets constants, essentiellement constants. Choisissons une catégorie finale e, i.e. telle que $\mathrm{Ob}\, e$ et $F\ell\, e$ soient réduits à un élément (par exemple, on peut prendre pour e la sous-catégorie pleine de (Ens) formée par l'ensemble vide, si on veut un choix canonique). C'est évidemment une catégorie filtrante et petite. Si X est un objet de C, on lui associe le ind-objet constant indexé par e, de valeur X, soit $c(X)$. Il est clair que pour X variable, on trouve ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C), \tag{8.4.1}$$

d'ailleurs injectif sur les objets, et par lequel nous identifierons C à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(C)$. On notera que le foncteur composé

$$C \xrightarrow{c} \mathrm{Ind}(C) \xrightarrow{L} \widehat{C} \tag{8.4.2}$$

est le foncteur canonique h (8.2.1.1).

8.4.3. Plus généralement, soit I une catégorie filtrante. Le foncteur constant sur I de valeur sur un objet X de C est aussi appelé le ind-objet constant de valeur X indexé par I. Il est clair, si I est essentiellement petit, que cet ind-objet ind-représente le foncteur $h(X)$ représenté par X, donc cet ind-objet est isomorphe à $c(X)$. **80**

8.4.4. Un ind-objet $\mathscr{X}$ de C est dit essentiellement constant s'il est isomorphe (dans une catégorie $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{V}')$, pour $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}'$ convenables) à un ind-objet de la forme $c(X)$, $X \in \mathrm{ob}\, C$. L'objet X, qui est alors déterminé à isomorphisme canonique près, est appelé la valeur du ind-objet essentiellement constant envisagé. Donc par définition, le foncteur c de (8.4.1) induit une équivalence de C avec la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des ind-objets qui sont essentiellement constants, cette sous-catégorie étant l'image essentielle du foncteur c.

Évidemment un ind-objet constant est essentiellement constant, l'inverse n'étant vrai que dans le seul cas, trivial, où C est vide ou une catégorie ponctuelle.

8.5. Limites inductives filtrantes dans $\mathrm{Ind}(C)$.

Proposition 8.5.1. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. Dans $\mathrm{Ind}(C)$, les petites limites inductives filtrantes sont représentables, et le foncteur canonique (8.2.4.8)

$$L : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \widehat{C}$$

y commute.

Compte tenu du fait que L est pleinement fidèle, les assertions de la proposition équivalent à la suivante : **81**

Corollaire 8.5.2. Toute petite limite inductive filtrante (dans $\widehat{C}$) de préfaisceaux ind-représentables est ind-représentable.

Cela résulte facilement du critère 8.3.3 (ii). Le détail de la vérification est laissée au lecteur.

8.5.3. Le cas « tautologique » de limites inductives filtrantes dans $\mathrm{Ind}(C)$ est celui où on part d'un ind-objet essentiellement petit $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ de C. On a alors, dans $\widehat{C}$ donc aussi dans $\mathrm{Ind}(C)$ (ou dans $\widehat{C}$) :

$$\mathscr{X} = \varinjlim_I X_i. \tag{8.5.3.1}$$

On fera attention, en écrivant cette formule, qu'il ne s'agit pas d'une limite inductive dans C, et que même lorsque cette dernière existe, elle n'est pas isomorphe dans $\mathrm{Ind}(C)$ à $\mathscr{X}$: en effet, le foncteur canonique (8.4.1) $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$ ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes. (Cf. 8.5.5 ci-dessous.)

Pour obvier à cette possibilité de confusion dans l'écriture de (8.5.3.1), « certains auteurs » (= P. Deligne) préfèrent l'écrire

$$\mathscr{X} = «\varinjlim_I» X_i, \tag{8.5.3.2}$$

le rôle des guillemets étant d'indiquer que la limite inductive est prise dans une catégorie de Ind-objets $\mathrm{Ind}(C)$. Par extension, il y aurait lieu alors de dénoter par « lim » toute opération de limite inductive dans $\mathrm{Ind}(C)$ (sans que les composants du système inductif envisagé dans $\mathrm{Ind}(C)$ soient nécessairement dans l'image, ou l'image essentielle, de $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$).

82 8.5.4. Pour calculer la limite inductive ou projective d'un foncteur

$$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C), \tag{8.5.4.1}$$

où J est maintenant une catégorie quelconque, il est souvent commode d'expliciter φ à l'aide d'un foncteur

$$\Phi : J \times I \longrightarrow C, \tag{8.5.4.2}$$

où I est une catégorie filtrante essentiellement petite, ou de préférence petite. Un tel Φ définit en effet un foncteur

$$J \longmapsto (i \longmapsto \Phi(j,i)) : J \longmapsto \mathscr{H}om(I,C),$$

d'où, en composant avec flèche canonique (8.2.6.1) $\mathscr{H}om(I,C) \to \mathrm{Ind}(C)$, un foncteur

$$J \longmapsto (i \longmapsto \Phi(j,i)) : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C). \tag{8.5.4.3}$$

On pourra dire que Φ est une expression indicielle de φ, indexée par la catégorie (filtrante) I, si le foncteur correspondant (8.5.4.3) est isomorphe à φ. Nous étudierons plus bas (8.8) des conditions générales d'existence d'une expression indicielle pour un foncteur φ donné, et nous bornerons ici à partir d'un foncteur φ donné sous forme indicielle (8.5.4.3), dans le cas où J est une petite catégorie filtrante, pour indiquer dans ce cas le calcul de $«\varinjlim» \varphi = «\varinjlim_j» \varphi(j)$. La formule (8.5.3.2), et la formule d'associativité des limites inductives (2.5.0) donne alors immédiatement la « calcul tautologique » de $«\varinjlim» \varphi$:

$$«\varinjlim_J» \varphi = «\varinjlim_{J\times I}» \Phi, \tag{8.5.4.4}$$

83 i.e.

$$«\varinjlim_j» (i \longmapsto \Phi(j,i)) = «\varinjlim_{j,i}» \Phi(j,i), \tag{8.5.4.5}$$

Ainsi, le système inductif cherché n'est autre que Φ lui-même (la catégorie d'indices étant $J \times I$, qui est bien filtrante puisque J et I le sont).

Exercice 8.5.5. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie

a) Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) Dans C les petites limites inductives sont représentables, et le foncteur $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$ y commute.
  (iii) Le foncteur c est une équivalence de catégories.
  (ii) Dans C les petites limites inductives sont représentables, et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$, le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$ commute aux dites limites.
  (iv) Les petites limites inductives filtrantes sont représentables dans C, et le foncteur $\lim c : \mathrm{Ind}\, C \to C$ (cf. 8.7.1.5) est pleinement fidèle (ou encore, une équivalence).

b) Si C est une catégorie finie, prouver que les conditions précédentes équivalent à la suivante : pour tout projecteur dans C (10.6), l'image est représentable dans C.

8.6. Extension d'un foncteur aux ind-objets.

8.6.1. Soit

(8.6.1.1) $$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories. Pour tout ind-objet

$$\varphi : I \longrightarrow C$$

de C (I une catégorie filtrante), le foncteur composé $f \circ \varphi$ est un ind-objet de C', noté **84**
aussi $\mathrm{Ind}(f)(\varphi)$. En notations indicielles, si φ est écrit sous la forme $\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}$, on obtient

(8.6.1.2) $$\mathrm{Ind}(f)(X_i)_{i \in I} = (f(X_i))_{i \in I}.$$

Soit $\mathscr{Y} = (Y_j)_{j \in J}$ un deuxième système inductif de C. On trouve alors une application évidente, également notée $u \to \mathrm{Ind}(f)(u)$:

(8.6.1.3) $$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(X_i, Y_j) \to$$
$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}(f)(\mathscr{X}), \mathrm{Ind}(f)(\mathscr{Y})) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(f(X_i), f(Y_j)).$$

On constate immédiatement que ces applications sont compatibles avec la composition des morphismes de ind-objets, en se référant à la formule non écrite de composition des morphismes de ind-objets (8.2.5). On a ainsi obtenu, pour tout univers $\mathscr{V}$, un foncteur

(8.6.1.4) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C', \mathscr{U})$$

(notations de (8.2.4.5)), et en particulier un foncteur

(8.6.1.5) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C').$$

Si on a un deuxième foncteur

$$g : C' \longrightarrow C'',$$

on a évidemment une identité de foncteurs entre catégories Ind (ou $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}$, au choix) :

(8.6.1.6) $$\mathrm{Ind}(gf) = \mathrm{Ind}(g) \circ \mathrm{Ind}(f),$$

et pour $C' = C$, on a la sempiternelle formule **85**

(8.6.1.7) $$\mathrm{Ind}(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ind}(C)}.$$

De façon imagée, on peut donc dire que la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ dépend fonctoriellement de C (de façon covariante) [3]. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter même une

[3]Pour une dépendance contravariante, sous certaines conditions, cf. 8.11.

dépendance 2-fonctorielle, en définissant, pour tout couple de $\mathscr{U}$-catégories C, C', un foncteur canonique

(8.6.1.8) $$\mathscr{I}nd(f) : \mathscr{H}om(C, C') \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathrm{Ind}(C), \mathrm{Ind}(C')),$$

et en précisant la nature fonctorielle des isomorphismes identiques (8.6.1.6) et (8.6.1.7).

8.6.2. Reprenons le foncteur (8.6.1.1), et considérons le foncteur correspondant (5.1)

(8.6.2.1) $$f_! : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C'},$$

et le diagramme de foncteurs

(8.6.2.2) $$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}(C) \arrow[r, "\mathrm{ind}(f)"] \arrow[d, "L_C"'] & \mathrm{Ind}(C') \arrow[d, "L_{C'}"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "f_!"] & \widehat{C'} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs canoniques L de (8.2.4.8). Comme le foncteur $f_!$ « prolonge f » et commute aux limites inductives (5.4.3), et que les foncteurs L_C et $L_{C'}$ commutent aux petites limites inductives filtrantes (8.5.1), il résulte de (8.5.3.2) que pour tout ind-objet $(X_i)_{i\in I}$ de C, on a dans $\widehat{C'}$ un isomorphisme canonique

$$f_!(L_C((X_i)_{i\in I})) \simeq \varinjlim_i f_! L_C(X_i) \simeq \varinjlim_i L_{C'} f(X_i) = L_{C'}(f(X_i)_{i\in I})$$

86 i.e. un isomorphisme canonique

$$f_! L_C(\mathscr{X}) \simeq L_{C'}(\mathrm{Ind}(f)(\mathscr{X})).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce dernier est fonctoriel, i.e. qu'il correspond à un isomorphisme canonique

(8.6.2.3) $$f_! L_C \simeq L_{C'} \circ \mathrm{Ind}(f).$$

En d'autres termes, le carré (8.6.2.2) est commutatif à isomorphisme canonique près. Compte tenu du fait que $f_!$ commute aux petites limites inductives, et de 8.5.1, on conclut de ceci :

Proposition 8.6.3. *Soit $f : C \to C'$ un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories. Alors le foncteur*

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C')$$

commute aux limites inductives filtrantes. De plus, il rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_C"'] & C' \arrow[d, "c_{C'}"] \\ \mathrm{Ind}(C) \arrow[r, "\mathrm{Ind}(f)"] & \mathrm{Ind}(C') \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales c_C, $c_{C'}$ sont les foncteurs canoniques (8.4.1).

La dernière assertion est triviale sur les définitions, et a été mis pour la commodité des références. Noter d'ailleurs que les propriétés énoncées dans 8.6.3 caractérisent
87 le foncteur $\mathrm{Ind}(f)$ à isomorphisme unique près, comme étant induit par le foncteur $f_!$ (8.6.2.1), comme il résulte de la démonstration qu'on vient de donner de (8.6.2.3).

Proposition 8.6.4. *Les notations sont celles de 8.6.3.*

a) Pour que $\mathrm{Ind}(f)$ soit fidèle (resp. pleinement fidèle), il faut et il suffit que f le soit.
b) Pour que $\mathrm{Ind}(f)$ soit une équivalence de catégories, il faut et il suffit que f soit pleinement fidèle, et que tout objet de C' soit isomorphe à facteur direct (10.6) d'un objet dans l'image de f.

Démonstration.

a) La nécessité résulte évidemment du fait que f est induit par $\mathrm{Ind}(f)$. Pour la suffisance, il suffit d'utiliser la forme (8.6.1.3) de $\mathrm{Ind}(f)$ sur des ensembles $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, en se rappelant que les limites inductives filtrantes d'ensembles, et les limites projectives quelconques, transforment monomorphismes en monomorphismes, isomorphismes en isomorphismes.
b) On peut supposer déjà g donc $\mathrm{Ind}(f)$ pleinement fidèle. Comme tout objet de $\mathrm{Ind}(C')$ est une petite limite inductive filtrante d'objets de C', la pleine fidélité de $\mathrm{Ind}(f)$ implique que pour ce foncteur soit essentiellement surjectif, il revient au même que tout objet X' de C' soit dans l'image essentielle. Or si on a un isomorphisme

$$X' \xrightarrow{\sim} «\varinjlim» f(X_i),$$

cet isomorphisme se factorise par un des $f(X_i)$, ce qui montre que X' est un facteur direct de $f(X_i)$, ce qui prouve la nécessité dans b). Pour la suffisance, utilisant la pleine fidélité de $\mathrm{Ind}(f)$, elle résulte aussitôt du

Corollaire 8.6.5. Dans $\mathrm{Ind}(E)$ les images de projecteurs (10.6) sont représentables, **88**
et le foncteur $\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \to \mathrm{Ind}(C')$ commute à la formation desdites images.

Cela résulte en effet du fait que dans $\mathrm{Ind}(C)$ les petites limites inductives filtrantes sont représentables (8.5.1) et que $\mathrm{Ind}(f)$ y commute (8.6.3), compte tenu que l'image d'un projecteur $p : X \to X$ s'interprète comme la limite inductive d'un système inductif filtrant indexé par $\mathbf{N}$

$$X \xrightarrow{p} X \xrightarrow{p} X \longrightarrow \dots$$

ou au choix, comme limite inductive du foncteur qu'on devine sur la catégorie filtrante P ayant un seul objet, et une flèche non identique Π telle que $\Pi^2 = \Pi$.

8.7. Le foncteur $\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C) \to C$. Caractérisations universelles de la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$.

8.7.1. Reprenons une $\mathscr{U}$-catégorie C, et le foncteur canonique

$$c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C). \tag{8.7.1.1}$$

Soit $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ un objet de $\mathrm{Ind}(C)$. Il résulte immédiatement de la définition des limites inductives représentables (2.1, 2.1.1) que $\varinjlim_i X_i$ est représentable dans C si et seulement si l'adjoint à gauche de c est défini en $\mathscr{X}$, et que dans le cas $\varinjlim_i X_i$ (calculé dans C) n'est autre que la valeur en $\mathscr{X}$ dudit adjoint à gauche :

$$\mathrm{Hom}_C(\varinjlim_i X_i, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}((X_i)_{i\in I}, c(Y)). \tag{8.7.1.2}$$

Si on désigne par **89**

$$\mathrm{Ind}(C)' \subset \mathrm{Ind}(C) \tag{8.7.1.3}$$

la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des ind-objets de C qui admettent une limite inductive dans C, il résulte de l'observation précédente que cette sous-catégorie est strictement pleine, et que l'on a un foncteur canonique

$$\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C)' \longrightarrow C, \tag{8.7.1.4}$$

dont la valeur en chaque objet $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathrm{Ind}(C)'$ est sa limite inductive dans C. Dans le cas particulier où dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables, on obtient donc un foncteur naturel

$$\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow C. \tag{8.7.1.5}$$

. Bien entendu, on peut définir les foncteurs précédents également sur des catégories du type $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C,\mathscr{U})'$, $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C,\mathscr{U})$, mais, compte tenu de (8.2.4.6), ils sont déjà déterminés (à isomorphisme unique près) par la connaissance des foncteurs précédents, correspondants au cas $\mathscr{V} = \mathscr{U}$.

. De la construction précédente du $\varinjlim_C$ comme un foncteur adjoint à gauche, il résulte immédiatement que ce foncteur commute aux limites inductives quelconques, et en particulier aux petites limites inductives filtrantes (ces dernières étant représentables dans $\mathrm{Ind}(C)$ (8.5.1)). Notons aussi que $\mathrm{Ind}(C)'$ contient toujours l'image essentielle de c (formée des ind-objets essentiellement constants), et que l'on a un isomorphisme canonique fonctoriel en $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Ind}(C)'$:

$$\varinjlim_C c(X) \simeq X, \tag{8.7.1.8}$$

90 i.e. , dans le cas favorable où C est stable par petites limites inductives, on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_C \circ c \simeq \mathrm{id}_C\,. \tag{8.7.1.9}$$

8.7.2. Considérons maintenant un foncteur

$$f : C \longrightarrow E, \tag{8.7.2.1}$$

où E est une $\mathscr{U}$-catégorie où les petites limites inductives sont représentables, de sorte qu'on a un foncteur

$$\varinjlim_E : \mathrm{Ind}(E) \longrightarrow E.$$

Comme on a défini également (8.6)

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(E),$$

on peut considérer le composé

$$\overline{f} = \varinjlim_E \circ \mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E, \tag{8.7.2.2}$$

qu'on appelle parfois le prolongement canonique de f aux ind-objets (mais qu'on se gardera de confondre avec $\mathrm{Ind}(f)$!). Comme composé de deux foncteurs commutant aux petites limites inductives filtrantes (8.6.3, 8.7.1.7), ce foncteur lui-même commute aux petites limites inductives filtrantes. De plus, il résulte de l'isomorphisme (8.7.1.9) appliqué à E, et de (8.6.2.3), que $\overline{f}$ prolonge f à isomorphisme près, i.e. qu'on a un isomorphisme canonique

$$\overline{f} \circ c_C \simeq f\,. \tag{8.7.2.3}$$

91 Il est assez clair d'ailleurs, compte tenu du fait que tout objet de $\mathrm{Ind}(C)$ est petite limite inductive filtrante d'objets de C, que les deux propriétés précédentes caractérisent encore $\overline{f}$, à isomorphisme unique près. On peut préciser ce point pour obtenir en même temps

une caractérisation universelle, à équivalence près, de $\mathrm{Ind}(C)$ parmi les $\mathscr{U}$-catégories E où les petites limites inductives filtrantes sont représentables. Si E et F sont deux telles $\mathscr{U}$-catégories, désignons par

$$\mathscr{H}om(E,F)' \subset \mathscr{H}om(E,F) \tag{8.7.2.4}$$

la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om(E,F)$ formée des foncteurs qui commutent aux petites limites inductives filtrantes. On a alors :

Proposition 8.7.3. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie, et utilisons la notation ci-dessus (8.7.2.4). Alors le foncteur canonique

$$c_C : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

est 2-universel parmi les foncteurs de source C et de but une $\mathscr{U}$-catégorie à petites limites inductives filtrantes représentables. En d'autres termes, $\mathrm{Ind}(C)$ est une telle catégorie (8.2.5, 8.5.1), et si E est une telle catégorie, le foncteur

$$g \longmapsto g \circ c_C : \mathscr{H}om(\mathrm{Ind}(C),E)' \longrightarrow \mathscr{H}om(C,E) \tag{8.7.3.1}$$

est une équivalence de catégories.

Pour prouver ce dernier point, il suffit de vérifier que l'application $f \mapsto \overline{f}$ définie par (8.7.2.2) peut se préciser par un foncteur

$$f \longmapsto \overline{f} = \varinjlim_E \cdot \mathrm{Ind}(f) : \mathscr{H}om(C,E) \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathrm{Ind}(C),E)', \tag{8.7.3.2}$$

et que ce dernier est aussi-inverse de (8.7.3.1). Le détail de la vérification, essentielle- **92**
ment triviale, est laissé au lecteur. On peut aussi invoquer 7.8 pour conclure d'abord que (8.7.3.1) est pleinement fidèle, et (8.7.2.3) pour conclure qu'il est essentiellement surjectif.

8.7.4. Reprenons un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories

$$f : C \longrightarrow E, \tag{8.7.4.1}$$

où E est une $\mathscr{U}$-catégorie où les petites limites inductives filtrantes sont représentables, d'où un foncteur

$$\overline{f} : (X_i)_{i\in I} \longmapsto \varinjlim_i f(X_i) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E. \tag{8.7.4.2}$$

Nous nous proposons d'étudier des conditions sur f qui assurent que $\overline{f}$ est pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories. Comme f est isomorphe au composé $\overline{f} \circ c_C$, et que $c_C : C \to \mathrm{Ind}(C)$ est pleinement fidèle, on voit que pour que $\overline{f}$ soit pleinement fidèle, il faut que f le soit. Quitte à remplacer C par son image essentielle dans E, on voit donc qu'on ne perd pas en généralité, essentiellement, en supposant que f est le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie C de E, ce que nous supposerons par la suite, pour simplifier les notations.

Proposition 8.7.5. Les notations sont celles de 8.7.4.

a) Pour que la foncteur $\overline{f}$ soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que l'on ait :
   (i) Tout objet X de C satisfait à la condition suivante :
   (PF) Pour tout petit système inductif filtrant $(Y_i)_{i\in I}$ dans C, de limite induc- **93**
   tive $\varinjlim_i Y_i$ dans E, l'application canonique

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(X,Y_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\varinjlim_i Y_i) \tag{8.7.5.1}$$

   est bijective.

b) Pour que le foncteur $\overline{f}$ soit une équivalente de catégories, il faut et il suffit que C satisfasse la condition (i), et les deux conditions suivantes :

(ii) C est une sous-catégorie de E génératrice par épimorphismes stricts (7.1).
(iii) Pour tout objet X de E, la sous-catégorie pleine $C_{/X}$ de $E_{/X}$, formée des objets X' au-dessus de X de source dans $\operatorname{Ob} C$, est filtrante et essentiellement petite.

La condition (iii) est vérifiée en particulier si C est équivalente à une petite catégorie, et si les limites inductives finies dans C sont représentables et le foncteur d'inclusion $f : C \to E$ y commute (i.e. pour toute catégorie finie J et tout foncteur $\varphi : J \to C$ la limite inductive de $f\varphi$ est représentable et est isomorphe dans E à une objet de C).

Démonstration.

a) Avec les notations de la condition (i), si $\mathscr{Y}$ désigne le ind-objet (Y_i), $\mathscr{X}$ le ind-objet constant défini par X, alors (8.7.5.1) n'est autre que l'application canonique

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\overline{f}(\mathscr{X}), \overline{f}(\mathscr{Y})),$$

donc si $\overline{f}$ est pleinement fidèle cette application est bien bijective. Réciproquement, si $\mathscr{X} = (X_j)_{j\in J}$ et $\mathscr{Y} = (Y_i)_{i\in I}$ sont deux ind-objets quelconques de E,
94 alors l'application $u : \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \to \operatorname{Hom}(\overline{f}(\mathscr{X}), \overline{f}(\mathscr{Y}))$ est la limite projective sur j des applications $u_j : \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_j, \mathscr{Y}) \to \operatorname{Hom}(\overline{f}(\mathscr{X}_j), \mathscr{Y})$, où $\mathscr{X}_j$ est le ind-objet constant de valeur X_j ; donc u est bijective si les u_j le sont, et (i) implique donc que $\overline{f}$ est pleinement fidèle.

b) Supposons (i), (ii), (iii) vérifiées, et prouvons que $\overline{f}$ est une équivalence. Il reste à prouver qu'il est essentiellement surjectif, donc que tout $X \in \operatorname{ob} E$ est dans l'image essentielle. Or l'hypothèse (ii) signifie que $\varinjlim_{C_{/X}} Z \to X$ est un isomorphisme, et (iii) que la catégorie $C_{/X}$ est filtrante et essentiellement petite, donc X est l'image du ind-objet de E défini par le foncteur naturel $C_{/X} \to E$. Inversement, supposons que $\overline{f}$ est une équivalence, donc en vertu de a), il reste à vérifier (ii) et (iii). On peut supposer que $E = \operatorname{Ind}(C)$, C étant identifiée à la sous-catégorie $c(C)$ de E. Mais on sait (8.3.3 (ii)) que pour tout $X \in \operatorname{Ind}(C)$, identifié si on le désire au foncteur F sur C° qu'il ind-représente, $C_{/X} = C_{/F}$ est une catégorie filtrante essentiellement petite (ce qui prouve (iii)) et que la limite inductive dans $\widehat{C}$ du foncteur $C_{/F} \to \widehat{C}$ est F. A fortiori, il en est ainsi dans la sous-catégorie pleine E de $\widehat{C}$, puisque $F = X$ est dans E, ce qui prouve (ii). Reste à prouver la dernière assertion de b). Or l'hypothèse faite sur C implique évidemment que dans la catégorie $C_{/X}$, les limites inductives finies sont représentables, a fortiori la catégorie $C_{/X}$ est filtrante.

95 Remarque 8.7.5.2. Le raisonnement qu'on vient de faire montre plus généralement que lorsque la condition (i) est vérifiée, alors l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle $\overline{f}$ (8.7.4.2) est formée des $X \in \operatorname{ob} E$ tels que la catégorie $C_{/X}$ soit filtrante et essentiellement petite (condition automatiquement satisfaite si C satisfait les conditions énoncées à la fin de b)), et que la limite inductive du foncteur canonique $C_{/X} \to E$ soit X.

Corollaire 8.7.6. Soit E_{PF} la sous-catégorie pleine de E formée des objets satisfaisant la condition (PF) de 8.7.5 a). Alors pour tout foncteur $J \to E_{PF}$, J une catégorie finie, qui admet une limite inductive X dans E, on a $X \in \operatorname{ob} E_{PF}$. Le foncteur canonique $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_{i} {}_E X_i$ déduit de l'inclusion $g : E_{PF} \hookrightarrow E$

$$\overline{g} : \operatorname{Ind}(E_{PF}) \longrightarrow E \tag{8.7.6.1}$$

est pleinement fidèle, et si dans E les limites inductives finies sont représentables et si E_{PF} est équivalente à une petite catégorie, alors l'image essentielle du foncteur $\overline{f}$ est formée des objets X de E tels que le morphisme canonique $\varinjlim_{(E_{PF})_{/X}} Y \to X$ soit un isomorphisme. Si on suppose de plus que la sous-catégorie E_{PF} de E est génératrice par épimorphismes stricts (7.1), alors le foncteur (8.7.6.1) est une équivalence de catégories.

Tous les faits sont évidents, dans l'ordre où ils sont donnés, compte tenu de 8.7.5, en utilisant 2.8 pour la première assertion.

Corollaire 8.7.7. Supposons que dans E les limites inductives finies soient représentables. Soit C une sous-catégorie pleine de E, équivalente à une petite catégorie, et considérons le foncteur $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_{i}{}_E X_i$: **96**

$$\overline{f} : \mathrm{Ind}(C) \to E. \tag{8.7.7.1}$$

Soit E_{PF} comme dans 8.7.6. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur $\overline{f} : \mathrm{Ind}(C) \to E$ est une équivalence.

(ii) La catégorie C dans E est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans E_{PF}, et tout objet de E_{PF} est isomorphe dans E (ou dans E_{PF}, cela revient au même (8.7.6)) à un facteur direct d'un objet de C.

Lorsque la sous-catégorie C de E est stable par facteurs directs (10.6), les conditions précédentes équivalent encore aux suivantes :

(ii bis) $C = E_{PF}$, et C est génératrice dans E par épimorphisme stricts.

(iii) La sous-catégorie C de E est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans E_{PF}, et les limites inductives finies y sont représentables.

Lorsque de plus dans E les limites inductives finies sont représentables, ces conditions équivalent aussi à

(iii bis) La sous-catégorie C de E est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans E_{PF}, et stable dans E par limites inductives finies (ou ce qui revient au même, par sommes finies, et par conoyaux de doubles flèches).

On sait déjà (8.7.5) que la condition (i) implique que $C \subset E_{PF}$, et que C est génératrice par épimorphismes stricts ; prouvons aussi qu'alors tout objet X de E_{PF} est isomorphe à un facteur direct d'un objet de C. En effet on sait que X est une limite inductive filtrante $\varinjlim_i X_i$ dans E d'objets de C, et par définition de E_{PF}, on voit que pour i convenable l'homomorphisme canonique $X_i \to X$ admet un inverse à gauche, de sorte que X est bien facteur direct de l'objet X_i de C. Cela prouve que (i) ⇒ (ii) (sans hypothèse sur C ni E, d'ailleurs). Prouvons (ii) ⇒ (i). Comme C est équivalente à une petite catégorie et tout objet de E_{PF} est facteur direct d'un objet de C, on voit que E_{PF} est également équivalente à une petite catégorie, donc en vertu de 8.7.6 le foncteur (8.7.6.1) est une équivalence de catégories, et on conclut grâce à 8.6.4 b) appliqué à l'inclusion $E \hookrightarrow E_{PF}$. **97**

Lorsque tout facteur direct dans E d'un objet de C est dans C, il est clair que (ii) ⇔ (ii bis). D'autre part (ii bis) implique (iii) resp. (iii bis) en vertu de 8.7.6. Enfin, (iii) (et a fortiori (iii bis)) implique (i) en vertu de 8.7.5. Cela achève la démonstration.

Exercice 8.7.8. (Enveloppes de Karoubi). Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $E = \mathrm{Ind}(C)$, et $E_{PF} \supset C$ la sous-catégorie pleine de E définie dans 8.7.6.

a) Prouver que dans E_{PF} les images de projecteurs sont représentables, et que tout objet de E_{PF} est facteur direct d'un objet de C.

b) Appelons karoubienne une catégorie F dans laquelle les images de projecteurs sont représentables. Soit alors

$$\varphi : C \longrightarrow K$$

98 un foncteur pleinement fidèle, tel que K soit karoubienne et que tout objet de K soit facteur direct d'un objet de l'image de C. Prouver que φ est 2-universel parmi les foncteurs de C à valeurs dans des catégories karoubiennes, de façon précise : pour toute catégorie karoubienne F, le foncteur

$$g \longmapsto g \circ \varphi : \mathscr{H}om(K, F) \longrightarrow \mathscr{H}om(K, F)$$

est une équivalence de catégories. (On utilisera le fait que tout foncteur commute aux images de projecteurs.) La catégorie K munie de φ, déterminée à équivalence près (elle-même déterminée à isomorphisme unique près) par les propriétés précédentes, s'appelle l'enveloppe de Karoubi $\widetilde{C}$ de C. (Comparer aussi IV 7.5.)

c) Déduire de a) et b) que $\mathrm{Ind}(C)_{PF}$, munie du foncteur $C \to \mathrm{Ind}(C)_{PF}$ induit par $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$, fait de $\mathrm{Ind}(C)_{PF}$ une enveloppe de Karoubi de C.

d) Montrer que tout foncteur $f : C \to C'$ se prolonge de façon essentiellement unique en un foncteur $\widetilde{f} : \widetilde{C} \to \widetilde{C'}$ des enveloppes de Karoubi, et que si on prend ces enveloppes de Karoubi comme dans c), $\widetilde{f}$ est le foncteur induit par $\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \to \mathrm{Ind}(C')$. Montrer que les conditions de 8.5.4 b) équivalent encore à la suivante : $\widetilde{f}$ est une équivalence de catégories.

Exercice 8.7.9. Soit E une $\mathscr{U}$-catégorie.

a) Montrer que les conditions sont équivalentes :
   (i) E est équivalente à une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}(C)$, avec C une $\mathscr{U}$-catégorie.
99 (i bis) Comme (i), avec de plus C karoubienne (8.7.8 b)).
   (ii) La sous-catégorie E_{PF} de E (8.7.6) est génératrice par épimorphismes stricts, et pour tout objet X de E, $(E_{PF})_{/X}$ est une catégorie filtrante essentiellement petite.

   Montrer que si C est une $\mathscr{U}$-catégorie karoubienne telle que E soit équivalente à $\mathrm{Ind}(C)$, alors C est équivalente à E_{PF} (par une équivalence déterminée à isomorphisme unique près). Établir une 2-équivalence entre la 2-catégorie formée des catégories E satisfaisant aux conditions précédentes et les foncteurs entre icelles commutant aux petites limites inductives filtrantes, et la 2-catégorie formée des $\mathscr{U}$-catégories karoubiennes et les foncteurs quelconques entre icelles.

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) E est équivalente à une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}(C)$, où C est une $\mathscr{U}$-catégorie où les limites inductives finies sont représentables.
   (i bis) Comme (i), mais avec de plus C karoubienne.
   (ii) Les limites inductives finies dans E sont représentables, la sous-catégorie E_{PF} de E est génératrice par épimorphismes stricts, et pour tout objet X de E, il existe une petite partie I de $\mathrm{Ob}\, E_{PF/X}$ telle que tout objet de $E_{PF/X}$ soit majoré par un objet de I. (Utiliser 8.9.5 b).)

100

8.8. Représentation indicielle d'un foncteur $J \to \mathrm{Ind}(C)$.

8.8.1. Soit

$$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \text{ i.e. } \varphi \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C))$$

un foncteur, C étant une $\mathscr{U}$-catégorie. Rappelons (8.5.4) qu'une représentation indicielle de φ est par définition un ind-objet de $\mathscr{H}om(J, C)$

$$\psi : I \longrightarrow \mathscr{H}om(J, C),$$

I catégorie filtrante essentiellement petite, dont la limite inductive dans $\mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C))$ soit isomorphe à φ par un isomorphisme donné. Donc φ admet une représentation indicielle si et seulement si il est isomorphe à une limite inductive filtrante essentiellement petite dans $\mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C))$ d'objets de la sous-catégorie pleine $\mathscr{H}om(J, C)$. Nous dirons que la catégorie J est admissible pour C si tout foncteur $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ admet une représentation indicielle.

Comme dans $\mathrm{Ind}(C)$ les petites limites inductives filtrantes sont représentables (8.5.1), il en est de même dans $\mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C))$, et elles se calculent « argument par argument ». Par suite, le foncteur d'inclusion

$$\mathscr{H}om(J, C) \hookrightarrow \mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C)) \tag{8.8.1.1}$$

se prolonge canoniquement en un foncteur

$$\mathrm{Ind}(\mathscr{H}om(J, C)) \longrightarrow \mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C)) \tag{8.8.1.2}$$

(8.7.2). Les éléments de l'image essentielle de ce foncteur sont alors précisément les φ admettant une représentation indicielle ; donc dire que J est admissible pour C signifie aussi que le foncteur (8.8.1.2) est essentiellement surjectif. Signalons à ce propos :

Proposition 8.8.2. *Si la catégorie J est équivalente à une catégorie finie, le foncteur canonique (8.8.1.2) est pleinement fidèle ; donc J est admissible pour C si et seulement si c'est une équivalence de catégories.* **101**

En vertu de 8.7.5 a) tout revient à prouver que pour tout petit système inductif filtrant $(\varphi_i)_{i\in I}$ dans $\mathscr{H}om(J, C)$ et tout objet φ de $\mathscr{H}om(C, J)$, l'application canonique

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(\varphi, \varphi_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi, \varinjlim_i \varphi_i) \tag{8.8.2.1}$$

est bijective, où $\varinjlim_i \varphi_i$ désigne la limite inductive prise dans $\mathrm{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$. Or, si φ, ψ sont deux foncteurs $J \to C$, on a un diagramme exact d'ensembles, fonctoriel en φ et ψ :

$$\mathrm{Hom}(\varphi, \psi) \longrightarrow \prod_{X\in \mathrm{Ob}\, J} \mathrm{Hom}(\varphi(X), \psi(X)) \rightrightarrows \prod_{\substack{f\in F\ell J\\ f:X\to Y}} \mathrm{Hom}(\varphi(X), \psi(Y)).$$

Comme les limites inductives filtrantes commutent aux noyaux de doubles flèches et aux produits finis, la bijectivité de (8.8.2.1) s'ensuit quand J est finie. Le cas où J est équivalente à une catégorie finie se ramène aussitôt au cas précédent.

Proposition 8.8.3. *Soit $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ un foncteur, avec J équivalente à une petite catégorie. Pour que φ admette une représentation indicielle, il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes, et cela est également nécessaire lorsque J est équivalente à une catégorie finie :*

a) *La catégorie $\mathscr{H}om(J, C)_{/\varphi}$ (formée des flèches de $\mathscr{H}om(J, \mathrm{Ind}(C))$ de but φ et de source dans $\mathrm{Hom}(J, C)$) est filtrante.*
b) *Pour tout objet j de J, le foncteur* **102**

$$\psi \longmapsto \psi(j) : \mathscr{H}om(J, C)_{/\varphi} \longrightarrow C_{/\varphi(j)} \tag{8.8.3.1}$$

est cofinal. i.e. satisfaisant aux conditions F 1), F 2) de 8.1.3.

Démonstration. Supposons a) et b) vérifiées, prouvons que φ admet une représentation indicielle. On peut supposer évidemment J petite. Soit

$$I = \mathscr{H}om(J, C)_{/\varphi}, \tag{8.8.3.2}$$

qui est une catégorie filtrante par hypothèse, et supposons d'abord I essentiellement petite, de sorte que « l'inclusion » de I dans $\mathscr{H}om(J, C)$ définit un ind-objet de $\mathscr{H}om(J, C)$, $i \mapsto \psi_i$. De plus, on a un homomorphisme canonique

$$\varinjlim_i \psi_i \longrightarrow \varphi, \tag{8.8.3.3}$$

donné argument par argument par l'homomorphisme

$$\varinjlim_I \psi_i(j) \longrightarrow \varphi(j) = \varinjlim_{C_{/\varphi(j)}} X$$

déduit du foncteur (8.8.3.1). Comme ce dernier est cofinal, on en conclut que (8.8.3.3) est un isomorphisme, d'où la conclusion. Dans le cas où on ne suppose pas I essentiellement petite, il suffit de construire une sous-catégorie pleine essentiellement petite I', telle que (8.8.3.3) reste un isomorphisme en prenant $\varinjlim_{I'}$ au lieu de $\varinjlim_I$. Pour ceci, il suffit que les foncteurs composés

$$I' \longrightarrow I \longrightarrow C_{/\varphi(j)}$$

103 induits par les foncteurs (8.8.3.1) soient tous cofinaux. On conclut alors par le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate grâce au critère (8.1.3 b)), et est laissée au lecteur :

Lemme 8.8.3.4. Soient I une $\mathscr{U}$-catégorie filtrante, et

$$f_j : I \longrightarrow I_j \quad (j \in J)$$

une petite famille de foncteur cofinaux de I dans des catégories filtrantes essentiellement petites. Alors il existe une sous-catégorie pleine I' de I qui est filtrante et essentiellement petite, et telle que les foncteurs induits par les f_j soient cofinaux.

Prouvons enfin la nécessité dans 8.8.3 lorsqu'on suppose J équivalente à une catégorie finie. Une représentation indicielle de φ à l'aide d'une catégorie d'indices filtrante essentiellement petite I définit un foncteur ψ

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_j"'] & \mathscr{H}om(J, C)_{/\varphi} \arrow[d, dashed] \\ & C_{/\varphi(j)} \end{tikzcd}, \tag{8.8.3.5}$$

et il suffit de prouver que ψ et chacun des foncteurs ψ_j qui s'en déduit sont cofinaux : en vertu de 8.1.3 b) il s'ensuivra bien que $\mathscr{H}om(J, C)_{/\varphi}$ est filtrante, et par définition 8.1.1 que la flèche verticale de (8.8.3.5) est également cofinale. En vertu de 8.8.2 on peut identifier φ à un objet de $\mathrm{Ind}(E)$, où $E = \mathscr{H}om(J, C)$, et le fait que le foncteur

$$\psi : I \longrightarrow E_{/\varphi},$$

104 déduit de ind-objet φ de E indexé par I, est cofinal est un fait général, qui se vérifie immédiatement à l'aide des critères (F 1) et (F 2) de 8.1.3. La même raison (où E, φ sont remplacés par C, $\varphi(j)$) montre que ψ_j est cofinal, ce qui achève la démonstration.

Remarque 8.8.4. a) Dans le cas où J est équivalente à une catégorie finie, si φ admet une représentation indicielle, on a vu que (8.8.3.5) est un foncteur cofinal, ce qui implique que la catégorie $\mathscr{H}om(J,C)_{/\varphi}$ est elle-même essentiellement petite.

b) Supposons que dans C les limites inductives finies soient représentables. Alors il en est de même dans $E = \mathscr{H}om(J,C)$, et celles-ci se calculent argument par argument, et ce sont également des limites inductives dans $\mathscr{H}om(J,\widehat{C})$ et a fortiori dans $\mathscr{H}om(J,\mathrm{Ind}(C))$. Il s'ensuit aussitôt que la condition a) de 8.8.3 est alors automatiquement satisfaite, et tout revient à regarder la condition b). J'ignore si elle est automatiquement satisfaite lorsque de plus J est supposée petite.

Nous en arrivons au résultat principal du présent numéro :

Proposition 8.8.5. Soit J une catégorie équivalente à une catégorie finie, et supposons de plus J rigide i.e. que pour tout $j \in \mathrm{Ob}\,J$, tout endomorphisme de j soit l'identité. Alors J est admissible pour C (quelle que soit la $\mathscr{U}$-catégorie C), i.e. tout foncteur $J \to \mathrm{Ind}(C)$ admet une représentation indicielle.

Quitte à remplacer J par une catégorie équivalente, nous pouvons supposer que J **105**
est réduite i.e. que deux objets isomorphes de J sont identiques. Alors J est même finie. Nous procédons par récurrence sur $\mathrm{card}\,\mathrm{Ob}\,J$, le cas où ce nombre est ≤ 0 étant trivial ; nous le supposerons donc ≥ 1. Soit $j_\circ$ un objet maximal de J, i.e. tel que pour toute flèche $j_\circ \to j$, il existe une flèche $j \to j_\circ$; compte tenu du fait que J est rigide, cela implique que $j_\circ \to j$ est un isomorphisme, et comme J est réduite, cela implique $j_\circ = j$. Soit donc J' la sous-catégorie pleine déduite de J en lui enlevant l'objet $j_\circ$, et J'' la sous-catégorie pleine réduite à l'objet $j_\circ$. La proposition résulte alors du

Lemme 8.8.5.1. Soient J une catégorie finie, J' et J'' deux sous-catégories pleine telles que $\mathrm{Ob}\,J = \mathrm{Ob}\,J' \cup \mathrm{Ob}\,J''$, et que pour tout $j' \in \mathrm{Ob}\,J'$ et $J'' \in \mathrm{Ob}\,J''$, on ait $\mathrm{Hom}(j'', j') = \varnothing$. Si J' et J'' sont admissibles pour C, il en est de même de J.

Tout revient à prouver les critères a) et b) de 8.8.3, ce qui revient à faire six vérifications élémentaires, savoir les deux dernières conditions des catégories filtrantes pour $\mathscr{H}om(J,C)_{/\varphi}$, et les conditions F 1) et F 2) pour les foncteurs (8.8.3.1), dans le cas $j \in \mathrm{Ob}\,J'$ et $j \in \mathrm{Ob}\,J''$ successivement ; ces dernières conditions impliquant d'ailleurs que $\mathscr{H}om(J,C)_{/\varphi}$ est non vide. La vérification assez fastidieuse n'offre pas de difficulté, et est laissée au lecteur. (Le rédacteur a vainement cherché une démonstration élégante qui court-circuiterait ces déplaisantes vérifications.)

Exercice 8.8.6. a) Soient J, J' deux catégories admissibles pour C, l'une d'elles **106**
étant finie. Prouver que $J \times J'$ est admissible pour C. (Utiliser 8.8.2.)

b) Prouver qu'une petite catégorie discrète est admissible pour toute catégorie C.

c) Soit J une catégorie satisfaisant les conditions suivantes : (i) J est rigide, (ii) $\mathrm{Ob}\,J$ est dénombrable, (iii) Pour deux objets quelconques j, j' de J, $\mathrm{Hom}(j, j')$ est fini, (iv) Pour tout objet j de J, l'ensemble des objets de J qui sont majorés par j i.e. qui sont source d'une flèche de but j, est fini. Montrer que J est admissible pour toute $\mathscr{U}$-catégorie C. (Montrer d'abord qu'on peut écrire J comme réunion filtrante de sous-catégories pleines finies J_n, telles que tout objet de J majoré par un objet de J_n soit dans J_n. Vérifier ensuite les critères a), b) de 8.8.3.)

Exercice 8.8.7. Nous identifions dans les notations un ensemble ordonné et la catégorie qu'il définit.

a) Soit C un ensemble ordonné. Soit $C^{\sim}$ l'ensemble des parties A de C qui sont filtrantes et telles que $x \in A$ et $y \leq x$ implique $y \in A$. Soit $L_{\circ} : C \to C^{\sim}$ l'application qui associe à tout $x \in C$ l'ensemble $L_{\circ}(x)$ des $y \in A$ tels que $y \leq x$. Montrer que L est une application injective et que l'ordre de C est induit par celui de $C^{\sim}$. Pour tout $A \in C^{\sim}$, considérons l'inclusion $f(A) : A \to C$, c'est un ind-objet de C ; pour tout ind-objet $\varphi : I \to C$ de C, soit $g(\varphi) \in C^{\sim}$ la partie de C formée des éléments de C majorés par un élément de la forme $\varphi(i)$.
107 Montrer qu'on obtient ainsi deux équivalences quasi-inverses l'une de l'autre

$$\mathrm{Ind}(C) \xleftrightarrow[\approx]{f,g} C^{\sim},$$

transformant le foncteur $L_{\circ}$ en le foncteur canonique $L : C \to \mathrm{Ind}(C)$.

b) Supposons que pour tout $x \in C$, l'ensemble des éléments majorant (resp. minorant) x est fini. Montrer que tout ind-objet (resp. pro-objet) de C est essentiellement constant, et même que pour tout tel $\varphi : I \to C$ (resp. $\varphi : I^{\circ} \to C$) il existe un $i_{\circ} \in \mathrm{Ob}\, I$ tel que le foncteur induit sur $I_{/i_{\circ}}$ soit constant (i.e. transforme toute flèche en un isomorphisme).

c) Prenons $C \subset \mathbf{N}^{\circ} \times \mathbf{N}$ formé des couples d'entiers naturels (j, i) tels que $i \geq j$. Montrer que $\mathbf{N}^{\sim}$ est isomorphe à l'ensemble ordonné déduit de $\mathbf{N}$ (identifié à un sous-ensemble ordonné de $\mathbf{N}^{\sim}$ comme dans a)) en lui ajoutant un plus grand élément ∞. Montrer que $C^{\sim}$ est isomorphe à $\mathbf{N}^{\circ} \times \mathbf{N}^{\sim}$. Considérons le foncteur

$$\varphi : \mathbf{N}^{\circ} \longrightarrow C^{\sim} \quad , \quad \varphi(j) = (j, \infty).$$

Montrer que :

1) la limite projective de φ n'est pas représentable dans $C^{\sim}$, bien que les limites projectives filtrantes dans C soient représentables (et soient essentiellement constantes, en vertu de b)).
2) Pour tout foncteur $\psi : \mathbf{N}^{\circ} \to C$, on a $\mathrm{Hom}(\psi, \varphi) = \varnothing$, et a fortiori le foncteur φ n'admet pas de représentation sous forme indicielle.

108 Exercice 8.8.8. Soient $X = \mathbf{N} \amalg \mathbf{N}$ l'ensemble somme de deux copies de $\mathbf{N}$, s la symétrie de X, et pour tout $i \in \mathbf{N}$, soit X_i la partie $\Delta_{i+1} \amalg \Delta_i$ de $\mathbf{N}$ (où Δ_i désigne la partie de $\mathbf{N}$ formée des j tels que $j \leq i$). Soit C la sous-catégorie de la catégorie des sous-ensembles de X, dont les objets sont les X_i, et les flèches les applications entre des X_i qui sont induites par l'identité de X ou par sa symétrie s, et $C^{\sim}$ la catégorie définie de façon analogue, mais où on admet de plus l'objet X.

a) Montrer que $\mathrm{Ind}(C)$ est équivalente à $C^{\sim}$, le foncteur canonique $C \to \mathrm{Ind}(C)$ correspondant à l'inclusion $C \to C^{\sim}$. Montrer qu'il n'existe pas de couple (Y, f) d'un objet Y de C et d'un endomorphisme f de Y, et de morphisme d'objets à endomorphisme de $\mathrm{Ind}(C)$ de (Y, f) dans (X, s).
b) En conclure que si J est la catégorie ayant un seul objet, et en plus de la flèche identique une seule flèche d'ordre 2, alors le foncteur $J \to \mathrm{Ind}(C)$ défini par (X, s) n'admet pas de représentation indicielle.

8.9. Propriétés d'exactitude de $\mathrm{Ind}(C)$.

Proposition 8.9.1. Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie.

a) Les foncteurs canoniques L (8.2.4.8) et c (8.4.1)

$$C \xrightarrow{c} \mathrm{Ind}(C) \xrightarrow{L} \widehat{C}$$

commutent aux limites projectives.

b) Supposons que dans C les limites inductives finies soient représentables, et que C soit équivalente à une petite catégorie. Alors dans $\mathrm{Ind}(C)$ les petites limites projectives sont représentables.

c) Si dans C les petites limites projectives (resp. les limites projectives finies) sont **109**
représentables, alors il en est de même dans $\mathrm{Ind}(C)$. Soit J une catégorie qui est finie et rigide, ou discrète ; si les limites projectives de type J sont représentables dans C, ce même type de limites projectives est représentables dans $\mathrm{Ind}(C)$.

d) Les petites limites inductives filtrantes dans $\mathrm{Ind}(C)$ (elles sont représentables en vertu de 8.5.1) sont exacts à gauche, i.e. commutent aux limites projectives finies.

Démonstration.

a) Le fait que L commute aux limites projectives résulte du fait qu'il est pleinement fidèle et du calcul des limites projectives dans $\widehat{C}$ « argument par argument », qui implique que pour vérifier qu'un système projectif de morphismes $F \to F_i$ $(i \in I)$ dans $\widehat{C}$ fait de F une limite projective des F_i, il suffit de vérifier que l'assertion analogue est vraie pour les systèmes projectifs d'applications ensemblistes $\mathrm{Hom}(X, F) \to \mathrm{Hom}(X, F_i)$, pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$. Or $C \subset \mathrm{Ind}(C)$.

Le fait que c commute aux limites projectives résulte formellement du fait que L y commute, ainsi que le composé $L \circ c : C \to \widehat{C}$.

b) Compte tenu de a), l'assertion revient à dire que toute limite projective de préfaisceaux ind-représentables est ind-représentable, ce qui résulte aussitôt du critère 8.3.3 (v), compte tenu qu'une limite projective de foncteurs exacts à gauche est exact à gauche (ce qui résulte du fait que « les limites projectives commutent aux limites projectives » (2.5.0)).

c) Résulte formellement de la propriété analogue de $\widehat{C}$ (3.3), et du fait que L est **110**
conservatif (étant pleinement fidèle) et commute aux limites du type envisagé (a) et 8.5.1).

d) Il est bien connu (cf. 2.3) que la représentabilité des limites projectives finies équivaut à celle des limites projectives des types

$$\text{vide}\,, \dots, \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

(correspondants à des ensembles ordonnés finis particuliers), et celle des petites limites projectives revient à celle des produits et des limites projectives finies. Donc la deuxième assertion faite dans (c) implique la première.

Supposons d'abord I fini. Utilisant le résultat 8.8.5 sur la représentabilité des foncteurs $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ sous forme indicielle (8.5.4)

(8.9.1.1) $$\phi : J \times I \longrightarrow C,$$

l'existence des $\varprojlim \varphi$ est donc un cas particulier du résultat plus précis et plus général :

Corollaire 8.9.2. Considérons un foncteur $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ donné sous forme indicielle Φ (8.9.1.1), J étant une catégorie finie. Si pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, le foncteur partiel $j \to \Phi(j, i)$ a une limite projective (resp. inductive) représentable dans C, alors φ a une limite projective (resp. inductive) représentable dans $\mathrm{Ind}(C)$, et on a un isomorphisme canonique

(8.9.2.1) $$\varprojlim \varphi \simeq « \varinjlim_i » \varprojlim_j \Phi(j, i)$$

111 (resp.

$$\varinjlim \varphi \simeq \text{«} \varinjlim_i \text{»} \varprojlim_j \Phi(j,i)), \tag{8.9.2.2}$$

où $\varprojlim_j$ (resp. . $\varinjlim_j$) est calculé dans C.

Pour la première formule, on utilise simplement que dans $\mathrm{Ind}(C)$ les limites inductives filtrantes commutent à $\varprojlim_j$, et que c commute à $\varprojlim_J$ (8.9.1 d) et a)) :

$$\varprojlim \varphi = \varprojlim_j \text{«} \varinjlim_i \text{»} \Phi(j,i) \xleftarrow{\sim} \text{«} \varinjlim_i \text{»} \varprojlim_j{}^{\mathrm{Ind}(C)} \Phi(j,i) \simeq \text{«} \varinjlim_i \text{»} \varprojlim_j{}^{C} \Phi(j,i).$$

La seconde se prouve de même, en utilisant la commutation des limites inductives de type I aux limites inductives de type J (2.5.0) et le fait que c commute aux limites inductives de type J, prouvé dans 8.9.4 a) ci-dessous.

Cas J discret. Ce cas est contenu dans l'assertion plus précise suivante :

Corollaire 8.9.3. Soient I_α des catégories filtrantes essentiellement petites indexées par un petit ensemble A, et pour tout $\alpha \in A$, soit $X(\alpha) = (X(\alpha)_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha}$ un ind-objet de C indexé par I_α. Soit I la catégorie produit des I_α, et supposons que pour tout $i = (i_\alpha)_{\alpha \in A} \in I$, le produit $\prod_{\alpha \in A} X(\alpha)_{i_\alpha}$ soit représentable dans C. Alors le produit $\prod_{\alpha \in A} X(\alpha)$ est représentable dans $\mathrm{Ind}(C)$, et il est canoniquement isomorphe à l'ind-objet indexé par I donné par la formule

$$\prod_{\alpha \in A} \text{«} \varinjlim_{i_\alpha \in I_\alpha} \text{»} \; X(\alpha)_{i_\alpha} \simeq \text{«} \varinjlim_{i=(i_\alpha)_{\alpha \in A} \in I} \text{»} \left(\prod_{\alpha \in A} A(\alpha)_{i_\alpha} \right), \tag{8.9.3.1}$$

112 où le produit du deuxième membre est le produit calculé dans C. (On notera que I est filtrant et essentiellement petit, les I_α l'étant.)

En effet, il et bien connu (et immédiat par réduction au cas où on travaille dans la catégorie des ensembles) que la formule envisagée est valable quand on calcule les limites dans $\widehat{C}$. La conclusion résulte alors du fait que L commute aux limites envisagées (8.9.1 a) et 8.5.1).

Remarques 8.9.4. La démonstration donnée de 8.9.2, 8.9.3 montre, plus généralement, que si pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $\varprojlim_j \Phi(j,i)$ (resp. $\varinjlim_j \Phi(j,i)$) calculé dans $\mathrm{Ind}(C)$ est représentable, alors il en est de même de $\varprojlim_i \varphi$ (resp. de $\varinjlim_j \varphi$). Ceci et l'argument de c) montre que pour une catégorie donnée J provenant d'un ensemble ordonné fini ou discret (ou plus généralement, qui est C-admissible (8.3.1)), les limites projectives (resp. inductives) de type J sont représentables dans $\mathrm{Ind}(C)$ si (et seulement si) pour tout foncteur $\varphi : J \to C$, la limite projective (resp. inductive) de φ calculée dans $\mathrm{Ind}(C)$ est représentable. Dans le cas non respé, cela signifie aussi, en vertu de (a), que toute limite projective de type J de préfaisceaux représentables sur C est ind-représentable.

Proposition 8.9.5. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie.

a) Le foncteur canonique

$$c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

est exact à droite (donc exact, compte tenu de 8.9.1 a)).

b) Si les limites inductives finies (resp. les sommes finies) sont représentables dans C, alors les petites limites inductives (resp. les petites sommes) sont représen-
113 tables dans $\mathrm{Ind}(C)$. Soit J un ensemble préordonné fini ou discret ; si les limites inductives de type J sont représentables dans C, il en est de même dans $\mathrm{Ind}(C)$.

Démonstration.

a) Supposons que dans C on ait $X \simeq \varinjlim_J X_j$, où J est une catégorie finie, X et les X_j dans C. On a alors, pour tout ind-objet $\mathscr{Y} = (Y_i)_{i \in I}$ de C :
$$\mathrm{Hom}(X, \mathscr{Y}) \simeq \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X, Y_i) \simeq \varinjlim_i \varprojlim_j \mathrm{Hom}(X_j, Y_i)$$
$$\overset{2.8}{\simeq} \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_j, Y_i) \simeq \varprojlim_j \mathrm{Hom}(X_j, \mathscr{Y}),$$
et la conclusion voulue résulte de la comparaison des termes extrêmes.

b) On a déjà noté dans 8.8.4 que les assertions faites résultent de a) et de 8.9.2, du moins pour les limites inductives finies. Pour prouver les conclusions faites dans les cas infinis, on est ramené au cas des sommes, qui peut s'interpréter comme une limite inductive filtrante de sommes finies, et on conclut donc grâce à 8.5.1.

Remarque 8.9.6. On a déjà observé que la foncteur c ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes, donc pas non plus aux sommes infinies, contrairement à ce qui a lieu pour $L : \mathrm{Ind}(C) \to \widehat{C}$. Par contre, à l'exception de la commutation aux limites inductives filtrantes (8.5.1), L n'a pratiquement jamais de propriétés de commutation à quelque autre type de limites inductives (objet initial, somme de deux objets conoyaux de doubles flèches). Ainsi, si C admet un objet initial $\varnothing_C$, qui est donc objet initial de $\mathrm{Ind}(C)$ en vertu de a), $\varnothing_C$ n'est jamais objet initial de $\widehat{C}$ (i.e. identique au préfaisceau constant de valeur $\varnothing$), puisque $\mathrm{Hom}(\varnothing_C, \varnothing_C) \neq \varnothing$!

Proposition 8.9.7. Soit 114
$$f : C \longrightarrow C'$$
un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories, et soit J une catégorie finie et rigide (8.8.5). Si les limites inductives (resp. projectives) de type J sont représentables dans C et si f y commute, alors $\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \to \mathrm{Ind}(C')$ commute également à ce type de limites.

Cela résulte aussitôt de 8.8.5 et du calcul 8.9.2 des limites finies dans une catégorie de ind-objets, pour un foncteur représenté sous forme indicielle.

Corollaire 8.9.8. Si dans C les limites inductives (resp. projectives) finies sont représentables, et si f est exact à droite (resp. à gauche) alors il en est de même de $\mathrm{Ind}(f)$; dans le cas non respé, $\mathrm{Ind}(f)$ commute même aux petites limites inductives quelconques.

La première assertion résulte de 8.9.7. La deuxième résulte de la première, compte tenu que $\mathrm{Ind}(f)$ commute aux limites inductives filtrantes (8.6.3).

Exercice 8.9.9. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie.

a) Supposons que dans C les sommes finies sont représentables. Montrer que si dans C les sommes finies sont disjointes (resp. universelles) (cf. II 4.5), alors dans $\mathrm{Ind}(C)$ les petites sommes sont disjointes (resp. universelles).

b) Supposons que dans C tout morphisme se factorise en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme (resp. en un épimorphisme effectif suivi d'un monomor- 115
phisme, resp. en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme effectif, resp. un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme effectif). Montrer que $\mathrm{Ind}(C)$

satisfait à la même propriété. Dans le dernier cas respé, on conclut donc que tout épimorphisme de Ind(C) est effectif, tout monomorphisme de Ind(C) est effectif, tout bimorphisme de Ind(C) est un isomorphisme ; montrer que dans ce cas tout épimorphisme (resp. monomorphisme) de Ind(C) peut se représenter par un système inductif d'épimorphismes (resp. de monomorphismes) de C. Si on suppose de plus que dans C tout épimorphisme (resp. tout monomorphisme) est universel, la même propriété est vraie dans Ind(C).

c) Supposons C additive (resp. abélienne), alors Ind(C) l'est également.

d) Soient $X =$ « $\varinjlim_I$ » X_i un ind-objet de C, $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans X. Pour tout $i \in \operatorname{Ob} I$, soit $R_i \rightrightarrows X_i$ la relation d'équivalence dans X_i (considéré comme objet de Ind(C)) induite par R via $X_i \to X$. (On suppose que le produit fibré $R_i = R \times_{X_X X} X_i \times X_i$ dans (Ind(C)) est représentable par un objet de Ind(C), ce qui est le cas si dans C les limites projectives finies sont représentables.) Montrer que pour que R soit effective, il suffit que les R_i le soient.

e) Soient X un objet de C, R une relation d'équivalence dans $c(X)$ i.e. dans X considéré comme objet de Ind(C). Supposons que dans C les produits fibrés soient représentables. Pour que R soit effective, il faut que R soit de la forme « $\varinjlim_i$ » R_i, où les R_i sont des relations d'équivalence dans X (regardé comme
116 un objet de C), et cette condition est suffisante si on suppose que dans C les relations d'équivalence sont effectives.

f) Supposons que dans C tout morphisme se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme effectif, et que les limites projectives finies soient représentables. Soit X un objet de C, et R un sous-objet de $X \times X$, regardé comme élément de Ind(C). Écrivons R sous la forme « $\varinjlim$ ” Z_i, où $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante de sous-objets de $X \times X$ dans C (c'est possible grâce a b)). Montrer que pour que R soit une relation d'équivalence dans X, il faut et il suffit que pour tout $i \in \operatorname{Ob} I$, existe un $j \in \operatorname{Ob} I$ qui contienne $s(Z_i)$ et $Z_i \circ Z_i$, où s est la symétrie de $X \times X$.

g) Supposons que dans C les limites projectives finies ainsi que les sommes finies soient représentables, que toute relation d'équivalence y soit effective, et tout morphisme s'y factorise en épimorphisme effectif suivi par un monomorphisme effectif. Montrer que dans Ind(C) les relations d'équivalence sont universelles si et seulement si C satisfait à la condition suivante :

ST) Pour tout objet X de C et tout sous-objet Z de $X \times X$ dans C, si on définit par récurrence la suite de sous-objets Z_n $(n \geq 0)$ de $X \times X$ dans C par $Z_\circ = Z$, $Z_n = \operatorname{Sup}(Z_n, s(Z_n), Z_n \circ Z_n)$ (le Sup pris dans l'ensemble des sous-objets de $X \times X$, qui existe grâce aux hypothèses faites sur C), alors la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est stationnaire.

k) Montrer que dans Ind((Ens)), les relations d'équivalence ne sont pas nécessairement effectives.

* NB. Pour des critères pour que Ind(C) soit un topos, cf. VI 8.9.9.$_*$

117 Exercice 8.9.10. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. Posons $\operatorname{Pro}(C) = (\operatorname{Ind}(C^\circ))^\circ$ (cf. 8.11).

a) Supposons que dans C les sommes finies (resp. les petites sommes) sont représentables. Montrer que si elles sont disjointes (cf. II 4.5), alors Pro(C) satisfait la même condition.

b) Soit J un petit ensemble, tel que les sommes indexées par J soient représentables dans C, donc aussi dans Pro(C). Soit $(X(\alpha))_{\alpha \in J}$ une famille d'éléments de

$\mathrm{Pro}(C)$, avec $X(\alpha) =$ « $\varprojlim_{I_\alpha}$ » X_{i_α}. Montrer que pour que la somme des $X(\alpha)$ dans $\mathrm{Ind}(C)$ soit universelle, il suffit qu'il en soit de même pour chacune des familles $\varprojlim_J X_{i_\alpha}$, où $(i_\alpha)_{a\in I} \in \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$. En conclure que si dans C les sommes de type J sont universelles, pour qu'il en soit de même dans $\mathrm{Pro}(C)$, il faut et il suffit que pour toute famille $(X(\alpha))_{\alpha\in J}$ comme dessus, avec $I_\alpha = I$ pour tout $\alpha \in J$, l'homomorphisme canonique dans $\mathrm{Pro}(C)$

$$\text{« }\varprojlim_{I}\text{ » } \coprod_\alpha X(\alpha)_i \longleftarrow \text{« }\varprojlim_{I^J}\text{ » } \coprod_{\alpha\in J} X(\alpha)_{i_\alpha}$$

soit un isomorphisme. En conclure que dans $\mathrm{Pro}((\mathrm{Ens}))$ les sommes de type J sont universelles si et seulement si J est fini.

Exercice 8.9.11. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie.

a) Soit $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille de morphismes dans C. Montrer que pour qu'elle soit épimorphique dans $\mathrm{Ind}(C)$, il suffit qu'il existe une sous-famille finie qui soit épimorphique dans C. Prouver que cette condition est également nécessaire lorsqu'on suppose que dans C toute famille finie de morphismes de but X_i se factorise en une famille épimorphique, suivie d'un monomorphisme effectif (10.5). 118
(Pour cette dernière assertion, soit P l'ensemble des parties finies de I, ordonné par inclusion, et soit $X' = (X'_J)_{J\in P}$ le ind-objet formé des images des sous-familles finies de la famille donnée, enfin soit $X'' = X \amalg_{X'} X =$ « $\lim$ » $X \amalg_{X'_J} X$. Montrer que les deux morphismes canoniques $X \rightrightarrows X''$ sont distincts, mais coïncident sur les X'_J.)
b) Supposons que dans C toute famille finie de morphismes de même but se factorise en une famille épimorphique, suivie d'un monomorphisme effectif. Prouver que $\mathrm{Ind}(C)$ admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes (7.1) si et seulement si C admet une petite sous-catégorie C' telle que tout objet de C soit but d'une famille épimorphique finie de source dans C'. Lorsqu'on suppose que C admet une petite sous-catégorie génératrice (7.1), alors $\mathrm{Ind}(C)$ admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes si et seulement si C est équivalente à une petite catégorie. (Pour ce dernier énoncé, utiliser 7.5.2).
c) $\mathrm{Ind}((\mathrm{Ens}))$ n'admet pas de petite sous-catégorie génératrice.

Exercice 8.9.12. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie, et considérons $\mathrm{Pro}(C) = \mathrm{Ind}(C^\circ)^\circ$.

a) Montrer que si $\mathrm{Pro}(C)$ admet une petite sous-catégorie P' génératrice par épimorphismes (7.1), alors il existe une petite sous-catégorie C' de C qui est génératrice par épimorphismes dans $\mathrm{Pro}(C)$. (Prendre la catégorie des composants des objets de P'.)
b) Montrer que la catégorie $\mathrm{Pro}((\mathrm{Ens}))$ n'a pas de petite sous-catégorie génératrice 119
par épimorphismes. (Si C' est comme dans a), choisir un ensemble X dont le cardinal majore strictement les cardinaux des éléments de C', et considérer le pro-ensemble $\mathscr{X}$ formé par les complémentaires dans X des parties de cardinal $< \mathrm{card}(X)$. Montrer que pour tout ensemble Y non vide de cardinal $< \mathrm{card}(X)$, on a $\mathrm{Hom}(Y, \mathscr{X}) = \varnothing$, mais que $\mathscr{X}$ n'est pas isomorphe au pro-ensemble constant $\varnothing$.)

8.10. Notions duales : pro-objets, foncteurs pro-représentables. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. On appelle pro-objet de C tout foncteur

$$\varphi : I^\circ \longrightarrow C, \tag{8.10.1}$$

où I est une catégorie filtrante essentiellement petite (appelée la catégorie d'indices), et comme d'habitude I° désigne la catégorie opposée. Soit $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$. On fera attention que les pro-objets de C indexés par des $I \in \mathscr{V}$ sont en correspondance biunivoque avec les ind-objets de C° indexés par des $I \in \mathscr{V}$, en associant à tout tel ind-objet $\psi : I \to C^\circ$ le pro-objet $\varphi = \psi^\circ : I^\circ \to C$. S'inspirant de cette correspondance, on définit « par transport de structure et renversement des flèches » la notion de morphisme entre pro-objets de C à partir de la notion analogue (8.2.4.2). (8.2.5.1) pour les in-objets, et on définit en conséquence la catégorie des pro-objets de C indexés par des $I \in \mathscr{V}$, et un isomorphisme canonique :

(8.10.2) $$\mathrm{Pro}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C^\circ, \mathscr{U})^\circ;$$

120 pour $\mathscr{V} = \mathscr{U}$ on parle simplement de la catégorie des pro-objets de C, notée $\mathrm{Pro}_{\mathscr{U}}(C)$ ou simplement $\mathrm{Pro}(C)$, qui est donc définie par

(8.10.3) $$\mathrm{Pro}(C) = \mathrm{Pro}_{\mathscr{U}}(C, \mathscr{U}) \simeq \mathrm{Ind}(C^\circ)^\circ.$$

Si deux pro-objets sont donnés sous forme indicielle

(8.10.4) $$\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I} \quad , \quad \mathscr{Y} = (Y_j)_{j\in J},$$

la formule (8.2.5.1) prend ici la forme

(8.10.5) $$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \simeq \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i, Y_j).$$

Le foncteur (8.4.1) appliquée à C° donne, par passage aux catégories opposées, un foncteur canonique (dénoté par la même lettre c s'il n'y a pas risque de confusion), permettant d'identifier C à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}(C)$:

(8.10.6) $$c : C \longrightarrow \mathrm{Pro}(C);$$

c'est pour avoir un tel foncteur, et non $C \to \mathrm{Pro}(C)^\circ$, qu'on a « renversé les flèches » dans la définition des morphismes de pro-objets à partir de la définition analogue pour les ind-objets. Les pro-objets dans l'image essentielle de (8.10.6) s'appellent encore pro-objets essentiellement constants.

Posons

(8.10.7) $$\check{C} = (C^\circ)\hat{} = \mathscr{H}om(C, (\mathrm{Ens})),$$

alors le foncteur (8.2.4.7) peut être considéré comme un foncteur canonique pleinement fidèle

(8.10.8) $$L : \mathrm{Pro}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \longrightarrow \check{C}^\circ,$$

121 et on trouve en particulier

(8.10.9) $$L : \mathrm{Pro}(C) \hookrightarrow \check{C}^\circ.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de traduire, au fur et mesure des besoins, les résultats des sections précédentes et de celles qui suivent du langage des ind-objets dans celui des pro-objets. Suivant le contexte mathématique, c'est l'un ou l'autre langage qui est le plus utile, sans compter les cas où les deux notions s'introduisent simultanément, par exemple lorsqu'il y a lieu de considérer des catégories complexes comme $\mathrm{Pro}(\mathrm{Ind}(C))$ ou $\mathrm{Ind}(\mathrm{Pro}(C))$. Nous nous contentons de donner quelques indications supplémentaires, pour fixer la terminologie et les notations, et préciser le « yoga ».

8.10.10. Un foncteur covariant $F : C \to (\mathrm{Ens})$ est dit foncteur pro-représentable s'il est dans l'image essentielle de (8.10.9) (ou 8.10.8, cela revient au même); la sous-catégorie pleine de $\check{C}$ formée de ces foncteurs est donc équivalente à $\mathrm{Pro}(C)^{\circ}$. On préférera généralement travailler dans la catégorie opposée, image essentielle en tant que sous-catégorie de (8.10.9), qui est donc équivalente à $\mathrm{Pro}(C)$ lui-même. En accord avec cet usage, il est souvent préférable de regarder les foncteurs covariants

$$F : C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

comme des objets de $\mathscr{H}\!om(C, (\mathrm{Ens}))^{\circ} = \check{C}^{\circ}$, et d'écrire en conséquence la catégorie des homomorphismes

$$X \longrightarrow F \text{ dans } \check{C}^{\circ},$$

i.e. des couples (X, u) d'un objet X de C et d'un $u \in F(X)$, comme 122

$$ {}_{F}\backslash C . \tag{8.10.11}$$

Avec cette convention, on trouvera donc un foncteur covariant (foncteur source)

$$ {}_{F}\backslash C \to C, \tag{8.10.12}$$

et 3.4 se récrit sous la forme

$$F \xrightarrow{\sim} « \varprojlim_{({}_{F}\backslash C)^{\circ}} » X \tag{8.10.13}$$

8.10.14. Le critère 8.3.3 appliqué à C° devient un critère de proreprésentabilité pour F : il faut et il suffit que $({}_{F}\backslash C)^{\circ}$ soit filtrante et essentiellement petite, cette dernière condition étant superflue si C est équivalente à une petite catégorie; si de plus dans C les limites projectives finies sont représentables, il revient au même de dire que F y commute i.e. est exact à gauche.

8.10.15. Dans $\mathrm{Pro}(C)$ les petites limites projectives filtrantes sont représentables et le foncteur (8.10.9) y commute; en d'autres termes, ce foncteur transforme limites projectives en $\mathrm{Pro}(C)$ en limites inductives de $\check{C} = \mathscr{H}\!om(C, (\mathrm{Ens}))$, tout comme son composé $C \to \check{C}^{\circ}$ avec (8.10.6), qui partage avec lui la fâcheuse propriété d'être contravariant quand on la considère à valeurs dans $\check{C}$. On fera attention que les foncteurs pro-représentables de C dans (Ens) sont les foncteurs qui sont des petites limites in- 123
ductives filtrantes de foncteurs représentables (et non des limites projectives, comme la terminologie pourrait éventuellement le suggérer).

8.11. Ind-adjoints et pro-adjoints.

8.11.1. Soit

$$f : C \longrightarrow C' \tag{8.11.1.1}$$

un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories, d'où un foncteur $F \mapsto F \circ f$

$$f^{*} : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C}. \tag{8.11.1.2}$$

On dit que f admet un ind-adjoint si le foncteur précédent transforme foncteurs ind-représentables en foncteurs ind-représentables. Comme f^{*} commute aux limites inductives, et que la sous-catégorie pleine de C' formée des foncteurs ind-représentables est stable par petites limites inductives filtrantes, il revient au même de dire que f admet un ind-adjoint, ou que f^{*} applique objets de C (identifié à une sous-catégorie pleine de $\widehat{C}$) dans des foncteurs ind-représentables sur C, i.e.

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}(f(X), Y') \text{ est ind-représentable pour tout } Y' \in \mathrm{Ob}\, C'. \tag{8.11.1.3}$$

Une autre façon d'exprimer la condition que f admette un ind-adjoint est de dire qu'il existe un foncteur

(8.11.1.4) $$g : \mathrm{Ind}(C') \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

qui soit essentiellement induit par f^*, i.e. tel qu'on ait un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.1.5) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(X, g(\mathscr{Y}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C')}(f(X), \mathscr{Y}'),$$

124 où $X \in \mathrm{Ob}\, C$ et $Y' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ind}(C')$. En fait, il suffit même d'avoir un foncteur

(8.11.1.6) $$g_\circ : C' \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

et un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.1.7) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(X, g_\circ(Y')) \simeq \mathrm{Hom}_{C'}(f(X), Y')$$

en $X \in \mathrm{Ob}\, C$, $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$. Le foncteur g (resp. $g_\circ$) est évidemment déterminé à isomorphisme unique près par f, et inversement on reconstitue f à isomorphisme canonique près par la connaissance de ce g (resp. $g_\circ$). Il est clair sur (8.11.1.5) que le foncteur g commute aux limites inductives, et qu'il « prolonge » le foncteur $g_\circ$; cela le détermine donc à isomorphisme unique près en termes de $g_\circ$ (8.7.2). Le foncteur g, et parfois aussi le foncteur $g_\circ$ qu'il prolonge, est appelé le foncteur ind-adjoint de f (inutile ici de préciser : à droite, car l'autre, s'il existe, s'appellera le pro-adjoint, cf. 8.11.5 plus bas).

Bien entendu, lorsque f admet un adjoint à droite

$$f^{\mathrm{ad}} : C' \longrightarrow C,$$

il admet un ind-adjoint g, et celui-ci est isomorphe canoniquement au prolongement canonique de f aux ind-objets :

(8.11.1.8) $$g \simeq \mathrm{Ind}(f^{\mathrm{ad}}).$$

La notion de ind-adjoint est donc une généralisation naturelle de la notion d'adjoint à droite.

125 Considérons maintenant le prolongement canonique

(8.11.1.9) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C').$$

On a alors :

Proposition 8.11.2. Pour que le foncteur $f : C \to C'$ admette un ind-adjoint, il faut et il suffit que le foncteur $\mathrm{Ind}(f)$ (8.11.1.9) admette un adjoint à droite. Ce dernier est canoniquement isomorphe au ind-adjoint (8.11.1.4).

Le suffisance et la dernière assertion sont triviales sur la formule de ind-adjonction (8.11.1.5). Pour la nécessité, on note que par passage à la limite projective sur cette formule sur des X_i, on déduit un isomorphisme d'adjonction en les pro-objets $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{Y}'$:

(8.11.2.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(\mathscr{X}, g(\mathscr{Y}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C')}(\mathrm{Ind}(f)(\mathscr{X}), \mathscr{Y}'),$$

C.Q.F.D.

Corollaire 8.11.3. Si f admet un ind-adjoint, alors $\mathrm{Ind}(f)$ commute aux limites inductives, et le ind-adjoint g commute aux limites projectives.

Proposition 8.11.4. Pour que le foncteur $f : C \to C'$ admette un ind-adjoint, il faut que f soit exact à droite, et cette condition est suffisante lorsque C est équivalente à une petite catégorie.

Cela résulte du critère (8.11.1.3), et de 8.3.1 et 8.3.3 (iv).

Pour un autre critère en termes de la notion de foncteur accessible, cf. 8.13.3.

8.11.5. Considérons maintenant le foncteur $F \mapsto F \circ f$ **126**

$$f^{\circ *} : \check{C}' \longrightarrow \check{C} \tag{8.11.5.1}$$

induit par f. On dira que f admet un pro-adjoint si le foncteur précédent applique foncteur pro-représentable en foncteur pro-représentable, i.e. s'il existe un foncteur (appelé foncteur pro-adjoint de f)

$$g : \mathrm{Pro}(C') \longrightarrow \mathrm{Pro}(C), \tag{8.11.5.2}$$

et un isomorphisme de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C)}(g(\mathscr{Y}'), \mathscr{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C')}(\mathscr{Y}', f(\mathscr{X})). \tag{8.11.5.3}$$

Bien entendu, dire que f admet un pro-adjoint signifie que f° admet un ind-adjoint, de sorte que les notions et résultats pour les ind-adjoints se traduisent trivialement en termes de pro-adjoints. Signalons seulement que f admet un pro-adjoint si et seulement si $\mathrm{Pro}(f) : \mathrm{Pro}(C) \to \mathrm{Pro}(C')$ admet un adjoint à gauche, et que dans ce cas le foncteur g précédent est un tel adjoint à gauche de $\mathrm{Pro}(f)$; et qu'il faut pour ceci que f soit exact à gauche, cette condition étant également suffisante lorsque C est équivalente à une petite catégorie. Dans ce cas, f est donc exact si et seulement si il admet à la fois un ind-adjoint et un pro-adjoint.

Exemple 8.11.6. Considérons le cas d'un foncteur

$$f : C \longrightarrow (\mathrm{Ens}).$$

Si ce foncteur admet un pro-adjoint, il est pro-représentable, et la réciproque est vraie si et seulement si la sous-catégorie pleine de $\check{C}$ formée des foncteurs pro-représentables est stable par petits produits ; c'est le cas en particulier si C est équivalente à une petite **127**
catégorie (8.10.14) ou si dans C les petits produits sont représentables (8.9.5 b) appliquée à C°). À peu de choses près, on peut donc dire que pour un foncteur $f : C \to C'$, la notion d'existence d'un pro-adjoint est la généralisation naturelle de la notion de pro-représentabilité de f, qui est définie lorsque $C' = (\mathrm{Ens})$.

8.12. Ind-objets et pro-objets stricts. Application à un critère de représentabilité.

8.12.1. Soit

$$\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}$$

un ind-objet de la $\mathscr{U}$-catégorie C, et soit F le préfaisceau qu'il ind-représente. On voit alors aussitôt qu'il revient au même de dire que les morphismes canoniques

$$X_i \longrightarrow F = « \varinjlim_i » X_i$$

sont des monomorphismes de $\mathrm{Ind}(C)$ (ou, ce qui revient au même, de $\widehat{C}$, i.e. des monomorphismes de foncteurs « argument par argument »), ou de dire que pour toute flèche $i \to j$ de I, la flèche de transition correspondante

$$X_i \longrightarrow X_j$$

est un monomorphisme. Lorsque ces conditions sont remplies, et si de plus I est une catégorie ordonnée, on dit que $\mathscr{X}$ est un ind-objet strict. On notera que cette condition n'est **128**
pas invariante par isomorphisme de ind-objets ; un ind-objet sera appelé essentiellement strict s'il est isomorphe à un ind-objet strict. Un préfaisceau sera appelé strictement ind-représentable s'il est ind-représentable par un ind-objet strict ; donc $F = « \varinjlim_i » X_i$ est strictement ind-représentable si et seulement si $\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}$ est essentiellement strict.

. Soit F un préfaisceau sur C, et considérons la sous-catégorie pleine de $C_{/F}$ formée des flèches $X \to F$ de source dans C qui sont des monomorphismes. On l'appellera la catégorie des sous-foncteurs représentables de F ; c'est la catégorie associée à l'ensemble ordonné des sous-foncteurs représentables de F, ordonné par l'ordre induit de celui de l'ensemble des sous-objets de F. Il résulte alors aussitôt des définitions :

Proposition 8.12.2. Pour que le préfaisceau F sur C soit strictement ind-représentable, il faut et il suffit que la catégorie (ordonnée) I des sous-foncteurs représentables de F soit filtrante et essentiellement petite et que l'on ait

$$\varinjlim_{I} X_i \xrightarrow{\sim} F. \tag{8.12.2.1}$$

Lorsque pour tout objet X de C, l'ensemble des sous-objets de X dans C est petit (par exemple si C admet une petite sous-catégorie génératrice (7.4)), cela implique que la catégorie des sous-foncteurs représentables est même petite.

129 . Si F est strictement ind-représentable, il y a donc une façon privilégiée de le ind-représenter par un ind-objet, et ce dernier est même un ind-objet strict : on prend la représentation (8.12.2.1). Un ind-objet strict $\mathscr{Y}$ est dit saturé s'il est isomorphe à un ind-objet de la forme (X_i) figurant dans (8.12.2.1), pour F convenable ; donc il existe à isomorphisme unique près, un seul ind-objet strict saturé isomorphe au ind-objet strict donné, savoir celui envisagé dans 8.12.2, en prenant $F = \varinjlim \mathscr{Y}$ (limite dans $\widehat{C}$).

. Supposons qu'on sache déjà que l'on puisse trouver une petite partie cofinale dans l'ensemble $\operatorname{Ob} C_{/F}$, ce qui est le cas en particulier si F est ind-représentable ; alors il s'ensuit que la même condition est vérifiée dans la sous-catégorie pleine I envisagée dans 8.12.2, donc on peut dans le critère 8.12.2 omettre la condition que I soit essentiellement petite.

8.12.3. Soit F un préfaisceau sur C, et considérons un objet

$$u : X \longrightarrow F$$

de $C_{/F}$. On dit que u (ou le couple (X, u)) est minimal si pour toute factorisation de u en

$$X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{u'} F, \tag{8.12.3.1}$$

avec p un épimorphisme strict (10.2), p est un isomorphisme. Considérant u comme un
130 objet de $F(X)$ (1.4), dire que u est minimal signifie donc que tout épimorphisme strict $p : X \to X'$ tel que $u \in \operatorname{Im}(F(p) : F(X') \to F(X))$ est un isomorphisme. Cette notion s'éclaire par la partie a) du lemme suivant :

Lemme 8.12.4. Soit F un préfaisceau sur C.

a) Supposons que F transforme conoyaux en noyaux et considérons un morphisme

$$u : X \longrightarrow F,$$

avec $X \in \operatorname{Ob} C$. Pour que u soit un monomorphisme, il suffit, lorsque dans C les conoyaux de doubles flèches sont représentables, que u soit minimal ; cette condition est également nécessaire si dans C les produits fibrés sont représentables.

b) Supposons que dans C les $\varinjlim$ finies soient représentables. Pour que la sous-catégorie des sous-foncteurs représentables de F (8.12.1.1) soit filtrante (pas nécessairement petite) et ait pour limite inductive F, il suffit que F soit exact à gauche et que tout morphisme $u : X \to F$, avec $X \in \operatorname{Ob} C$, se factorise en

$$X \to X' \xrightarrow{u'} F,$$

avec u' minimal ; cette condition est également nécessaire si dans C les produits fibrés sont représentables.

c) Supposons que C admette une petite sous-catégorie génératrice (7.1), et que I la catégorie des sous-foncteurs représentables de F soit filtrante, alors I est petite.

Démonstration. 131

a) Supposons u minimal, prouvons que u est un monomorphisme, i.e. que pour toute double-flèche $v, v' : Y \rightrightarrows X$ telle que $uv = uv'$, on a $v = v'$. En effet, si $X' = \operatorname{Coker}(v, v')$, alors u se factorise en $X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{u'} F$ (F transformant conoyaux en noyaux), et comme p est un épimorphisme strict par construction, il s'ensuit que p est un isomorphisme i.e. $v = v'$. Supposons que u est un monomorphisme, prouvons qu'il est minimal. Considérons une factorisation (8.12.3.1) ; comme p est un épimorphisme strict, c'est le conoyaux de la double flèche canonique $v, v' : X \times_{X'} X \rightrightarrows X$, et comme $(u'p)v = (u'p)v'$ et que $u'p = u$ est un monomorphisme, on a $v = v'$ donc p est un isomorphisme.

b) Suffisance : Comme F est exact à gauche, $C_{/F}$ est filtrante. Comme on sait que $F = \varinjlim_{C_{/F}} X$, on est ramené par 8.1.3 c) à prouver que la sous-catégorie pleine I de $C_{/F}$ des sous-objets de F est cofinale dans $C_{/F}$; or en vertu du « il suffit » dans a), c'est ce qu'assure l'hypothèse que tout objet de $C_{/F}$ est majoré par un objet « minimal ». Nécessité : Comme toute limite inductive filtrante de foncteurs exacts à droite est itou, la première condition est trivialement nécessaire. La deuxième résulte alors du « il faut » dans a).

c) Un sous-foncteur représentable $X \hookrightarrow F$ de F est connu quand on connaît la sous-catégorie pleine $C'_{/X}$ de $C'_{/F}$, où C est une petite sous-catégorie génératrice fixée de C. (Utiliser l'hypothèse I filtrante.) Comme $C'_{/F}$ est petite, l'ensemble de ses sous-catégories pleine est petit, d'où le conclusion.

Proposition 8.12.5. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie où les limites inductives finies sont re- 132
présentables, et admettant une petite sous-catégorie génératrice (7.1). Soit F un préfaisceau sur C. Pour que F soit strictement ind-représentable, il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes, et celles-ci sont également nécessaires si dans C les produits fibrés sont représentables :

a) F est exact à gauche.

b) Tout couple (X, u), avec $X \in \operatorname{Ob} C$ et $u \in F(X)$, est majoré dans $C_{/F}$ par un couple minimal (8.12.3), i.e. il existe un couple minimal (X', u') ($X' \in \operatorname{Ob} C, u' \in F(X)$) et un morphisme $f : X \to X'$ tel que $u = F(f)(u')$.

La suffisance résulte de 8.12.2 et de 8.12.4 b), c), la nécessité de 8.3.1 et de 8.12.4 a).

Remarque 8.12.6. Lorsque F transforme sommes amalgamées de C en produits fibrés, on voit aussitôt que pour un couple (X, u) donné comme dans b), l'ensemble des quotients stricts X' de X tels que $u \in \operatorname{Im}(F(X') \to F(X))$ est filtrant décroissant, ce qui implique que si l'ensemble des quotients stricts de X est artinien, alors la condition b) de 8.12.5 est automatiquement satisfaite. Si donc la condition précédente sur X est satisfaite pour tout objet X de C (on dit aussi alors, parfois, que les objets de C° sont artiniens), alors il résulte de 8.12.5 que F est strictement ind-représentable si et seulement si F est exact à gauche ; dans ce cas, F est donc strictement ind-représentable dès qu'il est ind-représentable (8.3.1).

Corollaire 8.12.7. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie où les petites limites projectives sont 133
représentables, et admettant une petite sous-catégorie cogénératrice (7.9, 7.13). Alors un

foncteur $F : C \to (\mathrm{Ens})$ est représentable si et seulement si F commute aux petites limites projectives.

La nécessité est claire. Pour la suffisance, on applique 8.12.5 à la catégorie opposée C°. Pour prouver d'abord que F est (strictement) pro-représentable, on est ramené à prouver que tout couple (X, u), $X \in \mathrm{Ob}\, C$ et $u \in F(X)$, est majoré par un couple « minimal ». Or la famille $(X_i)_{i\in I}$ des sous-objets stricts de X tels que $u \in \mathrm{Im}(F(X_i) \to F(X))$ est petite (7.5 sous forme duale). Grâce au fait que F est exact à gauche, elle est co-filtrante (8.12.6), et grâce au fait que F commute aux petites limites projectives on voit que $X' = \varprojlim_i X_i$ est un plus petit objet de cette famille. (Utiliser le fait que, F étant exact à gauche, transforme monomorphismes en monomorphismes.) Si $u' \in F(X')$ est l'unique élément dont l'image dans $F(X)$ est u, on voit alors que (X', u') est un couple minimal majorant (X, u). Cela prouve que F est pro-représentable, et la conclusion résulte alors du

Lemme 8.12.8.1. *Soit $F : C \to (\mathrm{Ens})$ un foncteur, où C est une $\mathcal{U}$-catégorie où les petites limites projectives sont représentables. Pour que F soit représentable, il faut et il suffit qu'il soit pro-représentable et qu'il commute aux petites limites projectives.*

134 La nécessité est claire, prouvons la suffisance. Dire que F est représentable signifie évidemment que ${}_F\backslash C$ admet un élément initial (en fait, les objets initiaux de ${}_F\backslash C$ sont précisément les isomorphismes $F \to X$, i.e. les données de représentation pour F). Or F étant proreprésentable, $({}_F\backslash C^\circ)$ est filtrante et équivalente à une petite catégorie, donc $X = \varprojlim_{({}_F\backslash C)^\circ} X$ est représentable dans C, et comme F commute à la limite envisagée, il s'ensuit que X est un objet initial de ${}_F\backslash C$, C.Q.F.D.

Corollaire 8.12.8. *Les hypothèses sur C étant celles de 8.12.7, soit $f : C \to C'$ un foncteur de C dans une $\mathcal{U}$-catégorie C'. Pour que f admette un adjoint à gauche, il faut et il suffit que f commute aux petites limites projectives.*

Cela se ramène en effet trivialement à 8.12.7, en appliquant cet énoncé aux foncteurs composés de la forme $X \mapsto \mathrm{Hom}(Y', f(X))$.

Exemples 8.12.9. Comme on a signalé dans 7.13, les hypothèses sur E de 8.12.7 et 8.12.8 sont vérifiées si C est la catégorie des $\mathcal{U}$-faisceaux d'ensembles sur un espace topologique $X \in \mathcal{U}$ (ou plus généralement, sur un $\mathcal{U}$-site (II (3.0.2)). Donnons un exemple instructif[3] qui montre que l'hypothèse d'existence d'une petite sous-catégorie cogénératrice D de C n'est pas surabondante dans 8.12.7. Prenons pour C la catégorie des groupes éléments de $\mathcal{U}$. Soit J l'ensemble des classes d'isomorphie de groupes simples $\in C$, choisissons pour tout $j \in J$ un groupe simple G_j dans la classe de j, et soit I l'ensemble ordonné filtrant des parties $\mathcal{U}$-petites de J, et pour $i \in I$, soit $X_i = \amalg_{j\in i} G_j$. Les X_i
135 forment alors un système projectif $(X_i)_{i\in I}$ dans E, à morphismes de transition des épimorphismes, et le foncteur correspondant

$$F(X) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i, X) \qquad (*)$$

prend ses valeurs dans $(\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ (bien que l'ensemble d'indices I n'ait évidemment pas un cardinal $\in \mathcal{U}$) ; plus précisément, montrons que pour toute petite sous-catégorie pleine $C_\circ$ de C, il existe un $i_\circ \in I$ tel que la restriction de F à $C_\circ$ soit représentable par $X_{i_\circ}$, ce qui prouvera à la fois que F est à valeurs dans $\mathcal{U}$-Ens, et qu'il commute aux petites limites projectives. Pour prouver notre assertion, il suffit de noter que pour tout

[3](dû à H. BASS).

$X \in \operatorname{Ob} C_\circ$, le cardinal de l'ensemble $J(X)$ des $j \in J$ tels qu'il existe un homomorphisme non trivial de G_j dans X est nécessairement petit, puisque un tel morphisme est nécessairement un monomorphisme (G_j étant simple) ; par suite, si $i_\circ$ est la partie de J réunion des $J(X)$ pour $X \in \operatorname{ob} C_\circ$, $i_\circ$ est petit i.e. $i_\circ \in I$, et il fait l'affaire. D'autre part il est clair que F n'est pas représentable, puisque on a card $I \notin \mathscr{U}$. De ceci et de 8.12.7 on conclut donc que la catégorie C des groupes $\in \mathscr{U}$ n'admet pas une petite sous-catégorie pleine cogénératrice. Comme l'objet $\mathbf{Z}$ de C est d'autre part un générateur, il résulte alors de la démonstration de 7.12 qu'il existe un groupe G à deux générateurs qui ne se plonge pas dans un objet injectif de la catégorie C des groupes $\in \mathscr{U}$. Il semble d'ailleurs plausible que C n'admette pas d'autre objet injectif que les groupes unités.

136

8.13. Foncteurs proreprésentables et foncteurs accessibles.

8.13.1. Dans le présent numéro, nous utilisons quelques notions et résultats du paragraphe suivant, et notamment 9.11 et 9.13, pour obtenir un critère de proreprésentabilité que nous utiliserons (incidemment) dans IV 9.16. C désigne par la suite une $\mathscr{U}$-catégorie satisfaisant la condition L de 9.1 b), cette condition étant remplie par exemple si dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables.

Proposition 8.13.2. Soient C comme ci-dessus, et

$$f : C \longrightarrow (\text{Ens})$$

un foncteur.

a) Supposons que chaque objet de C est accessible (9.3). Si f est pro-représentable, f est accessible (9.2) et exact à gauche.
b) Supposons que dans C les limites projectives finies soient représentables, et que C admette une filtration cardinale (9.12). Si f est accessible et exact à gauche, alors f est proreprésentable.

Démonstration.

a) L'hypothèse sur C signifie que les foncteurs covariants représentables de C dans (Ens) sont accessibles. Il en est donc de même de toute petite limite inductive de tels foncteurs (9.6 (i)), donc aussi de tout foncteur pro-représentable.
b) En vertu de 8.3.3 (iii), il reste à prouver que dans $\operatorname{Ob}({}_F\backslash C)^\circ$ il y a une petite sous-catégorie cofinale. Or par hypothèse il existe un cardinal Π tel que f soit Π-accessible. Soit alors (X, u), $u \in F(X)$, un objet de ${}_F\backslash C$. Avec les notations de **137**
9.12 c) on a alors $X = \varinjlim_i X_i$, avec I filtrant grand devant Π et les X_i dans $C' = \operatorname{Filt}^\Pi(C)$, d'où $F(X) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_i F(X_i)$. Cela montre que la petite sous-catégorie $({}_F\backslash C')^\circ$ est cofinale dans $({}_F\backslash C)^\circ$, et achève la démonstration.

Corollaire 8.13.3. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Dans C les limites projectives finies sont représentables.
b) Dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables.
c) Le foncteur Ker sur la catégorie des doubles flèches de C est accessible (par exemple, il commute aux petites $\varinjlim$ filtrantes).
d) Tout épimorphisme strict de C est strict universel (10.2).
e) Il existe une petite sous-catégorie de C génératrice par épimorphismes stricts (7.1).

Sous ces conditions, un foncteur $f : C \to (\text{Ens})$ est proreprésentables si et seulement si il est exact à gauche et accessible (9.2).

En effet, les conditions de 8.13.2 a) et b) sur C sont vérifiées, en vertu de 9.11 et 9.13 respectivement.

Corollaire 8.13.4. Soit $f : C \to C'$ un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories satisfaisant aux conditions a) à e) de 8.13.3. Pour que f admette un pro-adjoint, il faut et il suffit que f soit exact à gauche et accessible.

138 Comme les foncteurs représentables $h_{Y'} : X' \to \mathrm{Hom}(Y', X') : C' \to (\mathrm{Ens})$ sont exacts à gauche et accessibles (9.11), si f a ces mêmes propriétés, il en est de même de ses composés avec les foncteurs précédents, qui sont donc proreprésentables par 8.13.3, i.e. f admet un proadjoint. Inversement, supposons que f admet un proadjoint, et soient C'_1 une petite sous-catégorie génératrice de C, Π un cardinal tel que les $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$ soient Π-accessibles ; pour prouver que f est Π-accessible, il suffit donc de prouver qu'il en est ainsi de ses composés avec les $h_{Y'}$, $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$; or par hypothèse ces composés sont proreprésentables, donc ils sont accessibles (8.13.3), donc Π-accessibles pourvu qu'on prenne Π assez grand, C.Q.F.D.

9. Foncteurs accessibles, filtrations cardinales et construction de petites sous-catégories génératrices

Le présent paragraphe, de nature plus technique que les autres paragraphes de cet exposé, ne servira dans ce séminaire que dans IV 9 et dans VI 4, qui ne sont pas utilisés ailleurs dans le Séminaire. Il s'impose donc d'omettre la lecture du présent paragraphe, du moins en première lecture !

9.0. Toutes les catégories envisagées dans le présent numéro sont supposées être des $\mathscr{U}$-catégories. Sauf pour les petites catégories d'indice I, J … que nous aurons à utiliser, les développements qui suivent s'appliqueront surtout à des « grosses » catégories E, F … qui sont stables par petites limites inductives filtrantes. Il suffira cependant
139 le plus souvent qu'une condition un peu plus faible soit vérifiée (condition L dans 9.1 ci-dessous). Tous les cardinaux envisagés dans le présent numéro sont supposés $\in \mathscr{U}$.

Suivant une suggestion de P. Deligne, nous allons étudier, pour un foncteur $f : E \to F$ entre grosses catégories, une condition de commutation de f à certains types de limites inductives filtrantes, condition remarquablement stable, et qui sera vérifiée pour les foncteurs les plus importants qu'on rencontre dans la nature. Les applications que nous avons en vue, pour notre séminaire, sont 9.13.3, 9.13.4 (utilisés dans VI 4) et surtout 9.25, qui donne, dans un cas non trivial, l'existence d'une petite famille génératrice dans une catégorie de sections d'une catégorie fibrée ; ce résultat sera utilisé dans IV 9.16.

Définition 9.1. a) Soient I un ensemble préordonné, π un cardinal. On dit que I est grand devant π si I est filtrant, et si toute partie de I de cardinal $\leq \pi$ admet un majorant dans I.

b) Soit E une catégorie. Si π est un cardinal, on dit que E satisfait la condition L_π si pour tout petit ensemble ordonné I grand devant π, E est stable par les limites inductives de type I. On dit que E satisfait à la condition L s'il existe un cardinal $\pi \in \mathscr{U}$ tel que E satisfasse à la condition L_π.

9.1.1. Lorsque dans 9.1 a) on a $\pi \geq 2$, la deuxième condition énoncée implique déjà que I est filtrant, et si π est fini, I grand devant π signifie simplement que I est filtrant. Nous ne nous intéresserons guère par la suite qu'au cas où π est infini. Notons que si π, π' sont deux cardinaux tels que $\pi' \geq \pi$, alors I grand devant π' implique évidemment I grand devant π.

140 9.1.2. Comme annoncé dans 9.0, les conditions L_π, L doivent être considérées comme des variantes techniques de la condition plus forte de stabilité par petites limites inductives filtrantes. Il est clair que si π, π' sont des cardinaux tels que $\pi' \geq \pi$, alors la condition L_π implique la condition $L_{\pi'}$.

Définition 9.2. Soit $f : E \to F$ un foncteur. Si Π est un cardinal, on dit que f est Π-préaccessible (resp. Π-accessible) si E satisfait L_Π (9.1) et si pour tout ensemble ordonné $I \in \mathscr{U}$ grand devant Π, et tout système inductif $(X_i)_{i\in I}$ dans E de type I, le morphisme canonique

$$\varinjlim f(X_i) \longrightarrow f(\varinjlim X_i)$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). On dit que f est préaccessible (resp. accessible) (relativement à l'univers $\mathscr{U}$) s'il existe un cardinal $\Pi \in \mathscr{U}$ tel que f soit Π-préaccessible (resp. Π-accessible).

La catégorie des foncteurs Π-accessibles (resp. accessibles) de E dans F sera noté $\mathscr{H}om(E, F)_\Pi$ resp. $\mathscr{H}om(E, F)_{\mathrm{acc}}$.

9.2.1. Évidemment, un foncteur commutant aux petites $\varinjlim$ filtrantes (p. ex. un foncteur admettant un adjoint à droite) est Π-accessible pour tout cardinal $\Pi \geq 2$.

Définition 9.3. Soient E une catégorie, X un objet de E,

$$h^\circ_X : E \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

le foncteur covariant qu'il représente, $\Pi \in \mathscr{U}$ un cardinal. On dit que X est un objet Π-préaccessible (resp. Π-accessible) de E si le foncteur h°_X est Π-préaccessible (re- 141
sp. Π-accessible) ; on dit que X est préaccessible (resp. accessible) s'il existe un cardinal $\Pi \in \mathscr{U}$ tel que X soit un objet Π-préaccessible (resp. Π-accessible) de E.

9.3.1. On désigne par E_Π la sous-catégorie pleine de E formée des objets Π-accessibles de E.

Lorsqu'on applique la définition 9.3 à une catégorie de la forme $\mathscr{H}om(C, F)$, la terminologie introduite présente a priori une ambiguïté avec la terminologie analogue introduite dans 9.2, lorsqu'on interprète les objets de $\mathscr{H}om(C, F)$ comme des foncteurs ; il ne semble pas cependant qu'il y ait un risque de confusion sérieux.

Définition 9.4. Soient E une catégorie, $\pi \in \mathscr{U}$ un cardinal. On dit que E est une catégorie π-préaccessible (resp. π-accessible) s'il existe dans E une petite sous-catégorie pleine C qui est génératrice (7.1) et dont les objets sont π-préaccessibles (resp. π-accessibles) (9.3). On dit que E est une catégorie pré-accessible (resp. . accessible) s'il existe un cardinal $\pi \in \mathscr{U}$ tel que E soit π-préaccessible (resp. π-accessible).

Pour des exemples importants, cf. 9.11.3 plus bas.

Proposition 9.5. Soit $f : E \to F$ un foncteur entre catégories telles que F soit accessible et que tout objet de E soit accessible. Alors, si f admet un adjoint à gauche, f est accessible.

En effet, par hypothèse, F admet une petite famille conservative de foncteurs repré- 142
sentables $F \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ qui sont accessibles, donc on est ramené aussitôt à montrer que le composé de f avec chacun des foncteurs précédents est accessible. Or comme f admet un adjoint à gauche, ces composés sont des foncteurs $E \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ représentables, donc accessibles d'après l'hypothèse sur E.

Proposition 9.6. Soient E et F deux catégories, $\pi \in \mathscr{U}$ un cardinal et considérons la sous-catégorie pleine $\mathscr{H}om(E, F)_\Pi$ de $\mathscr{H}om(E, F)$ formée des foncteurs Π-accessibles (9.2) de E dans F.

(i) Cette sous-catégorie est stable par tout type de $\varinjlim$ qui est représentable dans F.

(ii) Supposons F π-accessible (9.4), et soit J une catégorie telle que card $F\ell\, J \leq \pi$ et que les $\varprojlim$ de type J soient représentables dans F, donc les $\varprojlim$ de type J sont représentables dans $\mathcal{H}om(E, F)$. Alors la sous-catégorie $\mathcal{H}om(E, F)_{\Pi}$ est stable par les $\varprojlim$ de type J.

Corollaire 9.7. Soient E et F deux catégories, avec F accessible (9.4). Alors la sous-catégorie pleine $\mathcal{H}om(E, F)_{\mathrm{acc}}$ de $\mathcal{H}om(E, F)$ formée des foncteurs accessibles est stable par tout type de limite inductive ou projective, relative à une petite catégorie d'indices J, qui est représentable dans F (donc dans $\mathcal{H}om(E, F)$).

Preuve de 9.6. L'assertion (i) résulte trivialement de la commutation du foncteur $\varinjlim$ aux limites inductives quelconques. Pour (ii), soit $(f_j)_{j\in J}$ un système projectif de fonc-
143 teurs Π-accessibles $E \to F$, $f = \varprojlim f_j$ sa limite projective, qui se calcule « argument par argument », prouvons que f est Π-accessible, i.e. que pour tout ensemble ordonné $I \in \mathcal{U}$ grand devant Π, et tout système inductif $(X_i)_{i\in I}$ dans E, le morphisme canonique

$$\varinjlim_i((\varprojlim_j f_j)(X_i)) \longrightarrow (\varprojlim_j f_j)(\varinjlim_i X_i)$$

est un isomorphisme. Or le calcul « argument par argument » du foncteur $\varprojlim_j f_j$ nous permet d'identifier le morphisme canonique précédent au morphisme canonique

$$\varinjlim_i \varprojlim_j f_j(X_i) \longrightarrow \varprojlim_j \varinjlim_i f_j(X_i)$$

associé au bifoncteur

$$(i, j) \longmapsto f_j(X_i) \,:\, I \times J \longrightarrow F.$$

Donc 9.6 est une conséquence de l'assertion plus générale :

Corollaire 9.8. Soient F une catégorie Π-accessible, I un ensemble ordonné grand devant Π, J une petite catégorie telle que card $F\ell \leq \Pi$, et que les $\varprojlim$ de type J soient représentables dans F, $h \,:\, I \times J \to F$ un foncteur ; alors le morphisme canonique

$$\varinjlim_i \varprojlim_j h(i, j) \longrightarrow \varprojlim_j \varinjlim_i h(i, j) \tag{9.8.1}$$

est un isomorphisme. En d'autres termes, le foncteur

$$\varinjlim_i \,:\, \mathcal{H}om(I, F) \longrightarrow F \tag{9.8.2}$$

144 commute aux limites projectives de type J (pour toute petite catégorie J telle que card $F\ell(J) \leq \Pi$ et telle que les limites projectives de type J soient représentables dans F). Ou encore, pour toute J comme ci-dessus, le foncteur

$$\varinjlim_j \,:\, \mathcal{H}om(J, F) \longrightarrow F \tag{9.8.3}$$

est Π-accessible.

Comme par hypothèse F admet une famille conservative de foncteurs covariants représentables Π-accessibles $g \,:\, F \to (\mathcal{U}\text{-Ens})$, on voit aussitôt qu'on est ramené à prouver 9.8 dans le cas où $F = \mathcal{U}\text{-Ens}$. Nous prouverons alors l'assertion sous la forme de la commutation de (9.8.2) aux $\varprojlim$ de type J, avec card $F\ell\, J \leq \Pi$. Comme I est filtrant, nous savons que (9.8.2) commute aux limites projectives finies (2.8). On est donc ramené par un argument standard (cf. 2.3) à prouver qu'il commute aux produits indexés par un ensemble J tel que card $J \leq \Pi$. Cela nous ramène à prouver la bijectivité

de (9.8.1) lorsque J est discrète. Prouvons l'injectivité : considérons deux éléments a, b du premier membre, ils proviennent donc de $\prod_j h(i_\circ, j)$ pour $i_\circ \in I$ convenable, soient $\prod_j a(i_\circ, j)$ et $\prod_j b(i_\circ, j)$; supposons que les éléments $\prod_j h(\infty, j)$ du deuxième membre qu'ils définissent soient égaux, i.e. que pour tout j, il existe $i(j) \geq i_\circ$ tel que $a(i_\circ, j)$ et $b(i_\circ, j)$ aient même image dans $h(i, j)$. Comme I est grand devant card J, il s'ensuit qu'il existe un majorant commun $i_1 \in I$ de tout les $i(j)$, ce qui implique que les deux éléments envisagés de $\prod_j h(i_\circ, j)$ ont même image dans $\prod_j h(i_1, j)$, donc définissent le même élément du premier membre de (9.8.1), ce qui établit l'injectivité. Pour la surjectivité, **145**
soit $\prod_j a(\infty, j)$ un élément du second membre ; donc pour tout $j \in J$, $a(\infty, j)$ provient d'un élément de $h(i(j), j)$, pour un $i(j) \in I$ convenable. Comme précédemment, on peut trouver un majorant commun $i \in I$ des $i(j)$, donc $\prod_j a(\infty, j)$ provient d'un élément $\prod_j a(i, j)$ de $\prod_j h(i, j)$, donc est dans l'image de (9.8.1). Cela achève la démonstration.

Corollaire 9.9. Soit F une catégorie Π-accessible (resp. accessible), alors pour toute catégorie J telle que card $F\ell J \leq \Pi$ (resp. toute petite catégorie J) et pour tout foncteur $(X_j)_{j\in J} : J \to F$ dont la limite inductive dans F est représentable, si les X_j sont Π-accessibles (resp. accessibles) il en est de même de $\varinjlim X_j$.

En effet, le foncteur $F \to (\mathcal{U}\text{-Ens})$ représente par $\varinjlim X_j$ est la limite projective des foncteurs représentés par les X_j, et on applique 9.6 (ii) au système projectif formé par ces foncteurs.

Remarque 9.10. Dans les énoncés 9.6, 9.7, 9.8 et 9.9 on peut remplacer partout les mots « Π-accessibles », « accessibles » par « Π-préaccessible », « préaccessibles ». La démonstration donnée prouve en effet également cette variante des énoncés précédents.

Proposition 9.11. Soit E une catégorie, satisfaisant la condition L (9.1), C une petite sous-catégorie pleine génératrice (7.1). On suppose satisfaite la condition :

a) E est stable par noyaux de doubles flèches, et le foncteur Ker sur le catégorie des doubles flèches de E est accessible (par exemple, il commute aux petites limites **146**
inductives filtrantes).

Alors tout objet de E est préaccessible (9.3), a fortiori E est préaccessible. Supposons que C soit même génératrice par épimorphisme stricts (7.1), et supposons que E satisfasse aux conditions :

b) E est stable par produits fibrés.
c) Toute petite famille épimorphique stricte dans E est épimorphique stricte universelle (10.3), ou dans E les petites sommes directes sont représentables, et tout épimorphisme strict de E est un épimorphisme strict universel.

Alors tout objet de E est accessible, a fortiori E est accessible.

Le fait que, moyennant (a), tout objet de E soit accessible, résulte du fait que pour tout objet X de E, l'ensemble des sous-objets stricts de E est petit (7.4), et du

Lemme 9.11.1. Sous les conditions de (9.11a), soient $X \in \mathrm{ob}\, E$ et Π un cardinal tels que E satisfasse L_Π (9.1), que le foncteur Ker dans (9.11a) soit Π-accessible, et que l'ensemble des sous-objets stricts de X soit de cardinal majoré par Π. Alors X est Π-préaccessible.

En effet, si I est un ensemble grand devant I, $(Y_i)_{i\in I}$ un système inductif dans E de limite inductive Y, et $(u_i, v_i : X \rightrightarrows Y_i)$ une double flèche telle que la double flèche composée $X \overset{u,v}{\rightrightarrows} Y$ satisfasse $u = v$, prouvons qu'il existe $j \geq i$ dans I tel que $u_j = v_j$.

147 Pour ceci, considérons le système inductif des doubles flèches $(u_j, v_j : X \rightrightarrows Y_j)_{j\geq i}$, dont la limite inductive est (u, v). Par hypothèse on a $X = \mathrm{Ker}(u, v) = \varinjlim_j \mathrm{Ker}(u_j, v_j) = \varinjlim_j X_j$, où $X_j = \mathrm{Ker}(u_j, v_j)$. Or les X_j sont des sous-objets stricts de X, donc il existe une partie I' de I formée d'indices $j \geq i$, telle que $\operatorname{card} J \leq \Pi$ et que tout X_j soit égal à un des $X_{i'}$ $(i' \in I')$. Comme I est grand devant Π, il existe un majorant j de I' dans I. Alors X_j contient tout les $X_{j'}$ pour $j' \geq i$, donc $X_j \to X$ est un épimorphisme (puisque la famille des $X_{j'} \to X$ est épimorphique), donc un isomorphisme puisque c'est un monomorphisme strict. Donc on a $u_j = v_j$, ce qui prouve 9.11.1.

La deuxième assertion de 9.11 résulte de la première, et du

Lemme 9.11.2. *Sous les conditions de (9.11a), b), c), soient X un objet de E, et Π un cardinal infini tels que E satisfasse L_Π (9.1), que l'on ait $\operatorname{card}\operatorname{ob} C_{/X} \leq \Pi$, que pour deux objets $X' \to X$ et $X'' \to X$ de $C_{/X}$, $X' \times_X X''$ soit Π-préaccessible, enfin que X soit Π-préadmissible. Alors X est un Π-accessible.*

Avec les notations de la démonstration de 9.11.1, il suffit de prouver que tout morphisme $u : X \to Y$ provient d'un morphisme $u_i : X \to Y_i$. Or considérons la famille des morphismes $Y_i \to Y$, qui est épimorphique stricte ; grâce à b) et c), la famille des $Y_i \times_Y X \to X$ est également épimorphique stricte ; d'autre part, pour tout i, comme C est génératrice par épimorphismes stricts, la famille des flèches

$$T \longrightarrow Y_i \times_Y X$$

148 de source dans C est épimorphique stricte. Dans la deuxième alternative envisagée dans c), on peut trouver une telle flèche épimorphique stricte, de source, une (petite) somme d'objets de C. En vertu de la transitivité de la notion de famille épimorphique stricte universelle (II 2.5) il s'ensuit alors que la famille des flèches $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X$ de source dans C qui se factorisent par un des $Y_i \times_Y X$ est épimorphique stricte. Soit J l'ensemble d'indices de cette famille, qui est de cardinal majoré par $\operatorname{card}\operatorname{ob} C_{/X} \leq \Pi$. Choisissons pour tout $\alpha \in J$ un $i = i(\alpha) \in I$ et un X-morphisme $T_\alpha \to Y_i \times_Y X$, ou ce qui revient au même, un $v_\alpha : T_\alpha \to Y_i$ tel que $p_i v_\alpha = u f_\alpha$, où $p_i : Y_i \to Y$ est le morphisme canonique. Comme I est grand devant Π, on peut choisir $i(\alpha)$ indépendant de α, soit i. Pour tout couple d'indices $\alpha, \beta \in J$, considérons les composés

$$\mathrm{pr}_1\, v_\alpha, \mathrm{pr}_2\, v_\beta : T_\alpha \times_X T_\beta \rightrightarrows Y_i.$$

Leurs composés avec $Y_i \to Y$ sont égaux, donc, comme $T_\alpha \times_X T_\beta$ est Π-préaccessible par hypothèse, il existe un indice $i' = i(\alpha, \beta) \geq i$ tel que les composés des flèches envisagées avec $Y_i \to Y_i$, soient égales. Comme l'ensemble des couples α, β est de cardinal $\leq \Pi^2 = \Pi$ (Π étant infini), il s'ensuit encore que l'on peut choisir i' indépendant de α, β. On peut évidemment supposer $i' = i$. Mais alors, la famille $(f_\alpha : T_\alpha \to X)$ étant épimorphique stricte, on peut trouver un morphisme $u_i : X \to Y_i$ tel que l'on ait $u_i f_\alpha = v_i$. On a alors $p_i u_i = p$, car pour tout α on a $(p_i u_i) f_\alpha = p_i(u_i f_\alpha) = p_i v_\alpha = u f_\alpha$, et la famille des f_α est épimorphique. Cela achève la démonstration de 9.11.2.

149 Remarque 9.11.3. On voit, comme cas particulier de 9.11, que dans la catégorie E tout objet est accessible, dans chacun des deux cas suivants : 1) E est une $\mathscr{U}$-catégorie abélienne à limites inductives filtrantes exactes et admettant une petite sous-catégorie génératrice (ici, c'est la deuxième alternative de c), qui s'applique). 2) E est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique $X \in \mathscr{U}$. Plus généralement, il suffit que E soit la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un $\mathscr{U}$-site (II 2.1), ou encore, que E soit un $\mathscr{U}$-topos (IV 1.1).

Définition 9.12. Soit E une catégorie. On appelle filtration cardinale de E une filtration croissante $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ de E par des sous-catégories strictement pleines $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, indexée par les cardinaux $\Pi \in \mathscr{U}$ tels que $\Pi \geq \Pi_\circ$ (où $\Pi_\circ$ est un cardinal infini fixé, dépendant de la filtration cardinale envisagée), et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$, $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ est équivalente à une petite catégorie.
b) E satisfait à $L_{\Pi_\circ}$ (9.3), et pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$, $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ est stable dans E pour les limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés I grands devant $\Pi_\circ$ tels que $\mathrm{card}\, I \leq \Pi$.
c) Pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$, et tout $X \in \mathrm{ob}\, E$, on peut trouver un isomorphisme

$$X \simeq \varinjlim_{I} X_i,$$

où $(X_i)_{i \in I}$ est un système inductif dans E indexé par un ensemble ordonné I **150**
grand devant Π (9.1), et où les X_i sont dans $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$. De plus, si $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, $\Pi' \geq \Pi$, on peut prendre I tel que $\mathrm{card}\, I \leq \Pi'^{\Pi}$.

9.12.1. On notera qu'il résulte de b) et c) que tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ appartient à un $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, pour Π assez grand.

Exemple 9.12.2. Prenons $E = (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, $\Phi_\circ = \aleph_\circ$, $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E) =$ sous-catégorie pleine de E formée des ensembles tels que $\mathrm{card}\, X \leq \Pi$. Plus généralement :

Proposition 9.13. Soit E une $\mathscr{U}$-catégorie. On suppose que E est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, par somme de deux objets et par conoyaux de doubles flèches, que E est stable par produits fibrés, et que les morphismes épimorphiques dans E sont épimorphiques stricts universels. Soit C une petite sous-catégorie pleine de E qui est génératrice par épimorphismes stricts. Soit $\Pi_\circ$ un cardinal infini $\geq \mathrm{card}\, F\ell\, C$. Pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$, soit $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets X de E tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $(X_i \to X)_{i \in I}$ de but X, telle que $\mathrm{card}\, I \leq \Pi$ et que $X_i \in \mathrm{ob}\, C$ pour tout $i \in I$. Alors $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ est une filtration cardinale de E. De plus, pour tout $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, le cardinal de l'ensemble des flèches de $C_{/X}$ (et a fortiori, de l'ensemble des objets de $C_{/X}$) est majoré par $\Pi^{\Pi_\circ}$.

Cette dernière assertion n'est autre que 7.6.

Pour montrer qu'on a une filtration cardinale, il faut prouver les conditions a), b) et c) de 9.12. La condition a) résulte aussitôt de 7.5.2. Pour b), supposons qu'on ait $X = \varinjlim_I X_i$, avec $\mathrm{card}\, I \leq \Pi$ et les $X_i \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$. Donc la famille des morphismes **151**
canoniques $X_i \to X$ est épimorphique stricte, et par hypothèse sur les X_i, il existe pour tout $i \in I$ une famille épimorphique stricte $(X_{ij} \to X_i)_{j \in J_i}$, avec $\mathrm{card}\, J_i \leq \Pi$. Passant aux sommes $\amalg_i X_i$ et $\amalg_{i,j} X_{ij}$, on voit par transitivité des épimorphismes stricts universels (II 2.5) que la famille des composés $X_{ij} \to X_i \to X$ (indexée par l'ensemble somme des J_i, pour $i \in I$) est épimorphique stricte. Or on a $\mathrm{card}\, J \leq \Pi^2 = \Pi$, d'où la conclusion. (NB. on a seulement utilisé le fait que $\varinjlim_I X_i$ existe, et non le fait que I soit grand devant $\Pi_\circ$ ni même filtrant.) Prouvons enfin c). Notons que pour tout $X \in \mathrm{ob}\, E$, la famille des flèches $X_i \to X$ de source dans $\mathrm{ob}\, C$ est strictement épimorphique, puisque C est génératrice par épimorphismes stricts, et évidemment petite, donc il existe un cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$ tel que $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$. Il reste à prouver que si on a des cardinaux $\Pi' \geq \Pi \geq \Pi_\circ$, et si $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi'}(E)$, alors on a un isomorphisme

$$X \simeq \varinjlim_{I} X_i,$$

avec I grand devant Π, $\operatorname{card} I \leq \Pi'^{\Pi}$, les X_i dans $\operatorname{ob}\operatorname{Filt}^{\Pi}(E)$. Or on a, C étant génératrice par épimorphismes stricts,

$$(*) \qquad X \simeq \varinjlim_{C_{/X}} T.$$

Notons aussi qu'en rajoutant successivement à C des sommes et des conoyaux de doubles flèches de C, et de même pour la catégorie ainsi obtenue etc, on se ramène au cas où C est stable par somme de deux objets dans E et par conoyaux de doubles flèches dans E, et ceci sans détruire l'hypothèse $\Pi_\circ \geq \operatorname{card} F\ell\, C$. On peut supposer de plus que, si
152 E contient un objet initial fixé $\varnothing_E$, on ait $\varnothing_E \in \operatorname{ob} C$. Ceci implique que la catégorie $C_{/X}$ est stable par somme de deux objets et conoyaux de doubles flèches. Elle est alors filtrante, car elle est non vide, puisque si elle était vide, la relation $(*)$ montrerait que X est un objet initial, donc $C_{/X}$ contient la flèche $\varnothing_E \to X$, une contradiction. Soit alors I l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-catégories pleines i de $C_{/X}$ qui sont filtrantes et telles que $\operatorname{card}\operatorname{ob} i \leq \Pi$. Pour tout $i \in I$, soit $X_i \in \operatorname{ob} E$ la limite inductive du foncteur composé $i \to C_{/X} \to E$, qui existe par hypothèse. Alors on a évidemment

$$\varinjlim_{I} X_i \simeq \varinjlim_{C/X} T \simeq X.$$

D'autre part, on a déjà noté que $\operatorname{card}\operatorname{ob} C_{/X} \leq \Pi'^{\Pi_\circ}$. Il s'ensuit que I est grand devant Π, et que $\operatorname{card} I \leq (\Pi'^{\Pi_\circ})^{\Pi} = \Pi'^{\Pi\Pi_\circ} = \Pi'^{\Pi}$ en vertu du lemme suivant, dont la démonstration est laissé au lecteur (où on fera $I = C_{/X}$, $c = \Pi'^{\Pi_\circ}$) :

Lemme 9.13.1. Soient J une catégorie filtrante, c et Π deux cardinaux tels que $c \geq \operatorname{Sup}(\operatorname{card} F\ell\, J, \Pi)$, et telle que $\operatorname{card}\operatorname{Hom}(j, J') \leq \Pi_\circ$ pour tout couple d'objets j, j' de J. Soit I l'ensemble des sous-catégories pleines filtrantes i de J telles que $\operatorname{card}\operatorname{ob} i \leq \Pi$. Alors, ordonné par inclusion, I est grand devant Π, et on a $\operatorname{card} I \leq c^{\Pi}$.

Ceci achève la démonstration de 9.13.

153 Remarque 9.13.2. Un léger effort supplémentaire doit permettre de remplacer dans 9.13 l'hypothèse que E est stable par petites limites inductives filtrantes par l'hypothèse que E satisfait à L (9.1), si on suppose E stable par petites sommes, ou que dans E toute famille épimorphique est épimorphique universelle. Il faut alors, dans la démonstration de c), choisir $\Pi_\circ$ tel que E satisfasse à $L_{\Pi_\circ}$, et se borner aux sous-catégories pleines i de $C_{/X}$ qui sont non seulement filtrantes, mais telles que l'ensemble préordonné $\operatorname{ob} i$ soit grand devant $\Pi_\circ$. Utilisant 8. et l'hypothèse que E satisfait à $L_{\Pi_\circ}$, on trouve alors que les X_i existent, et on devrait conclure par une variante convenable de 9.13.1, que le rédacteur n'a pas vérifiée.

Proposition 9.14. Soient $f : E \to F$ un foncteur accessible (9.2) entre deux catégories munies de filtrations cardinales $(\operatorname{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ et $(\operatorname{Filt}^{\Pi}(F))_{\Pi \geq \Pi'_\circ}$. Alors il existe un cardinal $\Pi_1 \geq \operatorname{Sup}(\Pi_\circ, \Pi'_\circ)$ tel que pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_1$, on ait

$$(9.14.1) \qquad f(\operatorname{Filt}^{\Pi}(E)) \subset \operatorname{Filt}^{\Pi^{\Pi'}}(F).$$

En particulier, si l'on a $\Pi = 2^c$ avec $c \geq \Pi_1$, d'où $\Pi^{\Pi_1} = 2^{c\Pi_1} = 2^c = \Pi$, on a

$$(9.14.2) \qquad f(\operatorname{Filt}^{\Pi}(E)) \subset \operatorname{Filt}^{\Pi}(F).$$

Signalons tout de suite le

154 Corollaire 9.15. Soit E une catégorie, munie de deux filtrations cardinales $(\operatorname{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ et $(\operatorname{Filt}'^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi'_\circ}$. Alors il existe un cardinal $\Pi_1 \geq \operatorname{Sup}(\Pi_\circ, \Pi'_\circ)$ tel que, pour tout cardinal $c \geq \Pi_1$, posant $\Pi = 2^c$, on ait $\operatorname{Filt}^{\Pi}(E) = \operatorname{Filt}'^{\Pi}(E)$.

Preuve de 9.14. Soit c un cardinal tel que $c \geq \mathrm{Sup}(\Pi_\circ, \Pi'_\circ)$, et tel que f soit c-admissible. Soit d'autre part $\Pi_1 \geq c$ tel que l'on ait

$$(*) \qquad f(\mathrm{Filt}^c(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\Pi_1}(F).$$

Il existe un tel Π_1, grâce au fait que $\mathrm{Filt}^c(E)$ est équivalente à une petite catégorie (9.12 a)), donc $f(\mathrm{Filt}^c(E))$ l'est également, de sorte qu'on peut appliquer 9.12.1 aux objets de cette dernière pour trouver une $\mathrm{Filt}^\Pi(F)$ qui les contient tous (compte tenu que les $\mathrm{Filt}^\Pi(F)$ sont des sous-catégories pleines). Soit donc $\Pi \geq \Pi_1$, et $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^\Pi(E)$, prouvons que $f(X) \in \mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi_1}}(F)$. Écrivons en effet

$$X = \varinjlim_I X_i,$$

avec les $X_i \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^c(E)$, I grand devant c, $\mathrm{card}\, I \leq \Pi^c \leq \Pi^{\Pi^1}$ (9.12c)). Comme f est c-admissible, I grand devant c, on a

$$f(X) \simeq \varinjlim_I f(X_i),$$

et comme $\mathrm{card}\, I \leq \Pi^{\Pi_1}$ et $f(X_i) \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi_1}(F) \subset \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi_1}}(F)$ par $(*)$, on a $f(X) \in \mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi_1}}(F)$ par 9.12 b), C.Q.F.D.

9.15.1. La notion de filtration cardinale 9.12 n'a guère d'intérêt que lorsque les objets de E sont accessibles. Signalons qu'il résulte de 9.11 que cette condition est satisfaite lorsque, en plus des hypothèses de 9.13, on suppose que le foncteur Ker sur la catégorie 155 des doubles flèches de E est accessible. Signalons d'autre part :

Proposition 9.16. Soit E une catégorie munie d'une filtration cardinale $(\mathrm{Filt}^\Pi(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$. Supposons que les éléments de $\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ soient des objets accessibles de E ; alors il existe un cardinal $\Pi_1 \geq \Pi_\circ$ dans $\mathscr{U}$ tel que les objets de $\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ soient Π_1-accessibles ; si Π_1 est choisi ainsi, alors pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_1$, on a (avec les notations de 9.3.1) :

$$(9.16.1) \qquad E_\Pi \subset \mathrm{Filt}^\Pi(E) \subset E_{(\Pi^{\Pi_\circ})}.$$

L'existence de Π_1 résulte immédiatement du fait que $\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ est équivalente à une petite catégorie (9.12a)). Soit alors $\Pi \geq \Pi_1$. Si X est dans $\mathrm{Filt}^\Pi(E)$, écrivant $X \simeq \varinjlim_I X_i$ avec $\mathrm{card}\, I \leq \Pi^{\Pi_\circ}$, $X_i \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ pour tout i (9.12c)), alors il résulte de 9.9 que X est $\Pi^{\Pi_\circ}$-accessible, d'où la deuxième inclusion (9.16.1). Supposons que X soit Π-accessible, et écrivons $X \simeq \varinjlim_I X_i$, avec I grand devant Π et les $X_i \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^\Pi(E)$ (9.12c)). Par hypothèse sur X, l'isomorphisme donné $X \xrightarrow{\sim} \varinjlim_I X_i$ se factorise par un des X_i, donc X est isomorphe à un facteur direct de cet X_i. On en conclut que $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^\Pi(E)$, donc la première inclusion (9.16.1), grâce au

Lemme 9.16.2. Tout objet de E qui est un facteur direct d'un objet de $\mathrm{Filt}^\Pi(E)$ est dans $\mathrm{Filt}^\Pi(E)$.

En effet, si X est l'image d'un projecteur p dans l'objet Y de E (i.e. d'un endomorphisme p tel que $p^2 = p$), et si I est un ensemble ordonné filtrant, X est limite inductive 156 du système inductif filtrant $(Y_i)_{i \in I}$ défini par $Y_i = Y$ pour tout $i \in I$, $p : Y_i \to Y_j$ si $i < j$. Prenant I grand devant $\Pi_\circ$ et $\mathrm{card}\, I \leq \Pi$, on voit donc que si $Y \in \mathrm{Filt}^\Pi(E)$, il en est de même de X en vertu de 9.12 b).

Corollaire 9.17. Sous les conditions de 9.16, pour tout cardinal $c \geq \Pi_1$, posant $\Pi = 2^c$, $\mathrm{Filt}^\Pi(E)$ est identique à la sous-catégorie strictement pleine de E_Π de E formée des objets Π-accessibles.

Corollaire 9.18. Soient E une catégorie satisfaisant la condition L_{Π} (9.1), où Π est un cardinal, et C une sous-catégorie pleine de E. On désigne par $\mathrm{Ind}(C)_{\Pi}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ des ind-objets de C (8.2) formée des ind-objets de la forme $(X_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné grand devant Π. Considérons le foncteur canonique

(9.18.1) $$(X_i)_{i\in I} \longmapsto \varinjlim_{I} X_i \,:\, \mathrm{Ind}(C)_{\Pi} \longrightarrow E.$$

a) Pour que ce foncteur soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que tout objet X de C soit un objet Π-accessible (9.3) de E.
b) Plaçons-nous sous les conditions de 9.17, en particulier $\Pi = 2^c$, et prenons $C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$. Alors le foncteur (9.18.1) est une équivalence de catégories.

L'assertion a) est une généralisation immédiate de 8.7.5 a), et se prouve de la même façon. Alors b) résulte de 9.17 et de la condition 9.12 c) des filtrations cardinales, qui implique que le foncteur envisagé est essentiellement surjectif.

157 Corollaire 9.19. Sous les conditions de 9.17, soient $C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, F une $\mathcal{U}$-catégorie, et considérons le foncteur

(9.19.1) $$\mathcal{H}om(E,F)_{\Pi} \longrightarrow \mathcal{H}om(C,F)$$

induit par le foncteur « restriction à C » $f \mapsto f|C$), où la source de (9.19.1) est la catégorie des foncteurs Π-accessibles de E dans F (9.2). Le foncteur précédent est pleinement fidèle. Si F satisfait à la condition L_{Π} (9.1), alors le foncteur (9.19.1) est une équivalence de catégories.

La première assertion se prouve comme 7.8, en utilisant 9.18 b). La deuxième s'obtient en construisant un foncteur quasi-inverse de (9.19.1), en associant à tout foncteur $f : C \to F$ le foncteur $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_i f(X_i)$ de $\mathrm{Ind}(E_{\Pi})$ dans F, et en utilisant 9.18 b) pour en déduire un foncteur $\overline{f} : E \to F$. Tout revient à montrer que cedernier est Π-accessible. Or cela se prouve comme l'assertion analogue 8.7.3.

Corollaire 9.20. Soient E une catégorie admettant une filtration cardinale et telle que tout objet de E soit accessible (cf. 9.16), F une catégorie. Alors :

a) La catégorie $\mathcal{H}om(E,F)_{acc}$ des foncteurs accessibles de E dans F (9.2) est une $\mathcal{U}$-catégorie. (NB on rappelle (9.0) que les catégories données E, F sont supposées être des $\mathcal{U}$-catégories.)
b) Supposons que F soit stable par petites limites inductives filtrantes. Pour toute sous-catégorie pleine C de E équivalente à une petite catégorie, à foncteur d'inclusion $i : C \to E$, considérons le foncteur correspondant

$$i_! : \mathcal{H}om(C,F) \longrightarrow \mathcal{H}om(E,F)$$

158 (5.1). Pour qu'un foncteur $f : E \to F$ soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe une petite sous-catégorie C de E, telle que f soit dans l'image essentielle du foncteur précédent $i_!$.

Démonstration.

a) Il suffit de prouver que pour tout cardinal Π tel que E satisfasse L_{Π}, la sous-catégorie pleine $\mathcal{H}om(E,F)_{\Pi}$ de $\mathcal{H}om(E,F)_{acc}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie. Il suffit évidemment de le vérifier pour les cardinaux de la forme 2^c, avec c assez grand. Mais alors cela résulte de 9.19, puisque ($C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ étant essentiellement petite) $\mathcal{H}om(C,F)$ est évidemment une $\mathcal{U}$-catégorie.

b) Par transitivité de la formation des foncteurs $i_!$, on peut dans l'énoncé se borner aux sous-catégories C de la forme $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, où Π est comme dans 9.17. On voit alors aisément que le foncteur composé $\mathscr{H}om(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E), F) \to \mathscr{H}om(E, F)_{\Pi} \to \mathscr{H}om(E, F)$, où la première flèche est quasi-inverse de (9.19.1), et la deuxième est l'inclusion, n'est autre que le foncteur $i_!$, à isomorphisme près. Donc l'assertion b) résulte de 9.19.

*Exercice 9.20.1. (Le présent exercice utilise les notions de site et de topos, développés dans les exposés II et IV.) Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, C une petite sous-catégorie pleine génératrice du $\mathscr{U}$-topos E, $\Pi_\circ \in \mathscr{U}$ un cardinal infini tel que $\Pi_\circ \in \operatorname{card} F\ell\, C$. Pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$, $\Pi \in \mathscr{U}$, soit $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets X tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $(X_i \to X)_{i \in I}$ de but X, telle que $\operatorname{card} I \leq \Pi$ et que $X_i \in \operatorname{Ob} C$ pour tout $i \in I$. **159**

a) Montrer que $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ est une filtration cardinale de la $\mathscr{U}$-catégorie E, et qu'on peut choisir $\Pi_\circ$ tel que pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$, on ait les inclusions
$$E_{\Pi} \subset \mathrm{Filt}^{\Pi}(E) \subset E_{\Pi^{\Pi_\circ}},$$
où pour tout cardinal c, E_c désigne la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets c-accessibles.

b) Choisissant un cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$ tel que $\Pi = \Pi^{\Pi_\circ}$ (par exemple Π de la forme 2^c, avec $c > \Pi_\circ$), et posant $C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, montrer qu'on a une équivalence de catégories
$$\mathrm{Ind}(C)_{\Pi} \xrightarrow{\approx} E,$$
(notation $\mathrm{Ind}(C)_{\Pi}$ de 9.18).

c) Gardons les notations de b), et soient $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, $E^{\sim}_{\underline{V}}$ le $\mathscr{V}$-topos de $\mathscr{V}$-faisceaux sur le site E (muni de sa topologie canonique). Désignons par $\mathrm{Ind}(C, \mathscr{V})_{\Pi}$ la catégorie des $\mathscr{V}$-Ind-objets de C indexés par des ensemblesd'indices préordonnés grands devant Π. Montrer qu'on a une équivalence de catégories
$$\mathrm{Ind}(C, \mathscr{V})_{\Pi} \xrightarrow{\approx} E^{\sim}_{\mathscr{V}}.$$

d) Soient $c \in \mathscr{V}$ un cardinal, $\mathrm{Ind}(E, \mathscr{V})'_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(E, \mathscr{V})$ formée des $\mathscr{V}$-ind-objets de E indexés par un ensemble préordonné qui est grand devant tout cardinal $< c$. Prenant $c = \operatorname{card} \mathscr{U}$, montrer qu'on a une équivalence **160** de catégories
$$\mathrm{Ind}(E, \mathscr{V})'_c \xrightarrow{\approx} E^{\sim}_{\mathscr{V}}.$$
*

9.21. La présente section 9.21 développe des préliminaires techniques pour la démonstration du théorème 9.22 ci-dessous, qui constitue le résultat principal du présent paragraphe 9. Soit

$$p : E \to B \tag{9.21.1}$$

un foncteur fibrant, où B est une petite catégorie, et où les foncteurs images inverses
$$f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$$
associés aux flèches $f : \alpha \to \beta$ de B sont accessibles (9.2). En particulier, les catégories fibres E_α ($\alpha \in \operatorname{ob} B$) satisfont à la condition L (9.1), donc, B étant petite, il existe un

cardinal $\Pi'_\circ \in \mathscr{U}$ tel que toutes les catégories E_α satisfont à la condition $L_{\Pi'_\circ}$. Soit $\Pi_\circ \in \mathscr{U}$ un cardinal infini $> \Pi'_\circ$, de sorte que l'on a

(9.21.2) $$\Pi_\circ > \Pi'_\circ,\ E_\alpha \text{ satisfait } L_{\Pi'_\circ} \text{ pour tout } \alpha \in \operatorname{ob} B.$$

D'ailleurs, les hypothèses faites impliquent aussitôt l'existence d'un cardinal $c \in \mathscr{U}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(9.21.3) $$\begin{cases} \text{a)} & c \text{ est infini,} \\ \text{b)} & c \geq \operatorname{card} F\ell\, B, \\ \text{c)} & \text{pour toute flèche } f : \alpha \to \beta \text{ dans } B, \text{ le foncteur } f^* : E_\beta \to E_\alpha \text{ est } c\text{-accessible.} \end{cases}$$

161 Supposons de plus qu'on puisse trouver, pour chaque $\alpha \in \operatorname{ob} B$, une sous-catégorie pleine C_α de E_α, satisfaisant les conditions suivantes :

(9.21.4) $$\begin{cases} \text{a)} & \text{Pour tout } X \in \operatorname{ob} C_\alpha, X \text{ est } c\text{-accessible dans } E_\alpha \text{ (9.3).} \\ \text{b)} & \text{Pour tout } X \in \operatorname{ob} E_\alpha, \text{ on peut trouver un isomorphisme } X \simeq \varinjlim_I X_i \text{ dans } E_\alpha, \text{ où les } X_i \text{ sont dans } C_\alpha \text{ et où } I \text{ est un ensemble ordonné grand devant } c. \end{cases}$$

Soit Π un cardinal tel que l'on ait

(9.21.5) $$\Pi \geq \Pi_\circ \quad , \quad \text{donc } \Pi > \Pi'_\circ,$$

et pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, soit

(9.21.6) $$C_\alpha^\Pi \subset E_\alpha$$

formée des objets qui se peuvent représenter sous la forme $\varinjlim_I X_i$, où I est un ensemble ordonné grand devant $\Pi'_\circ$, tel que $\operatorname{card} I \leq \Pi$, et où les X_i sont dans C_α. Il est clair alors, grâce à 7.5.2, que C_α^Π est essentiellement petite, i.e. est équivalente à une petite catégorie.

Soit

(9.21.7) $$F = \mathscr{H}om_B(B, E)$$

la catégorie des sections de E sur B, et soit

(9.21.8) $$F^\Pi \subset F$$

la sous-catégorie strictement pleine de F formée des sections $X : \alpha \mapsto X(\alpha)$ telles que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$ on ait

$$X(\alpha) \in C_\alpha^\Pi .$$

162 Il est clair, les C_α^Π étant essentiellement petites, qu'il en est de même de la catégorie F^Π. Nous allons montrer que cette catégorie est génératrice, et plus précisément :

Lemme 9.21.9. Sous les conditions et avec les notations précédentes, on a ce qui suit :

(i) Tout objet de F est accessible (9.3). Si d est un cardinal $\geq \Pi'_\circ$, et si $\alpha \mapsto X(\alpha)$ est un élément de F tel que pour tout α, $X(\alpha)$ soit d-accessible dans E_α, alors X est d-accessible dans F.

(ii) Supposons $\Pi \leq c$, ou que $\Pi'_\circ$ soit fini (i.e. les E_α stables par petites $\varinjlim$ filtrantes). Alors tout objet X de F est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où les X_i sont dans F^Π et où I est grand devant Π.

Pour prouver (i), notons qu'en vertu de (9.21.4) et de 9.9, tout objet de E_α est accessible. D'autre part, F satisfait à la condition $L_{\Pi'_\circ}$, en vertu du

Lemme 9.21.10. Soit $p : E \to B$ un foncteur fibrant, $F = \mathscr{H}om_B(B, E)$, I une catégorie, $i \mapsto X_i$ un foncteur de I dans F. Pour que $\varinjlim_I X_i$ soit représentable dans F, il suffit que pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $\varinjlim_I X_i(\alpha)$ soit représentable dans la catégorie fibre E_α ; lorsqu'il en est ainsi, alors $\varinjlim_I X_i$ « se calcule argument par argument ». En particulier, si les catégories fibres satisfont à la condition $L_{\Pi'_\circ}$ ($\Pi'_\circ$ étant un cardinal donné) il en est de même de F.

Nous laissons le détail de la démonstration (facile) de 9.21.10 au lecteur, en nous contentant de remarquer qu'il est commode d'utiliser le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate : 163

Corollaire 9.21.10.1. Avec les hypothèses et notations de 9.21.10 pour $p : E \to B$, et pour I, pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, le foncteur d'inclusion $E_\alpha \to E$ commute aux limites inductives de type I.

Revenant alors aux conditions générales de 9.21.9, soit X un objet de F. Comme pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, $X(\alpha)$ est accessible dans E_α, il existe un cardinal $d \in \mathscr{U}$ tel que pour tout α, $X(\alpha)$ soit d-accessible dans E_α. On peut choisir $d \geq \Pi'_\circ$, de sorte que F satisfait à L_d en vertu de 9.21.10. Utilisant encore 9.21.10 pour le calcul des limites inductives $\varinjlim_I Y_i$ dans F, avec I grand devant d, on constate aussitôt que X est d-accessible. Cela prouve (i).

Nous allons prouver maintenant 9.21.9 (ii) en plusieurs étapes ((9.21.11) à (9.21.16)). Soit donc

$$X : \alpha \longmapsto X(\alpha)$$

un objet de F. En vertu de (9.21.4 b)), on peut, pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$, trouver un ensemble ordonné I_α grand devant c, et un isomorphisme $X(\alpha) = \varinjlim_{i \in I_\alpha} X(\alpha)_i$, où $i \mapsto X(\alpha)_i$ est un système inductif de type I_α dans E_α, les $X(\alpha)_i$ dans C_α. Considérons l'ensemble ordonné produit $I = \Pi_\alpha I_\alpha$; il est clair qu'il est grand devant c, et que les systèmes inductifs précédents donnent naissance à des systèmes inductifs dans les E, 164

(9.21.11) $$i \longmapsto X(\alpha)_i \in \mathrm{ob}\, C_\alpha, i \in \mathrm{ob}\, I,$$

indexés par le même ensemble ordonné I, et à des isomorphismes

(9.21.12) $$X(\alpha) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_I X(\alpha)_i \text{ dans } E_\alpha,$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{ob}\, B$. Nous supposons fixées par la suite des données (9.21.11) et (9.21.12).

Lemme 9.21.13. Sous les conditions précédentes, on peut trouver une application $\varphi : I \to I$ telle que $\varphi(i) \geq i$ pour tout $i \in I$, et une application $(i, f) \mapsto \lambda(i, f)$ de $I \times \mathrm{Fl}\, B$ dans $\mathrm{Fl}\, E$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Pour $i \in I$, $(f : \alpha \to \beta) \in F\ell B$, $\lambda(i, f)$ est un f-morphisme de $X(\alpha)_i$ dans $X(\beta)_{\varphi(i)}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \\
& X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\quad f \quad} \beta \quad ,$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques déduits de (9.21.12).

165 b) Pour tout $i \in I$, et $(f : \alpha \to \beta) \in \mathrm{F}l\ B$, on a commutativité dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X(\beta)_{\varphi^2(i)} \\
X(\alpha)_{\varphi}(i) \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),f)"] & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[u] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\quad f \quad} \beta \quad .$$

c) Pour tout couple de flèches consécutives $\alpha \xrightarrow{f} \beta \xrightarrow{g} \gamma$ de B, on a commutativité dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \arrow[r, "X(g)"] & X(\gamma) \\
& & X(\gamma)_{\varphi^2(i)} \arrow[u] \\
& X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),g)"] & X(\gamma)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uuu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] \arrow[urr, "\lambda(i,gf)"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\quad f \quad} \beta \xrightarrow{\quad g \quad} \gamma \quad ,$$

où les flèches verticales sont celles déduites de (9.21.12).

166 On notera d'ailleurs que la commutativité des deux trapèzes supérieurs dans b) est déjà contenu dans a), de sorte que b) affirme en fait la commutativité du triangle inférieur du diagramme envisagé.

Prouvons 9.21.13. Soient $i \in I$, et $f : \alpha \to \beta$ une flèche dans B. Considérons le composé $X(\alpha_i) \to X(\alpha) \xrightarrow{X(f)} X(\beta) \simeq \varinjlim_j X(\beta)_j$, il définit un morphisme dans E :

$$X(\alpha)_i \to f^*(X(\beta)) \simeq f^*(\varinjlim_j X(\beta)_j) \simeq \varinjlim_j f^*(X(\beta)_j),$$

où la dernière égalité provient du fait que f^* est c-accessible (9.21.3 c)et que I est grand devant c. En vertu de (9.21.4 a)), comme $X(\alpha) \in \operatorname{ob} C_\alpha$, le morphisme envisagé se factorise par un $f^*(X(\alpha)_j)$, où j a priori dépend de i et de $f \in \operatorname{F}l\,(B)$. Mais en vertu de (9.21.3 b)), et comme I est grand devant c), on peut choisir j indépendant de f, soit $j = \varphi(i)$. I étant filtrant, on peut supposer $\varphi(i) \geq i$. On trouve ainsi, pour $i \in I$ et $f \in \operatorname{F}l\, F$, un morphisme

$$X(\alpha)_i \longrightarrow f^*(X(\beta)_{\varphi(i)}),$$

ou ce qui revient au même, un f-morphisme

$$\lambda(i, f) : X(\alpha)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi(i)},$$

qui par construction rend commutatif le diagramme

$D(f)$

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[rr, "X(f)"] & & X(\beta) \\
 & & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[urr, "\lambda(i,f)"] & & \\
\alpha \arrow[rr, "f"] & & \beta
\end{tikzcd} .$$

Considérons alors, pour i, f, g donnés, le triangle inférieur du diagramme envisagé 167
dans 9.21.13 c) ; il n'est pas clair qu'il est commutatif, mais les deux composés $X(\alpha)_i \rightrightarrows X(\beta)_{\varphi^2(i)}$ deviennent égaux après composition avec $X(\beta)_{\varphi^2(i)} \to X(\beta)$, comme il résulte de la commutativité des deux trapèzes supérieurs, et du trapèze contour global, qui sont les diagrammes $D(f)$, $D(g)$ et $D(gf)$ respectivement. Donc, comme $X(\alpha)_{\varphi^2(i)}$ est c-accessible (9.21.4 a)) et que $X(\alpha) \simeq \varinjlim_{j \in I} X(\alpha)_j$, avec I grand devant c, il s'ensuit qu'on peut trouver un élément $j \geq \varphi^2(i)$ de I, tel que les deux flèches envisagées deviennent égales après composition avec $X(\beta)_{\varphi^2(i)} \to X(\beta)_j$. A priori, j dépend de i, f et g. Mais pour i fixé, l'ensemble des couples possibles f, g est de cardinal $\geq c^2 = c$, en vertu de (9.21.3 a) et b)), donc, I étant grand devant c, on peut choisir j indépendant de f et de g, soit $j = \varphi'(i) \geq \varphi^2(i) \geq \varphi(i)$. Soit alors, pour tout $i \in I$ et $f : \alpha \to \beta$,

$$\lambda'(i, f) : X(\beta)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi'(i)}$$

le f-morphisme composé $X(\alpha)_i \to X(\beta)_{\varphi(i)} \to X(\beta)_{\varphi'(i)}$, où la deuxième flèche est le morphisme de transition. Il est alors immédiat, par construction, que (φ', λ') satisfait les conditions 9.21.13 a) et c), pour (φ, λ). Procédant de même pour la condition b), on voit qu'on peut choisir φ' de telle façon que cette condition soit également satisfait pour (φ', λ'). Cela achève la preuve de (9.21.13).

9.21.14. Soit maintenant 168

$$J \subset I$$

une partie de I satisfaisant les conditions suivantes :

a) J est filtrante,

b) pour tout $j \in J$, on a $\varphi(j) \in J$,

c) Pour tout $a \in \operatorname{ob} B$, $X_J(\alpha) = \varinjlim_{i \in J} X(\alpha)_i$ est représentable dans E_α.

Les conditions a) et c) sont satisfaites en particulier si J est grand devant $\Pi'_\circ$ (9.21.2). Il résulte alors de 9.21.10.1 que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $X_J(\alpha)$ est la limite inductive $\varinjlim_{i \in J} X(\alpha)_i$ dans E. Or pour une flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, les flèches $\lambda(i, f)$, pour i variable dans J, définissent grâce à (9.21.13 b)) un morphisme de ind-objets de $(X(\alpha)_i)_{i \in J}$ dans $(X(\beta)_i)_{i \in J}$, d'où un homomorphisme

$$X_J(f) : X_J(\alpha) \to X_J(\beta)$$

sur les limites inductives, qui est manifestement un f-homomorphisme. Utilisant (9.21.13 (c)), on trouve que l'on a des relations de transitivité

$$X_J(gf) = X_J(g)X_J(f),$$

de sorte que l'on à défini une section $X_J \in \operatorname{ob} F$ de E sur B. Enfin (9.21.13 a)) nous montre que les homomorphismes canoniques

$$X_J(\alpha) \longrightarrow X(\alpha) \quad , \quad \alpha \in \operatorname{ob} B,$$

sont fonctoriels en α, de sorte qu'on a un homomorphisme canonique

$$u_J : X_J \longrightarrow X.$$

169 D'autre part, si

$$J' \supset J$$

est une autre partie de I satisfaisant aux conditions a), b), c) ci-dessus, on trouve un homomorphisme canonique

$$u_{J',J} : X_J \longrightarrow X_{J'},$$

de sorte que les X_J forment un système inductif dans F, paramétré par l'ensemble (ordonné par inclusion) des parties J de I satisfaisant les conditions envisagées. Enfin, les homomorphismes u_J ci-dessus définissent un homomorphismes de ce système inductif dans (le système inductif constant défini par) X.

9.21.15. Soit maintenant K un ensemble de parties J de I, satisfaisant aux conditions a), b), c) envisagées dans 9.21.14, et supposons que K soit filtrant, et de réunion I. Alors il est clair que l'on a

$$\varinjlim_{J \in K} X_J \xrightarrow{\sim} X,$$

en utilisant 9.21.10.1 qui nous ramène à vérifier qu'on a un isomorphisme argument par argument.

Prenons par exemple pour K l'ensemble de toutes les parties J de I qui sont grandes devant $\Pi'_\circ$, stables par φ, et telles que $\operatorname{card} J \leq \Pi$. Alors par définition (9.21.6) de C^Π_α, on a, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $X_J(\alpha) \in \operatorname{ob} C^\Pi_\alpha$, donc $X_J \in \operatorname{ob} F^\Pi$. Par suite, 9.21.9 (ii) sera prouvé si nous établissons que K est grand devant Π (donc filtrant) et de réunion I. Il suffira évidemment, pour ceci, de prouver que toute partie S de I telle que $\operatorname{card} S \leq \Pi$
170 est contenue dans une $J \in K$. Ceci résultera en effet de l'hypothèse préliminaire énoncée dans 9.21.9 (ii), et du

Lemme 9.21.16. Soient I un ensemble ordonné, Π un cardinal infini, $\varphi : I \to I$ une application de I dans lui-même.

a) Supposons I filtrant. Alors pour toute partie S de I telle que $\operatorname{card} S \leq \Pi$, il existe une partie filtrante $J \supset S$ de I, telle que $\varphi(J) \subset J$ et $\operatorname{card}(J) \leq \Pi$.
b) Soit $\Pi'_\circ$ un cardinal $< \Pi$, et supposons I grand devant Π. Alors pour toute partie S de I telle que $\operatorname{card} S \leq \Pi$, il existe une partie $J \supset S$ de I grande devant $\Pi'_\circ$, telle que $\varphi(J) \subset J$ et $\operatorname{card} J \leq \Pi$.

Prouvons par exemple b) (la démonstration de a) étant analogue et plus simple). Soit P l'ensemble des parties de I de cardinal $\leq \Pi$, et soit $T \mapsto i_T : P \to I$ une application telle que pour $T \in P$, i_T soit un majorant de T dans I ; l'existence de cette application exprime simplement l'hypothèse que I est grand Π. Soit A un ensemble bien ordonné tel que $\operatorname{card} A = \Pi$, et tel que pour tout $a \in A$, l'ensemble des $a' \leq a$ soit de cardinal $< \Pi$. Il s'ensuit en particulier, comme $\Pi'_\circ < \Pi$, que A est grand devant $\Pi'_\circ$. Définissons par récurrence transfinie des applications

$$S \longmapsto S_a : P \longrightarrow P \quad (a \in A),$$

par les formules suivantes :
$S_\circ = S$, $S_{a+1} = S_a \cup \varphi(S_a) \cup \{i_{S_a}\}$, $S_a = \bigcup_{a<a} S_a$ si a un ordinal limite.
Posons alors, pour $S \in P$, 171

$$J(S) = \bigcup_{a \in A} S_a.$$

Il est clair alors que $J(S) \supset S$, que $J(S)$ est stable par φ, que $\operatorname{card} J(S) \leq \Pi$ (puisque $\operatorname{card} A = \Pi$), enfin que $J(S)$ est grand devant $\Pi'_\circ$ (en utilisant le fait que A est grand devant $\Pi'_\circ$,

Cela démontre 9.21.16 et achève la démonstration de 9.21.9.

Signalons aussi une variante de 9.21.9 :

Lemme 9.21.17. Les notations sont celles de 9.21.9. On désigne par F' la sous-catégorie pleine $\mathscr{H}\!omcart_B(B,E)$ de $F = \mathscr{H}\!om_B(B,E)$ formée des sections cartésiennes de E sur F. Alors :

(i) Tout objet de F' est accessible. Plus précisément, soit $\alpha \mapsto X(\alpha)$ un élément de F', et soit d un cardinal tel que $d \geq \Pi'_\circ$, $d \geq c$, et tel que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $X(\alpha)$ soit un objet d-accessible de E. Alors X est un objet d-accessible de F'.
(ii) Supposons $\Pi \leq c$ et que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ soient $\Pi'_\circ$-accessibles, ou que les catégories E_α soient stables par petites limites inductives filtrantes, et que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commutent aux dites limites inductives. Alors tout objet X de F' est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où pour tout $i \in I$, X_i est un objet de la sous-catégorie pleine $F'^{\Pi} = F' \cap F^{\Pi_\circ}$ de F', et où I est grand devant Π.

La démonstration étant toute analogue à celle de 9.21.9, nous nous contentons d'in- 172
diquer les points où une modification de cette dernière est nécessaire. On note d'abord :

Lemme 9.21.18. L'énoncé 9.21.10 reste valable lorsqu'on y remplace $F = \mathscr{H}\!om_B(B,E)$ par $F' = \mathscr{H}\!omcart_B(B,E)$, pourvu que l'on suppose que les foncteurs images inverse $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commutent aux limites inductives de type I.

Si donc sous les conditions de 9.21.17, d est un cardinal tel que $d \geq c$ et $d \geq \Pi'_\circ$, il résulte de ce qui précède et de l'hypothèse (9.21.3 c)) que pour tout ensemble ordonné I grand devant d, les limites inductives de type I sont représentables dans F' et se calculent argument par argument, d'où la conclusion 9.21.17 (i) par un argument immédiat.

Pour prouver (ii), il faut donner un complément à 9.21.13 :

Lemme 9.21.19. Sous les conditions de 9.21.13, supposons que $X \in \operatorname{ob} F'$ i.e. que X soit une section cartésienne de E sur B. Alors on peut renforcer la conclusion par l'assertion qu'il existe une fonction μ qui, à tout $i \in I$ et toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, associe un morphisme $\mu(i, f) : f^*X(\beta)_i \to X(\alpha)_{\varphi(i)}$ dans E_α, de telle façon que l'on ait :

d) Pour tout $i \in I$ et toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
 & f^*X(\beta)_{\varphi^2(i)} \\
X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),f)"] & \\
 & f^*X(\beta)_i \arrow[uu] \arrow[ul, "\mu(i,f)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X(\alpha)_{\varphi^2(i)} & \\
 & f^*X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ul, "\mu(\varphi(i),f)"'] \\
x(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,j)"'] &
\end{tikzcd} .$$

173 Pour le prouver, on procède comme dans 9.21.3, en considérant le morphisme composé $f^*(X(\beta)_i) \to f^*(X(\beta)) \xrightarrow{X(f)^{-1}} X(\alpha)$, où (comme déjà dans l'écriture de la condition d)) on identifie dans les notations un f-morphisme $R \to S$ de E avec le morphisme correspondant $R \to f^*(S)$ de E_α. Comme $X(\alpha) = \varinjlim_j X(\alpha)_j$, et I grand devant c, on peut factoriser le morphisme précédent par un des $X(\alpha)_j$, où j a priori dépend de i et de f, mais peut être choisi indépendant de f, soit $\psi(i)$. Quitte à agrandir la fonction φ de 9.21.13, on peut supposer que $\psi = \varphi$. En procédant comme pour les conditions b) et c) de 9.21.13, on voit que, quitte à agrandir encore l'application φ, on peut supposer que les deux diagrammes de 9.21.19 d) sont commutatifs.

9.21.20. L'application φ étant choisie comme dans 9.21.19, reprenons l'argument de 9.21.14, où il faut cependant supposer que J satisfait, en plus des conditions énoncées a) b) c), à la condition :

d) Pour tout flèche $f : \alpha \to \beta$ dans B, le foncteur $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commute aux limites inductives de type J.

174 Je dis que, moyennant cette condition supplémentaire, la section X_J de E sur B est cartésienne, i.e. pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, le morphisme

$$(*) \qquad X_J(\alpha) \longrightarrow f^*X_J(\beta)$$

est un isomorphisme. En effet, en vertu de la condition d) ci-dessus, le but du morphisme envisagé s'identifie à $\varinjlim_{i\in J} f^*(X(\beta)_i)$, et le morphisme s'obtient par passage aux $\varinjlim_J$ à partir du morphisme de ind-objets dans E_α

$$(X(\alpha)_i)_{i\in J} \longrightarrow (f^*)(X(\beta)_i)_{i\in J},$$

déduit des morphismes $\lambda(i, f) : X(\alpha)_i \to f^*(X(\beta)_{\varphi(i)})$ pour $i \in J$. Or les conditions explicitées dans 9.21.19 nous assurent que l'homomorphisme précédent de ind-objets est en fait un isomorphisme, un inverse étant obtenu par l'homomorphisme déduit du système des $\mu(i, f)$, pour $i \in J$. Cela prouve notre assertion que $(*)$ est un isomorphisme, donc que $X \in \operatorname{ob} F'$.

9.21.21. Nous allons supposer maintenant que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ sont $\varPi'_\circ$-accessibles. Alors les conditions sur J envisagées dans 9.21.20 sont satisfaites si J est grand devant $\varPi'_\circ$, stable par φ et tel que card $J \leq \varPi$, et on achève la démonstration de 9.21.17 comme en 9.21.15.

Théorème 9.22. Soit $p : E \to B$ un foncteur fibrant, où B est une catégorie essentiellement équivalente à une petite catégorie, et où pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ dans B le foncteur image inverse $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ est accessible (9.2). Supposons de plus que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} E$, la catégorie fibre E_α admette une filtration cardinale (9.12) et que tout objet de E_α soit accessible (9.3). Alors chacune des catégories $F = \mathscr{H}om_B(B, E)$ et $F' = \mathscr{H}omcart_B(B, E)$ admet une petite sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts (7.1), et chacun de ses objets est accessible. 175

Il est immédiat que l'énoncé ne change pas essentiellement quand on remplace B par une sous-catégorie pleine $B_\circ$ telle que le foncteur d'inclusion $B_\circ \to B$ soit une équivalence, et E par $E_\circ = E \times_B B_\circ$. Cela nous permet de supposer que B est une petite catégorie.

Soit, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $(\mathrm{Filt}^\varPi(E))_{\varPi \geq \varPi_\alpha}$ une filtration cardinale de E_α. Soit $c_\circ \in \mathscr{U}$ un cardinal satisfaisant les conditions suivantes :

$$(9.22.1)\qquad \begin{cases} c_\circ \geq \operatorname{Sup}_{\alpha \in ob B} \varPi_\alpha \quad , \quad c_\circ \geq \operatorname{card} \mathrm{F}l\ B; \\ \text{pour toute flèche } f : \alpha \to \beta \text{ de } B,\ f^* : E_\beta \to E_\alpha \text{ est } c_\circ\text{-accessible;} \\ \text{pour toute } \alpha \in \operatorname{ob} B, \text{ les objets de } \mathrm{Filt}^{\varPi_\alpha}(E_\alpha) \text{ sont } c_\circ\text{-accessibles.} \end{cases}$$

Posons

$$c = 2^{c_\circ},$$

de sorte que $c > c_\circ$, et pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, soit

$$C_\alpha = \mathrm{Filt}^c(E_\alpha).$$

Je dis que les conditions préliminaires à 9.21.9 et 9.21.17 sont vérifiées, en faisant $\varPi = \varPi_\circ = c$. C'est clair pour (9.21.2) et (9.21.3). Pour (9.21.4 a)), cela résulte de 9.17, et (9.21.4 b)) résulte de la condition 9.12 c) pour une filtration cardinale. Notons d'ailleurs que la condition 9.12 b) des filtrations cardinales implique que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, on a $C^\varPi_\alpha = C_\alpha = \mathrm{Filt}^C(E_\alpha)$, où $C^\varPi_\alpha$ est défini dans (9.21.6). Par suite, 9.22 résulte de 9.21.9 et de 9.21.17, et de façon plus précise, on a prouvé le 176

Corollaire 9.23. Sous les conditions de 9.22, si $c_\circ \in \mathscr{U}$ est un cardinal satisfaisant aux conditions (9.22.1), et si $c = 2^{c_\circ}$, alors la sous-catégorie F^c de F (resp. F'^c de F') formée des X tels que $X(\alpha) \in \operatorname{ob} \mathrm{Filt}^c(E)$ pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$ est essentiellement petite et génératrice par épimorphismes stricts ; plus précisément, tout objet X de F (resp. F') est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où les X_i sont dans F^c (resp. dans F'^c), et où I est un ensemble ordonné grand devant c.

Moyennant des hypothèses légèrement plus fortes dans 9.22, on peut d'ailleurs préciser considérablement 9.22 et 9.23 :

Corollaire 9.24. Sous les conditions de 9.22, supposons que chacune des catégories E_α ($\alpha \in \operatorname{ob} E$) est stable par petites limites inductives filtrantes, et que pour tout $\varPi \geq \varPi_\alpha$, $\mathrm{Filt}^\varPi(E_\alpha)$ est stable par limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés filtrants I tels que card $I \leq \varPi$ (ce qui renforce légèrement la condition 9.12 b) des filtrations cardinales). Dans le cas où c'est F' qu'on considère, supposons de plus 177
que pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, le foncteur $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commute aux petites

limites inductives filtrantes. Soit enfin $c_\circ \in \mathscr{U}$ un cardinal satisfaisant aux conditions (9.22.1), et considérons, pour tout cardinal $\Pi \geq c = 2^{c_\circ}$, la sous-catégorie strictement pleine F^Π (resp. F'^Π) de F (resp. de F') formée des X tels que l'on ait $X(\alpha) \in \mathrm{Filt}^\Pi(E_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$. Alors les sous-catégories envisagées définissent une filtration cardinale (9.12) de F (resp. de F').

Il faut vérifier les conditions a), b), c) de 9.12. Les conditions a) et b) résultent des conditions analogues pour les filtrations cardinales données des E_α, et de 9.21.10 (resp. 9.21.18, compte tenu de la deuxième des conditions (9.22.1)). Reste à prouver c), dont la première partie résulte aussitôt de 9.21.9 (resp. 9.21.17), en faisant $\Pi'_\circ = 0$, $\Pi_\circ = c$. Il reste à prouver que si on a deux cardinaux $\Pi' \geq \Pi \geq c$, alors pour tout X dans $F^{\Pi'}$ (resp. $F'^{\Pi'}$) on a $X \simeq \varinjlim_{i\in K} X_i$, avec les X_i dans F^Π (resp. F'^Π), K grand devant Π, et $\operatorname{card} K \leq \Pi'^\Pi$. Pour ceci, reprenons les démonstrations de 9.21.9 (ii) et de 9.21.17 (ii). On peut supposer que chaque I_α est de cardinal $\leq \Pi'$ en vertu de la condition 9.12 c) sur la filtration cardinale de E_α, donc on aura

$$\operatorname{card} I \leq (\Pi'^\Pi)^{\operatorname{card} \operatorname{ob} B} \leq (\Pi'^\Pi)^c = \Pi'^{\Pi c} = \Pi'^\Pi.$$

L'ensemble d'indices K utilisé dans 9.21.15 resp. 9.21.21 est l'ensemble des parties J de I qui sont filtrantes (i.e. grandes devant $\Pi'_\circ = 0$), stables par φ et telles que $\operatorname{card} J \leq \Pi$. Il est alors immédiat que l'on a

$$\operatorname{card} K \leq (\operatorname{card} I)^\Pi \leq (\Pi'^\Pi)^\Pi = \Pi'^{\Pi^2} = \Pi'^\Pi,$$

178 ce qui achève la démonstration de 9.24.

Pour terminer, il convient de donner un énoncé débarrassé des hypothèses un peu techniques de 9.22, en remplaçant celles-ci par la conjonction, pour les E_α, des hypothèses qui interviennent dans 9.11 (qui assurent l'accessibilité des objets des E) et dans 9.13 (qui assurent l'existence d'une filtration cardinale dans E) :

Corollaire 9.25. Soit $p : E \to B$ un foncteur fibrant, où B est une catégorie équivalente à une petite catégorie, et où pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, le foncteur $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ est accessible (9.2). On suppose de plus que, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, la catégorie fibre E_α satisfait aux conditions suivantes :

a) E_α admet une petite sous-catégorie pleine, génératrice par épimorphismes stricts (7.1).
b) E_α est stable par produits fibrés, par noyaux de doubles flèches, par sommes de deux objets et par conoyaux de doubles flèches, enfin par petites limites inductives filtrantes [3].
c) Le foncteur $\mathrm{Ker}(u, v)$ sur la catégorie des doubles flèches de E_α est accessible (par exemple, commute aux petites limites inductives filtrantes).
d) Tout épimorphisme strict de E_α (10.2) est un épimorphisme strict universel.

Sous ces conditions, chacune des catégories $F = \mathscr{H}om_B(B, E)$ et $F' = \mathscr{H}omcart_B(B, E)$ admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts, et tous ses objets sont accessibles (9.3).

179 De plus, 9.24 nous donne :

Corollaire 9.26. Sous les conditions de 9.25, et dans le cas où on considère $F' = \mathscr{H}omcart_B(B, E)$, supposons que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commutent aux petites limites inductives filtrantes. Alors F (resp. F') admet une filtration cardinale, qu'on peut expliciter par le procédé de 9.24.

[3]Cette dernière condition étant probablement inutile, cf. 9.13.2.

10. Glossaire

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici les définitions de quelques termes utilisés dans les numéros précédents. Nous désignons par C une catégorie.

10.1. Cartésien, Cocartésien.

Un diagramme de C

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

est dit cartésien s'il est commutatif et si le morphisme canonique de A dans le produit fibré $C \times_D B$ est un isomorphisme. Il est dit cocartésien si le diagramme correspondant de la catégorie opposée à $\mathscr{A}$ est cartésien.

10.2. Épimorphisme, épimorphisme strict. etc. Cf. 10.3. 180

10.3. Famille épimorphique, épimorphique stricte. etc. :

Une famille

$$f_i : A_i \longrightarrow B, i \in I,$$

de flèches de même but dans C est dite famille épimorphique, si pour tout objet C de C, l'application induite par les f_i :

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C) \longrightarrow \prod_i \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i, C) \tag{10.3.1}$$

est injective.

On dit que la famille envisagée est épimorphique stricte si l'image de l'application (10.3.1) est formée des familles (g_i) telles que pour tout objet R de C, tout couple d'indices $i, j \in I$ et tout couple de flèches $u : R \to A_i$, $v : R \to A_j$ avec $f_i u = f_j v$, on a aussi $g_i u = g_i v$. Lorsque les produits fibrés $A_i \times_B A_j$ sont représentables pour $i, j \in I$, il revient au même de dire que l'image essentielle de (10.3.1) est formée des (g_i) telles que pour tout couple d'indices $i, j \in I$, on ait $g_i \operatorname{pr}_1 = g_i \operatorname{pr}_2$, où $\operatorname{pr}_1, \operatorname{pr}_2$ sont les deux projections de $A_i \times_B A_j$. On dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est une famille épimorphique effective si la condition précédente est vérifiée, i.e. si elle est épimorphique stricte, et si les produits fibrés $A_i \times_A A_j$ sont représentables.

On dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est une famille épimorphique universelle, (resp. épimorphique effective universelle) si les morphismes f_i sont quarrables (10.3), et si pour toute flèche $B' \to B$, la famille des flèches $f'_i : A'_i \to A_i \times_B B'$, $i \in I$, déduite de la famille $(f_i)_{i \in I}$ par changement de base $B' \to B$, est épimorphique (resp. épimorphique effective).

La notion de famille épimorphique stricte universelle sera définie dans (II 2.5, 2.6). 181
Notons que lorsque les morphismes f_i sont quarrables (par exemple si dans C les produits fibrés sont représentables) cette notion coïncide avec celle de famille épimorphique

effective universelle (utiliser II 2.4). Dans le cas général, on a entre les six variantes envisagées de la notion d'épimorphicité les implications logiques :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \begin{array}{c}\text{épimorphique}\\ \text{effective}\\ \text{universelle}\end{array} \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\begin{array}{c}\text{épimorphique}\\ \text{effective}\end{array} \arrow[ddr, Rightarrow] & & & \begin{array}{c}\text{épimorphique}\\ \text{stricte}\\ \text{universelle}\end{array} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & \begin{array}{c}\text{épimorphique}\\ \text{stricte}\end{array} \arrow[dl, Rightarrow] & & \begin{array}{c}\text{épimorphique}\\ \text{universelle}\end{array} \arrow[dlll, Rightarrow] \\
 & \text{épimorphique} & & &
\end{tikzcd}
$$

Un morphisme $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$ s'appelle un épimorphisme (resp. un épimorphisme strict, resp. un épimorphisme effectif, resp. un épimorphisme universel, resp. un épimorphisme effectif universel, resp. un épimorphisme strict universel) si la famille de morphisme réduit au seul élément f est épimorphique (resp. ...).

10.4. Famille monomorphique, monomorphique stricte. etc. Une famille de flèches $f_i : A_i \to B$ de C est dite monomorphique (resp. monomorphique stricte,...) si en tant que famille de flèches de la catégorie opposée C° elle est épimorphique (resp. épimorphique stricte,...). Une flèche $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$ est appelée un monomorphisme (resp. un mono-
182 morphisme strict....) si la famille réduite à f est monomorphique (resp. monomorphique stricte,...), i.e. si f en tant que flèche de la catégorie opposée C° est un épimorphisme (resp. un épimorphisme strict,...).

10.5. Monomorphisme, monomorphisme strict. etc.Cf. 10.4.

10.6. Projecteur, image d'un projecteur, facteur direct d'un objet. Soit $f : X \to X$ un endomorphisme d'un objet de C. On dit que f est un projecteur si on a $f^2 = f$. Alors le couple (f, id_X) admet un conoyau représentable X' si et seulement si il admet un noyau représentable X'', et lorsqu'il en est ainsi, il existe un unique isomorphisme $u : X' \to X''$ dans C tel que $iup = f$, où $p : X \to X'$ et $i : X'' \to X$ sont les morphismes canoniques. On identifie alors généralement X' et X'', et on l'appelle l'image du projecteur f ; on dit que le projecteur f admet une image si $\mathrm{Ker}(f, \mathrm{id}_X)$ est représentable i.e. $\mathrm{Coker}(f, \mathrm{id}_X)$ est représentable. Un sous-objet (resp. un quotient) Y de X est appelé un facteur direct de X si on peut trouver un projecteur f dans X se factorisant par Y, et admettant Y comme image en tant que sous-objet (resp. en tant que quotient) de X. On dit parfois, par abus de langage, qu'un objet de C est un facteur direct de X, s'il est isomorphe à l'image d'un projecteur dans X.

10.7. Quarrable. Une flèche $f : A \to B$ de C est dite quarrable si pour toute flèche $B' \to B$ de C, le produit fibré $A \times_B B'$ est représentable dans C.

183 10.8. Quotient, quotient strict. etc.

Soit A un objet de C. Deux épimorphismes $f : A \to B$, $f' : A \to B'$ de source A sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme $u : B \xrightarrow{\sim} B'$ tel que $uf = f'$. On obtient ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des épimorphismes de source A, dont les classes sont appelées les quotients, ou objets quotients, de A. Pour tout quotient de A, on suppose généralement choisi un élément de cette classe, soit $f : A \to B$, et on parle souvent (par abus de langage) du quotient B de A (ou du quotient $f : A \to B$ de A). On dit que B est un quotient strict (resp. un quotient effectif, resp. un quotient universel,...) si le morphisme $f : A \to B$ est un épimorphisme strict (resp. un épimorphisme effectif, resp. un épimorphisme universel,...) (10.3).

10.9. Relations d'équivalence. Soient F, G deux préfaisceaux d'ensembles sur C. Un diagramme $p_1, p_2 : F \rightrightarrows G$ est appelé une relation d'équivalence sur G si pour tout objet A de C, l'application

$$(p_1(A), p_2(A)) : F(A) \longrightarrow G(A) \times G(A)$$

induit une bijection de $F(A)$ sur e graphe d'une relation d'équivalence sur l'ensemble $G(A)$.

Un diagramme $p_1, p_2 : B \rightrightarrows C$ dans C est appelé une relation d'équivalence sur C si le diagramme de préfaisceaux correspondant est une relation d'équivalence. Lorsque dans C les produits finis et produits fibrés sont représentables, un foncteur $\Phi : C \to C'$ commutant aux produits finis et produits fibrés transforme les relations d'équivalence sur C en relation d'équivalence sur $\Phi(C)$.

Soit $\Pi : C \to D$ un morphisme de $\mathscr{A}$ tel que le produit fibré $C \times_D C$ soit repré- 184
sentable. Alors le diagramme $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : C \times_D C \rightrightarrows C$ est une relation d'équivalence sur C.

10.10. Relation d'équivalence effective, effective universelle. Une relation d'équivalence $p_1, p_2 : R \rightrightarrows A$ sur un objet A de C est dite relation d'équivalence effective s'il existe un morphisme $\Pi : A \to B$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

soit cartésien et cocartésien. (Le morphisme π est le conoyau du couple (p_1, p_2), et est donc déterminé à isomorphisme unique près). Le morphisme π est alors un épimorphisme effectif ; si c'est un épimorphisme effectif universel (10.3) on dit que la relation d'équivalence est effective universelle.

10.11. Sous-objet, sous-objet strict. etc. Ce sont les notions duales de celles de quotient, quotient strict etc. (10.8).

Bibliographie

[1] B. Mitchell, « Theory of categories », Academie Press (1965).

II. Appendice : Univers (par N. Bourbaki(*))

185

1. Définition et premières propriétés des univers

DÉFINITION 1. Un ensemble U est appelé un univers s'il satisfait aux conditions :

(U.I) si $x \in U$ et si $y \in x$, alors $y \in U$;
(U.II) si $x, y \in U$, alors $\{x, y\} \in U$;
(U.III) si $x \in U$, alors $\mathscr{P}(x) \in U$;
(U.IV) si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U, et si $I \in U$, alors la réunion $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$ appartient à U ;
(U.?) si $x, y \in U$, alors le coupe $(x, y) \in U$.

N.B. Comme il a été je crois décidé pour les prochaines éditions, on définit le couple à la Kuratowski par $(x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, la condition (U. ?) est inutile car elle résulte de (U.II).

Exemples. 1) L'ensemble vide est un univers noté $U_\circ$.
2) Considérons les mots finis non vides formés avec les quatre symboles $''\{'', ''\}'', '',''$ et $''\varnothing''$ (cf. Alg. I). Définissons, par récurrence sur la longueur n d'un tel mot, la notion de mot significatif :
186
(a) Pour $n = 1$, seul le mot $\varnothing$ est significatif ;
(b) pour qu'un mot A de longueur n soit significatif, il faut et suffit qu'il existe p mots significatifs distincts $A_1, \dots, A_p$ $(p \geq 1)$ de longueurs $< n$ tels que
$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}.$$

Par exemple $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ sont des mots significatifs. Il est clair, par récurrence sur la longueur, que tout mot significatif désigne un terme de la Théorie des Ensembles ; par exemples, si $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, A désigne l'ensemble dont les éléments sont A_1, $A_2, \dots$, et A_p ; ces termes sont évidemment des ensembles finis. Soit U_1 l'ensemble des ensembles ainsi obtenus. On vérifie aisément que U_1 satisfait aux conditions (U.I), (U.II), (U.III) et (U.IV) de la déf. 1 (mais non à cette idiote de (U. ?), ce qui n'est pas grave si on veut bien décanuler le couple). Donc U_1 est un univers. On notera que les éléments de U_1 sont finis, et que U_1 est dénombrable.

Dans les énoncés qui suivent, U désigne un univers.

PROPOSITION 1. Si $X \in U$ et si $y \subset x$, alors $y \in U$.

En effet, on a $\mathscr{P}(x) \in U$ par (U.III), d'où $y \in \mathscr{P}(x)$ et $y \in U$ par (U.I).

COROLLAIRE. Si $x \in U$, tout ensemble quotient y de x est élément de U.

En effet y est une partie de $\mathscr{P}(x)$. D'où $y \in U$ par (U.III) et la prop. 1.

187 PROPOSITION 2. Si $x \in U$, on a $\{x\} \in U$.

Ça résulte de (U.II) appliqué pour $y = x$.

PROPOSITION 3. Tout couple, tout triplet, tout quadruplet d'éléments de U est un élément de U.

C'est vrai pour les couples d'après le N.B. ou (U. ?). On en déduit le cas des triplets car $(x, y, z) = ((x, y), z)$, puis celui des quadruplets car $(x, y, z, t) = ((x, y, z), t)$.

PROPOSITION 4. Si $X, Y \in U$, alors $X \times Y \in U$.

[3]Nous reproduisons ici, avec son accord, des papiers secrets de N. Bourbaki. Les références de ce texte se rapportent à son savant ouvrage.

En effet, pour $x \in X$, $\{x\} \times Y$ est la réunion de la famille $\{(x, y)\}_{y \in Y}$; comme on a $\{(x, y)\} \in U$ d'après (U.I), (U.II) et la prop.3, on a $\{x\} \times Y \in U$ d'après (U.IV). Enfin $X \times Y$ est la réunion de la famille $(\{x\} \times Y)_{x \in X}$; c'est donc un élément de U d'après (U.IV) encore.

COROLLAIRE 1. Si X, Y, $Z, \ldots$ sont des éléments de U, tous les ensembles de l'échelle construite sur $X, Y, Z, \ldots$ sont des éléments de U (cf. chap.IV, §).

Ça résulte en effet d'applications successives de la prop. 4 et de (U.III).

COROLLAIRE 2. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U et si $I \in U$, l'ensemble somme $\Sigma_{\alpha \in I} x_\alpha$ est un élément de U.

En effet, cet ensemble somme est une partie du produit $(\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha) \times I$ (chap. II), produit dont les deux facteurs sont éléments de U (par (U.IV) et l'hypothèse). On applique alors les prop. 4 et 1.

PROPOSITION 5. Si X et Y sont des éléments de U, toute correspondance entre X et Y (en particulier toute application de X dans Y) est un éléments de U. 188

En effet, une telle correspondance C est un triplet (X, Y, Γ) où Γ est une partie de $X \times Y$ (le graphe de C) (chap. II, §). On a $\Gamma \in U$ d'après les prop. 4 et 1. D'où $C \in U$ par la prop. 3.

PROPOSITION 6. Si $X, Y \in U$, tout ensemble Z de correspondances entre X et Y (en particulier d'applications de X dans Y) est élément de U.

En effet, Z est une partie de $\{X\} \times \{Y\} \times \mathscr{P}(X \times Y)$. Or ce produit est élément de U d'après la prop.2 et le cor. à la prop.4. On a donc $Z \in U$ par la prop. 1.

COROLLAIRE. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U, et si $I \in U$, on a $\Pi_{\alpha \in I} x_\alpha \in U$.

En effet, ce produit est un ensemble d'applications de I dans $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$, et cette réunion est élément de U par (U.IV).

PROPOSITION 7. Si X est une partie de U dont le cardinal est au plus celui d'un élément de U, alors X est un élément de U.

Soit I un élément de U tel que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(I)$. On a une surjection $i \mapsto x_i$ d'une partie I' de I sur X. Alors X est la réunion de la famille $(\{x_i\})_{i \in I'}$; or cette réunion est élément de U par la prop. 1, la prop. 2 et (U.IV).

COROLLAIRE. Si U est non vide toute partie finie de U est un élément de U, et U a des éléments de cardinal fini arbitraire. 189

Par contre, si $U = \varnothing$, $\varnothing$ est une partie finie de $\varnothing$ mais non un élément de $\varnothing$.
En effet, si U est non vide, la prop. 2 montre qu'un ensemble $x_\circ$ à un élément appartient à U. Par récurrence sur n, posons $x_{n+1} = \mathscr{P}(x_n)$. On a $x_n \in U$ par (U.III), et $\mathrm{card}(x_{n+1}) = 2^{\mathrm{card}(x_n)}$, de sorte que U a des éléments de cardinal fini arbitrairement grand.

Remarque. Il résulte de la prop. 2 et du cor. à la prop. 7 que tout univers non vide U contient l'univers U_1 de l'ex. 2 ; en effet on a $\varnothing \in U$ d'après la prop. 1. Ainsi U_1 est l'intersection de tout les univers non vides. Plus généralement :

PROPOSITION 8. Si $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille non vide d'univers, alors $U = \bigcap_{\lambda \in L} U_\lambda$ est un univers.

Ceci résulte aussitôt de la déf. 1.

2. Univers et espèces de structures

Soit $\mathscr{E}$ une espèce de structure ; supposons, pour fixer les idées et alléger l'exposé, que chaque structure d'espèce $\mathscr{E}$ est définie sur un ensemble de base. Soit (X, S) une structure d'espèce $\mathscr{E}$ (X étant l'ensemble de base, et S la structure), et soit U un univers. Si $X \in U$, alors tous les objets constitutifs de la structure S sur X sont éléments de U (par le cor. 1 de la prop. 4, *n*° 1 et par (U.I)) de sorte que la structure (X, S) est élément de U.

190 Supposons maintenant que $\mathscr{E}$ soit une espèce de structure avec morphismes. X et X' sont des éléments de U munis de structures d'espèce $\mathscr{E}$, alors l'ensemble des morphismes de X dans X' est encore un élément du U (*n*° 1, prop. 6).

Considérons alors la catégorie $(U\text{-}\mathscr{E})$ définie au § 1, *n*° 2, ex. c). Comme les objets et les flèches de $(U\text{-}\mathscr{E})$ sont des éléments de U, $(U\text{-}\mathscr{E})$ est un couple de parties de U, muni d'un quadruplet d'applications ; ce n'est pas, en général, un élément de U. La notation $X \in (U\text{-}\mathscr{E})$ voudra dire que X est un élément de U muni d'une structure d'espèce $\mathscr{E}$.

La catégorie $(U\text{-}\mathscr{E})$ est stable pour de nombreuses opérations :

a) Si $X \in (U\text{-}\mathscr{E})$, et si X' est une partie de X qui admet une structure induite, alors $X' \in (U\text{-}\mathscr{E})$. Ça résulte de la prop. 1, *n*° 1.
b) Si $X \in (U\text{-}\mathscr{E})$, et si X'' est un ensemble quotient de X qui admet une structure quotient, alors $X'' \in (U\text{-}\mathscr{E})$ (cor. de la prop. 1, *n*° 1).
c) Si $X, Y \in (U\text{-}\mathscr{E})$, et si $X \times Y$ admet une structure produit, alors $X \times Y \in (U\text{-}\mathscr{E})$ (prop. 4, *n*° 1). Plus généralement, si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $(U\text{-}\mathscr{E})$, si on a $I \in U$, et si $\Pi_{i\in I} X_i$ admet une structure produit, alors $\Pi_{i\in I} X_i \in (U\text{-}\mathscr{E})$ (cor. de la prop. 6). Assertions analogues pour les structures sommes (cor. 2 de la prop. 4).
d) Soient I un ensemble préordonné, et $(X_i, f_{ij})_{i,j\in I}$ un système projectif (resp. inductif) d'ensembles munis de structures d'espèce $\mathscr{E}$ et de morphismes ; soit L la limite de ce système, au sens du chap. III. Si $X_i \in U$ pour tout i, si $I \in U$, et si L admet une structure limite projective (resp. inductive), alors on a $L \in (U\text{-}\mathscr{E})$:
191 en effet L est une partie de $\Pi_{i\in I} X_i$ (resp. un ensemble quotient de $\Sigma_{i\in I} X_i$), et est donc un élément de U d'après le *n*° 1.

Donnons encore quelques exemples plus particuliers :

* 1) Soient X, $Y \in (U\text{-}\mathrm{Top})$ deux espaces localement compacts. Alors l'ensemble $\mathscr{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte (Top. Géné. X), est un élément de $(U\text{-}\mathrm{Top})$. En effet on a $\mathscr{C}(X, Y) \in U$ d'après la prop. 6 du *n*° 1.⁎
* 2) Soient $X, Y \in (U\text{-}\mathrm{Ab})$. Alors le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, Y)$ est un élément de $(U\text{-}\mathrm{Ab})$ par la prop. 6 du *n*° 1. Si on suppose de plus qu'on a $\mathbf{Z} \in U$, le produit tensoriel $X \otimes_{\mathbf{Z}} Y$ est un élément de $(U\text{-}\mathrm{Ab})$; en effet ce produit tensoriel est un quotient de $\mathbf{Z}^{X\times Y}$, lequel est une partie de $\mathbf{Z}^{X\times Y}$, qui lui-même est un élément de U par les prop. 4 et 6 du *n*° 1.⁎
* 3) Soit $X \in (U\text{-}\mathrm{Unif})$ un espace uniforme. Alors son complété $\widehat{X}$ est un élément de $(U\text{-}\mathrm{Unif})$. En effet $\widehat{X}$ est un ensemble de classes d'équivalences de filtres de Cauchy sur X ; or un filtre sur X est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$, donc une classe d'équivalence de filtres est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X)))$, de sorte que $\widehat{X}$ est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))))$, donc un élément de U par (U.III) et (U.I).⁎

N.B. Moralité, Bourbaki devra veiller à bien « canonifier » ses constructions. Par exemple, dans celles où on adjoint un élément ∞ (compactifié d'Alexandroff, corps projectif), il y aura intérêt à prendre $\infty = \varnothing$ (car $\varnothing$ est élément de tout univers non vide) et à 192
former l'ensemble somme de $\{\varnothing\}$ et de l'ensemble donné. Bien entendu il faudrait aussi « canonifier » l'ensemble à deux éléments servant à construire les ensembles sommes ; ainsi $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ me paraît un bon candidat car il appartient à tout univers non vide.

3. Univers et catégories

Soient U un univers et C une catégorie. Nous écrivons $C \in U$ si on a $\mathrm{Ob}(C) \in U$ et $\mathrm{F}l\,(C) \in U$. Cette écriture est justifiée du fait que C est le sextuplet formé de $\mathrm{Ob}(C)$, de$\mathrm{F}l\,(C)$ et des quatre applications structurales ; donc si $\mathrm{Ob}(C) \in U$ et$\mathrm{F}l\,(C) \in U$, ces quatre applications sont éléments de U (n° 1, cor. 1 de la prop. 4), donc aussi le sextuplet C (n° 1, prop. 3, cum grano salis). Ceci est d'ailleurs un cas particulier du n° 2, si l'on considère l'espèce de structure « cat″ de catégorie. Avec les notations du n° 2, la relation $C \in U$ s'écrit aussi $C \in (U\text{-}\mathrm{cat})$.

On notera qu'une catégorie comme $(U\text{-}\mathrm{Ens})$, $(U\text{-}\mathrm{Ord})$, $(U\text{-}\mathrm{Top})$ ou $(U\text{-}\mathrm{Gr})$ n'est pas, en général, un élément de U.

Soient C, D deux catégories et U un univers tels que $C, D \in U$. Si C' est une sous-catégorie de C, on a $C' \in U$; la catégorie produit $C \times D$, la catégorie somme de C et D, les catégories opposées C° et D° sont aussi éléments de U (cf. n° 2). La catégorie de foncteurs $E = \mathscr{H}\!om(C, D)$ est également un élément de U : en effet $\mathrm{Ob}(E)$ est un ensemble de couples d'applications $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$, $F\ell\,(C) \to F\ell\,(D)$, donc $\mathrm{Ob}(E) \in U$ par le n° 1 ; quant à $F\ell\,(E)$, c'est un ensemble de morphisme fonctoriels, c'est-à-dire 193
d'applications $\mathrm{Ob}(C) \to F\ell\,(D)$, d'où $F\ell\,(E) \in U$ par la prop. 6 du n° 1.

PROPOSITION 9. Soient $\mathscr{E}$ une espèce de structure avec morphismes, et U, U' deux univers tels que $U' \subset U$. Alors $(U'\text{-}\mathscr{E})$ est une sous-catégorie pleine de $(U\text{-}\mathscr{E})$.

En effet, si x et y sont des objets de $(U'\text{-}\mathscr{E})$, ce sont par définition des objets de $(U\text{-}\mathscr{E})$. Quant à $\mathrm{Hom}(x, y)$, c'est la même ensemble dans les deux catégories (cf. . § 1, n° 2, ex. c)).

N.B. On notera que l'hypothèse que U et U' sont des univers est inutile, de sorte que la prop. 9 remonterait avantageusement au § 1, n° 4. Mais la Tribu a demandé qu'elle soit ici.

Remarque. Il arrive que les axiomes de l'espèce de structure $\mathscr{E}$ impliquent que les cardinaux des ensembles munis de structures d'espèce $\mathscr{E}$ soient bornés par un cardinal fixe, soit c (* par exemple l'espèce de structure de groupe fini, de groupe de type fini, de module de type fini sur un anneau fixe A, ou d'algèbre de type fini sur A *). Supposons alors qu'il existe un élément z de U' tel que $c \leq \mathrm{card}(z)$. Alors, pour tout ensemble x muni d'une structure d'espèce $\mathscr{E}$, il existe un élément x' de U' équipotent à x, par exemple une partie de z ; munissons x' de la structure déduite de celle de x par transport de structure ; on obtient ainsi un élément de $(U'\text{-}\mathscr{E})$. Il s'ensuit que le foncteur d'inclusion de $(U'\text{-}\mathscr{E})$ dans $(U\text{-}\mathscr{E})$ est alors essentiellement surjectif (§ 4, n° 2, déf. 2) et est donc une équivalence de catégorie (§ 4, n° 3, th. 1).

4. L'axiome des univers 194

Les fort agréables résultats de stabilité du n° 2 n'ont d'intérêt que si on peut les appliquer à autre chose qu'aux deux petits univers $U_\circ$ et U_1 décrits au n° 1. Nous ajouterons donc aux axiomes de la Théorie des Ensembles l'axiome suivant :

(A.6) Pour tout ensemble x, il existe un univers U tel que $x \in U$.

Cet axiome implique que, si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille d'ensembles, il existe un univers U tel que $x_\alpha \in U$ pour tout $\alpha \in I$: il suffit, en effet, d'appliquer (A.6) à $x = \bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha$ et d'appliquer la prop. 1 du *n*° 1.

En particulier, étant donnée une catégorie C, il existe un univers U tel que $C \in U$ au sens du *n*° 3 : on applique ce qui précède à la famille $(\mathrm{Ob}(C), F\ell(C))$. Ceci s'applique aux catégories de la forme $(V\text{-}\mathscr{E})$ où $\mathscr{E}$ est une espèce de structure avec morphismes et V un ensemble, un univers par exemple ; en général on a $V \neq U$.

Par exemple, si V est un univers, on a $\mathrm{Ob}(V\text{-}\mathrm{Ens}) = V$ et $F\ell(V\text{-}\mathrm{Ens}) \subset V$ (*n*° 1, prop. 5). Les univers U tels que $(V\text{-}\mathrm{Ens}) \in U$ sont donc ceux tels que $V \in U$. Or la relation $V \in V$ est impossible pour un univers : en effet, pour toute partie A de V, on aurait $A \in V$ (*n*° 1, prop. 1), d'où $\mathrm{card}(\mathscr{P}(V)) \leq \mathrm{card}(V)$, ce qui est impossible.

5. Univers et cardinaux fortement inaccessibles

195

Soit U un univers. D'après la condition (U.I) de la déf. 1 tout élément x de U est une partie de U ; on a donc $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(U)$. Comme les cardinaux des parties de U forment un ensemble bien ordonné, le cardinal

$$(1) \qquad c(U) = \sup_{x\in U} \mathrm{card}(x)$$

existe. Notons que, pour tout cardinal $c < c(U)$, il existe un élément x de U tel que $\mathrm{card}(x) = c$; en effet, il existe par définition $y \in U$ tel que $c \leq \mathrm{card}(y) \leq c(U)$, et l'on prend pour x une partie convenable de y. Réciproquement, si $x \in U$, on a $\mathrm{card}(x) < c(U)$; en effet on a $\mathscr{P}(x) \in U$ par (U.III), d'où $2^{\mathrm{card}(x)} \leq c(U)$. Le cardinal $c(U)$ a donc les propriétés suivantes :

1) Si c est un cardinal $< c(U)$, on a $2^c < c(U)$; en effet, si x est un élément de U de cardinal c, on a $\mathscr{P}(x) \in U$ par application de (U.III), d'où $2^c < c(U)$.
2) Si $(c_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille de cardinaux telle que $c_\lambda < c(U)$ pour tout $\lambda \in I$ et que $\mathrm{card}(I) < c(U)$, alors le cardinal somme $\Sigma_{\lambda\in I} c_\lambda$ est $< c(U)$. En effet soit $x_\lambda \in U$ tel que $\mathrm{card}(x_\lambda) = c_\lambda$; quitte à remplacer I par un ensemble d'indices équipotent, on peut supposer qu'on a $I \in U$; alors l'ensemble somme des x_λ est élément de U (cor. 2 de la prop. 4 du *n*° 1), ce qui démontre notre assertion.

Posons la définition suivante :

196 DÉFINITION 2. Un cardinal d est dit fortement inaccessible si :

(FI.1) Si c est un cardinal tel que $c < d$, on a $2^c < d$.

(FI.2) Si $(c_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille de cardinaux telle que $c_\lambda < d$ pour tout $\lambda \in I$ et si $\mathrm{card}(I) < d$, alors $\Sigma_{\lambda\in I} c_\lambda < d$.

Exemples. Le cardinal 0 et le cardinal infini dénombrable sont fortement inaccessibles. Aucun cardinal fini non nul n'est fortement inaccessible. Ainsi nous venons de démontrer que l'axiome (A.6) des univers implique la relation :

$(A'.6)$ Tout cardinal est strictement majoré par un cardinal fortement inaccessible.

Inversement :

THÉORÈME 1. La relation $(A'.6)$ implique l'axiome (A.6) des univers.

En effet soit A un ensemble. Il s'agit de construire un univers U dont A est élément. Définissons par récurrence une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles au moyen de :

(2) $A_0 = A$, $A_{n+1} =$ réunion des éléments de $A_n =$ ensemble des éléments de A_n.

Posons $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Soit, par $(A'.6)$, c un cardinal fortement inaccessible tel que $\mathrm{card}(B) < c$.

Il existe un ensemble bien ordonné I tel que $\mathrm{card}(I) = c$. Quitte à remplacer I par son plus petit segment de cardinal c, on peut supposer que tout segment de I distinct de I a un cardinal $< c$. Nous noterons $\mathscr{E}$ le plus petit élément de I. Il résulte de l'hypothèse **197**
sur les segments que I n'a pas de plus grand élément (sinon on l'enlèverait), donc que tout élément de I admet un successeur ; pour $\alpha \in I$, nous noterons $s(\alpha)$ le successeur de α

Ceci étant, définissons, par récurrence transfinie, une famille $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'ensembles au moyen de :

$$(3) \qquad \begin{cases} B_{\mathscr{E}} = B \\ B_{s(\alpha)} = B_\alpha \cup \mathscr{P}(B_\alpha) \\ B_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta \text{ si } \alpha \text{ n'a pas de prédécesseur.} \end{cases}$$

Posons $U = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$. Nous allons montrer que U est l'univers cherché.

On a d'abord $A \in U$, car $A = A_\circ$ est une partie de $B = B_{\mathscr{E}}$, donc un élément de $\mathscr{P}(B_{\mathscr{E}}) \subset B_{s(\mathscr{E})}$.

Notons ensuite que, pour tout $\alpha \in I$, on a :

$$(4) \qquad \mathrm{card}(B_\alpha) < c.$$

Procédons en effet par récurrence transfinie sur α. C'est vrai pour $\alpha = \mathscr{E}$ par hypothèse. De (4) on déduit $\mathrm{card}(B_{s(\alpha)}) \leq \mathrm{card}(B_\alpha) + 2^{\mathrm{card}(B_\alpha)} < c + c$ (par (FI.1)) $= c$ (car c est infini). Enfin, si α n'a pas de prédécesseur, l'ensemble I' des $\beta < \alpha$ a un cardinal $< c$ par construction ; d'où (si $\mathrm{card}(B_\beta) < c$ pour tout $\beta < \alpha$), $\mathrm{card}(B_\alpha) = \mathrm{card}(\bigcup_{\beta\in I'} B_\beta) \leq \Sigma_{\beta\in I'} \mathrm{card}(B_\beta) < c$ (par (FI.2)). Ceci démontre (4).

Montrons maintenant qu'on a **198**

$$(5) \qquad \mathrm{card}(x) < c \text{ pour tout } x \in U.$$

En effet, il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a « $\mathrm{card}(x) < c$ pour tout $x \in B_\alpha$ ». Procédons encore par récurrence transfinie sur α. C'est vrai pour $\alpha = \mathscr{E}$, car, si $x \in B_{\mathscr{E}} = B$, il existe $n \geq 0$ tel que $x \in A_n$; d'où $X \subset A_{n+1}$ par (2), $x \subset B$ et $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(B) < c$. Le cas où α n'a pas de prédécesseur est évident. Enfin, si $x \in B_\alpha$ et si $\alpha = s(\beta)$, on a soit $x \in B_\beta$ et l'assertion « $\mathrm{card}(x) < c$ » est vraie par récurrence, soit $x \in \mathscr{P}(B_\beta)$, d'où $x \subset B_\beta$ et l'assertion « $\mathrm{card}(x) < c$ » est vraie par (4).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que U est bien un univers :

(U.I) Soient $x \in U$ et $y \in x$. Il s'agit de montrer qu'on a $y \in U$. Autrement dit il s'agit de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a la relation :

$$\text{« } x \in B_\alpha \text{ et } y \in x \Longrightarrow y \in B_\alpha \text{ ».}$$

On procède encore par récurrence transfinie sur α. C'est vrai pour $\alpha = \mathscr{E}$ car $x \in B_{\mathscr{E}} = B$ implique $x \in A_n$ pour un certain n ; donc, si $y \in x$, on a $y \in A_{n+1}$, d'où $y \in B = B_{\mathscr{E}}$. Le passage à un élément α sans prédécesseur est évident. Passons enfin de α à $s(\alpha)$: si $x \in B_{s(\alpha)}$ et si $y \in x$, on a, soit $x \in B_\alpha$, d'où $y \in B_\alpha \subset B_{s(\alpha)}$ par récurrence, soit $x \in \mathscr{P}(B_\alpha)$, d'où encore $y \in B_\alpha \subset B_{s(\alpha)}$.

(U.II) Soient $x, y \in U$. Comme la famille $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ est croissante par (3), il existe $\alpha \in I$ tel que $x, y \in B_\alpha$. Alors $\{x, y\} \in \mathscr{P}(B_\alpha) \subset B_{s(\alpha)} \subset U$.

(U.III) Soit $x \in U$. Il existe alors $\alpha \in I$ tel que $x \in B_\alpha$. Il suffit donc de montrer que, **199** pour tout $\alpha \in \boldsymbol{I}$, on a la relation :

$$« x \in \boldsymbol{B}_\alpha \Longrightarrow \mathscr{P}(x) \in \boldsymbol{B}_{s(s(\alpha))} » .$$

On procède encore par récurrence transfinie sur α. Si $\alpha = \mathscr{E}$, on a $x \in A_n$ pour un certain n, d'où $y \subset A_{n+1} \subset \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathscr{E}}$ pour toute partie y de x ; ainsi on a $y \in \mathscr{P}(\boldsymbol{B}_{\mathscr{E}}) \subset \boldsymbol{B}_{s(\mathscr{E})}$ pour tout $y \in \mathscr{P}(x)$, d'où $\mathscr{P}(x) \subset \boldsymbol{B}_{s(\mathscr{E})}$ et $\mathscr{P}(x) \in \mathscr{P}(\boldsymbol{B}_{s(\mathscr{E})}) \subset \boldsymbol{B}_{s(s(\mathscr{E}))}$, de sorte que notre assertion est vraie pour $\alpha = \mathscr{E}$. Le passage à un élément α sans prédécesseur est immédiat, car $\beta < \alpha$ implique alors $s(s(\beta)) < \alpha$. Passons enfin de α à $s(\alpha)$; soit $x \in \boldsymbol{B}_{s(\alpha)}$; si $x \in \boldsymbol{B}_\alpha$, on a $\mathscr{P}(x) \in \boldsymbol{B}_{s(s(\alpha))} \subset \boldsymbol{B}_{s(s(s(\alpha)))}$ par récurrence ; si $x \in \mathscr{P}(\boldsymbol{B}_\alpha)$, on a $x \subset \boldsymbol{B}_\alpha$, d'où $\mathscr{P}(x) \subset \mathscr{P}(\boldsymbol{B}_\alpha)$ et $\mathscr{P}(x) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\boldsymbol{B}_\alpha)) \in \boldsymbol{B}_{s(s(s(\alpha)))}$.

(U.IV) Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in K}$ une famille d'éléments de $\boldsymbol{U}$ telle que $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{U}$. Il s'agit de montrer que la réunion $x = \bigcup_{\lambda \in K} x_\lambda$ est élément de $\boldsymbol{U}$. Pour tout $\lambda \in \boldsymbol{K}$, choisissons un $\alpha(\lambda) \in \boldsymbol{I}$ tel que $x_\lambda \in \boldsymbol{B}_{\alpha(\lambda)}$. Montrons que l'ensemble $\alpha(\boldsymbol{K})$ des $\alpha(\lambda)$ est majoré dans $\boldsymbol{I}$: en effet, s'il ne l'était pas, on aurait :

$$\boldsymbol{I} = \bigcup_{\lambda \in K} [\mathscr{E}, \alpha(\lambda)],$$

ce qui contredirait (FI.2) car card$(\boldsymbol{K}) < c$ et card$([\mathscr{E}, \alpha(\lambda)] < c$ pour tout $\lambda \in \boldsymbol{K}$. Soit donc β un majorant de $\alpha(\boldsymbol{K})$; on a $x_\lambda \in \boldsymbol{B}_\beta$ pour tout $\lambda \in \boldsymbol{K}$ car la famille $(\boldsymbol{B}_\alpha)_{\alpha \in I}$ est croissante. On a donc $x_\lambda \in \boldsymbol{B}_\beta$ d'après ce qu'on a vu dans la démonstration de (U.I), d'où $x = \bigcup_{\lambda \in K} x_\lambda \subset \boldsymbol{B}_\beta$. Par (3) il s'ensuit qu'on a $x \in \boldsymbol{B}_{s(\beta)}$, d'où $x \in \boldsymbol{U}$. C.Q.F.D.

200 DÉFINITION 3. Soient x, y deux ensembles et n un entier ≥ 0. On dit que y est un composant d'ordre n de x s'il existe une suite $(x_j)_{j=0,\ldots,n}$ telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, et $x_{j+1} \in x_j$ pour $j = 0, \ldots, n-1$.

Ainsi x est le seul composant d'ordre 0 de x. Les composants d'ordre 1 (resp. 2) de x sont les éléments de x (resp. les éléments des éléments de x). On dit que y est un composant de x s'il existe $n \geq 0$ tel que y soit composant d'ordre n de x. La relation « y est un composant de x » est une relation de préordre. D'après le schéma de sélection-réunion (chap. II, ...) la relation « y est un composant de x » est collectivisante par rapport à y, de sorte que les composants de x forment un ensemble.

DÉFINITION 4. Soit c un cardinal. On dit qu'on ensemble x est de type c (resp. de type strict c, de type fini) si tout les composants de x ont des cardinaux $\leq c$ (resp. $< c$, finis).

Exemples. Les éléments de l'univers U_1 (n° 1, ex. 2) sont tous de type fini. Si c est un cardinal, et si x est de type c (resp. type strict c, type fini), alors tout composant de x et toute partie de x sont de type c (resp. type strict c, type fini) ; de même $\mathscr{P}(x)$ est de type 2^c (resp. de type strict 2^c, de type fini). Si x est de type c et si $c \leq c'$, alors x est de type c'.

201 LEMME. Soient c un cardinal fortement inaccessible non dénombrable, et X un ensemble de type strict c. Alors il existe un cardinal $d < c$ tel que X soit de type d.

En effet, pour tout entier n, notons d_n le cardinal de l'ensemble X_n des composants d'ordre n de X. On a $d_0 = 1$, $d_1 = \text{card}(X) < c$, et, comme $X_n = \bigcup_{y \in X_{n-1}} y$, on en déduit, par récurrence sur n et usage de (FI.2), qu'on a $d_n < c$ pour tout n. Alors les d_n sont majorés par le cardinal $d = \Sigma_{j \geq 0} d_j$, qui est $< c$ par (FI.2) et l'hypothèse de non dénombrabilité de c. Alors, si Y est un composant d'ordre n de X, on a $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X_{n+1}) \leq d$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 10. Soient U un univers et c un cardinal fortement inaccessible. Alors l'ensemble U' des $x \in U$ qui sont de type strict c est un univers.

En effet, si $x, y \in U'$ et si $z \in x$, on a évidemment $z \in U'$ et $\{x, y\} \in U'$. Si $x \in U'$, on a $\operatorname{card}(x) < c$, d'où $\operatorname{card}(\mathscr{P}(x)) < c$ par (FI.1) ; comme un composant de $\mathscr{P}(x)$ est, ou bien $\mathscr{P}(x)$, ou bien une partie de x, ou bien un composant de x, on a $\mathscr{P}(x) \in U'$. Enfin si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille d'éléments de U' telle que $I \in U'$, on a $\operatorname{card}(\bigcup_\alpha x_\alpha) < c$ par (FI.2) ; comme tout composant d'ordre > 0 de $\bigcup_\alpha x_\alpha$ est un composant d'un x_α, on a bien $\bigcup_\alpha x_\alpha \in U'$ C.Q.F.D.

Remarque sur le cardinal $c(U)$. Soient U un univers et $c(U)$ le cardinal défini par (1). i.e.

$$c(U) = \sup_{x\in U} \operatorname{card}(x).$$

On a évidemment $c(U) \leq \operatorname{card}(U)$, car, rappelons-le, $x \in U$ implique $x \subset U$. Mais **202**
l'égalité $c(U) = \operatorname{card}(U)$ n'est pas toujours vraie. Par exemple soit $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille non dénombrable de symboles avec les axiomes :

$$\text{«}x_\alpha = \{x_\alpha\} \text{ pout tout } \alpha \in I\text{»} \quad , \quad \text{«}x_\alpha \neq x_\beta \text{ si } \alpha \neq \beta\text{»}$$

(autrement dit x_α est un ensemble à un seul élément, à savoir lui-même). Formons, comme dans l'ex. 2 du *n*° 1, les « mots significatifs » formés avec les symboles $\varnothing$, x_α, $\{,\}$ etc Chacun désigne un ensemble fini. Soit U l'ensemble de ceux-ci. On vérifie aisément que les conditions de la déf. 1 sont satisfaites, de sorte que U est un univers. Comme les mots significatifs sont des suites finies d'éléments d'un ensemble de cardinal $\operatorname{card}(I)+4 = \operatorname{card}(I)$; on a $\operatorname{card}(U) = \operatorname{card}(I)$ (chap. III ; en fait $\operatorname{card}(U) \geq \operatorname{card}(I)$ suffit, et c'est évident). D'autre part, $c(U)$ est le cardinal dénombrable, d'où $c(U) < \operatorname{card}(U)$.

L'inégalité stricte $c(U) < \operatorname{card}(U)$ tient à ce qu'on a introduit ici des ensembles x_α tels que $x_\alpha \in x_\alpha$. Si on interdit des horreurs de ce genre, on obtient $\operatorname{card}(U) = c(U)$ pour tout univers U, ainsi que d'autres fort jolis résultats « ne pouvant servir à rien ». C'est ce qu'on va faire au numéro suivant.

6. Ensembles et univers artiniens

DÉFINITION 5. On dit qu'un ensemble x est artinien s'il n'existe aucune suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $x_\circ = x$ et que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout $n \geq 0$.

Exemples. Les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, plus généralement les éléments de l'univers U_1 du *n*° 1, sont artiniens.

En termes imagés, si x est artinien, et si on prend un élément x_1 de x, puis un élément **203**
x_2 de x_1, etc., le processus doit s'arrêter, et on arrive à un composant x_n de x qui est vide. Autrement dit les ensembles artiniens sont « construits à partir de $\varnothing$ » ; ceci sera précisé plus tard (cf. (*) dans la démonstration du th. 2).

Les ensembles artiniens jouissent évidemment des propriétés suivantes :

(AR.I) Si x est artinien, toute partie de x et tout composant de x sont artiniens. Pour que x soit artinien, il faut et il suffit que tout élément de x soit artinien.

(AR.II) Si x et y sont artiniens, alors $\{x, y\}$ est artinien.

(AR.III) Si x est artinien, $\mathscr{P}(x)$ est artinien.

(AR.IV) Toute réunion d'ensembles artiniens est un ensemble artinien.

Ces propriétés montrent aussitôt qu'on a la

PROPOSITION 11. Si U est un univers, l'ensemble des éléments artiniens de U est un univers, nécessairement artinien.

COROLLAIRE. Si x est un ensemble artinien, il existe un univers artinien U tel que $x \in U$.

En effet, par l'axiome (A.6), x est élément d'un univers V ; on prend pour U l'ensemble des éléments artiniens de V.

La proposition suivante est encore moins utile que le reste du $n°$:

204 PROPOSITION 12. Soit A un ensemble artinien. Alors :

a) Pour tout $x \in A$, on a $x \notin x$;
b) Si $x, y \in A$, on ne peut avoir à la fois $x \in y$ et $y \in x$;
c) Pour tout $x \in A$, la relation « y est un composant de z » entre composants y, z de x est une relation d'ordre ;
d) Pour tout élément non vide x de A, il existe $y \in x$ tel que $x \cap y = \varnothing$.

En effet la négation de a) (resp. de b)) entraîne l'existence d'une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ contredisant le déf. 5, à savoir $(x, x, x, \dots)$ (resp. $(x, y, x, y, x, y, \dots)$). La négation de c) veut dire qu'il existe $x \in A$, des composants y, z de x distincts, et des suites d'appartenances :

$$y \in y_1 \in \dots \in y_q \in z \quad , \quad z \in z_1 \in \dots \in z_r \in y;$$

d'où, comme dans b), une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ contredisant le déf. 5. Enfin, si d) est fausse, il existe un élément non vide x de A tel que $x \cap y \neq \varnothing$ pour tout $y \in x$; on pose $x_\circ = x$, et on prend pour x_1 un élément de x ; comme $x \cap x_1 \neq \varnothing$, on prend pour x_2 un élément de $x \cap x_1$ et caetera ; plus formellement on définit par récurrence une suite infinie $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de x au moyen de $x_1 \in x$, $x_{n+1} \in x_n \cap x$ pour $n \geq 1$; alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ contredit la déf. 5.

Remarque. Soit B un ensemble. Pour que B soit artinien, il faut et il suffit que tout ensemble A d'ensembles de composants de B satisfasse à la condition d) de la prop. 12.
205 En effet la nécessité résulte de (AR.I) et de la prop. 12. Réciproquement, si B n'est pas artinien, il existe une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $x_\circ = B$ et $x_{n+1} \in x_n$ pour tout $n \geq 0$; on prend alors pour A la partie réduite à l'ensemble X des x_n ; ainsi A contient un élément non vide X tel que, pour tout élément y de X, on ait $y \cap X \neq \varnothing$ (en effet y est de la forme x_n, et on a $x_{n+1} \in y \cap X$).

THÉORÈME 2. Soit c un cardinal infini. Alors :

a) La relation « x est un ensemble artinien de type c (resp. de type strict c) » est collectivisante par rapport à x ; l'ensemble A_c des ensembles artiniens de type c a pour cardinal 2^c.
b) Si c est fortement inaccessible, l'ensemble U_c des ensembles artiniens de type strict c est un univers de cardinal c ; le cardinal $c(U_c) = \sup_{x\in U_c} \operatorname{card}(x)$ est c.
c) Si un univers U admet un élément de cardinal c, tout ensemble artinien de type c appartient à U (autrement dit $A_c \subset U$).
c′) Si un univers U est non vide, tout ensemble artinien de type fini est élément de U.

Avant de démontrer le th. 2, déduisons en quelques corollaires illuminants :

COROLLAIRE 1. Si un univers U est artinien, alors $\operatorname{card}(U)$ est fortement inaccessible, et U est l'ensemble des ensembles artiniens de type strict $\operatorname{card}(U)$.

206 En effet posons $c(U) = \sup_{x \in U} \operatorname{card}(x)$. C'est un cardinal fortement inaccessible (début du *n*° 5). Supposons le d'abord non dénombrable ; alors, pour tout cardinal infini $c < c(U)$, tout ensemble artinien de type c est élément de U par c) ; donc tout ensemble artinien de type strict $c(U)$ est élément de U par le lemme du *n*° 5. Cette dernière assertion reste valable si $c(U)$ est dénombrable par c'). Inversement, d'après (U.I), tout ensemble de U est de type strict $c(U)$. Donc U est l'univers $U_{c(U)}$ de b), d'où $c(U) = \operatorname{card}(U)$ par b).

Il résulte du cor. 1 qu'on univers artinien est déterminé de façon unique par son cardinal (d'ailleurs fortement inaccessible). On a donc une « correspondance biunivoque » entre univers artiniens et cardinaux fortement inaccessibles. En particulier :

COROLLAIRE 2. La relation d'inclusion $U \subset U'$ entre univers artiniens est une relation de bon ordre.

En effet la relation $c \leq c'$ entre cardinaux est une relation de bon ordre (chap. III) et, avec les notations du b) du th. 2, les relations $c \leq c'$ et $U_c \subset U_{c'}$ sont équivalentes.

Notons que le th. 2, b) donne une seconde démonstration du th. 1 (*n*° 5).

Passons à la démonstration du th. 2. Étant donné un ensemble A, nous appellerons chaîne de A toute suite finie $(x_j)_{j=0,\dots,n}$ telle que $x_0 = A$ et que $x_{j+1} \in x_j$ pour $j = 0, \dots, n-1$. Les chaînes de A forment un ensemble, d'après le schéma de sélection-réunion ; notons le $G(A)$. Étant donnée une chaîne $X = (x_j)_{j=0,\dots,n}$, les chaînes de la forme $(x_i)_{i=0,\dots,q}$ avec $q \leq n$ seront dites plus petites que X ; on obtient ainsi, sur $G(A)$, une structure d'ensemble ordonné. Pour que A soit artinien, il faut et il suffit que $G(A)$ soit un ensemble ordonné « noethérien » (c.à.d. satisfaisant aux conditions équivalentes du chap. III, § 6, *n*° 5). 207

Nous allons montrer que :
(*) Si A est artinien, il est déterminé de façon unique par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné $G(A)$.

En effet, étant donnés un ensemble ordonné G et un élément $g \in G$, nous noterons $S(g)$ l'ensemble des $g' \in G$ tels que $g < g'$ et que $g \leq h \leq g'$ implique $h = g$ ou $h = g'$ (autrement dit l'ensemble des « successeurs immédiats » de g). Considérons l'application θ qui, à toute chaîne $X = (x_0, \dots, x_n)$ de $G(A)$ fait correspondre l'ensemble x_n ; on a alors, pour tout $X \in G(A)$:

$$\theta(X) = \{\theta(X') | X' \in S(X)\}.$$

Comme A est l'image par θ du plus petit élément $X_0 = (A)$ de $G(A)$, il va nous suffire de montrer que θ est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné $G(A)$. Or ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 1. Soient G un ensemble ordonné noethérien et φ une application de G telle que, pour tout $g \in G$, on ait : 208

$$\varphi(g) = \{\varphi(g') | g' \in S(g)\}. \tag{1}$$

Alors φ est déterminée de façon unique. De plus, si U est un univers contenant un élément équipotent à G, φ prend ses valeurs dans U.

L'hypothèse implique qu'on a $\varphi(g) = \varnothing$ si g est un élément maximal de G.

Soient, en effet, φ et φ' deux applications telles que (1) soit vraie ; si $\varphi \neq \varphi'$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varphi(g) \neq \varphi'(g)$ est non-vide, donc admet un élément maximal h car G est noethérien ; on a alors $\varphi(g) = \varphi'(g)$ pour tout $g > h$, en particulier pour tout « successeur » $g \in S(h)$; d'où $\varphi(h) = \varphi'(h)$ par (1), ce qui est une contradiction ; on a donc bien $\varphi = \varphi'$. Soit maintenant U un univers contenant un élément x équipotent à

G ; montrons que φ prend ses valeurs dans U ; sinon soit h un élément maximal parmi les $g \in G$ tels que $\varphi(g) \notin U$; on a $\varphi(g') \in U$ pour tout $g' \in S(g)$ de sorte que

$$\varphi(h) = \{\varphi(g')|g' \in S(h)\}$$

est une partie de U ; or, comme son cardinal est inférieur à card(G) donc au cardinal d'un élément de U, on a $\varphi(h) \in U$ (n° 1, prop. 7) ; cette contradiction montre que φ prend ses valeurs dans U.

209 Ceci étant, démontrons le a) du th. 2. On peut se borner à l'assertion non-respée, car l'autre en découle aussitôt. Soit c un cardinal infini. Si A est un ensemble de type c on a :

$$\text{card}(G(A)) \leq c\ . \tag{2}$$

En effet, si on note A_n l'ensemble des composants d'ordre n de A, on a $\text{card}(A_1) \leq c$ et $\text{card}(A_{n+1}) \leq c \cdot \text{card}(A_n)$, d'où $\text{card}(A_n) \leq c^n$ par récurrence ; or $c^n = c$ car c est infini (chap. III) ; d'où $\text{card}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \text{card}(\mathbf{N}) \cdot c = c$ (chap. III) ; or $G(A)$ est un ensemble de suites finies d'éléments de $\bigcup_n A_n$, de sorte qu'on a bien l'inégalité (2) (chap. III). Ceci étant, si E est un ensemble de cardinal c, la donnée d'une structure d'ordre sur une partie E' de E équivaut à la donnée de la partie de $E \times E$ formée des (x, y) tels que $x \in E'$, $y \in E'$ et $x \leq y$. Donc, en vertu de (2), les classes d'isomorphisme des ensembles ordonnés $G(A)$ (où A est de type c) forment un ensemble $\mathfrak{F}_c$, et on a $\text{card}(\mathfrak{F}_c) \leq \text{card}(\mathscr{P}(E \times E)) = 2^c$. Soit $\mathfrak{F}'_c$ la partie de $\mathfrak{F}_c$ formée des classes d'ensembles ordonnés noethériens ayant un plus petit élément ; si, à tout $G \in \mathfrak{F}'_c$, on fait correspondre la valeur de la fonction φ du lemme 2 au plus petit élément de G, on obtient une application θ de $\mathfrak{F}'_c$ dont l'image contient tous les ensembles artiniens de type c. Ces derniers forment donc bien un ensemble A_c, et on a $\text{card}(A_c) \leq \text{card}(\mathfrak{F}'_c) \leq \text{card}(\mathfrak{F}_c) \leq 2^c$.

210 Reste à voir qu'on a $\text{card}(A_c) = 2^c$. Pour cela il suffit de voir qu'il existe un ensemble artinien B de type c et de cardinal c, car les parties de B seront alors des éléments de A_c. Cette existence résulte du lemme suivant :

LEMME 2. Pour tout cardinal c, il existe un ensemble artinien B de type c et de cardinal c.

On procède par induction transfinie sur c. Pour $c = 0$ on n'a pas le choix, et on prend $B = \varnothing$. Si c à un prédécesseur c', soit B' un ensemble artinien de type c' et de cardinal c' ; on a alors $c \leq 2^{c'}$, de sorte qu'il existe une partie B de $\mathscr{P}(B')$ de cardinal c ; les éléments de B sont des parties de B' et ont donc des cardinaux $\leq c' \leq c$; les composants d'ordre supérieur de B sont des composants de B', et ont donc aussi des cardinaux $\leq c' \leq c$. Enfin, si c n'a pas de prédécesseur, on choisit, pour tout cardinal $c_\lambda < c$, un ensemble artinien B_λ de type c_λ et de cardinal c_λ ; alors $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$ répond à la question. Ceci démontre le lemme 2, et achève la démonstration de la partie a).

Passons à b). Soit c un cardinal fortement inaccessible. On sait déjà, par a), que les ensembles artiniens de type strict c forment un ensemble U_c. Le fait que U_c est un univers résulte aussitôt des propriétés (AR.I) à (AR.IV) des ensembles artiniens (début du n°),
211 et de majorations de cardinaux analogues à celles de la prop. 10 du n° 5. La relation $\sup_{x \in U_c} \text{card}(x) = c$ résultedu lemme 2, appliqué aux cardinaux $< c$. Enfin, pour montrer que $\text{card}(U_c) = c$, supposons d'abord c non dénombrable ; d'aprèsle lemme du n° 5, U_c est la réunion $\bigcup_{d<c} A_d$, où A_d désigne l'ensemble des ensembles artiniens de type d ; or on a $\text{card}(A_d) = 2^d < c$ (par a)) ; d'autre part l'ensemble des cardinaux $d < c$ a un cardinal $\leq c$ (chap. III) ; d'où $\text{card}(U_c) \leq c \cdot c = c$, et aussi $\text{card}(U_c) \geq c$ car $\text{card}(U_c) \geq \text{card}(A_d) = 2^d$ pour tout $d < c$.

Le cas $c = 0$ étant trivial, reste le cas où c est le cardinal infini dénombrable. Dans ce cas U_c est l'ensemble des ensembles artiniens de type fini (i.e. finis ainsi que tout leurs composants), et on utilise un joli résultat de nature combinatoire.

LEMME 3. (D. König ?). Considérons deux suites infinies $(E_n)_{n\geq 1}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ d'ensembles finis E_n et d'applications $f_n : E_{n+1} \to E_n$. S'il n'existe aucune suite infinie $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $x_n \in E_n$ et que $f_n(x_{n+1}) = x_n$ pour tout n, alors E_n est vide pour n assez grand.

Autrement dit, si toutes les suites (x_n) telles que $f_n(x_{n+1}) = x_n$ sont finies, leurs longueurs sont bornées. Ça peut s'exprimer en termes de limites projectives : une limite projective d'ensembles finis non vides est non vide (cf. Top. Géné., Chap. I, 2e éd. § 9, *n*° 6, prop. 8, 2°)).

Raisonnons, en effet, par l'absurde. S'il existe des E_n non vides pour n arbitraire- 212
ment grand, aucun E_n n'est vide (car $E_n = \varnothing$ entraîne $E_{n+1} = \varnothing$ vu l'existence de $f_n : E_{n+1} \to E_n$). Appelons « cohérentes » les suites finies $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ telles que $f_j(x_{j+1}) = x_j$ pour $j = 1, \dots, n-1$. Démontrons, par récurrence sur n, l'existence d'une suite cohérente $(a_1, \dots, a_n)$ $(a_i \in E_i)$ qui, pour tout $q \geq n$, peut être prolongée en une suite cohérente $(a_1, \dots, a_n, x_{n+1}, \dots, x_q)$ de longueur q. C'est évident pour $n = 0$, car aucun E_q n'est vide. Passons de n à $n+1$. Si, pour tout $x \in f_n^{-1}(\{a_n\}) \subset E_{n+1}$, toutes des suites cohérentes prolongeant $(a_1, \dots, a_n, x)$ avaient des longueurs bornées par un entier $q(x)$, alors toutes les suites cohérentes prolongeant $(a_1, \dots, a_n)$ seraient de longueurs bornées (par $\sup_x q(x)$) car E_{n+1} est fini ; il existe donc $a_{n+1} \in f_n^{-1}(\{a_n\})$ tel que la suite cohérente $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ admette des prolongements de longueur arbitraire. Ceci étant on a une suite infinie $(a_n)_{n\geq 1}$ qui contredit l'hypothèse.

Il résulte du lemme 3 que si A est un ensemble artinien de type fini, alors l'ensemble ordonné $G(A)$ de ses chaînes est fini : on prend, en effet, pour E_n l'ensemble des chaînes $(x_n \in x_{n-1} \in \dots \in x_1 \in A)$ à $n+1$ termes (qui est fini car les composants de A d'ordre $\leq n+1$ sont en nombre fini et sont tout finis), et pour f_n l'application $(x_{n+1} \in x_n \in$
$x_{n+1} \dots) \mapsto (x_n \in x_{n-1} \in \dots)$. Or l'ensemble des classes d'isomorphisme d'ensembles 213
ordonnés finis est dénombrable : en effet, la donnée d'une structure d'ordre sur une partie finie de $\mathbf{N}$ équivaut à celle de son graphe, qui est une partie finie de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; d'autre part l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable (chap. III). Il résulte de (*) et du lemme 1, que l'ensemble $\mathfrak{a}$ des ensembles artiniens de type fini est dénombrable. Il est infini par le lemme 2 (ou, plus simplement, par usage de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie au moyen de $z_=\varnothing$, $z_{n+1} = \{z_n\}$). Ceci termine la démonstration de b).

Remarque. On vient de démontrer que, si A est un ensemble artinien de type fini, il n'a qu'un nombre fini de composants. Il existe donc un entier n tel que A soit de type n.

Passons à la démonstration de c). Soient c un cardinal infini, U un univers admettant un élément de cardinal c, et A un ensemble artinien de type c. Alors l'ensemble ordonné $G(A)$ a un cardinal $\leq c$ (formule (2) ci-dessus). La seconde assertion du lemme 1, appliquée à $G(A)$, montre que l'application $(x_0, \dots, x_n) \rightsquigarrow x_n$ de $G(A)$ prend ses valeurs dans U. Autrement dit tout les composants de A sont éléments de U. Ceci démontre c). La démonstration de c') est analogue : si A est un ensemble artinien de type fini, on vient de voir que $G(A)$ est fini ; comme U est non-vide, il contient un élément équipotent à $G(A)$ par le cor. à la prop. 7 (*n*° 1). C.Q.F.D.

7. Remarques métamathématiques vaseuses 214

a) L'axiome « tout ensemble est artinien » est inoffensif. En effet, si on a un modèle $\boldsymbol{M}$ de la Théorie des Ensembles, l'ensemble $\boldsymbol{M}'$ des éléments artiniens de $\boldsymbol{M}$ est aussi un modèle (cf. prop. 11).
b) L'axiome (A.6) des univers (et l'axiome équivalent (A'.6) des cardinaux fortement inaccessibles) est indépendant du reste de la Théorie des Ensembles. En effet soit c le premier cardinal fortement inaccessible non dénombrable. L'univers $\boldsymbol{U}_c$ des ensembles artiniens de type strict c (th. 2, b)) est un modèle de la Théorie des Ensembles sans (A.6) : on appelle « ensembles » les éléments de $\boldsymbol{U}_c$, la « relation d'appartenance » est la restriction à $\boldsymbol{U}_c$ de l'ordinaire, etc. Les « univers » du modèle sont donc les univers ordinaires qui sont éléments de $\boldsymbol{U}_c$. Or on a vu que les seuls univers qui sont éléments de $\boldsymbol{U}_c$ sont les deux pequeños $\boldsymbol{U}_0 = \varnothing$ et $\boldsymbol{U}_1$. Ainsi $\boldsymbol{U}_1$ est un « ensemble » qui n'est élément d'aucun « univers ». On a donc un modèle de la Théorie des Ensembles où (A.6) est faux.
c) Bourbaki a été trop prudent en se contentant de « présumer » que l'axiome de l'infini (A.5) est indépendant des axiomes et schémas précédents. Il l'est effectivement, car l'univers dénombrable $\boldsymbol{U}_1$ des ensembles artiniens de type fini est un modèle où (A.5) est faux, et où les axiomes et schémas précédents sont vrais.
d) Il serait très intéressant de démontrer que l'axiome (A.6) des univers est inoffensif. Ça paraît difficile et c'est même indémontrable, dit Paul Cohen.

215 L'adjectif « vaseuses » dans le titre veut dire qu'on ne s'est pas donné la peine, en construisant des modèles, de canuler le symbole τ de sorte qu'il n'en fasse pas sortir. La clef de ça, si on considère un modèle $\boldsymbol{M}$, est de remplacer le $\tau_x(\mathscr{R}(x))$ ordinaire par :

$$\tau_x(\mathscr{R}(x) \text{ et } x \in \boldsymbol{M}).$$

Encore faut-il vérifier que ça transforme bien les quantificateurs ordinaires en les quantificateurs autrefois dits « typiques » :

$$(\forall x \in \boldsymbol{M}) \quad , \quad (\exists x \in \boldsymbol{M}).$$

Exercices. 1) Soit n un entier ≥ 1. Montrer que l'ensemble des ensembles artiniens de type n est infini (les ensembles $z_0 = \varnothing$, $z_1 = \{\varnothing\}$, $z_{q+1} = \{z_q\}$ sont de type 1).

2) Appelons hauteur d'un ensemble A la borne supérieure (finie ou infinie) des entiers n tels qu'il existe une suite $x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_0 =$. Montrer que les ensembles de hauteur $\leq n$ sont finis et forment un ensemble fini, dont le cardinal p_n se calcule au moyen de $p_0 = 1$, $p_{n+1} = 2^{p_n}$ (procéder par récurrence sur n, en notant que les éléments d'un ensemble A de hauteur $\leq n$ sont des ensembles de hauteur $\leq n-1$).

3) Soit $\boldsymbol{G}$ un ensemble ordonné noethérien admettant un plus petit élément g_0 et tel que pour tout $h \in \boldsymbol{G}$, l'ensemble de $g \leq h$ sont fini et totalement ordonné.
216 a) Montrer que tout élément $h \neq g_0$ de $\boldsymbol{G}$ admet un prédécesseur et un seul.
b) Soit φ l'application de $\boldsymbol{G}$ définie dans le lemme 1 (i.e. $\varphi(g)$ est, l'ensemble des $\varphi(g')$ où g' parcourt l'ensemble des successeurs de g). On pose $A = \varphi(g_0)$. Montrer que A est un ensemble artinien. Pour $g \in \boldsymbol{G}$, soit $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = g$ la suite des éléments $\leq g$; posons $f(g) = (\varphi(g_0), \varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n))$; montrer que f est une application croissante et surjective de $\boldsymbol{G}$ sur l'ensemble ordonné $\boldsymbol{G}(A)$ du texte. Montrer que, si f est injective, c'est un isomorphisme de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{G}(A)$.

c) Pour $g \in \boldsymbol{G}$, soit $\boldsymbol{M}_g$ l'ensemble des majorants de g. On suppose que, pour tout couple d'éléments distincts g, g' ayant même prédécesseur p, les ensembles ordonnés $\boldsymbol{M}_g$ et $\boldsymbol{M}_{g'}$ sont non isomorphes. Montrer que l'application f de b) est alors un isomorphisme de $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{G}(A)$. [Si $f(g) = f(g')$ avec $g \neq g'$ et si $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = g$ et $g'_0 < g'_1 < \cdots < g'_{n'} = g'$ sont la suite des éléments $\leq g$ et celles des éléments $\leq g'$, montrer que $n = n'$, et qu'on peut supposer que g et g' ont le même prédécesseur p ; considérer alors l'ensemble des $p \in \boldsymbol{G}$ tels qu'il existe deux successeurs distincts g, g' de p tels que $f(g) = f(g')$, un élément maximal q de cet ensemble, et deux successeurs distincts h, h' de q tels que $f(h) = f(h')$; noter que les restrictions de f à $\boldsymbol{M}_h$ et à $\boldsymbol{M}_{h'}$ sont injectives, donc (par b)) sont des isomorphismes de $\boldsymbol{M}_h$ sur $\boldsymbol{G}(\varphi(h))$ et de $\boldsymbol{M}_{h'}$ sur $\boldsymbol{G}(\varphi(h'))$; déduire de l'hypothèse de non-isomorphisme de $\boldsymbol{M}_h$ et $\boldsymbol{M}_{h'}$ qu'on a $\varphi(h) \neq \varphi(h')$. ce qui contredit $f(h) = f(h')$].

N.B. L'exercice 3) donne des renseignements très précis sur la manière dont sont **217**
« fabriqués » les ensembles artiniens. On savait déjà qu'un tel ensemble A est déterminé par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné $\boldsymbol{G}(A)$ (lemme 1). On sait maintenant caractériser les ensembles ordonnés $\boldsymbol{G}$ isomorphes à des $\boldsymbol{G}(A)$:

α) $\boldsymbol{G}$ est noethérien et admet un plus petit élément ;

β) Pour tout $g \in \boldsymbol{G}$, l'ensemble des $h \leq g$ est totalement ordonné et fini (d'où l'existence et l'unicité du prédécesseur de g) ;

γ) Si g, g' sont des éléments distincts ayant même prédécesseur, l'ensemble $\boldsymbol{M}_g$ des majorants de g et celui $\boldsymbol{M}_{g'}$ des majorants de g ne sont pas isomorphes.

4) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ la suite des ordinaux finis, définie par $A_0 = \varnothing$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$. Montrer que l'ensemble ordonné $\boldsymbol{G}(A_n)$ a 2^n éléments, et que le nombre de ses éléments de hauteur q (au sens de l'exerc. 2)) est $\binom{n}{q}$.

Bibliographie

[1] B. Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.

EXPOSÉ II

Topologies et faisceaux

J.-L. Verdier

Après la définition des topologies et prétopologies (n° 1) et des faisceaux d'ensembles **218**
(n° 2), on aborde dans le n° 3 le théorème central de cet exposé (3.4) : l'existence du faisceau associé à un préfaisceau. Afin de couvrir tous les cas rencontrés dans la pratique, l'existence de ce foncteur est démontrée pour les préfaisceaux sur un $\mathscr{U}$-site (3.0.2). Les n° 4 et n° 5 tirent les conséquences de ce théorème sur le comportement des limites inductives et projectives dans les catégories de faisceaux. Au n° 6 on définit et étudie les faisceaux à valeurs dans des catégories quelconques, pour porter tout de suite l'attention sur les faisceaux d'anneaux, de groupes, de modules etc.

1. Topologies, familles couvrantes, prétopologies

Définition 1.1. Une topologie sur une catégorie C est la donnée, pour tout objet X de C, d'un ensemble $J(X)$ de cribles de X, cette donnée étant soumise aux axiomes suivants :

T 1) (Stabilité par changement de base). Pour tout objet X de C, tout crible $R \in J(X)$, tout morphisme $f : Y \to X (Y \in \mathrm{ob}(C))$, le crible $R \times_X Y$ de Y appartient à $J(Y)$.

T 2) (Caractère local). Si R et R' sont deux cribles de X, si $R \in J(X)$, et si pour tout $Y \in \mathrm{ob}(C)$ et tout morphisme $Y \to R$ le crible $R' \times_X Y$ appartient à $J(Y)$, alors **219**
R' appartient à $J(X)$.

T 3) Pour tout objet X de C, X appartient à $J(X)$.

1.1.1. Les cribles appartenant à $J(X)$ seront appelés les cribles couvrant X, ou encore les raffinements de X. Des axiomes (T1), (T2), (T3), on déduit immédiatement que l'ensemble des cribles couvrant X est stable par intersections finies, et que tout crible contenant un crible couvrant est un crible couvrant. L'ensemble $J(X)$, ordonné par inclusion, est donc cofiltrant (I 8).

1.1.2. Soient C une catégorie, T et T' deux topologies sur C. La topologie T est dite plus fine que la topologie T' si pour tout objet X de C, tout raffinement de X pour la topologie T' est un raffinement de X pour la topologie T. On définit, de cette façon, une structure d'ordre sur l'ensemble des topologies.

1.1.3. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de topologies sur C. Les ensembles, pour tout objet X de C, des cribles de X qui sont couvrants pour toutes les topologies T_i, vérifient les axiomes (T 1), (T 2) et (T 3) et définissent donc une topologie : la topologie intersection des T_i, i.e. la borne inférieure des T_i. C'est la plus fine des topologies qui soit moins fine que toutes les topologies T_i. La famille $(T_i)_{i \in I}$ admet par suite une borne supérieure : la topologie intersection des topologies plus fines que chacune des T_i.

1.1.4. En particulier la donnée $J(X) =$ l'ensemble de tous les cribles de X, est une **220**
topologie plus fine que toute topologie sur C, que nous appellerons topologie discrète.

Il existe une topologie moins fine que toute topologie sur C ; la topologie pour laquelle $J(X) = \{X\}$ pour tout X de C. Cette topologie est appelée la topologie grossière ou chaotique.

1.1.5. Une catégorie C munie d'une topologie est appelée un site. La catégorie C est appelée la catégorie sous-jacente au site.

Définition 1.2. Soient C un site, X un objet de C. Une famille de morphismes $(f_\alpha : X_\alpha \to X)$, $\alpha \in A$, est dite couvrante si le crible engendré par la famille f_α (I 4.3.3) est un crible couvrant X.

1.1.6. Soit C une catégorie. Donnons-nous pour chaque objet X de C, un ensemble de familles de morphismes de but X. Il existe alors une topologie T qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les familles données soient couvrantes, à savoir l'intersection (1.1.3) de toutes les topologies en question. On appelle cette topologie la topologie engendrée par les ensembles de familles de morphismes donnés. Il est malaisé de décrire, en général, tous les cribles couvrants de cette topologie. Cependant la situation est plus agréable dans le cas suivant :

Définition 1.3. Soit C une catégorie. Une prétopologie sur C est la donnée, pour chaque objet X de C, d'un ensemble $\mathrm{Cov}(X)$ de familles de morphismes de but X, cette donnée étant soumise aux axiomes suivants :

221 PT 0) Pour tout objet X de C, les morphismes des familles de morphismes de $\mathrm{Cov}(X)$ sont quarrables. (Rappelons qu'un morphisme $Y \to X$ est dit quarrable si pour tout morphisme $Z \to X$ le produit fibré $Z \times_X Y$ est représentable).

PT 1) Pour tout objet X de C, toute famille $(X_\alpha \to X)_{\alpha \in A}$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X)$, et tout morphisme $Y \to X$ ($Y \in \mathrm{ob}(C)$), la famille : $(X_\alpha \times_X Y \to Y)_{\alpha \in A}$ appartient à $\mathrm{Cov}(Y)$. (Stabilité par changement de base).

PT 2) Si $(X_\alpha \to X)_{\alpha \in A}$ appartient à $\mathrm{Cov}(X)$ et si pour chaque $\alpha \in A$, $(X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha)_{\beta_\alpha \in B_\alpha}$ appartient à $\mathrm{Cov}(X_\alpha)$, alors la famille $(X_\gamma \to X)_{\gamma \in \coprod_{\alpha \in A} B_\alpha}$ (où pour tout $\gamma = (\alpha, \beta_\alpha)$, $\alpha \in A$, $\beta_\alpha \in B_\alpha$, le morphisme $X_\gamma \to X$ est le morphisme composé : $X_\gamma = X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha \to X$) appartient à $\mathrm{Cov}(X)$. (Stabilité par composition).

PT 3) La famille : $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ appartient à $\mathrm{Cov}(X)$.

1.3.1. La définition de 1.1.6 nous permet de considérer, pour une prétopologie donnée sur C, la topologie sur C engendrée par cette prétopologie. Notons que si C est une catégorie où les produits fibrés sont représentables, alors toute topologie T de C peut être définie par une prétopologie, savoir celle pour laquelle $\mathrm{Cov}(X)$ est formé de toutes les familles couvrant X pour la topologie T.

Proposition 1.4. Soient C une catégorie, E une prétopologie sur C, T la topologie définie par la prétopologie E (1.1.6), X un objet de C. Désignons par $J_E(X)$ l'ensemble des cribles de X engendrés par les familles de la prétopologie, et par $J_T(X)$ l'ensemble des raffinements de X pour la topologie T. Alors $J_E(X)$ est cofinal dans $J_T(X)$. 222
En d'autres termes, pour qu'un crible R de X appartienne à $J_T(X)$, il faut et il suffit qu'il existe un crible $R' \in J_E(X)$ tel que $R' \subset R$.

Preuve. Soit, pour tout objet X de C, $J'(X)$ l'ensemble des cribles de X qui contiennent un crible de $J_E(X)$. On a évidemment $J'(X) \subset J_T(X)$. Pour montrer que $J'(X) = J_T(X)$, il suffit de montrer que la donnée des $J'(X)$ définit une topologie sur C. Or les $J'(X)$ vérifient évidemment les axiomes (T 1) et (T 3). Il reste donc à vérifier (T 2). Pour cela il suffit de démontrer que si R' est un sous-crible de $R \in J_E(X)$ tel que pour tout

$Y \to R$, le crible $R' \times_X Y$ de Y appartienne à $J'(X)$, le crible R' appartient à $J'(X)$. Or le crible R est engendré par une famille $(X_\alpha \to X)$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X)$, et pour tout α le crible $R' \times_X X_\alpha$ contient un crible engendré par une famille $(X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha)$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X_\alpha)$. On en déduit que le crible R' contient un crible engendré par la famille $(X_{\beta_\alpha} \to X)$. Donc, d'après l'axiome (PT 2), R' contient un crible de $J_E(X)$ et par suite appartient à $J'(X)$, C.Q.F.D.

2. Faisceaux d'ensembles

Définition 2.1. Soit C un site dont la catégorie sous-jacente est une $\mathscr{U}$-catégorie. Un préfaisceau F à valeurs dans $\mathscr{U} - \mathrm{Ens}$ est dit séparé (resp. est un faisceau) si pour tout crible R couvrant X, objet de C, l'application :

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R, F)$$

est une injection (resp. une bijection). Le sous-catégorie pleine de $C^\wedge$ dont les objets sont 223
les faisceaux est appelée la catégories des faisceaux d'ensembles sur C, et est notée le plus souvent $\widehat{C}$ [3]. Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résultera, nous dirons simplement catégorie des faisceaux sur C ; en revanche nous préciserons quelquefois en disant catégorie des faisceaux à valeurs dans $\mathscr{U} - \mathrm{Ens}$ ou encore catégorie des $\mathscr{U}$-faisceaux.

Proposition 2.2. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $\mathscr{F} = (F_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{U}$-préfaisceaux sur C. Désignons, pour chaque objet X de C, par $J_{\mathscr{F}}(X)$ l'ensemble des cribles $R \to X$ tels que pour tout morphisme $Y \to X$ de C de but X, le crible $R \times_X Y$ possède la propriété suivante : l'application

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R \times_X Y, F_i)$$

est bijective (resp. injective) pour tout $i \in I$. Alors les ensembles $J_{\mathscr{F}}(X)$ définissent une topologie sur C, qui est la plus fine des topologies pour laquelle chacun des F_i soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé).

Preuve. Les $J_{\mathscr{F}}(X)$ vérifient évidemment des axiomes (T 1) et (T 3). Il reste à montrer qu'ils vérifient (T 2). Pour cela il suffit de montrer que :

1) Si $R' \hookrightarrow R \hookrightarrow X$ sont deux cribles de X, tels que $R \in J_{\mathscr{F}}(X)$ et tels que pour tout $Y \to R$ (où Y est un objet de C) le crible $R' \times_X Y$ appartienne à $J_{\mathscr{F}}(Y)$, alors le crible R' appartient à $J_{\mathscr{F}}(X)$.
2) Si $R' \hookrightarrow R \hookrightarrow X$ sont deux cribles de X tels que $R' \in J_{\mathscr{F}}(X)$, alors le crible R appartient à $J_{\mathscr{F}}(X)$.

Notons que, dans le cas 2), pour tout $Y \to R$ (où Y est un objet de C) le crible $R' \times_X Y$ appartient à $J_{\mathscr{F}}(Y)$. Or, dans les cas 1) et 2), R est limite inductive des Y, objets de C, au-dessus de R (I 3.4). Les limites inductives dans $C^\wedge$ sont universelles (I 3.3). Par suite 224
dans les cas 1) et 2), R' est limite inductive des $R' \times_X Y$. Or, dans les cas 1) et (2), $R' \times_X Y$ appartient à $J_{\mathscr{F}}(Y)$. On en déduit, en passant à la limite inductive sur les objets Y de C au-dessus de R, que l'application

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R', F_i)$$

est une bijection (resp. une injection) pour tout $i \in I$. Par suite les applications

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R', F_i) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R, F_i)$$

sont, dans les cas 1) et 2), des bijections (resp. des injections). De plus, les hypothèses 1) et 2) sont visiblement stables par changement de base quelconque $Y \to X$ (Y objet

[3] ou $C^\sim$, suivant l'humeur de la machine à écrire.

de C). On en déduit alors que pour tout objet Y de C au-dessus de X et tout $i \in I$, les applications

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(Y, F_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(R \times_X Y, F_i)$$
$$\operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(Y, F_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(R' \times_X Y, F_i)$$

sont dans les deux cas des bijections (resp. des injections) ; ce qui montre que R' et R appartiennent à $J_{\mathscr{F}}(X)$, C.Q.F.D.

Corollaire 2.3. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, et pour tout X de C un ensemble $K(X)$ de cribles de X. On suppose que les $K(X)$ vérifient l'axiome (T 1) de (1.1). Pour qu'un préfaisceau F soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) pour la topologie engendrée (1.1.6) par les $K(X)$, il faut et il suffit que pour tout objet X de C et tout crible $R \in K(X)$, l'application

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(X, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(R, F)$$

soit une bijection (resp. une injection).

225 Corollaire 2.4. En particulier, soit C une $\mathscr{U}$-catégorie munie d'une prétopologie. Pour qu'un préfaisceau F soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé), il faut et il suffit que pour tout objet X de C et pour toute famille $(X_\alpha \to X)$ appartenant à $\operatorname{Cov}(X)$, le diagramme d'ensembles

$$F(X) \to \prod_{\alpha \in A} F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta)\in A\times A} F(X_\alpha \times_X X_\beta)$$

soit exact (resp. l'application

$$F(X) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} F(X_\alpha)$$

soit injective).

Preuve. On applique 2.3, puis (I 3.5) et (I 2.12).

On retrouve avec le corollaire 2.4 la définition donnée dans [1].

Définition 2.5. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. On appelle topologie canonique de C la topologie la plus fine pour laquelle les foncteurs représentables soient des faisceaux (2.2). Un crible couvrant X pour la topologie canonique sera appelé crible épimorphique strict universel. Une famille couvrante pour la topologie canonique sera appelée famille épimorphique stricte universelle. Lorsque de plus les morphismes de la famille couvrante sont quarrables, la famille sera dite épimorphique effective universelle [2].

Remarque 2.5.1. Pour presque tous les sites qu'on a eu à utiliser jusqu'à présent, la topologie est moins fine que la topologie canonique, en d'autres termes, les foncteurs représentables sur C sont des faisceaux, i.e. les familles couvrantes de C sont épimorphiques strictes universelles. La seule exception à cette règle est le site $\widehat{C}$ étudié au n° 5
226 (dont la topologie est plus fine, et le plus souvent strictement plus fine, que la topologie canonique).

Proposition 2.6. Pour qu'un crible $R \hookrightarrow X$ soit épimorphique strict universel, il faut et il suffit que pour tout objet $Y \to X$ de C au-dessus de X, et pour tout objet Z de C, l'application :

$$\operatorname{Hom}_C(Y, Z) \longrightarrow \varprojlim_{C/(Y\times_X R)} \operatorname{Hom}_C(., Z)$$

soit une bijection.

Preuve. Immédiat en appliquant 2.2 puis (I 5.3).

Remarques 2.7. 1) La proposition 2.6 donne une caractérisation des cribles épimorphiques stricts universels d'une catégorie C, indépendante de l'univers dans lequel les préfaisceaux prennent leurs valeurs, à la seule condition que les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}(X, Y)$ de C appartiennent à cet univers. Elle permet ainsi de définir la topologie canonique pour toute catégorie C, sans qu'il soit pour cela nécessaire de préciser les univers.

2) Soient C un site dont la catégorie sous-jacente soit une $\mathscr{U}$-catégorie, F un $\mathscr{U}$-préfaisceau et $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$. La catégorie sous-jacente à C est une $\mathscr{V}$-catégorie, et F peut être considéré comme un $\mathscr{V}$-préfaisceau. Le $\mathscr{U}$-préfaisceau F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) si et seulement si le $\mathscr{V}$-préfaisceau F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé). En d'autres termes, la condition pour un préfaisceau F d'être un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) ne dépend pas
(au sens qu'on vient de préciser) de l'univers dans lequel le préfaisceau F prend **227**
ses valeurs. En particulier soient C un site et F un $\mathscr{U}$-préfaisceau ; on dit que F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) s'il existe un univers $\mathscr{V}$ contenant $\mathscr{U}$ tel que la catégorie C soit une $\mathscr{V}$-catégorie et tel que F soit un $\mathscr{V}$-faisceau (resp. un $\mathscr{V}$-préfaisceau séparé). Cette propriété ne dépend pas de l'univers $\mathscr{V}$.

3. Faisceau associé à un préfaisceau

Définition 3.0.1. Soit C un site. On appelle famille topologiquement génératrice (où lorsqu'aucune confusion n'en résulte, famille génératrice) de C, un ensemble G d'objets de C tel que tout objet de C soit but d'une famille couvrante de morphismes de C (1.2) dont les sources sont des éléments de G.

Définition 3.0.2. Soit $\mathscr{U}$ un univers. On appelle $\mathscr{U}$-site un site C dont la catégorie sous-jacente est une $\mathscr{U}$-catégorie (I 1.1), qui possède une petite famille topologiquement génératrice. Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie ; on appelle $\mathscr{U}$-topologie sur C une topologie sur C faisant de C un $\mathscr{U}$-site. On dit qu'un site C est $\mathscr{U}$-petit, ou par abus de langage, petit, si la catégorie sous-jacente à C est petite (I 1.0).

3.0.3. Il résulte immédiatement des définitions que toute topologie plus fine qu'une $\mathscr{U}$-topologie est une $\mathscr{U}$-topologie, et qu'un petit site est un $\mathscr{U}$-site.

Proposition 3.0.4. Soient C un $\mathscr{U}$-site, G une petite famille topologiquement géné- **228**
ratrice de C. Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$, désignons par $J_G(X)$ l'ensemble des cribles couvrant X engendrés par une famille de morphismes

$$(Y_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} X), \alpha \in A, \text{ où } Y_\alpha \in G.$$

1) L'ensemble $J_G(X)$ est petit.
2) L'ensemble $J_G(X)$ est cofinal dans l'ensemble $J(X)$ de tous les cribles couvrant X, ordonné par inclusion.
3) Pour tout $R \in J_G(X)$, il existe une petite famille épimorphique (I 10.2) $(u_\alpha : Y \to R)$, $\alpha \in A$, avec $Y \in G$.

Preuve. 1) Posons $A(X) = \amalg_{Y \in G} \mathrm{hom}(Y, X)$. L'ensemble $A(X)$ est petit (I 0) et $\mathrm{card}(J_G(X)) \leq 2^{\mathrm{card}(A(X))}$. Par suite $J_G(X)$ est petit.

2) Soit $R \in J(X)$. Posons $A(R) = \amalg_{Y \in G} \mathrm{Hom}(Y, R)$ et soit R' le crible de X engendré par la famille $(Y \xrightarrow{u} R \hookrightarrow X)$, $u \in A(R)$. On a $R' \subset R$ et il suffit de montrer que R' est couvrant. D'après l'axiome (T 2) de 1.1, il suffit de montrer

que pour tout morphisme $Z \to R$, $Z \in \operatorname{ob} C$, le crible $R' \times_X Z$ de Z est couvrant. Or le crible $R' \times_X Z$ contient le crible engendré par la famille de tous les morphismes $Y \to Z$ avec $Y \in G$, famille qui est, par hypothèse, couvrante. Le crible $R' \times_X Z$ de Z est donc couvrant (axiome T2 de 1.1).

3) Soit $R \in J_G(X)$. La famille $(Y \xrightarrow{u} R)$, $u \in A(R) = \amalg_{Y \in G} \operatorname{Hom}(Y, R)$ est, par hypothèse, épimorphique. Or, pour tout $Y \in \operatorname{ob} C$, $\operatorname{Hom}(Y, R)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}(Y, X)$ qui est petit. Par suite $A(R)$ est petit.

3.0.5. Soient C un $\mathscr{U}$-site, $\mathscr{V}$ un univers tel que $C \in \mathscr{V}$ et $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, G une $\mathscr{U}$-petite famille topologiquement génératrice de C. La catégorie $C\hat{}$ des préfaisceaux de $\mathscr{U}$-ensembles
229 sur C est une $\mathscr{V}$-catégorie (I 1.1.1). Soit X un objet de C. L'ensemble $J(X)$ des cribles couvrant X est $\mathscr{V}$-petit et, ordonné par inclusion, il est cofiltrant (1.1.1). Pour tout $\mathscr{U}$-préfaisceau F, la limite inductive $\varinjlim_{J(X)} \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(R, F)$ est donc représentable par un élément de V (I 2.4.1). De plus, il résulte de (3.0.4 3)) que, pour tout $R \in J_G(X)$, $\operatorname{Hom}_{C\hat{}}(R, F)$ est $\mathscr{U}$-petit, et comme $J_G(X)$ est un $\mathscr{U}$-petit ensemble cofinal dans $J(X)$ (loc. cit.), il résulte de (I 2.4.2) que $\varinjlim_{J(X)} \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(R, F)$ est $\mathscr{U}$-petit. Choisissons alors, pour tout F et pour tout X, un élément de $\mathscr{U}$ qui représente cette limite inductive et posons

$$LF(X) = \varinjlim_{J(X)} \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(., F)$$

Soit $g : Y \to X$ un morphisme de C. Le foncteur changement de base $g^* : J(X) \to J(Y)$ définit une application :

$$LF(g) : LF(X) \longrightarrow LF(Y).$$

qui fait de $X \mapsto LF(X)$ un préfaisceau sur C.

Le morphisme $\mathrm{id}_X : X \to X$ étant un élément de $J(X)$ on a, pour tout objet X de C, une application :

$$\ell(F)(X) : F(X) \longrightarrow LF(X),$$

définissant visiblement un morphisme de foncteurs :

$$\ell(F) : F \longrightarrow LF.$$

Il est clair de plus que $F \mapsto LF$ est un foncteur en F et que les morphismes $\ell(F)$ définissent un morphisme

$$\ell : \mathrm{Id} \longrightarrow L.$$

Enfin soit $R \hookrightarrow X$ un raffinement de X. La définition de $LF(X)$ et (I 1.4) nous fournissent une application :

$$Z_R : \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(R, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(X, LF),$$

230 et pour tout morphisme de C, $Y \xrightarrow{g} X$, la définition du foncteur LF nous montre que la diagramme ci-après, est commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{lccc} Z_R : & \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(R, F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(X, LF) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ Z_{R\times_X Y} : & \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(R \times_X Y, F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{C\hat{}}(Y, LF) \end{array}$$

(les flèches verticales sont les flèches évidentes).
Copions alors [2].

Lemme 3.1. 1) Pour tout raffinement $i_R : R \hookrightarrow X$ et tout $u : R \to F$, le diagramme :

$$
(**) \qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"']
\end{tikzcd}
$$

est commutatif.

2) Pour tout morphisme $v : X \to LF$, il existe un raffinement R de X et un morphisme $u : R \to F$ tel que $Z_R(u) = v$.

3) Soient Y un objet de C et $u, v : Y \rightrightarrows F$ deux morphismes tels que $\ell(F) \circ u = \ell(F) \circ v$. Alors le noyau du couple (u, v) est un raffinement de Y.

4) Soient R et R' deux raffinements de X, $u : R \to F$ et $u' : R' \to F$ deux morphismes. Pour que $Z_R(u) = Z_{R'}(u')$, il faut et il suffit que u et u' coïncident sur un raffinement $R'' \hookrightarrow R \times_X R'$.

Preuve. La seule assertion non triviale est l'assertion 1). Il faut montrer que $Z_R(u) \circ i_R = \ell(F) \circ u$. Pour cela il suffit de montrer (I 3.4) que les composés de ces morphismes avec tout morphisme $Y \xrightarrow{g} R$ (Y objet de C) sont égaux. Or, considérons $f = i_R \circ g$ et le **231**
produit fibré $R \times_X Y$:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"'] \\
R \times_X Y \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "\sim", "i'"'] & Y. \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Dans ce diagramme ci-dessus, i' est un monomorphisme qui admet une section. Par suite (1.3 3) i' est un isomorphisme. Or par définition du morphisme $\ell(F)$, le morphisme $Z_{R \times_X Y}(u \circ g')$ est égal à $\ell(F) \circ u \circ g$. D'autre part la commutativité du diagramme (*) nous fournit l'égalité $Z_{R\times_X Y}(u \circ g') = Z_R(u) \circ f$, et par suite on a bien l'égalité $\ell(F) \circ u \circ g = Z_R(u) \circ i_R \circ g$.

Proposition 3.2. 1) Le foncteur L est exact à gauche (I 2.3.2).

2) Pour tout préfaisceau F, LF est un préfaisceau séparé.

3) Le préfaisceau F est séparé si et seulement si le morphisme $\ell(F) : F \to LF$ est un monomorphisme. Le préfaisceau LF est alors un faisceau.

4) Les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\ell(F) : F \to LF$ est un isomorphisme.
   (ii) F est un faisceau.

Preuve. 1) Il suffit de montrer (I 3.1) que pour tout objet X de C, le foncteur $F \mapsto LF(X)$ commute aux limites projectives finies. Or par définition de la limite projective, le foncteur

$$F \longmapsto \operatorname{Hom}_{\hat{C}}(R, F) \quad R \hookrightarrow X \in \operatorname{ob}(J(X))$$

232 commute aux limites projectives, et la limite inductive $\varinjlim_{J(X)}$ commute aux limites projectives finies car $J(X)$ est une ensemble cofiltrant (I 2.7).

2) Soient X un objet de C et $f, g : X \rightrightarrows LF$ deux morphismes qui coïncident sur un raffinement $R \hookrightarrow X$ de X. En vertu de 3.1 2), il existe un crible couvrant $R' \hookrightarrow X$, qu'on peut toujours supposer contenu dans R, et deux morphismes $u, v : R' \rightrightarrows F$ tels que $Z_{R'}(u) = f$ et $Z_{R'}(v) = g$. En vertu de 3.1 1) on a alors $\ell(F) \circ u = \ell(F) \circ v$. Par suite (3.1 4)) u et v coïncident sur un raffinement $R'' \hookrightarrow R'$. Soit w le restriction de u à R''. On a $Z_{R''}(w) = Z_{R'}(u) = Z_{R'}(v)$ et par suite $f = g$. Le préfaisceau LF est donc séparé.

3) Si F est séparé, le morphisme $\ell(F)$ est un monomorphisme car une limite inductive filtrante de monomorphismes est un monomorphisme. Si $\ell(F)$ est un monomorphisme, le préfaisceau F est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau séparé, donc il est séparé. Montrons que LF est alors un faisceau. Soient $i : R \hookrightarrow X$ un crible couvrant un objet X de C, et $u : R \to LF$ un morphisme. Il nous suffit de montrer que u se factorise par X. Posons $R' = F \times_{LF} R$ et $v = Z_{R'}(\mathrm{pr}_1)$:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\ell(F)"] & & LF & \\
R' \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[rr, "pr_2"] & & R \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "i"] & X \arrow[ul, dash, "v"'] \\
R'' \arrow[u, "p_1"] \arrow[rr, "p_2"] & & Y \arrow[u, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

233 Pour montrer que $u = v \circ i$, il suffit de montrer (I 3.4) que pour tout morphisme $m : Y \to R$ (Y objet de C), $v \circ i \circ m = u \circ m$. Posons $R'' = Y \times_R R'$ et soient p_1 et p_2 les projections. La projection $R'' \xhookrightarrow{p_2} Y$ est un monomorphisme et fait de R'' un crible couvrant Y (3.1 2)). On a $v \circ i \circ \mathrm{pr}_2 = \ell(F) \circ \mathrm{pr}_1$ (3.1 1)), et par suite $v \circ i \circ \mathrm{pr}_2 = u \circ m \circ p_2$. On en déduit $v \circ i \circ \mathrm{pr}_2 \circ p_1 = u \circ \mathrm{pr}_2 \circ p_1$ i.e. $v \circ i \circ m \circ p_2 = u \circ m \circ p_2$. Comme le préfaisceau LF est séparé, on a $v \circ i \circ m = u \circ m$, C.Q.F.D.

4) Clair.

Remarque 3.3. Soit $J'(X)$ un sous-ensemble cofinal de $J(X)$. On a

$$LF(X) = \varinjlim_{J'(X)} \mathrm{Hom}_{C^{\wedge}}(., F).$$

En particulier, si la topologie de C est définie par une prétopologie $X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$ (1.1.3), le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes de $\mathrm{Cov}(X)$ (I 2.12 et I 3.5). En explicitant les formules on retrouve la construction de [

Théorème 3.4. Soit C un $\mathscr{U}$-site. Le foncteur d'inclusion $i : C^{\sim} \hookrightarrow C^{\wedge}$ des faisceaux dans les préfaisceaux admet un adjoint à gauche a, exact à gauche (I 2.3.2) :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[r, hook, shift right, "i"'] & C^{\wedge} \arrow[l, shift right, "\underline{a}"']
\end{tikzcd} .$$

Le foncteur $i \circ a$ est canoniquement isomorphe au foncteur $L \circ L$ (cf. 3.0.5). Pour tout préfaisceau F le morphisme d'adjonction $F \to i \circ \underline{a}(F)$ se déduit par l'isomorphisme précédent du morphisme $\ell(LF)\ell(F) : F \to L \circ L(F)$.

234 Définition 3.5. Le faisceau $\underline{a}F$ est appelé le faisceau associé au préfaisceau F.

Le théorème 3.4 résulte immédiatement de la proposition 3.2.

Proposition 3.6. Soient C un $\mathscr{U}$-site et $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$ un univers. Notons $C^{\wedge}_{\mathscr{U}}$ et $C^{\sim}_{\mathscr{U}}$ (resp. $C^{\wedge}_{\mathscr{V}}$ et $C^{\sim}_{\mathscr{V}}$) les catégories de $\mathscr{U}$-préfaisceaux et de $\mathscr{U}$-faisceaux (resp. de $\mathscr{V}$-préfaisceaux et de $\mathscr{V}$-faisceaux) et $\underline{a}_{\mathscr{U}} : C^{\wedge}_{\mathscr{U}} \to C^{\sim}_{\mathscr{U}}$ (resp. $\underline{a}_{\mathscr{V}} : C^{\wedge}_{\mathscr{V}} \to C^{\sim}_{\mathscr{V}}$) les foncteurs « faisceaux associés » correspondants. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C^{\wedge}_{\underline{U}} \arrow[r, "\underline{a}_U"] \arrow[d, hook] & C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\
C^{\wedge}_{\underline{V}} \arrow[r, "\underline{a}_V"] & C^{\sim}_{\underline{V}},
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs verticaux sont les inclusions canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. Résulte de la construction des foncteurs $\underline{a}_U$ et $\underline{a}_V$ (3.4 et 3.0.5).

4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux

Les propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux se déduisent des propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux via le théorème 3.4. La présent numéro explicite cette philosophie sur des énoncés-types parmi les plus utiles.

Théorème 4.1. Soient C un $\mathscr{U}$-site, $\widetilde{C}$ la catégorie des faisceaux, $\underline{a} : C^{\wedge} \to \widetilde{C}$ le foncteur faisceau associé, $i : \widetilde{C} \to C^{\wedge}$ le foncteur d'inclusion.

1) Le foncteur $\underline{a}$ commute aux limites inductives et est exact.
2) Les $\mathscr{U}$-limites inductives dans $\widetilde{C}$ sont représentables. Pour toute petite catégorie **235**
I et pour tout foncteur $E : I \to \widetilde{C}$, le morphisme canonique
$$\varinjlim_I E \longrightarrow \underline{a}(\varinjlim_I i \circ E)$$
est un isomorphisme.
3) Les $\mathscr{U}$-limites projectives dans $\widetilde{C}$ sont représentables. Pour tout objet X de C, le foncteur sur $\widetilde{C} : F \mapsto F(X)$ commute aux limites projectives, i.e. le foncteur d'inclusion $i : \widetilde{C} \to \widehat{C}$ commute aux limites projectives.

Preuve. Ces propriétés résultent essentiellement du théorème 3.4 et de (I 2.11).

Ainsi, dans la catégorie des faisceaux, les produits indexés par un élément de $\mathscr{U}$, produits fibrés, sommes indexées par un élément de $\mathscr{U}$, sommes amalgamées, noyaux, conoyaux, images, coimages sont représentables.

Corollaire 4.1.1. Soient C un $\mathscr{U}$-site et F un faisceau d'ensembles sur C. L'homomorphisme canonique
$$\varinjlim_{C/F} \underline{a}X \longrightarrow F$$
est un isomorphisme.

Preuve. Résulte de (I 3.4) et du fait que $\underline{a}$ commute aux limites inductives.

Proposition 4.2. Tout morphisme de $\widetilde{C}$, qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme, est un isomorphisme.

Preuve. Soit $u : G \to H$ un morphisme de $\widetilde{C}$ qui est un épimorphisme et un monomorphisme. Remarquons tout d'abord que la morphisme u est un monomorphisme
236 de préfaisceaux (4.1 1)). Construisons la somme amalgamée $H \amalg_G H = K$ et les deux morphismes canoniques $i_1, i_2 : H \rightrightarrows K$ dans la catégorie des préfaisceaux. Comme u est un monomorphisme de préfaisceaux, on vérifie immédiatement que le diagramme ci-après est cartésien et cocartésien (I 10.1) :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & H \arrow[d, "i_2"] \\ H \arrow[r, "i_1"] & K. \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur « faisceau associé », on obtient donc un diagramme cartésien et cocartésien de la catégorie des faisceaux (4.1 1)) :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & H \arrow[d, "\underline{a}i_2"] \\ H \arrow[r, "\underline{a}i_1"] & \underline{a}K. \end{tikzcd}$$

Comme u est un épimorphisme de faisceaux, le morphisme $\underline{a}i_1$ est un isomorphisme et comme le diagramme (*) est cartésien, le morphisme u est un isomorphisme.

Proposition 4.3. 1) Les limites inductives dans $C^{\sim}$ qui sont représentables, sont universelles (I 2.5).

2) Toute famille épimorphique (I 10.2) de morphismes est épimorphique effective universelle (2.6).
3) Toute relation d'équivalence est effective universelle (I 10.6).
4) Les $\mathscr{U}$-limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies (I 2.6).

237 Preuve. Les assertions 1) à 4) sont vraies dans la catégorie des ensembles donc dans la catégorie des préfaisceaux (I 3.1). Les assertions 1) et 4) résultent alors immédiatement des assertions correspondantes pour les préfaisceaux et de 4.1. Démontrons 3). Soit p_1, $p_2 : R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence de $C^{\sim}$. Le diagramme $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ est alors une relation d'équivalence de préfaisceaux (4.1.1)). Il existe donc un morphisme de préfaisceaux $u : X \to Y$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

soit cartésien et cocartésien dans la catégorie des préfaisceaux. En appliquant le foncteur « faisceau associé », on obtient un diagramme cartésien et cocartésien dans la catégorie des faisceaux (4.1 1)). Par suite $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ est une relation d'équivalence effective. Comme toute relation d'équivalence est effective d'après ce qui précède, toute relation d'équivalence est effective universelle. Démontrons 2). Soit $(u_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille épimorphique de $C^{\sim}$. D'après (II 2.6) et (I 2.12), il suffit de démontrer les assertions suivantes :

a) Pour tout morphisme de faisceaux $v : Y \to X$, la famille de morphismes $\mathrm{pr}_{2,i} : X_i \times_X Y \to Y$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\sim}$.

b) Pour tout faisceau Z le diagramme d'ensembles :

$$\mathrm{Hom}(X, Z) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, Z) \rightrightarrows \prod_{(i,k)\in I\times I} \mathrm{Hom}(X_i \times_X X_k, Z)$$

est exact.

Soient X' la réunion des images des morphismes u_i au sens des préfaisceaux et $j : X' \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Pour tout $i \in I$, le morphisme $u_i : X_i \to X$ se factorise en un morphisme $u_i' : X_i \to X'$ et le morphisme j, et la famille $u_i' : X_i \to X'$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\wedge}$. Comme j est un monomorphisme, le morphisme $\underline{a}i : \underline{a}X' \to X$ est un monomorphisme de faisceaux (4.1). Comme pour tout $i \in I$, on a $u_i = \underline{a}j\underline{a}u_i'$, $\underline{a}j$ est un épimorphisme de faisceaux. Par suite $\underline{a}j$ est un isomorphisme (4.2). Soit $v : Y \to X$ un morphisme de faisceaux. On en déduit par changement de base un morphisme $j_v : X' \times_X Y \to Y$ et des morphismes $u_{i,v}' : X_i \times_X Y \to X' \times_X Y$. Comme $\underline{a}$ commute aux produits fibrés, $\underline{a}j_v$ est un isomorphisme. Comme les familles épimorphiques de $C^{\wedge}$ conservent ce caractère par changement de base, la famille $u_{i,v}'$, $i \in I$, est épimorphique dans $C^{\wedge}$. Comme $\underline{a}$ commute aux limites inductives, la famille $\underline{a}u_{i,v}' : X_i \times_X Y \to \underline{a}(X' \times_X Y)$, $i \in I$, est épimorphique dans $C^{\sim}$ d'où a). Démontrons b). Soit Z un faisceau. Comme $\underline{a}j$ est un isomorphisme, l'application 238

$$\mathrm{Hom}(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', Z)$$

est une bijection. Comme les u_i', $i \in I$, forment une famille épimorphique de $C^{\wedge}$, le diagramme d'ensemble :

$$\mathrm{Hom}(X', Z) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, Z) \rightrightarrows \prod_{(i,k)\in I\times I} \mathrm{Hom}(X_i \times_{X'} X_k, Z)$$

est exact. Enfin comme X' est un sous-préfaisceau de X, le préfaisceau $X_i \times_{X'} X_k$, $(i, k) \in I \times I$, est canoniquement isomorphe à $X_i \times_X X_k$, d'où b).

Remarques 4.3.1. 1) La proposition 4.3 2) nous fournit formellement une seconde démonstration de 4.2 : Il est clair que, dans toute catégorie, un morphisme qui est à la fois un épimorphisme effectif universel et un monomorphisme est en fait un isomorphisme. 239

2) On déduit des propositions précédentes que tout morphisme dans la catégorie des faisceaux se factorise de manière unique en un épimorphisme effectif et un monomorphisme effectif. Cette propriété généralise de façon naturelle, pour les catégories non additives, l'axiome (AB2) des catégories abéliennes (coim $\simeq$ im) [Tohoku].

4.4.0. Soit C un $\mathcal{U}$-site. Le foncteur $h : C \to C^{\wedge}$ (I 1.3.1), composé avec le foncteur faisceau associé, fournit un foncteur

$$\epsilon_C : C \longrightarrow C^{\sim},$$

appelé foncteur canonique de C dans $C^{\sim}$, qui sera constamment utilisé par la suite. Le foncteur ϵ_C commute aux limites projectives finies. Lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, ϵ_C est pleinement fidèle, et commute aux limites projectives ; il est alors, d'ailleurs, défini lorsque C ne possède pas nécessairement de petite d'ailleurs, défini lorsque C ne possède pas nécessairement de petite famille topologiquement génératrice. Nous n'étudierons pas en détail le comportement de ϵ_C par rapport aux limites inductives (cf. [SGA 3 IV]). Nous aurons cependant besoin des propositions ci-après.

Théorème 4.4. Soient C un $\mathscr{U}$-site et $(u_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes de C de but X. Les conditions suivantes sont équivalentes [3] :

i) La famille $(\epsilon_C u_i : \epsilon_C X_i \to \epsilon_C X)$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\sim}$ (I
240 10.2).

ii) La famille $(u_i : X_i \to X)$, $i \in I$, est une famille couvrante de C (1.2).

Preuve. ii) $\Rightarrow$ i). Soient $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par les u_i, $i \in I$ (I 4.3.3), et $u'_i : X_i \to R$ les morphismes induits par les u_i. La famille des u'_i, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\wedge}$, et R est un crible couvrant X. Par suite, pour tout faisceau F, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, F)$$

est bijective et l'application

$$\mathrm{Hom}(R, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, F)$$

est injective. Donc l'application

$$\mathrm{Hom}(X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, F)$$

est injective et par suite l'application

$$\mathrm{Hom}(\underline{a}X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(\underline{a}X_i, F)$$

est injective, d'où i).
i) $\Rightarrow$ ii). Avec les notations introduites précédemment, soit $J_R : R \hookrightarrow X$ l'injection canonique dans X du crible engendré par les u_i, $i \in I$. Il résulte de i) que le morphisme de faisceaux $\underline{a}J_R : \underline{a}R \to \underline{a}X$ est à la fois un épimorphisme de faisceaux et un monomorphisme de faisceaux. C'est donc un isomorphisme de faisceaux (4.2). On a, avec les notations du $n°$ 3, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\ell(x)"] & LX \arrow[r, "\ell(LX)"] & \underline{a}X \\
R \arrow[u, hook, "J_R"] \arrow[r, "\ell(R)"] & LR \arrow[u, hook, "LJ_R"] \arrow[r, "\ell(LR)"] & \underline{a}R. \arrow[u, "\underline{a}J_R"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

241 Tout d'abord, d'après 3.1 2), il existe un crible couvrant $J_{S_1} : S_1 \to X$ et un morphisme $u_1 : S_1 \to LR$ tel que

$$\ell(LX) \circ \ell(X) \circ J_{S_1} = \underline{a}J_R \circ \ell(LR) \circ u_1 = \ell(LX) \circ LJ_R \circ u_1. \tag{4.6.1}$$

Posons $m = \ell(X) \circ J_{S_1}$ et $n = LJ_R \circ u_1$. Les morphismes m et n sont des morphismes de S_1 dans LX. Soit $S_2 \hookrightarrow S_1$ le noyau du couple de flèches (m, n). Pour tout objet Y de C et tout morphisme $\alpha : Y \to S_1$, on a, en vertu de 4.6.1, $\ell(LX) \circ m \circ \alpha = \ell(LX) \circ n \circ \alpha$.

[3]Lorsque le site C ne possède pas nécessairement de petite famille topologiquement génératrice et lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, on a ii) $\Rightarrow$ i) (cf. démonstration de 4.4).

Il résulte alors de (3.1 3)) que le noyau $S_2 \times_{S_1} Y$ du couple de flèches $(m \circ \alpha, n \circ \alpha)$ est un crible couvrant Y. Par suite, d'après l'axiome (T 2) des topologies, $J_{S_2} : S_2 \hookrightarrow X$ est un crible couvrant X. On a donc un morphisme $u_2 : S_2 \to LR$ et un diagramme commutatif :

(4.6.2)
$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[rr, hook, "J_{S_2}"] \arrow[dd, "u_2"'] & & X \arrow[dd, "\ell(X)"] \\
& R \arrow[ur, hook, "J_R"'] \arrow[dl, "\ell(R)"] & \\
LR \arrow[rr, "LJ_R"] & & LX
\end{tikzcd}$$
.

Soient Y un objet de C et $\beta : Y \to S_2$ un morphisme. D'après 3.1 1), il existe un crible couvrant $J_{Q_i} : Q_1 \hookrightarrow Y$ et un morphisme $v_1 : Q_1 \to R$ tels que $u_2 \circ \beta \circ J_{Q_1} = \ell(R) \circ v_1$. Posons $f = J_{S_2} \circ \beta \circ J_{Q_1}$, $g = J_R \circ v_1$. Soient Q_2 le noyau du couple $(f, g) : Q_1 \rightrightarrows X$ et $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$, l'injection canonique. Pour tout objet Z de C et tout morphisme $\gamma : Z \to Q_1$, on a, en vertu de la commutativité de (4.6.2) :

$$\begin{aligned}
\ell(X) \circ f \circ \gamma = \ell(X) \circ J_{S_2} \circ \beta \circ J_{Q_1} \circ \gamma = LJ_R \circ u_2 \circ \beta \circ J_{Q_1} \circ \gamma = \\
= LJ_R \circ \ell(R) \circ v_1 \circ \gamma = \ell(X) \circ J_R \circ v_1 \circ \gamma = \ell(X) \circ g \circ \gamma.
\end{aligned}$$

Il résulte alors de 3.1 2) que le noyau $Q_2 \times_{Q_1} Z$ du couple $(f \circ \gamma, g \circ \gamma)$ est un crible **242**
couvrant Z. D'après l'axiome (T 2) des topologies, $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$ est un crible couvrant Y. Pour tout morphisme $\beta : Y \to S$, il existe donc un crible couvrant $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$ et un morphisme $v_2 : Q_2 \to R$ tels que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta"] & S_2 \arrow[r, "J_{S_2}"] & X \\
Q_2 \arrow[u, hook, "J_{Q_2}"] \arrow[r, "V_2"] & R \arrow[ur, hook, "J_R"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons alors $S_2 \cap R$ le produit fibré de S_2 et de R au-dessus de X. Le crible (de Y) : $(S_2 \cap R) \times_{S_2} Y$ contient le crible Q_2 et par suite $(S_2 \cap R) \times_{S_2} Y$ est un crible couvrant Y. Il résulte alors de l'axiome (T 2) des topologies que $S_2 \cap R$ est un crible couvrant X et par suite le crible R qui contient $S_2 \cap R$ est un crible couvrant X, C.Q.F.D.

Corollaire 4.4.4. Soient T la topologie du $\mathcal{U}$-site e, T' (resp. T'') la topologie la plus fine sur e parmi celles pour lesquelles les objets de $\widetilde{C}$ sont des faisceaux (resp. des préfaisceaux) (2.2). Alors $T = T' = T''$.

En effet, on a trivialement $T \leq T' \leq T''$, et 4.4 et 2.2 impliquent que $T'' \leq T$, C.Q.F.D.

Définition 4.5. Un objet initial d'une catégorie A est un objet ϕ_A qui représente la limite inductive vide i.e. tel que pour tout $X \in \operatorname{ob} A$, il existe une flèche et une seule $\phi_A \to X$. On dit qu'un objet ϕ_A est initial strict s'il est initial et si tout morphisme de but ϕ_A est un isomorphisme. Soit (S_i), $i \in I$, une famille d'objets d'une catégorie A. Supposons que la somme $s = \amalg_{i \in I} S_i$ soit représentable. On dit que la somme S est disjointe si les morphismes structuraux $S_i \to S$ sont quarrables, s'ils sont des monomorphismes et si pour tout couple i, j, $i \neq j$, le produit $S_i \times_S S_j$ est un objet initial de A. On dit que

243 la somme S est disjointe universelle si elle est disjointe et si elle reste somme disjointe après tout changement de base $T \to S$; il en résulte que pour tout couple i, j, $i \neq j$, les objets $S_i \times_S S_j$ sont des objets initiaux stricts de A.

Exemple 4.5.1. Dans la catégorie des ensembles, les sommes directes sont disjointes et universelles. Il en est donc de même dans toute catégorie de préfaisceaux d'ensembles (I 3.1) et par suite dans toute catégorie de faisceaux d'ensembles sur un $\mathscr{U}$-site (4.1) ; en particulier, l'objet initial de $C^{\sim}$ est strict.

Proposition 4.6. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie et $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes de C. Pour toute $\mathscr{U}$-topologie $\mathscr{T}$ sur C (3.0.2), on désigne par $C^{\sim}_{\mathscr{T}}$ la catégorie de faisceaux correspondante et par $\epsilon_{\mathscr{T}} : C \to C^{\sim}_{\mathscr{T}}$ le foncteur correspondant.

1) Soit $\mathscr{T}$ une $\mathscr{U}$-topologie telle que
$$\coprod_{i\in I} \epsilon_{\mathscr{T}}(X_i) \xrightarrow{(\epsilon_{\mathscr{T}}(s_i))} \epsilon_{\mathscr{T}}(X)$$
soit un isomorphisme. Alors pour toute topologie $\mathscr{T}'$ plus fine que $\mathscr{T}$, le morphisme :
$$\coprod_{i\in I} \epsilon_{\mathscr{T}'}(X_i) \xrightarrow{(\epsilon_{\mathscr{T}'}(s_i))} \epsilon_{\mathscr{T}'}(X)$$
est un isomorphisme.

2) Soit $\mathscr{T}$ une $\mathscr{U}$-topologie sur C. Les propriétés suivantes (i) et (ii) sont équivalentes :

i) a) La famille $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, est couvrante pour $\mathscr{T}$.
b) Pour tout $i \in I$, le morphisme diagonal de préfaisceaux $\Delta_i : X_i \hookrightarrow$
244 $X_i \times_X X_i$ est transformé par le foncteur « faisceau associe » (pour $\mathscr{T}$) en un isomorphisme (ce qui est le cas si les s_i sont des monomorphismes).
c) Pour tout couple (i, j), $i \neq j$, d'éléments de I, le préfaisceau. $X_i \times_X X_j$ est transformé par le foncteur « faisceau associé » (pour $\mathscr{T}$) en l'objet initial de $C^{\sim}_{\mathscr{T}}$.

ii) $\epsilon_{\mathscr{T}}(X)$ est somme de $\epsilon_{\mathscr{T}}(X_i)$.

Preuve. 1) Un faisceau F pour $\mathscr{T}'$ est un faisceau pour $\mathscr{T}$. Pas suite, pour tout faisceau F pour $\mathscr{T}'$, le morphisme
$$\mathrm{Hom}_{C^{\wedge}}(X, F) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{C^{\wedge}}(X_i, F)$$
est un isomorphisme, ce qui entraîne l'assertion.

2) Par définition, on a la propriété ii) si et seulement si le morphisme de préfaisceaux
$$\Phi = (h(s_i), i \in I) : \coprod_i h(X_i) \longrightarrow h(X)$$
est transformé par le foncteur « faisceau associé » en un isomorphisme i.e. (4.2) si et seulement si $\underline{a}(\Phi)$ est un épimorphisme et monomorphisme de faisceaux. D'après (4.4), le morphisme $\underline{a}(\Phi)$ est un épimorphisme si et seulement si on a la propriété a). Le morphisme diagonal
$$\Delta : \coprod_i h(X_i) \longrightarrow (\coprod_i h(X_i)) \times_{h(X)} (\coprod_i h(X_i))$$
est somme directe d'une famille $\Delta_{i,j}$, $(i, j) \in i \times I$, de morphismes définis comme suit :

β) Lorsque $i = j$, $\Delta_{i,i}$ est le morphisme diagonal $h(X_i) \to h(X_i) \times_{h(X)} h(X_i)$

γ) Lorsque $i \neq j$, $\Delta_{i,j}$ est le morphisme $\phi_{C^\wedge} \to h(X_i) \times_{h(X)} h(X_j)$ ($\phi_{C^\wedge}$ désigne l'objet initial de $C^\wedge$).

Le morphisme $\underline{a}(\Phi)$ est un monomorphisme si et seulement si $\underline{a}(\Delta)$ est un isomorphisme, et d'après (4.1) $\underline{a}(\Delta)$ est isomorphisme si et seulement si les $\underline{a}(\Delta_{i,j})$ sont des isomorphismes i.e. si et seulement si on a les propriétés b) et c). **245**

Corollaire 4.6.1. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie et X un objet de C.

1) Soit $\mathscr{T}$ une $\mathscr{U}$-topologie sur C. L'objet X de C est transformé par le foncteur « faisceau associé » (pour la topologie $\mathscr{T}$) en l'objet initial de $C^\sim_{\mathscr{T}}$ si et seulement si le crible vide recouvre X.
2) Lorsque X est un objet initial strict de C, le faisceau associé à X, pour toute $\mathscr{U}$-topologie plus fine que la topologie canonique, est un objet initial.

Preuve. 1) On prend pour ensemble I dans 4.6 2) l'ensemble vide.

2) D'après 1) et 4.6 1), il suffit de montrer que le crible vide recouvre X pour la topologie canonique i.e. (2.6) il suffit de montrer que pour tout objet $Y \to X$ au-dessus de X, Y est un objet initial de X, ce qui résulte de la définition (4.5).

Corollaire 4.6.2. Soient C un $\mathscr{U}$-site et $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes quarrables de C de même but possédant les propriétés suivantes :

α) La famille des s_i, $i \in I$, est couvrante.

β) Pour tout $i \in I$, $s_i : X_i \to X$ est un monomorphisme.

γ) Pour tout couple (i, j), $i \neq j$, d'éléments de I, $X_i \times_X X_J$ est recouvert par le crible vide, i.e. pour tout faisceau F sur C, $F(X_i \times_X X_J)$ est un ensemble réduit à un élément.

Alors $\epsilon_C(X)$ est somme des $\epsilon_C(X_i)$, $i \in I$.

Preuve. Résulte immédiatement de 4.6 2) et de 4.6.1 1). **246**

Corollaire 4.6.3. Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie et $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphisme quarrables de même but. Supposons que la topologie canonique de C soit une $\mathscr{U}$-topologie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une $\mathscr{U}$-topologie $\mathscr{T}$ sur C, moins fine que la topologie canonique, telle que $\epsilon_{\mathscr{T}}(X)$ soit somme des $\epsilon_{\mathscr{T}}(X_i)$, $i \in I$.

ii) L'objet X est somme disjointe et universelle (4.5) (dans C) des X_i.

Preuve. ii) $\Rightarrow$ i). Comme X est somme universelle des X_i, $i \in I$, la famille des s_i, $i \in I$, est couvrante pour la topologie canonique de C (2.6). La condition α) de 4.6.2 est donc satisfaite lorsqu'on munit C de la topologie canonique. La condition β) est évidemment satisfaite et la propriété γ) résulte de 4.6 1) 2), d'où i).
i) $\Rightarrow$ ii). Soit $\mathscr{T}$ une topologie sur C moins fine que la topologie canonique telle que $\epsilon_{\mathscr{T}}(X)$ soit somme des $\epsilon_{\mathscr{T}}(X_i)$. Pour tout faisceau F, pour $\mathscr{T}$, l'application canonique $\mathrm{Hom}(X, F) \to \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, F)$ est une bijection. De plus, tout préfaisceau représentable est un faisceau. Il en résulte aussitôt que X est somme dans C des X_i, $i \in I$. Appliquant ceci au cas où l'ensemble I est vide, on voit que si un objet de C est transformé en l'objet initial de $C^\sim$, cet objet est un objet initial de C. Le foncteur $\epsilon_{\mathscr{T}} : C \to C^\sim$ est pleinement fidèle et commute aux limites projectives finies. Par suite la condition b) de 4.6.2) entraîne que les s_i, $i \in I$, sont des monomorphismes de C, et la condition c) entraîne, d'après de qui précède, que les $X_i \times_X X_j$, $i \neq j$, sont des objets initiaux de C. Par suite X est somme disjointe des X_i. Comme $\epsilon_{\mathscr{T}}$ commute aux produits fibrés, cette **247**

dernière propriété est stable par tout changement de base $Y \to X$, et par suite X est somme disjointe et universelle des X_i, $i \in I$.

Corollaire 4.6.4. Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie et X un objet de C. Supposons que la topologie canonique sur C soit une $\mathcal{U}$-topologie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe sur C une topologie moins fine que la topologie canonique telle que $\epsilon_{\mathcal{T}}(X)$ soit un objet initial de $C^{\sim}_{\mathcal{T}}$.
ii) X est un objet initial strict de C.

Preuve. On prend pour ensemble I l'ensemble vide dans 4.6.3.

Proposition 4.7. Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie, $C^{\sim}$ la catégorie des faisceaux sur C pour la topologie canonique, $\epsilon_C : C \to C^{\sim}$ le foncteur canonique (4.4.0), $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans C admettant un conoyau Y dans C. Soit $\Pi : X \to Y$ le morphisme canonique et supposons-le quarrable. Considérons alors les propriétés suivantes :

i) $\epsilon_C(Y)$ est le quotient de la relation d'équivalence $\epsilon_C(R) \rightrightarrows \epsilon_C(X)$.
ii) La relation d'équivalence $R \rightrightarrows X$ est effective universelle (cf. *n*° 7).

On a ii) $\Rightarrow$ i).. Lorsque C possède une $\mathcal{U}$-topologie moins fine que la topologie canonique, on a i) $\Rightarrow$ ii).

Preuve. ii) $\Rightarrow$ i). Le morphisme canonique $R \to X \times_X X$ est un isomorphisme. Soit $S \to Y$ le crible engendré par $\pi : X \to Y$. Pour tout préfaisceau F, on a un diagramme exact (I 2.12) :

$$\mathrm{Hom}(S, F) \to \mathrm{Hom}(X, F) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(R, F).$$

248 Il suffit donc de montrer que pour tout faisceau F pour la topologie canonique, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S, F)$$

est une bijection i.e. il suffit de montrer que S est couvrant pour la topologie canonique, ou encore que le crible engendré par $\pi : X \to Y$ est couvrant, ce qui résulte de la définition 2.5.
i) $\Rightarrow$ ii). Le foncteur $\epsilon_C : C \to C^{\sim}$ commute aux limites projectives finies et est pleinement fidèle. Or le morphisme canonique $\epsilon_C(R) \to J_C(X) \times_{J_C(Y)} J_C(X)$ est un isomorphisme (4.3). Par suite le morphisme canonique $R \to X \times_Y X$ est un isomorphisme. Le morphisme $\epsilon_C(X) \to \epsilon_C(Y)$ est un épimorphisme, ce qui entraîne (4.4) que $\pi : X \to Y$ est un morphisme couvrant de C pour la topologie canonique, C.Q.F.D.

Proposition 4.8. Soit C un $\mathcal{U}$-site. La catégorie des faisceaux sur C possède les propriétés suivantes :

a) Les limites projectives finies sont représentables.
b) Les sommes directes indexées par un élément de $\mathcal{U}$ sont représentables. Elles sont disjointes et universelles. (4.5).
c) Les relations d'équivalence sont effectives universelles.

Cela a été vu dans 4.1, 2) et 3), 4.3, 3), et 4.5.1.

Ces propriétés ont été mises en évidence car elles permettront plus tard de caractériser les $\mathcal{U}$-catégories équivalentes à des catégories de faisceaux sur des catégories appartenant à $\mathcal{U}$ (IV 1.2).

Remarque. Rappelons que la propriété a) est équivalente à la propriété :
Il existe un objet final, et les produits fibrés sont représentables (I 2.3.1).

249 4.9. Soient C un site dont la catégorie sous-jacente soit une $\mathscr{U}$-catégorie. Alors la catégorie C des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C satisfait aux conditions envisagées dans I 7.3 ((i) ou (ii), au choix), donc par loc. cit. les diverses variantes envisagées dans I 7.1 pour la notion de famille génératrice dans C coïncident. Ceci posé :

Proposition 4.10. Avec les notations précédentes, considérons le foncteur canonique $\epsilon : C \to \widetilde{C}$ (4.4.0), et soit $G \subset \mathrm{ob}\, C$ une famille topologiquement génératrice dans C (3.0.1). Alors la famille $(\epsilon(X))_{X\in G}$ d'objets de $\widetilde{C}$ est une famille génératrice. En particulier la famille $(\epsilon(X))_{X\in \mathrm{ob}\, C}$ d'objets de C est génératrice.

Il faut prouver que tout morphisme $u : F \to F'$ dans $\widetilde{C}$ tel que

$$\mathrm{Hom}(\epsilon(X), F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\epsilon(X), F') \tag{4.10.1}$$

soit une bijection pour tout $X \in G$, est un isomorphisme. Or l'application précédente s'identifie à l'application

$$u(X) : F(X) \longrightarrow F'(X), \tag{4.10.2}$$

et il faut montrer que si celle-ci est bijective pour tout $X \in G$, il en est de même pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. Or soit $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille couvrante de X par des objets de G, et pour tout couple d'indices (i, j) de I, considérons l'ensemble de tous les morphismes $X_{ijk} \to X_i \times_X X_j$ dans $\widehat{C}$, avec $X_{ijk} \in G$ (k variant dans un ensemble d'indices $I_{i,j}$). On obtient alors un homomorphisme de diagrammes exacts d'ensembles

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i F(X_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\wr"] & \prod_{ijk} F(X_{ijk}) \arrow[d, "\wr"] \\
F(X) \arrow[r] & \prod_i F(X_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{ijk} F(X_{ijk})
\end{tikzcd},$$

où par hypothèse les deux dernières flèches verticales sont des bijections. Il en est donc 250
de même de la première flèche verticale, C.Q.F.D.

Corollaire 4.11. Supposons que C soit un $\mathscr{U}$-site (3.0.2). Alors la catégorie $\widetilde{C}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie et admet une $\mathscr{U}$-petite famille génératrice.

En effet, par hypothèse on peut prendre dans 4.10 pour G une petite famille génératrice, ce qui prouve l'existence d'une petite famille génératrice. D'autre part, si F, $F' \in \mathrm{ob}\, C$, un homomorphisme de F dans F' est connu quand on connaît l'homomorphisme (4.10.1) i.e. (4.10.2) pour tout $X \in \mathrm{ob}\, G$ (I 7.1.1), d'où s'ensuit que l'application

$$\mathrm{Hom}(F, F') \longrightarrow \prod_{X\in G} \mathrm{Hom}(F(X), F'(X))$$

est injective. Comme le deuxième membre est $\mathscr{U}$-petit, il en est de même du premier, ce qui prouve que $\widetilde{C}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie.

Corollaire 4.12. Soit C un $\mathscr{U}$-site. Alors pour tout objet de $\widetilde{C}$, l'ensemble des sous-objets de X et l'ensemble des objets quotients de X est $\mathscr{U}$-petit.

Cela résulte de I 7.4 resp. I 7.5, qui s'appliquent grâce à 4.11.

5. Extension d'une topologie de C à $C^{\wedge}$

Proposition 5.1. Soient C un $\mathscr{U}$-site et $f : H \to K$ un morphisme de $C^{\wedge}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $X \to K$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, le morphisme correspondant $H \times_K X \to X$ a pour image un crible couvrant de X.
ii) Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \to \underline{a}K$ sur les faisceaux associés est une épimor-
251 phisme de $C^{\sim}$.
ii bis) Pour tout faisceau F sur C, l'application $\operatorname{Hom}(K, F) \to \operatorname{Hom}(H, F)$ déduite de f est injective.

Preuve. Il est clair que ii) équivaut à ii bis).

Prouvons que (i) $\Rightarrow$ (ii). En vertu de 4.4, (i) signifie que $u : (H \times_K X) \to \underline{a}(X)$ est un épimorphisme. Or, comme $\underline{a}(H \times_K X) \simeq \underline{a}(H) \times_{\underline{a}(K)} \underline{a}(X)$, $\underline{a}$ commutant aux $\varprojlim$ finies (4.1), le morphisme envisagé se déduit de $\underline{a}(f) : \underline{a}(H) \to \underline{a}(K)$ par changement de base. Comme les épimorphismes de $\widetilde{C}$ sont universels, cela montre que (ii) $\Rightarrow$ (i). Inversement, comme la famille des $X_i \to K$ est épimorphique, il en est de même de la famille des $\underline{a}(X) \to \underline{a}(K)$ dans $\widetilde{C}$ (4.1), donc pour vérifier que $\underline{a}(f) : \underline{a}(H) \to \underline{a}(K)$ est épimorphique, il suffit de le voir après tout changement de base du type précédent $\underline{a}(X) \to \underline{a}(K)$, ce qui prouve i) $\Rightarrow$ ii), C.Q.F.D.

Définition 5.2. 1) Un morphisme $f : H \to K$ satisfaisant aux trois conditions équivalentes de 5.1 est appelé un morphisme couvrant. Une famille de morphismes $f_i : H_i \to K$, $i \in I$, de même but est dite couvrante si le morphisme correspondant $f : \amalg_i H_i \to K$ est couvrant.
2) Un morphisme $f : H \to K$ est dit bicouvrant s'il est couvrant et si le morphisme diagonal $H \to H \times_K H$ est couvrant. Une famille $f_i : H_i \to K$, $i \in I$, de même but est dite bicouvrante si le morphisme correspondant $f : \amalg_i H_i \to K$ est bicouvrant.

Par la condition i) de 5.1, dire qu'une famille $(f_i : H_i \to K)$, $i \in I$, est couvrante, signifie que pour tout morphisme $X \to K$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, la famille des $H_i \times_K X \to X$,
252 $i \in I$, a pour image un crible couvrant de X ; ou encore, par ii), la famille des morphismes $\underline{a}(f_i) : \underline{a}H_i \to \underline{a}K$ dans $C^{\sim}$ est épimorphique (compte tenu de ce que le foncteur $\underline{a}$ commute aux sommes directes (4.1)).[3]

Proposition 5.3. Soit C un $\mathscr{U}$-site et $f : H \to K$ un morphisme de $C^{\wedge}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le morphisme f est bicouvrant (5.2)).
i bis) Le morphisme f est couvrant et pour tout objet X de C et tout couple de morphismes $u, v : X \rightrightarrows H$ tel que $fu = fv$, le noyau de (u, v) est un crible couvrant de X.
ii) Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \to \underline{a}K$ est un isomorphisme de $C^{\sim}$.
ii bis) Pour tout faisceau F sur C, l'application $\operatorname{Hom}(K, F) \to \operatorname{Hom}(H, F)$ est une bijection.

Preuve. L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ i bis) résulte de la condition i) de 5.1, appliquée au morphisme diagonal $H \to H \times_K H$; l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ ii bis) est triviale.

[3] Notons que la propriété pour un morphisme ou une famille de morphismes de $C^{\wedge}$ d'être couvrant (resp. bicouvrant) est stable par changement de base.

i) ⇒ ii). Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \to \underline{a}K$ est un épimorphisme (5.1). Comme le foncteur $\underline{a}$ commute à la formation des produits fibrés (4.1), le morphisme diagonal $\underline{a}H \to \underline{a}H \times_{\underline{a}K} \underline{a}H$ est un épimorphisme (5.1). Comme le morphisme diagonal est toujours un monomorphisme, c'est un isomorphisme (4.2). Par suite le morphisme $\underline{a}(f)$ est un monomorphisme. C'est donc un isomorphisme (4.2).
ii) ⇒ i). Comme le foncteur $\underline{a}$ commute à la formation des produits fibrés, le morphisme f et le morphisme diagonal $H \to H \times_K H$ sont transformés par $\underline{a}$ en isomorphismes. En particulier, ils sont transformés par $\underline{a}$ en épimorphismes. Ils sont donc couvrants, C.Q.F.D.

5.3.1. Il résulte de 5.3, et du fait que $\underline{a}$ commute aux sommes directes, qu'une famille **253**
$(f_i : H_i \to K)$, $i \in I$, de morphismes de $C^{\wedge}$ est bicouvrante si et seulement si les f_i induisent sur les faisceaux associés un isomorphisme de la somme directe $\amalg_i \underline{a}H_i$ sur $\underline{a}K$, ou encore si et seulement si, pour tout faisceau F, l'application

$$\operatorname{Hom}(K, F) \longrightarrow \prod_i \operatorname{Hom}(H_i, F)$$

est bijective.

Proposition 5.4. Soit C un $\mathscr{U}$-site. Il existe sur $C^{\wedge}$ une topologie (évidemment unique) telle qu'une famille $H_i \to K$ de flèches de $C^{\wedge}$ de même but soit couvrante pour cette topologie si et seulement si elle est couvrante au sens de 5.2. C'est aussi la topologie la moins fine sur $C^{\wedge}$ parmi les topologies T ayant les propriétés suivantes :

a) T est plus fine que la topologie canonique de $C^{\wedge}$ (i.e. toute famille épimorphique de $C^{\wedge}$ est couvrante pour T).
b) Toute famille couvrante dans C est couvrante dans $C^{\wedge}$.

Preuve. Nous nous bornerons à donner des indications. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que les familles couvrantes au sens de 5.2 sont les familles couvrantes d'une topologie T_C sur $C^{\wedge}$ (on utilise 4.1). Les familles couvrantes de la topologie canonique sur $C^{\wedge}$ sont les familles épimorphiques sur $C^{\wedge}$ (2.6 et I 3.1). Comme $\underline{a}$ commute aux limites inductives (4.1), la topologie T_C est plus fine que la topologie canoniques de $C^{\wedge}$. De plus les familles couvrantes de C sont des familles couvrantes de T_C (5.1). Si donc T' désigne la moins fine des topologie de $C^{\wedge}$ possédant les propriétés a) et b), T_C est plus fine que T'. Soit $(f_i : H_i \to K)$, $i \in I$, une famille couvrante de T_C. Mon- **254**
trons que $(f_i, i \in I)$ est une famille couvrante de T'. Soient $s_i : H_i \to H = \amalg_i H_i$ les monomorphismes canoniques et $f = (f_i, i \in I) : H = \amalg_i H_i \to K$ le morphisme défini par les f_i. La famille des s_i est couvrante pour T'. Pour montrer que $(f_i, i \in I)$ est une famille couvrante de T', il suffit donc de montrer, en vertu de l'axiome (T 2) des topologies, que la morphisme $f : H \to K$ est couvrant pour T'. Il existe une famille épimorphique de $C^{\wedge}$, $u_\lambda : X_\lambda \to K$, $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in \operatorname{ob} C$ (I 3.4). Pour montrer que $f : H \to K$ est couvrant pour T', il suffit donc, en vertu de l'axiome (T 2) des topologies, de montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, le morphisme $\mathrm{pr}_2 : H \times_K X_\lambda \to X_\lambda$ est couvrant pour T'. Soit alors $v_j : Y_j \to H \times_K X_\lambda$, $j \in J$, $Y_j \in \operatorname{ob} C$, une famille épimorphique de $C^{\wedge}$. La famille $(\mathrm{pr}_2 \circ v_j, j \in J)$ est couvrante pour T_C. C'est donc une famille couvrante de C (5.1). C'est donc une famille couvrante de T'. Par suite le crible engendré par $\mathrm{pr}_2 : H \times_K X \to X$ contient un crible couvrant pour T'. Il est donc couvrant pour T' et par suite $\mathrm{pr}_2 : H \times_K X \to X$ est couvrant, C.Q.F.D.

Remarque 5.4.1. La démonstration de 5.4 montre en fait que toute topologie T' sur $C^{\wedge}$, plus fine que la topologie canonique de $C^{\wedge}$, est la moins fine des topologies T sur $C^{\wedge}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

a) T est plus fine que la topologie canonique de $C^{\wedge}$.
b) Toute famille couvrante pour T' de la forme $u_i : X_i \to X$, $i \in I$, où X et les X_i sont des objets de C, est couvrante pour T.

En particulier, toute topologie T' sur $C^{\wedge}$, plus fine que la topologie canonique, est uniquement déterminée par les familles $u_i : X_i \to X$, $i \in I$, X_i et X objets de C, qui sont couvrantes pour T'.

255 Remarque 5.4.2. On peut facilement montrer que pour toute topologie T' sur $C^{\wedge}$, plus fine que la topologie canonique, l'ensemble des familles de morphismes $(X_i \to X)$, $i \in I$, de même but de C, qui sont couvrantes pour T', est l'ensemble des familles couvrantes d'une topologie sur C. Donc 5.4 et 5.4.1 permettent d'établir une correspondance biunivoque entre les topologies sur C et les topologies sur $C^{\wedge}$ plus fines que la topologie canonique.

5.5.0. Soit C une petite catégorie. Désignons par Caf l'ensemble des sous-catégories strictement pleines (tout objet isomorphe à un objet de la sous-catégorie est un objet de la sous-catégorie) de $C^{\wedge}$ dont le foncteur d'injection admette un adjoint à gauche qui commute aux limites projectives finies. Désignons aussi par $\mathscr{T}$ l'ensemble des topologies sur C. Le théorème 3.4 nous définit une application :

$$\Phi : \mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{Caf}\,.$$

Nous allons définir une application en sens inverse. Pour cela, il faut associer à tout élément $e = i' : C' \substack{\xleftarrow{a'} \\ \longrightarrow} C^{\wedge}$, $\underline{a}'$ adjoint à gauche de i') une topologie T_e sur C. Pour tout objet X de C, nous définirons $J_e(X)$ comme étant l'ensemble des sous-objets de X dont le morphisme d'injection est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme. On vérifie immédiatement, à l'aide des hypothèses faites sur $\underline{a}'$, qu'on définit ainsi une topologie T_e sur C. On a donc défini une application :

$$\Psi : \mathrm{Caf} \longrightarrow \mathscr{T}\,.$$

On a alors le résultat (dû à J. GIRAUD) :

256 Théorème 5.5. L'application Φ est une bijection, et Ψ est l'application inverse.

Preuve. L'application $\Psi \circ \Phi$ est l'identité. En effet, ceci résulte immédiatement de 5.1.

L'application $\Phi \circ \Psi$ est l'identité. En effet, soient ($i' : C' \substack{\xleftarrow{\underline{a}'} \\ \longrightarrow} C^{\wedge}$) un élément de Caf, T_e la topologie qui lui correspond par Ψ, C_e la catégorie des faisceaux pour T_e. On démontre alors, en utilisant la définition de la topologie T_e et la définition des morphismes bicouvrants (5.2), l'équivalence des assertions suivantes :

i) Le morphisme u de $C^{\wedge}$ est bicouvrant pour la topologie T_e.
ii) Le morphisme u de $C^{\wedge}$ est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme,

Il est clair que C' est une sous-catégorie pleine de C_e. Il suffit donc de montrer que tout faisceau F pour la topologie T_e est un objet de C'. Mais, d'après l'équivalence ci-dessus, le morphisme $F \to i' \circ a'(F)$ est bicouvrant, et sa source et son but étant des faisceaux, on en déduit par 5.3 (ii) que $F \to i' \circ a'(F)$ est un isomorphisme, C.Q.F.D.

6. Faisceaux à valeurs dans une catégorie

6.0. Soient C et D deux catégories. Un foncteur contravariant de C dans D, $F : C^{\circ} \to D$, est appelé un préfaisceau sur C à valeurs dans D.

DÉFINITION 6.1. Soient C un site, D une catégorie. Un préfaisceau $F : C^{\circ} \to D$ est appelé un faisceau sur C à valeurs dans D (ou, plus brièvement, un faisceau à valeurs dans D) si pour tout objet S de D, le préfaisceau d'ensembles :

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_D(S, F(X)) \quad , \quad X \in \mathrm{ob}(C)$$

est un faisceau. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}om(C^{\circ}, D)$ formée des faisceaux sur C à valeurs dans D sera notée $\mathcal{H}om^{\sim}(C^{\circ}, D)$.

REMARQUES 6.2. 1) La condition 6.1 signifie que pour tout objet X de C, tout crible couvrant R de X, et tout objet S de D, on a un isomorphisme (I 3.5 et 2.1) : 257

$$\mathrm{Hom}_D(S, F(X)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C/R} F(.).$$

On retrouve ainsi, lorsque D est la catégorie des $\mathcal{U}$-ensembles, la définition des faisceaux d'ensembles (loc. cit.).

2) Soient D' une $\mathcal{U}$-catégorie et $G : D \to D'$ un foncteur commutant aux limites projectives. Le foncteur G transforme, par composition, les faisceaux à valeurs dans D en faisceaux à valeurs dans D'.

6.3.0. Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies (I 2.9) et $\mathcal{U} - \gamma$ la catégorie des γ-ensembles qui appartiennent à $\mathcal{U}$. Désignons par esj : $\mathcal{U} - \gamma \to \mathcal{U} - \mathrm{Ens}$ le foncteur « ensemble sous-jacent ». Le foncteur esj commute aux limites projectives et, par suite, d'après la remarque précédente, définit par composition des foncteurs :

$$\mathrm{esj}^{\wedge} : \mathcal{H}om(C^{\circ}, \mathcal{U} - \gamma) \longrightarrow C^{\wedge}$$
$$\mathrm{esj}^{\sim} : \mathcal{H}om^{\sim}(C^{\circ}, \mathcal{U} - \gamma) \longrightarrow C^{\sim}.$$

Le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim}$ est appelé le foncteur « faisceau d'ensembles sous-jacent ». En fait, il se factorise de façon canonique par la catégorie $\gamma - \widetilde{C}$ des γ-objets de $C^{\sim}$, et désignant encore par $\widetilde{\mathrm{esj}}$ le foncteur

$$\mathcal{H}om^{\sim}(C^{\circ}, \mathcal{U} - \gamma) \longrightarrow \gamma - \widetilde{C}$$

obtenu, on peut énoncer :

PROPOSITION 6.3.1. Le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim}$ établit une équivalence de catégories entre le catégorie des faisceaux sur C à valeurs dans $\mathcal{U} - \gamma$, celle des γ-objets de la catégorie des faisceaux d'ensembles, et la catégorie des γ-objets de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles dont le préfaisceau sous-jacent est un faisceau.

PREUVE. La preuve utilise essentiellement (I 3.2) et le fait qu'une limite projective 258
finie de faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux est un faisceau (4.1).

6.3.2. La proposition précédente justifie l'abus de langage qui consiste à identifier un faisceau à valeurs dans $\mathcal{U} - \gamma$ et la γ-objet correspondant dans $C^{\sim}$. Nous ferons désormais systématiquement cet abus de langage.

Nous emploierons la terminologie classique : faisceaux de groupes, faisceaux de groupes commutatifs (que nous appellerons le plus souvent faisceaux abéliens), faisceaux d'anneaux, faisceaux de A-modules etc.

6.3.3. Nous désignons par

$$C^{\sim}_{\gamma} (resp.\ C^{\wedge}_{\gamma})$$

la catégorie des γ-objets de $C^{\sim}$ (resp. de $C^{\wedge}$). Lorsque γ est l'espèce de structure « A-module », on écrit aussi $C^{\sim}_{A}$, ou simplement $\widetilde{C}_{\mathrm{ab}}$ lorsque $A = \mathbf{Z}$.

Supposons que C soit un $\mathscr{U}$-site. Le foncteur « faisceau associé » est exact à gauche (4.1) et par suite :

Proposition 6.4. *Le foncteur d'inclusion $i_{\gamma} : C^{\sim}_{\gamma} \to C^{\wedge}_{\gamma}$ admet un adjoint à gauche a_{γ} exact à gauche, i.e. on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{C^{\sim}_{\gamma}}(a_{\gamma},\ ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C^{\wedge}_{\gamma}}(\ , i_{\gamma}).$$

Soit X un objet de $C^{\wedge}_{\gamma}$. Le faisceau d'ensembles sous-jacent à $a_{\gamma}(X)$ est canoniquement isomorphe au faisceau d'ensembles associé au préfaisceau d'ensembles sous-jacent à X. Le morphisme de préfaisceaux d'ensembles sous-jacents au morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to i_{\gamma} a_{\gamma}$ s'identifie au morphisme d'adjonction appliqué au préfaisceau d'ensembles sous-jacent.

259 Proposition 6.5. *Supposons que le foncteur $\mathrm{esj} : \gamma - \mathscr{U} \to \mathscr{U} - \mathrm{Ens}$ admette un adjoint à gauche* [3] :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}-\mathrm{Ens}}(.,\mathrm{esj}(.)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\gamma-\mathscr{U}}(\mathrm{Lib}(.),.).$$

Le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim} : C^{\sim}_{\gamma} \to C^{\sim}$ (resp. $\mathrm{esj}^{\wedge} : C^{\wedge}_{\gamma} \to C^{\wedge}$) admet un adjoint à gauche $\mathrm{Lib}^{\sim}$ (resp. $\mathrm{Lib}^{\wedge}$) et on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Lib}^{\sim} = a_{\gamma}\, \mathrm{Lib}^{\wedge}\, i.$$

Preuve. La preuve est formelle et est laissée au lecteur.

Corollaire 6.6. *Soit (X_i), $i \in I$, une famille génératrice de $C^{\sim}$ (4.9). Alors la famille $\mathrm{Lib}^{\sim}(X_i)$ est une famille génératrice de $C^{\sim}_{\gamma}$.*

Preuve. Le preuve est formelle une fois qu'on a remarqué que la foncteur $\mathrm{esj}^{\sim}$ commute aux limites projectives et qu'il est conservatif ($\mathrm{esj}^{\sim}(u)$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow u$ est isomorphisme).

Proposition 6.7. *Soient A un $\mathscr{U}$-faisceau d'anneaux, ou bien un petit anneau, $C^{\sim}_{A}$ (resp. $C^{\wedge}_{A}$) la catégorie des faisceaux (resp. des préfaisceaux) de A-modules unitaires (6.3.3) sur un $\mathscr{U}$-site C. Alors $C^{\sim}_{A}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie abélienne vérifiant les axiomes (AB 5) (« existence de limites inductives filtrantes exactes à gauche ») et (AB 3)* (« existence de produits infinis ») de [Tohoku]. Elle possède une famille de générateurs indexée par un élément de $\mathscr{U}$.*

Preuve. Il est clair que la catégorie $C^{\wedge}_{A}$ est une catégorie abélienne vérifiant les
260 axiomes (AB 3), (AB 4), et (AB 5) (I 2.8 et I 3.3). On déduit alors de 6.4 que la catégorie $C^{\sim}_{A}$ est une catégorie additive où les noyaux et conoyaux sont représentables. Plus précisément, soient i_A et a_A les foncteurs inclusion dans les préfaisceaux et faisceaux associés et $u : X \to Y$ un morphisme de $C^{\sim}_{A}$. Le foncteur a_A est exact à gauche et commute aux limites inductives. Le foncteur i_A commute aux limites projectives. Par suite

[3] On démontre qu'un tel adjoint existe toujours [C.F.] : groupe libre, groupe abélien libre, A-module libre etc.

le foncteur $i_A a_A : C\hat{} \to C\hat{}_A$ est un foncteur additif exact à gauche. On en déduit des isomorphismes canoniques :

$$(*) \qquad i_a(\mathrm{Ker}(u)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(i_A(u)),$$

$$(**) \qquad \mathrm{coker}(u) \xrightarrow{\sim} a_A\,\mathrm{coker}(i_a(u)).$$

On a par suite un isomorphisme canonique :

$$(***) \qquad \mathrm{coim}(u) \xrightarrow{\sim} a_A\,\mathrm{coim}(i_a(u)).$$

Montrons que le morphisme canonique $\mathrm{coim}(u) \to \mathrm{im}(u)$ est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer, d'après (*), que la suite :

$$0 \longrightarrow i_A(\mathrm{coim}(u)) \longrightarrow i_A(Y) \longrightarrow i_A(\mathrm{coker}(u))$$

est exacte. Utilisant les isomorphismes $(**)$ et $(***)$ et remarquant que $a_A i_A(Y)$ est isomorphe à Y, on voit que cette suite est isomorphe à la suite :

$$0 \longrightarrow i_A a_A(\mathrm{coim}(i_A(u)) \longrightarrow i_A a_A i_A(Y) \longrightarrow i_A a_A(\mathrm{coker}(i_A(u)),$$

qui n'est autre que la transformée par le foncteur $i_A a_A$ de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{coim}(i_A(u)) \longrightarrow i_A(Y) \longrightarrow \mathrm{coker}(i_A(u)).$$

Or, cette suite est exacte et le foncteur $i_A a_A$ est exact à gauche. La catégorie $C\tilde{}_A$ est donc une catégorie abélienne. Le foncteur $a_A : C\hat{}_A \to C\tilde{}_A$ est exact à gauche et commute **261**
aux limites inductives quelconques. Par suite il est additif, exact et commute aux limites inductives. La catégorie $C\hat{}_A$ vérifiant l'axiome (AB 5), il en est de même de la catégorie $C\tilde{}_A$. Enfin il est clair que dans la catégorie $C\tilde{}_A$, les produits indexés par un élément de $\mathscr{U}$ sont représentables et, par suite, que l'axiome (AB 3)* est vérifié, ce qui achève la démonstration de la première assertion.

Pour tout anneau A élément de $\mathscr{U}$, le foncteur :

$$\mathrm{esj} : \mathscr{U} - A - \mathrm{module} \longrightarrow \mathscr{U} - \mathrm{Ens}$$

admet un adjoint à gauche X_A (A-module libre engendré). Il suffit donc d'appliquer 4.10 et 6.6 pour achever la preuve.

Notation 6.8. Soit H un faisceau d'ensembles. Le faisceau de A-modules associé au préfaisceau (cf. notation 6.5)

$$X \longmapsto \mathrm{Lib}_A\, H(X) \qquad X \in \mathrm{ob}\, C$$

est noté A_H. Lorsque $H = \underline{a}(X)$ (faisceau associé au préfaisceau représenté par X) on écrit parfois simplement A_X (par abus de notation). La démonstration de 6.7 montre que la famille de faisceaux de A-module $\mathscr{A}_X$, $(X \in \mathrm{ob}(C))$, est une famille génératrice, indexée par un élément de $\mathscr{U}$, de la catégorie des faisceaux de A-modules.

Remarque 6.9. D'après [Tôhoku], 6.7 montre que la catégorie $C\tilde{}_A$, lorsque A est un élément de $\mathscr{U}$, possède suffisamment d'injectifs. On sait, par ailleurs, que les produits infinis ne sont pas nécessairement exacts dans $C\tilde{}_A$, et, par suite, que la catégorie $C\tilde{}_A$ n'admet pas, en général, suffisamment de projectifs [Roos].

Bibliographie

[1] M. Artin ; Grothendieck's topologies. **262**
[2] M. Demazure : Séminaire de Géométrie Algébrique III, Exposé IV
Lecteur Notes. Springer-Verlag.
[3] A. Grothendieck : Sur quelques points d'AIgèbre Homologique.
Tohoku Math. Journal.
[4] J.E. Roos : CR

EXPOSÉ III

Fonctorialité des catégories de faisceaux

J.-L. Verdier

Dans I 5, on a étudié la comportement des catégories de préfaisceaux par rapport **263**
aux foncteurs entre les catégories d'arguments. Dans cet exposé, on étend cette étude au cas des sites et des catégories de faisceaux (n° 1 et 2). Après avoir introduit la topologie induite (n° 3), on aborde au n° 4 le lemme de comparaison qui jouera un rôle important dans Exp. IV. Au numéro 5, on étudie, pour le lecteur patient, certains diagrammes commutatifs liés aux catégories localisées (du type C/X). Dans le théorème I 5.1 on fait des hypothèses de petitesse sur les catégories envisagées. Ces hypothèses ne sont pas, en général, satisfaites par les sites rencontrés dans la pratique ($\mathscr{U}$-sites). Ceci oblige à quelques contorsions (4.2, 4.3, 4.4).

1. Foncteurs continus

Définition 1.1. Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-sites et $u : C \to C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que u est continu si pour tout faisceau d'ensembles F sur C', le préfaisceau $X \mapsto F \circ u(X)$ sur C est un faisceau.

Cette notion de continuité dépend a priori de l'univers $\mathscr{U}$ pour lequel les deux sites sont des $\mathscr{U}$-sites. La proposition 1.5 montre qu'elle n'en dépend pas.

1.11. Désignons par $i : C^\sim \to C^\wedge$ (resp. $i' : C'^\sim \to C'^\wedge$) le foncteur d'inclusion **264**
canonique des faisceaux dans les préfaisceaux. D'après la définition 1.1, le foncteur u est continu si et seulement s'il existe un foncteur $u_s : C'^\sim \to C^\sim$ tel que l'on ait l'égalité $iu_s = u^* i'$ (avec $u^* F = F \circ u$ (I 5.0)).

Proposition 1.2. Soient C un petit site, C' un $\mathscr{U}$-site et $u : C \to C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur u est continu.

ii) Pour tout objet X de C et tout crible $R \hookrightarrow X$ couvrant X, le morphisme $u_! R \hookrightarrow u(X)$ est bicouvrant dans $C'^\wedge$ (II 5.2 et I 5.1). [3]

iii) Pour tout famille bicouvrante $H_i \to K$, $i \in I$, de $C^\wedge$, la famille des $u_! H_i \to u_! K$, $i \in I$, est bicouvrante dans $C'^\wedge$.

iv) Il existe un foncteur $u^s : C^\sim \to C'^\sim$, commutant aux limites inductives et « prolongeant u », i.e. tel que le diagramme de foncteurs canoniques

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\epsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\epsilon_{C'}"] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim, \end{tikzcd}$$

soit commutatif à isomorphisme près.

[3] « Couvrant » au lieu de « bicouvrant » ne suffisait pas nécessairement, cf. exemple 1.9.3 ci-dessous.

De plus, lorsque C n'est plus nécessairement un petit site, mais un $\mathscr{U}$-site, on a toujours i) ⇔ iv) et le foncteur u^s de iv) est nécessairement un adjoint à gauche du foncteur $u_s : \widetilde{C}' \to \widetilde{C}$, et est par suite déterminé à isomorphisme unique près.

265 Preuve. La démonstration de i) ⇔ iv) lorsque C est un $\mathscr{U}$-site sera faite en 4.2. Supposons C petit. Il est clair que iii) ⇒ ii).

i) ⇒ iii): Soit $H_i \to K$, $i \in I$, une famille bicouvrante de $C\hat{}$. Pour tout faisceau F sur C', le préfaisceau $u^* F$ (I 5.0) est un faisceau sur C. Donc (II 5.3) l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(K, u^* F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(H_i, u^* F),$$

est bijective. Par adjonction (I 5.1), on en déduit que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(u_! K, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(u_! H_i, F)$$

est bijective. Par suite (II 5.3) la famille $u_! H_i \to u_! K$, $i \in I$, est bicouvrante.

ii) ⇒ i): Soient X un objet de C, $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant, F un faisceau sur C'. D'après (II 5.3), l'application

$$\mathrm{Hom}(u_! X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u_! R, F)$$

est bijective. Par adjonction (I 5.1), on en déduit que l'application

$$\mathrm{Hom}(X, u^* F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, u^* F)$$

est bijective. Par suite $u^* F$ est un faisceau.

i) ⇒ iv): Utilisons les notations habituelle $\underline{a}$ et i (resp. $\underline{a}'$ et i') pour les foncteur « faisceau associe » et « inclusion dans les préfaisceaux ». Pour tout faisceau G sur C, posons $u^s G = \underline{a}' u_! i G$. Pour tout faisceau F sur C', on a la suite d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G, u_s F) &\simeq \mathrm{Hom}(iG, i u_s F) \simeq \mathrm{Hom}(iG, u^* i' F) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(u_! i G, i' F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}' u_! i G, F). \end{aligned}$$

266 (Le premier isomorphisme provient de ce que i est pleinement fidèle ; le deuxième isomorphisme provient de la définition de u_s ; les troisième et quatrième isomorphisme s'obtiennent par adjonction). Par suite u^s est adjoint à gauche à u_s. En particulier u^s commute aux limites inductives. Pour tout préfaisceau K sur C et tout faisceau F sur C', on a la suite d'isomorphismes naturels : $\mathrm{Hom}(u^s \underline{a} K, F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a} K, u_s F) \simeq \mathrm{Hom}(K, i u_s F) \simeq \mathrm{Hom}(K, u^* i' F) \simeq \mathrm{Hom}(u_! K, i' F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}' u_! K, F)$ (le troisième isomorphisme provient de la définition de u_s ; les autres s'obtiennent par adjonction) ; d'où un isomorphisme fonctoriel $u^s \underline{a} K \simeq \underline{a}' u_! K$. En particulier, en utilisant cet isomorphisme lorsque K est représentable, on obtient, compte tenu de I 5.4 3), un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\epsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\epsilon_{C'}"] \\ \widetilde{C} \arrow[r, "u^S"] & \widetilde{C}' \end{tikzcd}$$

iv) $\Rightarrow$ ii): Soit $h : C \to C\hat{}$ (resp. $h' : C' \to C'\hat{}$) le foncteur qui associe à un objet le préfaisceau qu'il représente. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\ C\hat{} \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'\hat{} \arrow[d, "\underline{a}'"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^S"] & C'^{\sim}. \end{tikzcd}$$

Le carré du haut est commutatif (1.4 3)) et on a $\underline{a}h = \epsilon_C$, $\underline{a}'h' = \epsilon_{C'}$. Pour tout objet K de $C\hat{}$, on a un isomorphisme canonique (I 3.4) : **267**

$$\varinjlim_{(h(X)\to K)\in \mathrm{ob}(C/K)} h(X) \xrightarrow{\sim} K.$$

Comme les foncteurs $u_!$, u^s, $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ commutent aux limites inductives, on en déduit des isomorphismes :

$$\varinjlim_{(h(X)\to K)\in \mathrm{ob}(C/K)} u^s\underline{a}h(X) \xrightarrow{\sim} u^s\underline{a}K,$$

$$\varinjlim_{(h(X)\to K)\in \mathrm{ob}(C/K)} \underline{a}'u_!h(X) \xrightarrow{\sim} \underline{a}'u_!K.$$

On a $u_!h = h'u$ et, par hypothèse, on a un isomorphisme $\underline{a}'h'u \simeq u^s\underline{a}h$, d'où un isomorphisme :

$$u^s\underline{a}K \simeq \underline{a}'u_!K,$$

dont on vérifie immédiatement qu'il est fonctoriel en K. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} C\hat{} \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'\hat{} \arrow[d, "\underline{a}'"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^S"] & C', \end{tikzcd}$$

est donc commutatif à isomorphisme près. Comme $\underline{a}i$ est isomorphe au foncteur identique, on a un isomorphisme $u^s \simeq \underline{a}'u_!i$, d'où l'unicité de u^s. Soit $v : H \to K$ un morphisme bicouvrant de $C\hat{}$. Alors $\underline{a}(v)$ est un isomorphisme (II 5.3) et par suite $\underline{a}'u_!(v)$ (isomorphe à $u^s\underline{a}(V)$) est un isomorphisme. Donc $u_!(v)$ est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme, et par suite $u_!(v)$ est bicouvrant (II 5.3), d'où ii).

L'assertion supplémentaire, dans le cas C petit, a été prouvée en cours de démonstration, C.Q.F.D. **268**

1.2.1. Le foncteur $u^s : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ de 2.2 iv) pourra s'interpréter souvent comme un foncteur « image réciproque » par un « morphisme de topos » $C'^{\sim} \to C^{\sim}$, cf. IV 4.9. Ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3. Soit $u : C \to C'$ un foncteur continu entre un petit site C et un U-site C'.

1) Le foncteur u^s est adjoint à gauche au foncteur u_s.
2) On a un isomorphisme canonique $u^s \simeq \underline{a}'u_!i$.
3) On a un isomorphisme canonique $u^s\underline{a} \simeq \underline{a}'u_!$

4) Le foncteur u^s commute aux limites inductives.
5) Lorsque le foncteur $u_!$ est exact à gauche (cf. I 5.4 4)), le foncteur u^s l'est aussi. Plus généralement le foncteur u^s commute aux types de limites projectives finies auxquels le foncteur $u_!$ commute.

Preuve. Les assertions 1), 2), 3), 4) ont été prouvées en cours de démonstration de 1.2. L'assertion 5) résulte de l'isomorphisme 2), compte tenu de ce qui i commute aux limites projectives et de ce que $\underline{a}'$ commute aux limites projectives finies (II 4.1).

Remarque 1.4. En combinant I 5.4 3) et 1.3 3) on obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\ C^\wedge \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'^\wedge \arrow[d, "\underline{a}'"] \\ C^\sim \arrow[r] & C'^\sim, \end{tikzcd}$$

269 où le carré du haut est commutatif et le carré du bas commutatif à isomorphisme près. Mais les foncteurs $\underline{a}$, $\underline{a}'$, $u_!$, u^s ne sont définis qu'à isomorphisme près. Le lecteur pourra vérifier qu'on peut choisir les foncteurs $\underline{a}$, $\underline{a}'$ et u^s de façon que :

1) Les foncteurs composés $\underline{a}h$ et $\underline{a}'h'$ soient injectifs sur les ensembles d'objets ;
2) le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\underline{a}h"'] & C' \arrow[d, "\underline{a}'h'"] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Plus précisément, on peut choisir les foncteurs $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ de façon à remplir la condition 1). Les foncteurs $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ étant choisis, on peut choisir le foncteur u^s de façon à remplir la condition 2).

Proposition 1.5. Soient $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ deux univers, C et C' deux $\mathscr{U}$-sites, $u : C \to C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Alors u est continu relativement à $\mathscr{U}$ si et seulement s'il est continu relativement à $\mathscr{V}$. De plus, lorsque u est continu, désignons par $u^s_{\mathscr{U}}$ (resp. $u^s_{\mathscr{V}}$) le foncteur entre catégories de $\mathscr{U}$-faisceaux (resp. $\mathscr{V}$-faisceaux) introduit en 1.2 iv). Alors le diagramme

(1.5.1)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{C}_{\mathscr{U}} \arrow[r, "u^s_{\underline{U}}"] \arrow[d] & \widetilde{C'}_{\underline{U}} \arrow[d] \\ C^\sim_{\underline{V}} \arrow[r, "u^s_{\underline{V}}"] & C'^\sim_{\underline{V}}, \end{tikzcd}$$

270 où les foncteurs verticaux sont les foncteurs d'inclusion canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où C est $\mathscr{U}$-petit. Le cas général sera démontré en 4.3. Il est clair que si le foncteur u^* transforme tout $\mathscr{V}$-faisceau sur C' en $\mathscr{V}$-faisceau sur C, il transforme tout $\mathscr{U}$-faisceau sur C' en $\mathscr{U}$-faisceau sur C. Supposons que u^* transforme tout $\mathscr{U}$-faisceau sur C' en $\mathscr{U}$-faisceau sur C. Notons $\hat{C_{\mathscr{U}}} \hookrightarrow \hat{C_{\mathscr{V}}}$ (resp. $\hat{C'_{\mathscr{U}}} \hookrightarrow \hat{C'_{\mathscr{V}}}$) les catégories de $\mathscr{U}$-préfaisceaux et $\mathscr{V}$-préfaisceaux, $u_{\mathscr{U}!}$ et $u_{\mathscr{V}!}$ les foncteurs « image réciproque » pour les $\mathscr{U}$-préfaisceaux et les $\mathscr{V}$-préfaisceaux respectivement. On a un diagramme commutatif (cf. la construction explicite de $u_!$ dans I 5.1) :

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} C\hat{}_{\underline{U}} \arrow[r, "u_{\underline{U}!}"] \arrow[d, hook] & C'\hat{}_{\underline{V}} \arrow[d, hook] \\ C\hat{}_{\underline{V}} \arrow[r, "u_{\underline{V}!}"] & C'\hat{}_{\underline{V}}. \end{tikzcd}$$

Les foncteurs d'inclusion des $\mathscr{U}$ préfaisceaux dans les $\mathscr{V}$-préfaisceaux sont pleinement fidèles et commutent aux limites projectives. Il résulte alors de (II 5.1 i)) qu'on morphisme bicouvrant de $\mathscr{U}$-préfaisceaux est un morphisme bicouvrant de $\mathscr{V}$-préfaisceaux. Soit alors $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant un objet X de C. D'après 1.2 ii), le morphisme $u_{\mathscr{U}!}R \to u_{\mathscr{U}!}X$ est bicouvrant. Utilisant la commutativité de $(*)$ et ce qui précède, on en déduit que le morphisme $u_{\mathscr{V}!}R \to u_{\mathscr{V}!}X$ est bicouvrant. Par suite (1.2), le foncteur u^* transforme les $\mathscr{V}$-faisceaux sur C' en $\mathscr{V}$-faisceaux sur C. La commutativité de (1.5.1) résulte alors de la commutativité de $(*)$, de II 3.6 et de 1.3 2).

Proposition 1.6. Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-sites, $u : C \to C'$ un foncteur entre les **271**
catégories sous-jacentes. Considérons les conditions :

i) u est continu (cf. . 1.1 et 1.2).

ii) Pour tout famille couvrante $(X_i \to X)$, $i \in I$ de C, la famille $(uX_i \to uX)$, $i \in I$, de C', est couvrante.

On a l'implication i) $\Rightarrow$ ii).

Supposons que la topologie de C puisse être définie par une prétopologie T (II 1.3) et que le foncteur u commute aux produits fibrés.[3] Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes et sont équivalentes à la condition suivante :

iii) Le foncteur u transforme les familles couvrantes de T en familles couvrantes de C'.

En particulier, supposons que dans C les produits fibrés soient représentables et que le foncteur u commute aux produits fibrés. Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes.

Preuve. Montrons que i) $\Rightarrow$ ii). Soit $X_i \to X$, $i \in I$, une famille couvrante de C. Pour tout faisceau F sur C', u^*F est un faisceau. Par suite, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, u^*F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, u^*F)$$

est injective (II 5.1). D'où une application injective

$$\mathrm{Hom}(u_!X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(u_!X_i, F).$$

Donc la famille $u_!X_i \to u_!X$, $i \in I$, est couvrante dans C' (II 5.1).

Toute famille couvrante de la prétopologie T est une famille couvrante de C, d'où ii) $\Rightarrow$ iii). Montrons que iii) $\Rightarrow$ i). Soit X un objet de C et $X_i \to X$, $i \in I$, une famille **272**

[3]En fait, il suffit que n commute aux produits fibrés intervenant dans les changements de base pour des morphismes provenant de famille couvrantes pour T.

couvrante de $\mathrm{Cov}(X)$ (II 1.3). Les morphismes $X_i \to X$ sont quarrables et le foncteur u commute aux produits fibrés. Par suite, les produits fibrés $u(X_i) \times_{u(X)} u(X_j)$ sont représentables et canoniquement isomorphes à $u(X_i \times_X X_j)$. Soit F un faisceau sur C'. Alors le diagramme d'ensembles :

$$F(u(X) \to \prod_i F(u(X_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(u(X_i \times_X X_j)$$

est exact (II 2.1, I 3.5 et I 2.12). Par suite le diagramme d'ensembles

$$u^* F(X) \to \prod_i u^* F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} u^* F(X_i \times_X X_J)$$

est exact. Donc $u^* F$ est un faisceau (II 2.4), d'où i). La dernière assertion de 1.6 résulte de ce qui précède et du fait que, lorsque les produits fibrés sont représentables dans C, toutes les familles couvrantes de C [3] définissent sur C une prétopologie dont la topologie associée est la topologie de C.

Proposition 1.7. Soient C un petit site, C' un $\mathscr{U}$-site et $u : C \to C'$ un foncteur continu. Soit γ une structure algébrique définie par limites projectives finies, telle que dans la catégorie des γ-objets de $\mathscr{U} - \mathrm{Ens}$ les $\mathscr{U}$-limites inductives soient représentables [3]. On utilise les notations de la proposition II 6.4. Le foncteur u_s commute aux limites projectives et par suite définit un foncteur $u_s^\gamma : C^\sim_\gamma \to C'^\sim_\gamma$. Le foncteur u_s^γ admet un adjoint à gauche u_γ^s qui possède les propriétés suivantes :

273 1) On a un isomorphisme canonique $u_\gamma^s \xrightarrow{\sim} \underline{a}'_\gamma u_{\gamma !} i_\gamma$, et u_γ^s commute aux limites projectives finies auxquelles $u_{\gamma !}$ commute.
2) On a un isomorphisme canonique $u_\gamma^s \underline{a}_\gamma \xrightarrow{\sim} \underline{a}'_\gamma u'_{\gamma !}$.
3) Le foncteur u_γ^s commute aux limites inductives.
4) Si u^s est exact à gauche, le diagramme (notation de II 6.3.0)

$$\begin{tikzcd} C^\sim{}_\gamma \arrow[r, "u^s_\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{esj}^\sim"'] & C'^\sim{}_\gamma \arrow[d, "\mathrm{esj}'^\sim"] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près et le foncteur u_γ^s est exact.
5) Supposons que le foncteur $\mathrm{esj}^\sim$ (resp. $\mathrm{esj}^\sim$) possède un adjoint à gauche $\mathrm{Lib}^\sim$ (resp. $\mathrm{Lib}'^\sim$) (II 6.5). On a un isomorphisme canonique : $u_\gamma^s \,\mathrm{Lib}^\sim \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lib}'^\sim u^s$.

De plus, lorsque C n'est pas nécessairement un petit site mais un $\mathscr{U}$-site, le foncteur u_s^γ admet un adjoint à gauche u_γ^s. Enfin si V est un univers contenant $\mathscr{U}$ et si $u^s_{\gamma\mathscr{U}}$ (resp. $u^s_{\gamma\mathscr{V}}$) désigne l'adjoint à gauche de u_s relativement à l'univers $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$), le diagramme suivant, analogue au diagramme (1.5.1) :

(1.7.1)
$$\begin{tikzcd} C^\sim_{\gamma\underline{U}} \arrow[r, "u^s_{\gamma\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & \widetilde{C}'_{\gamma\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ C^\sim_{\gamma\underline{V}} \arrow[r, "u^s_{r\underline{V}}"] & \widetilde{C}'_{\gamma\underline{V}} \end{tikzcd}$$

---

[3]indexées par les ensembles appartenant à un univers convenable.

[3]On peut montrer en fait que cette condition est toujours satisfaite.

est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. La démonstration, dans le cas où C est un petit site, est laissée au lecteur. Elle sera complétée en 4.3 dans le cas où C est un $\mathscr{U}$-site.

Notation 1.8. Nous emploierons dorénavant la notation u_s pour désigner la foncteur 274
u_s^γ. Cette notation ne risque pas d'apporter de confusion, car le foncteur u_s (défini sur les faisceaux d'ensembles) commute aux limites projectives finies.

De même, lorsque u^s est exact à gauche, nous emploierons la notation u^s pour désigner le foncteur u^s_γ. Cet abus de notation est justifié par 1.7 4).

Exemple 1.9.1. Soit X un petit espace topologique. Désignons par $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de X (les objets de $\mathrm{Ouv}(X)$ sont les sous-ensembles ouverts de X, les morphismes de $\mathrm{Ouv}(X)$ sont les inclusions) munie de la topologie canonique. Une famille $(U_i \subset U)$, $i \in I$, est couvrante si et seulement si les ouverts U_i recouvrent U (II 2.6). Les faisceaux d'ensembles sur $\mathrm{Ouv}(X)$ sont donc les faisceaux d'ensembles au sens de [TF]. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On en déduit un foncteur $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$: pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est l'image réciproque de U par l'application f. Le foncteur f^{-1} est un foncteur continu (1.6). Le foncteur $f^{-1}_s : \mathrm{Ouv}(X)^\sim \to \mathrm{Ouv}(Y)^\sim$ est le foncteur image directe pour les faisceaux, au sens de [TF]. Le foncteur $(f^{-1})^s : \mathrm{Ouv}(Y)^\sim \to \mathrm{Ouv}(X)^\sim$ est le foncteur image réciproque pour les faisceaux au sens de [TF]. Le foncteur $(f^{-1})^s$ commute aux limites projectives finies, grâce à 1.3 5).

Exemple 1.9.2. Soient X un espace topologique et $Y \hookrightarrow X$ un ouvert de X. Tout ouvert de Y est un ouvert de X, d'où un foncteur $\Phi : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$. Le foncteur Φ est continu (1.6). Le foncteur $\Phi_s : \mathrm{Ouv}(X)^\sim \to \mathrm{Ouv}(Y)^\sim$ est le foncteur « restriction à Y ». 275
Le foncteur $\Phi^s_{\mathrm{ab}} : \mathrm{Ouv}(Y)^\sim_{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Ouv}(X)^\sim_{\mathrm{ab}}$ (II 6.3.3, I 1.7) est le foncteur « prolongement par zéro en dehors de Y » introduit dans [TF]. Le foncteur $\Phi^s : \mathrm{Ouv}(Y)^\sim \to \mathrm{Ouv}(X)^\sim$ (1.3) est analogue au foncteur « prolongement par zéro » : pour tout faisceau H sur Y et tout point $y \in Y$, la fibre en y de $\Phi^s H$ est canoniquement isomorphe à la fibre en y de H ; pour tout point $x \in X$, $x \notin Y$, la fibre en x de $\Phi^s H$ est vide. Le foncteur Φ^s est appelé le foncteur « prolongement par le vide en dehors de Y ». Le foncteur Φ^s commute aux produits fibrés et aux produits finis sur un ensemble d'indices non vide, mais il ne transforme pas l'objet final de $\mathrm{Ouv}(Y)^\sim$ en l'objet final de $\mathrm{Ouv}(X)^\sim$.

Exemple 1.9.3. Soient C et C' deux petits sites, $u : C \to C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes qui transforme toute famille couvrante de C en famille couvrante de C'. Le foncteur u n'est pas continu en général (cf. cependant 1.6). Voici un contre-exemple. Soit S un ensemble de cardinal infini de l'univers $\mathscr{U}$, et C la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, dont les objets sont les sous-ensembles finis, non-vides, de S. On munit C de la topologie canonique. On remarquera que les familles couvrantes de C sont les familles surjectives d'applications et que les familles couvrantes ne sont pas vides. On remarquera de plus qu'il n'y a, à isomorphisme près, que deux faisceaux constants sur C : le faisceau de valeur l'ensemble vide et le faisceau de valeur l'ensemble à un élément. Posons $C = C'$ et soit $u : C \to C'$ un foncteur constant. Le foncteur u transforme les familles couvrantes de C en familles couvrantes de C'. Le foncteur u n'est pas continu. En effet, comme les préfaisceaux représentables de C' sont des faisceaux, pour tout objet X de C', il existe un faisceau F sur C' tel que le cardinal 276
de l'ensemble $F(X)$ soit ≥ 2, et par suite le préfaisceau $u^* F$ n'est pas un faisceau.

2. Foncteurs cocontinus

Définition 2.1. Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-sites et $u : C \to C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que u est cocontinu s'il possède la propriété suivante :

(COC) Pour tout objet Y de C et pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow u(Y)$, le crible de Y engendré par les flèches $Z \to Y$ telles que $u(Z) \to u(Y)$ se factorise par R, couvre Y.

Proposition 2.2. Soient C un petit site, C' un $\mathscr{U}$-site et $u : C \to C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Notons $\hat{u}_* : C^\wedge \to C'^\wedge$ le foncteur adjoint à droite au foncteur $F \mapsto F \circ u = \hat{u}^* F$ (I 5.1). Le foncteur u est cocontinu si et seulement si pour tout faisceau G sur C, $\hat{u}_* G$ est un faisceau sur C'.

Preuve. La condition est suffisante. Supposons que pour tout faisceau G sur C, le préfaisceau $\hat{u}_* G$ soit un faisceau. Soient Y un objet de C et $R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. On a un isomorphisme $\mathrm{Hom}(u(Y), u_* G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, u_* G)$, d'où par adjonction (I 5.1) un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\hat{u}^* \circ u(Y), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\hat{u}^* R, G)$. On en déduit (II 5.3) que le morphisme $\hat{u}^* R \to \hat{u}^* u(Y)$ est bicouvrant. Mais le foncteur $\hat{u}^*$ commute aux limites projectives et par suite le morphisme $\hat{u}^* R \to \hat{u}^* u(Y)$ est un monomorphisme. C'est donc un monomorphisme couvrant. D'autre part on a un morphisme canonique $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^* u(Y)$
277 déduit du morphisme d'adjonction $\mathrm{id}_C \to \hat{u}^* u_!$ (I 5.4 3)). Faisons alors le changement de base $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^* u(Y)$. On obtient un crible couvrant Y :

$$\hat{u}^* R \times_{\hat{u}^* u(Y)} Y \longrightarrow Y,$$

et lorsqu'on cherche les flèches $Z \to Y$ qui se factorisent par ce crible, on obtient le crible décrit par la propriété (COC).

La condition est nécessaire : Soient S un objet de C' et $R \hookrightarrow S$ un crible couvrant S. On doit démontrer que pour tout faisceau G sur C on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(S, u_* G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, u_* G).$$

Utilisant alors la proposition II 5.3 et les isomorphismes d'adjonction, on voit qu'il suffit de démontrer que le monomorphisme $\hat{u}^* R \to \hat{u}^* S$ est couvrant. Pour cela, il suffit de démontrer (II 5.1) que pour tout changement de base $Y \to \hat{u}^* S$ le crible $\hat{u}^* R \times_{\hat{u}^* S} Y$ est couvrant, (Y objet de C). Mais, d'après les propriétés des foncteurs adjoints et I 5.4 3), le morphisme $Y \to \hat{u}^* S$ se factorise par $Y \xrightarrow{P} \hat{u}^* u(Y) \to \hat{u}^* S$, et par suite le crible $\hat{u}^* R \times_{\hat{u}^* S} Y \hookrightarrow Y$ est le transformé par le changement de base $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^* u(Y)$ du monomorphisme $\hat{u}^* R \times_{\hat{u}^* S} \hat{u}^* u(Y) \xhookrightarrow{q} \hat{u}^* u(Y)$. Or le foncteur $\hat{u}^*$ commute aux limites projectives, et par suite le monomorphisme q est le transformé par $\hat{u}^*$ du crible $R \times_S u(Y) \hookrightarrow u(Y)$, qui est couvrant. L'hypothèse (COC) nous permet alors de dire que la crible $\hat{u}^* R \times_{\hat{u}^* S} Y \hookrightarrow Y$ est couvrant, C.Q.F.D.

Proposition 2.3. Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-sites et $u : C \to C'$ un foncteur cocontinu. Notons $u^* : \widetilde{C'} \to \widetilde{C}$ le foncteur $u^* = \underline{a}\hat{u}^* i'$, où a désigne le foncteur « faisceau associé »
278 pour $C^\wedge$, $\hat{u}^*$ le foncteur $F \mapsto F \circ u$, i' le foncteur d'inclusion $\widetilde{C'} \to C'^\wedge$.

1) Le foncteur u^* commute aux limites inductives et est exact.
2) On a un isomorphisme canonique $u^* \underline{a}' \simeq \underline{a}\hat{u}^*$, où $\underline{a}'$ désigne le foncteur « faisceau associé » pour $C'^\wedge$.

3) Le foncteur u^* admet un adjoint à droite $u_* : \widetilde{C} \to \widetilde{C}'$. Lorsque C est petit, le diagramme

$$(2.3.1)\qquad \begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, hook, "i"'] & \widetilde{C}' \arrow[d, hook, "i'"] \\ C^{\wedge} \arrow[r, "\hat{u}_*"] & C'^{\wedge}, \end{tikzcd}$$

où le foncteur du bas est adjoint à droite au foncteur $\hat{u}^*$ (I 5.1), est commutatif à isomorphisme canonique près.

4) Soit $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$ un univers. Notons $u_{*_{\mathscr{U}}} : C^{\sim}_{\mathscr{U}} \to \widetilde{C}'_{\mathscr{U}}$ (resp. $u_{*_{\mathscr{V}}} : C^{\sim}_{\mathscr{V}} \to \widetilde{C}'_{\mathscr{V}}$ le foncteur adjoint à droite relatif à l'univers $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$) dont l'existence est affirmé dans 3). Le diagramme

$$(2.3.2)\qquad \begin{tikzcd} C^{\sim}{}_{\underline{U}} \arrow[r, "u_{*\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & \widetilde{C}'_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ C^{\sim}{}_{\underline{V}} \arrow[r, "u_{*\underline{V}}"] & \widetilde{C}'_{\underline{V}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Preuve. Les assertions 1) et 2) résultent immédiatement de II 3.4. L'assertion 3), lorsque C est petit, résulte de 2.2. Lorsque C est un $\mathscr{U}$-site, elle sera démontrée en 4.4. L'assertion 4), lorsque C est petit, résulte de l'assertion de commutativité analogue lorsque les topologies sur C et C' sont chaotiques et de I 3.5. Lorsque les topologies sur C et C' sont chaotiques, la commutativité de (2.3.2) se voit immédiatement sur la **279**
description explicite de u_* (I 5.1).

2.4. Nous ne développerons pas ici les considérations relatives aux γ-objets des catégories de faisceaux. Il nous suffira de remarquer que les foncteurs u^* et u_* introduits dans ce numéro commutent toujours aux limites projectives finies (contrairement à ce qui se passait dans le numéro précédent pour le foncteur u^s). Pas suite ils se prolongent naturellement en des foncteurs définis sur les γ-objets, qui sont adjoints l'un de l'autre et qui commutent aux foncteurs « faisceaux d'ensemble sous-jacent ». Nous ferons les abus de notations signalés en 1.8, consistant à noter par u^* et u_* les prolongements aux γ-objets.

Proposition 2.5. *Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-sites et $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ un couple de foncteurs, où v est adjoint à gauche de u. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Le foncteur u est continu.*

ii) *Le foncteur v est cocontinu.*

De plus, sous ces conditions équivalentes, on a des isomorphismes canoniques $v_* \simeq u_s$, $v^* \simeq u^s$. En particulier, le foncteur u^s commute aux limites projectives finies.

Preuve. La propriété pour un foncteur d'être continu ou cocontinu ne dépend pas de l'univers $\mathscr{U}$ pour lequel C et C' sont des $\mathscr{U}$-sites (c'est immédiatement dans le cas d'un foncteur cocontinu, et cela résulte de 1.5 dans le cas d'un foncteur continu). On peut donc, quitte à augmenter l'univers, supposer que C et C' sont petits. La proposition résulte alors de 2.2 et I 5.6.

280 PROPOSITION 2.6. Soit $u : C \to C'$ un foncteur continu et cocontinu entre deux $\mathscr{U}$-sites. Alors le foncteur $u^* : C'^{\sim} \to C^{\sim}$ (2.3) commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives et projectives. Notons $u_! : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ et $u_* : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ les foncteurs adjoints à u^* à gauche et à droite respectivement. Le foncteur $u_!$ est pleinement fidèle si et seulement si le foncteur u_* est pleinement fidèle. Lorsque u est pleinement fidèle, $u_!$ est pleinement fidèle et la réciproque est vraie lorsque les topologies de C et C' sont moins fines que la topologie canonique.

Le foncteur u^* admet un adjoint à droite u_* (2.3) et un adjoint à gauche $u_!$ (1.2). Le foncteur u^* commute donc aux limites inductives et projectives (I 2.11). Le fait que le foncteur $u_!$ soit pleinement fidèle si et seulement si le foncteur u_* est pleinement fidèle est une propriété générale des foncteurs adjoints (I 5.7 1). Lorsque u est pleinement fidèle, le foncteur $\hat{u}_* : C\hat{}_{\mathscr{V}} \to C'\hat{}_{\mathscr{V}}$ relatif aux $\mathscr{V}$-préfaisceaux, pour un univers $\mathscr{V}$ assez grand, est pleinement fidèle (I 5.7). Par suite le foncteur $u_* : C^{\sim} \to \widetilde{C}'$ est pleinement fidèle en vertu de la commutativité de (2.3.1) et (2.3.2), donc $u_!$ est pleinement fidèle d'après ce qui précède. La réciproque se déduit de l'existence du diagramme commutatif 1.2 iv), compte tenu du fait que les foncteurs ϵ_C et $\epsilon_{C'}$ sont pleinement fidèles lorsque les topologies sont moins fines que la topologie canonique, C.Q.F.D.

EXEMPLE 2.7. Avec les notations de 1.9.2, le foncteur

$$\Phi : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

281 est continu (1.9.2) et cocontinu (2.2). De plus, soient $i : Y \to X$ l'injection canonique et $i^{-1} : \mathrm{Ouv}(X) \to \mathrm{Ouv}(Y)$ le foncteur qu'elle permet de définir (1.9.1). Le foncteur i est adjoint à droite au foncteur Φ. On a donc une suite de trois foncteurs adjoints :

$$\begin{array}{ccc} \Phi^s \quad , & \Phi_s & \\ & \| & \\ & \Phi^* & , \quad \Phi_*, \end{array}$$

et des isomorphismes canoniques $\Phi^* \simeq (i^{-1})^s$, $\Phi_* \simeq i_s^{-1}$.

3. Topologie induite

3.1. Soient C' un site, C une catégorie et $u : C \to C'$ un foncteur. Pour tout univers $\mathscr{U}$ tel que C' soit un $\mathscr{U}$-site et C une $\mathscr{U}$-petite catégorie, désignons par $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ la plus fine parmi les topologies T sur C qui rendent u continu (1.1). (Une telle topologie existe grâce à II 2.2). La topologie $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\mathscr{U}$. En effet, si $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$ est un univers on a $\mathscr{C}_{\mathscr{U}} = \mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ (1.1 et 1.5). La topologie $\mathscr{C}_{\mathscr{U}}$ est appelée la topologie induite sur C par la topologie de C' au moyen du foncteur u [3].

PROPOSITION 3.2. Soient C une petite catégorie, C' un $\mathscr{U}$-site, $u : C \to C'$ un foncteur, $\mathscr{C}$ la topologie sur C induite par u. Soient X un objet de C et $R \to X$ un crible de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le crible $R \hookrightarrow X$ est couvrant pour $\mathscr{C}$.

ii) Pour tout changement de base $Y \to X$, où Y est un objet de C, le morphisme $u_!(R \times_X Y) \to u(Y)$ est bicouvrant dans $C'\hat{}$ (II 5.2).

[3]Lorsqu'aucune confusion n'en résulte cette topologie est appelée la *topologie induite sur C par la topologie de C'*.

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii): résulte de l'axiome (T 1) des topologies et de 1.2.

ii) $\Rightarrow$ i): Pour tout faisceau F sur C', l'application

$$\mathrm{Hom}(Y, u^* F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R \times_X Y, u^* F)$$

est isomorphe, par adjonction (I 5.1), à l'application 282

$$\mathrm{Hom}(u(Y), F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u_!(R \times_X Y), F)$$

qui est bijective (II 5.3). Par suite (II 2.2) le crible $R \hookrightarrow X$ est couvrant pour $\mathscr{C}$.

Corollaire 3.3. Soient C' un site, C une catégorie, $u : C \to C'$ un faisceau, $\mathscr{C}$ la topologie sur C induite par la topologie de C'. Soit $(X_i \to X)$ $i \in I$, une famille de morphismes quarrables de C et supposons que u commute aux produits fibrés [3]. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La famille $X_i \to X$, $i \in I$, est couvrante pour $\mathscr{C}$.

ii) La famille $(u(X_i) \to u(X))$, $i \in I$, est couvrante.

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii): résulte de 1.6.

ii) $\Rightarrow$ i): Soit $\mathscr{U}$ un univers tel que C soit $\mathscr{U}$-petite et C' un $\mathscr{U}$-site. Soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par les $X_i \to X$. Le préfaisceau R est le conoyau du couple de flèches (I 2.12 et I 3.5)

$$\coprod_{i,j} X_i \times_X X_j \rightrightarrows \coprod_i X_i$$

(la somme directe est prise ici dans $C^\wedge$). Comme le foncteur $u_!$ commute aux limites inductives (I 5.4), le préfaisceau $u_! R$ est le conoyau du couple de flèches

$$\coprod_{i,j} u(X_i \times_X X_j) \rightrightarrows \coprod_i u(X_i).$$

Comme le foncteur u commute aux produits fibrés, le préfaisceau $u_! R$ est le conoyau du couple de flèches

$$\coprod_{i,j} u(X_i) \times_{u(X)} u(X_j) \rightrightarrows \coprod_i u(X_i),$$

et par suite $u_! R \to u(X)$ est un crible de $u(X)$ engendré par les $u(X_i) \to u(X)$, 283
$i \in I$. Utilisant encore une fois le fait que u commute aux produits fibrés, on montre que pour tout changement de base $Y \to X$, où Y est un objet de C, $u_!(R \times_X Y) \to u(Y)$ est un crible de $u(Y)$ engendré par les $u(X_i) \times_{u(X)} u(Y) \to u(Y)$, $i \in I$. Comme la famille $u(X_i) \to u(X)$, $i \in I$, est couvrante, la famille $u(X_i) \times_{u(X)} u(Y) \to u(Y)$, $i \in I$, est couvrante. Donc $u_!(R \times_X Y) \to u(Y)$ est un crible couvrant et par suite (3.2) $R \to X$ est couvrant pour $\mathscr{C}$, C.Q.F.D.

Corollaire 3.4. Soient C' un $\mathscr{U}$-site, C une sous-catégorie pleine de C', $u : C \to C'$ le foncteur d'inclusion. On suppose que les produits fibrés sont représentables dans C et que u commute aux produits fibrés. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) a) Pour tout objet X de C, toute famille couvrante $(Y_j \to X)$, $j \in J$, de C' est majorée par une famille couvrante $X_i \to X$, $i \in I$, où les X_i sont des objets de C.

b) Il existe un petit ensemble G d'objets de C, tel que tout objet de C soit but d'une famille couvrante dans C' de morphismes dont les sources sont dans G.

[3] En fait, il suffit que u commute aux produits fibrés de la forme $X_i \times_X X'$.

ii) La topologie induite par la topologie de C' est une U-topologie (I 3.0.2) et le foncteur u est continu et cocontinu pour cette topologie.

PREUVE. Résulte immédiatement de 3.3 et 2.1.

284 PROPOSITION 3.5. Soient C un $\mathcal{U}$-site et $\epsilon_C : C \to C^\sim$ le foncteur canonique (II 4.4.0). Munissons $C^\sim$ de la topologie canonique. Alors la topologie du site C est la topologie induite par la topologie de $C^\sim$.

PREUVE. Les familles couvrantes de $C^\sim$ pour la topologie canonique sont les familles épimorphiques effectives universelles (II 2.5), i.e. (II 4.3) les familles épimorphiques. Soit T la topologie du site C et $\mathscr{C}_\mathcal{U}$ la topologie la plus fine des topologies T' sur C telles que pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F \circ \epsilon_C$ soit un faisceau pour T'. Il suffit de montrer que $T = \mathscr{C}_U$, car alors $\mathscr{C}_\mathcal{U}$ est une $\mathcal{U}$-topologie et par suite $\mathscr{C}_\mathcal{U}$ est la topologie induite.

A) La topologie T est plus fine que $\mathscr{C}_\mathcal{U}$: Soit $(X_i \to X)$, $i \in I$, une famille couvrante de $\mathscr{C}_\mathcal{U}$. Alors pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F(\epsilon_C(X) \to \prod_i F(\epsilon_C(X_i))$ est injective et par suite (II 5.2) $(\epsilon_C X_i \to \epsilon_C X)$, $i \in I$, est couvrante pour la topologie canonique de $C^\sim$, donc (II 5.2) $(X_i \to X)$, $i \in I$, est couvrante pour T.
B) La topologie T est moins fine que $\mathscr{C}_\mathcal{U}$: Il suffit de montrer que $\epsilon_C : C \to C^\sim$ est continu (1.1). Or on démontrera en IV n° 1 que tout faisceau sur $C^\sim$ est représentable et par suite, pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F \circ \epsilon_C$ est un faisceau sur C. (On n'utilisera pas 3.5 jusqu'à IV 1).

Notons deux résultats qui seront utilisés en VI 7.

PROPOSITION 3.6. Soient $(C_i)_{i\in I}$ une famille de sites, C une catégorie et pour tout $i \in I$, $u_i : C_i \to C$ un foncteur, $\mathcal{U}$ un univers tel que les catégories C_i et C soient $\mathcal{U}$-petites. Il existe une topologie $\mathscr{C}_\mathcal{U}$ sur C qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les u_i soient continus.La topologie $\mathscr{C}_\mathcal{U}$ ne dépend pas de l'univers $\mathcal{U}$ pour lequel les catégories considérées sont petites.

La dernière assertion de 3.6 résulte de 1.5.

Soit T une topologie sur C. Alors les foncteurs u_i sont continus si et seulement si
285 pour tout $i \in I$ et pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow X$ d'un objet X de C_i, le morphisme

$$u_{i!}(R) \longrightarrow u_i(X)$$

de $\widehat{C}$ est bicouvrant (1.2 (ii)). Donc 3.6 est une conséquence du

LEMME 3.6.1. Soient C une petite catégorie, $(u_i : F_i \to G_i)_{i\in I}$ une famille de flèches de $\widehat{C}$. Alors il existe sur C une topologie la moins fine parmi celles qui rendent les morphismes u_i couvrants (resp. bicouvrants) (II 5.2).

Dire que $u : F \to G$ est couvrant pour une topologie donnée T signifie que pour toutes flèche $X \to G$, avec $X \in \mathrm{Ob}\, C$, la flèche $F \times_G X \to X$ correspondante est couvrante, ou encore que la famille des flèches $X' \to X$ de C qui se factorisent par la flèche précédente est couvrante. Le fait qu'il existe une topologie la moins fine parmi celles pour lesquelles les $u_i : F_i \to G_i$ sont couvrants résulte donc de I 1.1.6, d'où l'assertion non respée de 3.6.1. L'assertion respée s'en déduit, en se rappelant qu'un morphisme $u : F \to G$ est bicouvrant si et seulement si les morphismes $u : F \to F$ et $\mathrm{diag}_u : F \to F \times_G G$ sont couvrants.

PROPOSITION 3.7. Soient $(C_i)_{i\in I}$ une famille de sites, C une catégorie, pour tout $i \in I$, $u_i : C_i \to C$ un foncteur, et $\mathcal{U}$ un univers tel que les catégories C_i et C soient $\mathcal{U}$-petites.

Il existe une topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{U}}$ qui est la plus fine pour laquelle les u_i sont cocontinus. La topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\mathscr{U}$ pour lequel les catégories considérées sont petites.

Soit $\mathscr{U}$ un univers pour lequel les catégories considérées sont petites. Les foncteurs u_i sont cocontinus pour une topologie $\mathfrak{T}$ de C si et seulement si pour tout $i \in 1$ et tout faisceau F sur C_i le préfaisceau $\hat{u}_{i*}F$ est un faisceau pour $\mathfrak{T}$ (2.2). Il en résulte que la topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{U}}$ est la topologie la plus fine pour laquelle les préfaisceaux $\hat{u}_{i*}F$, $i \in I$, $F \in \operatorname{ob} C_i$, sont des faisceaux (II 2.2). La dernière assertion résulte de 2.2.

4. Lemme de comparaison

Théorème 4.1. (lemme de comparaison). Soient C une petite catégorie, C' un site dont la catégorie sous-jacente est une $\mathscr{U}$-catégorie et $u : C \to C'$ un foncteur pleinement fidèle. Munissons C de la topologie induite par u (3.1). Considérons les propriétés : 286

i) Tout objet de C' peut être recouvert par des objets provenant de C.
ii) Le foncteur $F \mapsto F \circ u$ induit une équivalence de catégories de la catégorie des faisceaux sur C' dans la catégorie des faisceaux sur C.

On a toujours i) $\Rightarrow$ ii). Lorsque C' est un $\mathscr{U}$-site et lorsque la topologie de C' est moins fine que la topologie canonique, on a ii) $\Rightarrow$ i).

4.1.1. Démontrons d'abord i) $\Rightarrow$ ii). La démonstration se fait en deux pas.

Premier pas. Pour tout préfaisceau H de $C'^{\wedge}$ le morphisme d'adjonction $\varphi : u_! u^* H \to H$ (I 5.1) est bicouvrant (II 5.3) et le foncteur $u_s : \widetilde{C'} \to \widetilde{C}$ (1.1.1) est pleinement fidèle.

Soit C/H la petite catégorie dont les objets sont les objets Y de C muni d'un morphisme $u(Y) \to H$, et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} u(Y) \arrow[rr, "u(m)"] \arrow[dr] & & u(Y') \arrow[dl] \\ & H & \end{tikzcd} .$$

On a $u^* H = \varinjlim_{Y \in \operatorname{ob} C/H} Y$ (I 3.4) et par suite (I 5.4) $u_! u^* H = \varinjlim_{Y \in \operatorname{ob} C/H} u(Y)$. Le morphisme d'adjonction est le morphisme évident qui résulte de la description de $u_! u^* H$ comme limite inductive. Le morphisme φ possède la propriété suivante : $(*)$ Pour tout 287
objet Y de C, tout morphisme $m : u(Y) \to H$ se factorise de manière unique en le morphisme canonique $\alpha(m) : u(Y) \to u_! u^* H$ et le morphisme φ. Il résulte immédiatement de i) que le morphisme φ est couvrant (II 5.1), montrons qu'il est bicouvrant. Soient p, $q : Z \rightrightarrows u_! u^* H$ deux morphismes d'un objet Z de C' dans H' tels que $\varphi p = \varphi q$. Pour tout objet Y de C et tout morphisme $n : u(Y) \to Z$, on a $\varphi p n = \varphi q n$. La propriété $(*)$ entraîne alors que $pn = qn$, et comme les $u(Y)$ recouvrent Z, le noyau de (p, q) est un crible couvrant Z. Le morphisme φ est donc bicouvrant (II 5.3). Pour tout faisceau H sur C', $u^* H$ est un faisceau sur C noté $u_s H$ (1.1.1). On a de plus $u^s u_s H = \underline{a}' u_! u_s H$ (1.3), et le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \to H$ s'obtient en appliquant le foncteur « faisceau associé » au morphisme $\varphi : u_! u^* H \to H$. Par suite (II 5.3) le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \to H$. est un isomorphisme. Donc $u_s : \widetilde{C'} \to \widetilde{C}$ est pleinement fidèle.

Deuxième pas. Le foncteur u est cocontinu et le foncteur $u^s : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ (1.2) est pleinement fidèle. Par suite $u_s : C'^{\sim} \to C^{\sim}$ est une équivalence. Soient Y un objet de C et $i : R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. Comme le foncteur u^* commute aux limites projectives (I 5.5) le morphisme $u^*(i) : u^*(R) \hookrightarrow u^* u(Y)$ est un monomorphisme. Comme

u est pleinement fidèle, on a $u^*u(Y) \simeq Y$, d'où un crible de Y, $u^*(i) : u^*(R) \to Y$. Pour montrer que u est cocontinu, il suffit de montrer que $u^*(i) : u^*(R) \hookrightarrow Y$ est un crible couvrant pour la topologie induite sur C (2.1). Pour cela, il suffit de montrer (3.2) que pour tout changement de base $m : X \to Y$, le morphisme $u_!(u^*(R) \times_Y X) \to u(X)$
288 est bicouvrant. Mais comme u^* commute aux limites projectives, on a $u^*(R) \times_Y X = u^*(R \times_{u(Y)} u(X))$ et $R \times_{u(Y)} u(X)$ est un crible couvrant X. Il suffit donc de montrer que pour tout objet Y de C et tout crible couvrant $i : R \hookrightarrow u(Y)$, le morphisme de $C'^{\wedge}$, $u_!u^*(R) \xrightarrow{u_!u^*(i)} u(Y)$, est bicouvrant. Or ce morphisme se factorise en le morphisme d'adjonction $u_!u^*(R) \to R$, qui est bicouvrant (premier pas), et le monomorphisme $R \hookrightarrow u(Y)$ qui est couvrant. Il est donc bicouvrant (II 5.3). Ceci montre que u est cocontinu. Comme u est continu et pleinement fidèle, il résulte de 2.6 (utilisé dans le cas où C est petit) que u^s (noté $u_!$ dans 2.6) est pleinement fidèle. Comme u^s et u_s sont adjoints l'un de l'autre et qu'ils sont pleinement fidèles, ce sont des foncteurs quasi-inverses et par suite u_s est une équivalence.

4.1.2. Démontrons maintenant que ii) $\Rightarrow$ i). Les objets Y de C forment une famille génératrice de $C^{\sim}$ (II 4.10) et par suite, pour tout objet X de C', il existe une famille épimorphique (dans $C^{\sim}$) $v_i : Y_i \to u_s X$, $i \in I$. On a $u_s u(Y_i) = Y_i$ et, le foncteur u_s étant une équivalence de catégories, on a $v_i = u_s(x_i)$, où les $w_i : u(Y_i) \to X$ forment une famille épimorphique de $C'^{\sim}$. Il résulte alors de II 5.1 que la famille $w_i : u(Y_i) \to X$, $i \in I$, est couvrante.

4.2. Fin de la démonstration de 1.2. Soient G une sous-catégorie pleine de C dont les objets forment une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1). Munissons G de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \to C$ (3.1). Le foncteur $(u \circ i)_s = i_s \circ u_s$ (1.1.1) admet un adjoint à gauche d'après la première partie de la démonstration de
289 1.2. Comme i_s est une équivalence de catégories (4.1), le foncteur u_s admet un adjoint à gauche u^s et on a un isomorphisme fonctoriel $u^s \simeq (u \circ i)^s \circ i_s$. Montrons que le diagramme

(4.2.1)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\epsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\epsilon_{C'}"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C'} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près. Pour tout faisceau H sur C', on a $\mathrm{Hom}_{\widetilde{C'}}(\epsilon_{C'} uX, H) \simeq u_s H(X)$, pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. On a de plus $\mathrm{Hom}_{\widetilde{C'}}(u^s \epsilon_C X, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{C}}(\epsilon_C X, u_s H)$ par adjonction, puis $\mathrm{Hom}_{\widetilde{C}}(\epsilon_C X, u_s H) \simeq u_s H(X)$ par définition de ϵ_C. D'où un isomorphisme $\epsilon_{C'} uX \simeq u^s \epsilon_C X$ pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. Ceci démontre i) $\Rightarrow$ iv). Montrons que iv) $\Rightarrow$ i). On a un diagramme commutatif

(4.2.2)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\epsilon_G"'] & C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\epsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\epsilon_{C'}"'] \\ \widetilde{G} \arrow[r, "i^S"] & \widetilde{C} \arrow[r, "u^S"] & \widetilde{C'}, \end{tikzcd}$$

et par suite, d'après la première partie de la démonstration, le foncteur $i \circ u : G \to C'$ est continu. On en déduit aussitôt par 4.1 et 1.1 que u est continu, d'où iv) $\Rightarrow$ i). On obtient de plus l'unicité de u^s ; connaissant, par la première partie de la démonstration, l'unicité lorsque C est petit.

290 4.3. Fin de la démonstration de 1.5 et de 1.7. Soient $u : C \to C'$ un foncteur entre deux $\mathscr{U}$-sites et G une sous-catégorie pleine de C dont l'ensemble des objets est une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1). Munissons G de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \to C$. Il résulte immédiatement de 4.1 et de 1.1 que u est continu si et seulement si $u \circ i$ est continu. De cette remarque et de la première partie de la démonstration de 1.5 résulte le cas général. Cette remarque permet aussi de ramener la démonstration de 1.7 au cas où la catégorie C est petite.

4.4. Fin de la démonstration de 2.3. Soient $u : C \to C'$ un foncteur entre deux $\mathscr{U}$-sites, G une sous-catégorie pleine de C dont l'ensemble des objets est une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1), munie de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \to C$. Il résulte de la démonstration de 4.1 (4.1.1 deuxième pas) que i est cocontinu. Par suite, lorsque u est cocontinu, le foncteur $u \circ i : G \to C'$ est cocontinu. De plus, $i^* : \widetilde{C}' \to \widetilde{G}$ est une équivalence de catégories (4.1). Donc le foncteur $u^* : \widetilde{C}' \to \widetilde{C}$ admet un adjoint à droite. Ceci démontre 3). Pour démontrer 4), il suffit de remarquer que $(u \circ i)_* \simeq u_* \circ i_*$ et que i_* est une équivalence (4.1). La commutativité de (2.3.2) résulte alors de la commutativité de ces diagrammes lorsque C est petit.

5. Localisation 291

5.1. Soient maintenant C un $\mathscr{U}$-site et X un objet de $C\hat{}$. Sauf mention expresse du contraire la catégorie C/X sera munie de la topologie $\mathscr{C}$ induite par le foncteur $j_X : C/X \to C$ (3.1). La notation C/X désignera la catégorie C/X munie de la topologie $\mathscr{C}$. La proposition I 5.11 nous montre que le foncteur $j_{X!}$ commute aux produits fibrés et par suite transforme tout monomorphisme en monomorphisme. En particulier, pour tout objet $(Y \to X)$ de C/X, le foncteur $j_{X!}$ établit une correspondance biunivoque entre les cribles, dans la catégorie C/X, de l'objet $(Y \to X)$ et les cribles, dans C, de l'objet Y.

Proposition 5.2. Soient C un $\mathscr{U}$-site, X un objet de $C\hat{}$ et $j_X : C/X \to C$ le foncteur continu correspondant.

1) Un crible R d'un objet $(Z \to X)$ est couvrant dans C/X si et seulement si le crible $j_{X!}(R) \hookrightarrow Z$ est couvrant dans C.
2) Le foncteur $j_X : C/X \to C$ est cocontinu et continu.
3) Soit $m : Y \to X$ un morphisme de $C\hat{}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & C/X \arrow[dl, "j_X"] \\ & C & \end{tikzcd} .$$

La topologie induite par le foncteur j_Y sur C/Y est égale à la topologie induite par j_m sur C/Y.

4) La topologie induite par $j_X : C/X \to C$ est une $\mathscr{U}$-topologie (II 3.0.2).

Preuve. 1) Si le crible R de $(Z \to X)$ est couvrant, le crible $j_{X!}(R) \hookrightarrow Z$ est 292
couvrant (1.6).

Réciproquement, si le crible $j_{X!}(R) \to Z$ est couvrant dans C, on voit qu'il en est de même pour tout crible obtenu en faisant un changement de base dans C/X. Le crible R est donc couvrant (3.2).

2) Se déduit immédiatement de 1) en appliquant 2.1.
3) Se déduit immédiatement de la description des cribles couvrants donnée par 1).
4) Soit $(G)_i$, $i \in I$, une petite famille topologiquement génératrice de C. On vérifie immédiatement que la petite famille $(u : G_i \to X)$, $u \in \amalg_{i\in I} \mathrm{Hom}_{C^\frown}(G_i, X)$, est topologiquement génératrice dans C/X.

Terminologie et notations 5.3. D'après la proposition précédente le foncteur j_X est à la fois un foncteur continu et cocontinu. Il définit donc une suite de trois foncteurs adjoints (4.3.2) entre les catégories de faisceaux d'ensembles (1.3 et 2.3) :

$$\begin{aligned} j_X^s &: (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim \\ j_X^* = j_{X,s} &: C^\sim \longrightarrow (C/X)^\sim \\ j_{X*} &: (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim. \end{aligned}$$

Dans la situation particulière de la proposition 5.2 nous emploierons la terminologie et les notations suivantes :

1) Le foncteur j_{X*} sera appelé le foncteur image directe.
2) Le foncteur $j_{X,s} = j_X^*$ sera noté j_X^* et sera appelé le foncteur restriction à C/X.
293 3) Le foncteur j_X^s sur les faisceaux d'ensembles sera appelé le « foncteur prolongement par le vide à la catégorie C » et sera noté $j_{X!}$ (cf. 2.9.2).

On a donc une suite de trois foncteurs adjoints entre $(C/X)^\sim$ et $C^\sim$:

$$j_{X!},\ j_X^*,\ j_{X*}.$$

Proposition 5.4. Le foncteur $j_{X!} : (C/X)^\sim \to C^\sim$ se factorise par la catégorie $C^\sim/\underline{a}X$ ($\underline{a}$ est le foncteur faisceau associé) :

$(C/X)^\sim \xrightarrow{e_X^\sim} C^\sim/\underline{a}X \to C^\sim$. Le foncteur :

$$e_X^\sim : (C/X)^\sim \longrightarrow \widetilde{C}/\underline{a}X$$

est une équivalence de catégories. Le foncteur restriction à C/X, composé avec l'équivalence $e_X^\sim$, est isomorphe au foncteur « changement de base par $\underline{a}X \to \epsilon$ », (ϵ l'objet final de $C^\sim$) : $F \mapsto (F \times \underline{a}X \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \underline{a}X)$.

Preuve. L'image par $j_{X!}$ de l'objet final de $(C/X)^\sim$ est l'objet $\underline{a}X$; d'où la factorisation. Pour montrer que le foncteur $e_X^\sim$ est une équivalence, nous nous bornerons à quelques indication. D'après I 5.11, un préfaisceau sur C/X est défini par un préfaisceau F sur C muni d'un morphisme $F \to X$. On démontre alors que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le préfaisceau sur C/X défini par $F \to X$ est un faisceau.
ii) Le diagramme suivant est cartésien (on dénoté par i et $\underline{a}$ les foncteurs injection dans les préfaisceaux, et faisceau associé) :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & i\underline{a}F \arrow[d] \\ X \arrow[r] & i\underline{a}X \end{tikzcd} .$$

294 On en déduit alors immédiatement que $e_X^\sim$ est une équivalence. La dernière assertion est triviale.

Proposition 5.5. 1) Soient C un $\mathscr{U}$-site, X un objet de $C^{\wedge}$. Le diagramme ci-dessous de catégories et foncteurs est commutatif à isomorphismes canoniques près :

$$\begin{tikzcd}
C/X \arrow[r, "h_X"] \arrow[d] & (C/X)^{\wedge} \arrow[r, "\underline{a}_X"] \arrow[d, "e^{\wedge}_X"] & (C/X)^{\sim} \arrow[rr, "i_X"] \arrow[d, "e^{\sim}_X"] & & (C/X)^{\wedge} \arrow[d, "e^{\wedge}/X"] \\
C/X \arrow[r, "h/X"] & C^{\wedge}/X \arrow[r, "\underline{a}/X"] & C^{\sim}/\underline{a}X \arrow[r, "i/\underline{a}X"] & C^{\wedge}/i\underline{a}X \arrow[r, "\pi"] & C^{\wedge}/X.
\end{tikzcd}$$

Les notations $\underline{a}_X$ et i_X désignent les foncteurs « faisceau associé » et injection dans les préfaisceaux pour le site C/X. La notation $\underline{a}/X$ désigne le prolongement naturel du foncteur $\underline{a}$ (faisceau associé pour le site C) à la catégorie des flèches de but X, de même pour la notation $i/\underline{a}X$. Enfin la notation π désigne le foncteur changement de base par la flèche canonique $X \to i\underline{a}X$.

2) Soit de plus $m : Y \to X$ un morphisme de $C^{\wedge}$. Le diagramme ci-après est commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
C^{\sim}/\underline{a}X/\underline{a}Y & (C/X)^{\sim}/\underline{a}_X Y \arrow[l, "f"'] & \\
 & & (C/X/Y)^{\sim} \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "e^{\sim}_m"] \\
C^{\sim}/\underline{a}Y \arrow[uu, equal] & (C/Y)^{\sim} \arrow[l, "e^{\sim}_Y"'] &
\end{tikzcd}$$
.

La flèche f est le prolongement naturel de l'équivalence $e^{\sim}/X$ à la catégorie **295**
des flèches de but $\underline{a}_X Y$, et est par suite une équivalence de catégories. La flèche g n'est autre que l'équivalence de 5.4 appliquée à la situation $(C/X)/[m]$.

3) Désignons par $j_{\underline{a}X!} : C^{\sim}/\underline{a}X \to C^{\sim}$ le foncteur « oublions $\underline{a}X$ », et par $j^*_{\underline{a}X} : C^{\sim} \to C^{\sim}/\underline{a}X$ le foncteur « produit par $\underline{a}X$ ». Les diagrammes ci-après sont commutatifs à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
(C/X)^{\sim} \arrow[r, "j_{X!}"] \arrow[d] & C^{\sim} \arrow[d, equal] \\
C^{\sim}/\underline{a}X \arrow[r, "j_{\underline{a}X!}"] & C^{\sim}
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
C^{\sim} \arrow[r, "j^*_X"] \arrow[d, equal] & (C/X)^{\sim} \arrow[d, "e^{\sim}/X"] \\
C^{\sim} \arrow[r, "j^*_{\underline{a}X}"] & C^{\sim}/\underline{a}X.
\end{tikzcd}$$

Preuve. La preuve de ces assertions est immédiate à partir de la définition des équivalences $e^{\sim}_X$ (5.4) et $e^{\wedge}_X$ (I 5.11).

Bibliographie

[1] [TF] R. Godement, théorie des faisceaux, Hermann, 1958. Act. Scient. Ind *n*° 1252, (Paris).

EXPOSÉ IV

Topos

A. Grothendieck et J.-L. Verdier

0. Introduction

299

0.1. Nous avons vu dans ?? diverses propriétés d'exactitude de catégories de la forme $\widetilde{\mathscr{C}}$ = catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\mathscr{C}$, où $\mathscr{C}$ est un petit site, propriétés qu'on peut exprimer en disant qu'à beaucoup d'égards, ces catégories (que nous appellerons des topos) héritent des propriétés familières de la catégorie (Ens) des (petits) ensembles. D'un autre côté, l'expérience a enseigné qu'il y a lieu de considérer diverses situations en Mathématique surtout comme un moyen technique pour construire les catégories de faisceaux (d'ensembles) correspondantes, i.e. les « topos » correspondants. Il apparaît que toutes les notions vraiment importantes liées à un site (par exemple ses invariants cohomologiques, étudiés dans ??, divers autres invariants « topologiques », tels ses invariants d'homotopie étudiés récemment par M. Artin et B. Mazur [1] et les notions étudiées dans le livre de J. Giraud sur la cohomologie non commutative) s'expriment en fait directement en termes du topos associé. Dans cette optique, il convient de regarder deux sites comme étant essentiellement équivalents lorsque les topos associés sont des catégories équivalentes, et de considérer que la donnée d'un site (du moins dans le cas, surtout important en pratique, où sa topologie est moins fine que sa topologie canonique) revient à celle d'un topos $\mathscr{E}$ (savoir le topos associé, formé des faisceaux d'ensembles sur le site), et d'une famille génératrice d'éléments de $\mathscr{E}$ (cf. II 4.9, et 1.2.1 300
ci-dessous). Ce point de vue est analogue à celui qui consiste à associer un groupe à tout système de générateurs et tout système de relations entre ces générateurs, et à attacher son intérêt plutôt à la structure de ce groupe qu'au système de générateurs et relations qui ont servi à l'engendrer (considérés comme des données accessoires de la situation). D'ailleurs le « lemme de comparaison » III 4.1. fournit de nombreux exemples de couples de sites $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ non isomorphes, et même non équivalents en tant que catégories, et donnant naissance à des topos équivalents, de sorte qu'il y a lieu de considérer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ comme essentiellement équivalents.

0.2. Dans le présent exposé, nous donnons une caractérisation des topos par des propriétés d'exactitude simples (due à J. Giraud), nous étudions la notion naturelle de morphisme de topos, inspirée par la notion d'application continue d'un espace topologique dans un autre, et nous développons dans le cadre des topos certaines constructions familières en théorie des faisceaux habituelle (faisceaux $\mathscr{H}om$, faisceaux produit tensoriel, supports). Enfin, nous montrons (en suivant M. Artin) comment on peut reconstituer un topos à partir d'un « ouvert » de celui-ci, du « fermé » complémentaire, et d'un certain foncteur exact à gauche qui les relie, qui, a peu de choses près, peut être choisi d'ailleurs arbitrairement.

0.3. On a là un procédé de recollement de topos qui, appliqué à des topos provenant d'espaces topologiques ordinaires, donnera en général un topos qui ne sera plus

du même type. Cela est une première indication de la stabilité remarquable de la notion de topos par diverses constructions naturelles, qui manque à la notion d'espace topo-
301 logique (dont la notion de topos est inspirée). Pour un deuxième exemple remarquable, signalons aussi celle de topos classifiant relatif à un groupe d'un topos (cf. [1] ou 5.9 ci-dessous), inspirée de la notion classique d'espace classifiant d'un groupe topologique, et la notion de « topos modulaire » associé à divers « problèmes de modules » en Géométrie Algébrique ou en Géométrie Analytique [10] [13].

D'autres topos, tel le topos étale d'un schéma (étudié systématiquement dans le présent Séminaire, à partir de Exp. VII) ou le topos cristallin d'un schéma relatif [6] s'introduisent de façon naturelle lorsqu'on veut développer pour des variétés algébriques abstraites (et plus généralement des schémas) des théories de cohomologie utilisables, qui remplacent la cohomologie de Betti classique des variétés algébriques sur le corps des complexes.

0.4. On peut donc dire que la notion de topos, dérivé naturel du point de vue faisceautique en Topologie, constitue à son tout un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique [3], englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. Le trait caractéristique de telles situations est qu'on y dispose d'une notion de « localisation », notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos (via le topos associé au site). Comme le terme de « topos » lui-même est censé précisément le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent Séminaire de considérer que l'objet de la Topologie est l'étude des topos (et non des seuls espaces topologiques).

0.5. Il nous a semblé utile d'inclure dans cet exposé général sur les topos un assez
302 grand nombre d'exemples, dont beaucoup n'ont que des rapports lointains avec le but initial que se proposait ce séminaire, (c'est-à-dire l'étude de la cohomologie étale). Le lecteur pressé, intéressé exclusivement par la cohomologie étale, pourra bien entendu omettre sans inconvénients la lecture de ces exemples, ainsi d'ailleurs que de la plus grande partie du présent exposé, auquel il lui suffira de se reporter en cas de besoin.

1. Définition et caractérisation des topos

Définition 1.1. On appelle $\mathcal{U}$-topos, ou simplement topos si aucune confusion n'est à craindre, une catégorie E telle qu'il existe un site $C \in \mathcal{U}$ tel que E soit équivalente à la catégorie $C^{\sim}$ des $\mathcal{U}$ -faisceaux d'ensembles sur C.

1.1.1. Soit E un $\mathcal{U}$-topos. Nous considérons toujours E comme muni de sa topologie canonique (II 2.5), qui en fait donc un site, et même, en vertu de 1.1.2 d) ci-dessous, un $\mathcal{U}$-site (II 3.0.2). Sauf mention expresse du contraire, nous ne considérerons pas d'autre topologie sur E que celle qu'on vient d'expliciter.

1.1.2. On a vu dans II 4.8, II 4.11 qu'un $\mathcal{U}$-topos E est une $\mathcal{U}$-catégorie (I 1.1) satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Les limites projectives finies sont représentables dans E.
b) Les sommes directes indexées par un élément de $\mathcal{U}$ sont représentables dans E. Elles sont disjointes et universelles (II 4.5).
c) Les relations d'équivalence dans E sont effectives universelles (I 10.10).
d) E admet une famille génératrice (II 4.9) indexée par un élément de $\mathcal{U}$.

[3] Cf. [9], ou 4.1 et 4.2 plus bas, pour les relations précises entre la notion de topos et celle d'espace topologique.

En fait, nous allons voir que ces propriétés intrinsèques caractérisent les $\mathscr{U}$-topos : **303**

THÉORÈME 1.2. (J. Giraud). Soit E une $\mathscr{U}$-catégorie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est un $\mathscr{U}$-topos (1.1).
ii) E satisfait aux conditions a), b), c) et d) de 1.1.2.
iii) Les $\mathscr{U}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique sont représentables, et E possède une petite famille génératrice (condition 1.1.2 d)).
iv) Il existe une catégorie $C \in \mathscr{U}$ et un foncteur pleinement fidèle $i : E \to \widehat{C}$ (où $\widehat{C}$ désigne la catégorie des $\mathscr{U}$-préfaisceaux sur C) admettant un adjoint à gauche a qui est exact à gauche.
i') Il existe un site $C \in \mathscr{U}$, tel que les limites projectives soient représentables dans C et que la topologie de C soit moins fine que sa topologie canonique (II 2.5), tel que E soit équivalent à la catégorie $\tilde{C}$ des $\mathscr{U}$-faisceaux d'ensembles sur C.

De plus :

COROLLAIRE 1.2.1. Soit E un $\mathscr{U}$-topos, C une sous-catégorie pleine de E, qu'on munit de la topologie induite (III 3.1) par celle de E (1.1.1). Considérons le foncteur

$$E \longrightarrow \tilde{C}$$

qui associe à tout $X \in \operatorname{ob} E$ la restriction à C du foncteur représenté par X. Ce foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si $\operatorname{ob} C$ est une famille génératrice de E.

L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iv) résulte aussitôt de II 5.5, et on a déjà rappelé plus haut qu'on a i) $\Rightarrow$ ii). Comme i') $\Rightarrow$ i) trivialement, il reste à prouver ii) $\Rightarrow$ iii) et iii) $\Rightarrow$ i'), ce qui sera fait dans 1.2.4 et 1.2.3 ci-dessous. Le corollaire s'obtient alors en remarquant que le foncteur envisagé se factorise en $E \to \tilde{E} \to \tilde{C}$, de sorte que, $E \to \tilde{E}$ étant une équivalence en vertu de (iii), la question revient à celle de déterminer quand $\tilde{E} \to \tilde{C}$ est une équivalence. On conclut alors grâce au « lemme de comparaison » III 4.1, cf. démonstration 1.2.3 ci-dessous. **304**

1.2.3. Démonstration de iii) $\Rightarrow$ i'). Soit $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in I}$, $I \in \mathscr{U}$, une petite famille génératrice de E. Comme E est une $\mathscr{U}$-catégorie, l'ensemble des classes d'isomorphie de diagrammes finis dans E dont les objets sont des éléments X_i est $\mathscr{U}$-petit. Par suite le plus petit ensemble $\mathfrak{X}'$ d'objets de E, contenant les limites projectives finies d'objets de $\mathfrak{X}$, est une réunion dénombrable de petits ensembles et est donc petit [3]. Posant $\mathfrak{X}^{(n+1)} = (\mathfrak{X}^{(n)})'$, et $\mathfrak{X} = \bigcup_n \mathfrak{X}^{(n)}$, on voit que, quitte à augmenter la famille de générateurs, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est stable par limites projectives finies. Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ tel que E soit $\mathscr{V}$-petite. Pour tout objet H de E, notons $I(H)$ l'ensemble $\coprod_{i \in I} \operatorname{Hom}(X_i, H)$. Soient H un objet de E et $H' \hookrightarrow H$ le sous-faisceau de H, pour la topologie canonique, « réunion » des images des morphismes $u : X_i \to H$, $(u, i) \in I(H)$ (II 4.1). Comme H' est un sous-faisceau d'un $\mathscr{U}$-faisceau, H' est un $\mathscr{U}$-faisceau. Il est donc représentable. Comme la famille $\mathfrak{X}$ est génératrice et que pour tout $i \in I$, l'application $\operatorname{Hom}(X_i, H') \to \operatorname{Hom}(X_i, H)$ est bijective, le morphisme $H' \hookrightarrow H$ est un isomorphisme (II 4.9). Par suite (II 5.2) la famille $(u : X_i \to H)$, $(u, i) \in I(H)$, est couvrante pour la topologie canonique de E. Donc tout objet de E peut être recouvert, pour **305**
la topologie canonique de E, par des objets de $\mathfrak{X}$. Soient C la sous-catégorie pleine de E définie par les objets de $\mathfrak{X}$ et $u : C \hookrightarrow E$ le foncteur d'inclusion. La topologie $\mathscr{C}$ induite sur C par la topologie canonique de E est moins fine que la topologie canonique de C,

[3] Nous raisonnons ici sur les classes d'objets de E à isomorphisme près.

et lorsque $\mathscr{U}$ possède un élément de cardinal infini, les limites projectives finies sont représentables dans C. Il résulte de ?? que le foncteur $F \mapsto F \circ u$ est une équivalence de E sur la catégorie des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C pour la topologie $\mathscr{C}$, C.Q.F.D.

1.2.4. Démonstration de ii) ⇒ iii). La démonstration comporte quatre pas.

Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$, tel que E soit un élément de $\mathscr{V}$. Soient $\widetilde{E}$ la catégorie des $\mathscr{V}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique, et $J_E : E \to \widetilde{E}$ le foncteur canonique.

. Soit $(g_i : G_i \to H)$, $i \in I \in \mathscr{U}$, une famille épimorphique de $\widetilde{E}$. Si les G_i et les produits fibrés $G_i \times_H G_j$ sont représentables, alors le faisceau H est représentable.

En effet, la somme directe $\coprod_{i\in I} G_i$ est représentable dans $\widetilde{E}$ (II 4.1) par un faisceau représentable G (propriété b) et II 4.6). Il en est de même pour la somme directe $K = \coprod_{(i,j)\in I\times I} G_i \times_H G_j$. De plus, le diagramme $K \rightrightarrows G \to H$ est exact et K est le carré fibré de G au-dessus de H. (Cette dernière propriété est vraie dans la catégorie des préfaisceaux, donc vraie dans la catégorie des faisceaux (II 4.1.) On en déduit, d'après c) et II 4.7, que la faisceau H est représentable.

. Soit X_α, $\alpha \in A \in \mathscr{U}$, une famille de générateurs de E. Pour tout faisceau H, désignons par $I(H)$ l'ensemble $\coprod_{\alpha\in A} \mathrm{Hom}_E(X_\alpha, H)$. La famille $(u : X_\alpha \to H, (u, \alpha) \in$
306 $I(H))$ est épimorphique dans $\widetilde{E}$. Lorsque H est un $\mathscr{U}$-faisceau, $I(H)$ est un élément de $\mathscr{U}$.

En effet, tout faisceau H étant but d'une famille épimorphique de morphismes dont les sources sont des faisceaux représentables (I 3.4 et II 4.1), il suffit de montrer la première assertion lorsque le faisceau H est représentable. Soit alors G l'image de la famille $(u : X_\alpha \to H, (u, \alpha) \in I(H))$. Le morphisme $G \to H$ est un monomorphisme. Par suite, on est dans la situation du premier pas, car $X_\alpha \times_G X_\beta$ est isomorphe à $X_\alpha \times_H X_\beta$ qui est représentable, et de plus $I(H)$ est un élément de $\mathscr{U}$. On en déduit que G est représentable. Mais X_α étant une famille génératrice, $G \to H$ est un isomorphisme. La dernière assertion est triviale par définition des $\mathscr{U}$-faisceaux.

. Tout sous-faisceau d'un faisceau représentable est représentable.

En effet, soit $G \to H$ un sous-faisceau d'un faisceau représentable. G est alors un $\mathscr{U}$-faisceau. La famille $(u : X_\alpha \to G, (u, \alpha) \in I(G))$ est donc épimorphique dans $\widetilde{E}$ et indexée par un élément de $\mathscr{U}$. De plus, les produits fibrés $X_\alpha \times_G X_\beta$ sont isomorphes aux produits fibrés $X_\alpha \times_H X_\beta$ qui sont représentables. Par suite, on est dans la situation du premier pas et G est représentable.

. Tout $\mathscr{U}$-faisceau est représentable.

En effet, en vertu du premier et du deuxième pas, il suffit de montrer que les produits fibrés $X_\alpha \times_H X_\beta$ sont représentables. Or, ces produits fibrés sont des sous-objets des produits $X_\alpha \times X_\beta$. On conclut donc par le troisième pas. Ceci achève la démonstration du théorème 1.2.

307 Remarque 1.3. Bien entendu, pour un $\mathscr{U}$-topos donné E, il n'y a pas en général de façon privilégiée de le représenter à équivalence près sous la forme $\tilde{C}$, avec C un petit site ; ou, ce qui revient essentiellement au même en vertu de 1.2.1 lorsque l'on se borne aux C dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, il n'y a pas de petite famille génératrice privilégiée dans E. Lorsqu'on cesse d'imposer à C la condition que C soit petit, il y a par contre (en vertu de 1.2 iii)) un choix tout à fait canonique d'un $\mathscr{U}$-site C tel que E soit équivalent à $\tilde{C}$, à savoir E lui-même ! Ceci est une des raisons techniques pour lesquelles il n'est pas commode en pratique de travailler seulement avec des petits sites : en fait, les sites les plus importants de tous, savoir les $\mathscr{U}$-topos, ne sont

pas petits ! De plus, les sites générateurs de topos qui s'introduisent dans de nombreuses questions en géométrie algébrique (voire en topologie, cf. 2.5) ne sont pas non plus petits ; exemples : le site étale d'un schéma (VII.1).

Proposition 1.4. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, E' une catégorie (pas nécessairement une $\mathscr{U}$-catégorie), F un préfaisceau sur E à valeurs dans E'. Pour que F soit un faisceau à valeurs dans E' (II 6.1), il faut et il suffit que F transforme $\mathscr{U}$-limites inductives dans E en limites projectives dans E'.

Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ et tel que E' soit une $\mathscr{V}$-catégorie. Composant F avec les foncteurs $\mathrm{Hom}(X', -) : E' \to \mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}$ définis pas les objets X' de E', on est ramené au cas où $E' = \mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}$, où $\mathscr{V}$ est un univers. Supposons que F transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives, alors il résulte aussitôt des définitions que F est un faisceau, puisque une famille couvrante $X_i \to X$ dans $\mathscr{E}$, par définition de **308**
la topologie canonique $\mathscr{E}$, permet de considérer X comme une limite inductive du diagramme $\left(X_i \times_X X_j \begin{smallmatrix} \nearrow X_i \\ \searrow X_j \end{smallmatrix} \right)$. Supposons que F soit un faisceau, et prouvons qu'il transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives. Si $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, on peut supposer $\mathscr{V} = \mathscr{U}$ et il suffit d'appliquer le critère 1.2 iii). Pour traiter le cas général, il faut travailler un peu plus. Soient C une sous-catégorie pleine de E engendrée par une famille génératrice indexée par un élément de $\mathscr{U}$, et $u : C \to E$ le foncteur d'inclusion. Munissons C de la topologie induite par la topologie canonique de E (III 3.5). Notons $C^{\sim}_{\mathscr{U}}$, $C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ les catégories de faisceaux sur C, $E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ la catégorie des V-faisceaux sur E pour la topologie canonique, $J_E : E \to E_{\mathscr{V}}$ le foncteur canonique, $i_{\mathscr{U},\mathscr{V}} : C^{\sim}_{\mathscr{U}} \to C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ le foncteur d'inclusion. Le diagramme :

(∗)
$$\begin{tikzcd} C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[r, "i_{\underline{U},\underline{V}}"] & C^{\sim}_{\underline{V}} \\ E \arrow[u] \arrow[r, "J_E"] & E^{\sim}_{\underline{V}} \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales sont induites par le foncteur $F \mapsto F \circ u$, est commutatif. Il résulte de la construction explicite du foncteur faisceau associé (II 3) et de II 4.1 que le foncteur $i_{\mathscr{U},\mathscr{V}}$ commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives. De plus, il résulte de III 5.1 et de 1.5 que les flèches verticales de (∗) sont des équivalences de catégories. Par suite $J_E : E \to E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives. Pour tout objet X de E, on a :

$$F(X) \simeq \mathrm{Hom}_{E^{\sim}_{\mathscr{V}}}(J_E(X), F).$$

Donc F transforme les $\mathscr{U}$-limites inductives de E en limites projectives. **309**

Corollaire 1.5. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, E' une $\mathscr{U}$-catégorie, $f : E \to E'$ un foncteur. Pour que f admette un adjoint à droite, il faut et il suffit que f commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives.

C'est une conséquence immédiate de 1.4 pour le cas $E' = \mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}$.

Corollaire 1.6. Soient E, E' deux $\mathscr{U}$-topos, $f : E \to E'$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives.
ii) f admet un adjoint à droite.

iii) f est continu (III 1.1).

L'équivalence i) ⇔ ii) a été vue dans 1.5. Pour prouver i) ⇔ iii), appliquons la définition des foncteurs continus, en choisissant un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$ (donc E, E' sont des sites $\mathscr{V}$-petits). Il faut exprimer que pour tout $\mathscr{V}$-faisceau F sur E', le composé $F \circ f$ est un faisceau sur E, c'est-à-dire (1.4) qu'il transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives. Il suffit pour ceci que l'on ait i), puisque en vertu de 1.4 F lui-même transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives ; c'est aussi nécessaire comme on voit en prenant pour F un foncteur représentable.

Corollaire 1.7. Avec les notations de 1.6, pour que f soit le foncteur image inverse u^* pour un morphisme de topos (3.1) $u : E' \to E$, il faut et il suffit que f soit exact à gauche et transforme familles épimorphiques en familles épimorphiques.

310 La nécessité est triviale par définition (NB tout foncteur exact à droite transforme épimorphisme en épimorphisme). La suffisance résulte de III 1.6, qui implique que f est continu sous les conditions indiquées, donc commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives en vertu de 1.6.

Remarque 1.8. Avec les notations de 1.5, on peut montrer que f admet un adjoint à gauche si et seulement si il commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives. En d'autres termes, un foncteur covariant $E \to (\mathscr{U}\text{-Ens})$ est représentable si et seulement si il commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives [3]. Nous indiquons seulement le principe de la démonstration, qui se fait en deux étapes :

a) Des arguments standards [5, n° 195, § 3] montrent que si F commute aux $\varprojlim$, il est proreprésentable par un système projectif strict $(T_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné filtrant, pas nécessairement petit. On peut supposer que si $i > j$, alors $T_i \to T_j$ n'est pas un isomorphisme, et sous cette hypothèse, F est représentable si et seulement si I est petit (ce qui implique en fait que la système projectif est essentiellement constant).
b) Pour prouver que I est petit, sachant que pour tout objet X de E, l'ensemble $F(X) = \varinjlim_i \operatorname{Hom}(T_i, X)$ l'est, il suffit de disposer d'une petite famille cogénératrice $(X_j)_{j\in J}$ (i.e. qui est génératrice pour la catégorie opposée E°). Or on montre que dans un $\mathscr{U}$-topos E existe toujours une petite famille cogénératrice.
c) Pour prouver ce dernier point, on note par des arguments standards [Toh] que tout objet X de E admet un monomorphisme dans un objet « injectif » ; puis
311 que pour toute famille génératrice (L_α) de E, si on plonge ainsi chaque L_α dans un objet injectif I_α, la famille (I_α) est cogénératrice.

2. Exemples de topos

2.0. Nous avons réuni dans le présent numéro un assez grand nombre d'exemples typiques de topos, que le lecteur aura déjà eu l'occasion de rencontrer par ailleurs, et qui sont destinés à lui faciliter l'accès au « yoga » des topos. Pour d'autres exemples (tirés de la géométrie algébrique) de topologies sur des sites, donnant lieu à autant de topos, il pourra consulter SGA 3 IV 6, et (pour le topos étale) l'exposé VII du présent séminaire. Comme nous ne référerons guère par la suite au présent numéro que pour des questions de notations ou de terminologie, nous laissons au lecteur le soin de faire à titre d'exercice la vérification des énoncés dont nous avons assorti ces exemples pour son instruction

[3]Un énoncé plus général se trouve dans I 8.12.8, I 8.12.9, l'esquisse de démonstration qui suit a) à c) correspondant à la démonstration donnée dans *loc. cit.*

générale. Tous les exemples du présent numéro seront précisés dans 4, où on examinera leur dépendance fonctorielle par rapport aux données, et dans les numéros suivants à titre d'illustration des notions générales relatives aux topos.

2.1. Topos associé à un espace topologique. Soient X un petit espace topologique, $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de X, munie de la topologie canonique (III 1.9.1). Nous désignerons par $\mathrm{Top}(X)$ le topos des $\mathscr{U}$-faisceaux sur $\mathrm{Ouv}(X)$. Ce topos est équivalent à la catégorie des espaces topologiques étalés au-dessus de X, en associant à tout tel espace X' sur X le faisceau $U \mapsto \Gamma(X'/U) = \mathrm{Hom}_X(U, X')$ sur $\mathrm{Ouv}(X)$ [TF][4]. On ne pourra pas s'empêcher de noter parfois, par abus de langage, par la même lettre X le **312**
topos $\mathrm{Top}(X)$ défini par l'espace topologique X.

C'est évidemment l'exemple précédent qui a servi principalement de guide et de support intuitif pour le développement de la théorie des topos. On fera attention cependant que les topos déduits des espaces topologiques sont de nature très particulière, dû au fait notamment qu'ils ont été décrits par des sites $C = \mathrm{Ouv}(X)$ où tous les morphismes sont des monomorphismes (donc dont la catégorie sous-jacente se réduit à un ensemble préordonné). De ceci résulte en particulier que les faisceaux représentés par les objets de C sont des sous-faisceaux du faisceau final, et par suite que les sous-faisceaux du faisceau final forment une famille génératrice du topos envisagé. Cette propriété n'est pas partagée par la plupart des topos qui s'introduisent de façon naturelle en géométrie algébrique ou en algèbre, cf. exemples plus bas. Elle est à peu de choses près caractéristique des topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$ (cf. 7.1.9 plus bas).

On vérifie facilement que l'application $\mathrm{Ouv}(X) \to \mathrm{Top}(X)$, qui associe à tout ouvert de X le faisceau qu'il représente, est une bijection de $\mathrm{Ouv}(X)$ avec l'ensemble des sous-objets de l'objet final de $\mathrm{Top}(X)$, cette bijection étant même un isomorphisme pour les structures d'ordre naturelles, i.e. induisant un isomorphisme des catégories correspondantes. Cela suggère qu'il doit être possible de reconstituer à homéomorphisme près l'espace topologique X, lorsqu'on connaît $\mathrm{Top}(X)$ à équivalence près. Nous verrons plus bas (4.2) qu'il en est bien ainsi, moyennant une légère restriction sur X.

2.2. Topos ponctuel ou final, et topos vide ou initial. Lorsque X est un espace topo- **313**
logique réduit à un seul point, le foncteur

$$F \longrightarrow F(X) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}$$

est une équivalence de catégories. Ceci montre en particulier que la catégorie $\mathscr{U}$-Ens est un $\mathscr{U}$-topos. Nous avons vu sur des exemples dans Exp. II que cet $\mathscr{U}$-topos est typique du point de vue propriétés d'exactitude, en ce que la vérification de beaucoup de propriétés (notamment des propriétés d'exactitude) des topos généraux se ramène à ce topos particulier. L'interprétation que nous en donnons ici en termes de l'espace topologique ponctuel justifie l'abus de langage consistant à appeler topos ponctuel un topos équivalent à la catégorie $\mathscr{U}$-Ens (bien que, en tant que catégorie, il ne soit pas du tout équivalent à la catégorie ponctuelle !). C'est la terminologie qui correspond à l'intuition géométrique correcte du rôle joué par ces topos. On appelle parfois, par abus de langage également, topos final un topos ponctuel, cf. 4.3 ; on dira « le topos final » pour le topos ($\mathscr{U}$-Ens).

Lorsque X est réduit à l'espace topologique vide, donc $\mathrm{Ouv}(X)$ à la catégorie ponctuelle, alors un préfaisceau F sur $\mathrm{Ouv}(X)$ est un faisceau si et seulement si sa valeur en l'unique objet ϕ de $\mathrm{Ouv}(X)$ est un ensemble réduit à un point. Il s'ensuit que $\mathrm{Top}(\varnothing)$ est

[4]N.D.E. : Ici [TF] indique la référence [8]

isomorphe à la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles réduits à un point, catégorie qui est équivalente à la catégorie ponctuelle. De ceci on conclut en particulier que la catégorie ponctuelle (ainsi que toute $\mathscr{U}$-catégorie équivalente à celle-ci) est un $\mathscr{U}$-topos. On l'appelle
314 parfois, par abus de langage, le topos vide ou topos initial (cf. 4.4) ; on prendra garde qu'il n'est pas équivalent à la catégorie vide.

2.3. Topos associé à un espace à opérateurs. Soient X un espace topologique, G un groupe discret opérant sur X par homéomorphismes. On a défini alors dans [Toh][5] 5.1 la catégorie des G-faisceaux sur X, ou comme nous dirons aussi, des faisceaux sur (X, G) ; ce sont les faisceaux (d'ensembles) sur X, munis d'opérations de G compatibles avec celles de G sur X. On constate aussitôt, à l'aide du critère de Giraud 1.2 iii), que cette catégorie est un topos (NB $\mathscr{U}$ est sous-entendu dans tout ceci), qu'on notera simplement $\mathrm{Top}(X, G)$. Lorsque G est réduit au groupe unité, on retrouve l'exemple 2.1 ; lorsque X est réduit à l'espace ponctuel, on trouve le topos des ensembles sur lesquels G opère à gauche (ou G-ensembles), appelé aussi topos classifiant du groupe discret G, et noté B_G. On vérifie facilement que le seul sous-objet de l'objet final e du topos B_G est e ou le faisceau vide ϕ, en particulier, si G n'est pas réduit au groupe unité, les sous-objets de l'objet final du topos classifiant B_G ne forment pas une famille génératrice de B_G. Donc B_G n'est pas équivalent alors à un topos du type $\mathrm{Top}(X)$ envisagé dans 2.1.

La notion de G-faisceau était introduite dans loc. cit. pour développer la théorie cohomologique des G-faisceaux abéliens. Interprétant ces derniers comme les faisceaux abéliens du topos (X, G), ladite théorie se trouve incluse dans celle de Exp. V, développée dans le cadre des topos généraux.

315 On peut se proposer plus généralement d'attacher un topos approprié à un espace topologique X, muni d'un groupe topologique G (pas nécessairement discret) d'automorphismes, qui donnerait naissance à une théorie cohomologique adéquate. De même dans le contexte des variétés différentiables, ou analytiques réelles ou complexes, ou des schémas. C'est effectivement possible, cf. 2.5 ci-dessous.

2.4. Topos classifiant d'un Groupe. Soit E un topos, et G un Groupe de E. Soit (E, G) la catégorie des objets de E sur lesquels G opère. On voit aussitôt, grâce au critère de Giraud, que c'est un topos. On l'appelle topos classifiant du Groupe G, et on le note B_G. Lorsque E est le topos ponctuel (2.2) i.e. lorsque G est un groupe ordinaire, on retrouve le topos classifiant de 2.3.

La terminologie adoptée ici se justifie, du fait que le topos B_G joue un rôle universel pour la classification des « torseurs » (ou fibrés principaux homogènes) sous G, ou plus généralement sous les $G_{E'} = f^*(G)$, où E' est un topos « au-dessus de E » i.e. muni d'un morphisme $f : E' \to E$ (cf. 3.1 ci-dessous). Ce rôle, explicité dans [3 Chap V] ou dans 5.9 plus bas, montre que B_G joue, dans le contexte des topos, le même rôle que les classiques espaces classifiants des groupes topologiques en théorie homotopique des espaces topologiques. Ces derniers peuvent être regardés (cf. 2.5) comme une version affaiblie des premiers, obtenue en ne retenant du topos classifiant que le seul « type d'homotopie » dudit topos, en un sens convenable qu'il n'y a pas lieu de préciser ici.

2.5. « Gros site » et « gros topos » d'un espace topologique. Topos classifiant d'un
316 groupe topologique. [5]

[5] N.D.E. : Ici [Toh] indique la référence [4].

[5] L'introduction de ces sites et topos est due à M. Giraud, qui a mis également en évidence leurs avantages sur le « petit » site traditionnel.

Soit U – Esp ou simplement (Esp) la catégorie des espaces topologiques $\in \mathscr{U}$. On sait que dans (Esp) les limites projectives finies sont représentables. Considérons sur (Esp) la prétopologie (??) pour laquelle $\mathrm{Cov}(X)$ est l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes $u_i : X_i \to X$. Nous considérerons (Esp) comme un site à l'aide de la topologie engendrée par la prétopologie précédente. Pour tout objet X de (Esp), considérons la catégorie

$$(\mathrm{Esp})_{/X}$$

des objets de (Esp) au-dessus de X, i.e. des espaces topologiques au-dessus de X, comme un site, grâce à la topologie induite par celle de (Esp) via le foncteur d'oubli $(\mathrm{Esp})_{/X} \to (\mathrm{Esp})$ (III 5.2 4)). Ce site est appelé le gros site associé à X. On fera attention qu'il n'est pas $\in \mathscr{U}$; ce n'est pas non plus un $\mathscr{U}$-site au sens de II 3.0.2, donc des précautions sont nécessaires pour lui appliquer les résultats habituels. Pour pallier cet inconvénient, on peut choisir un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, de sorte que $(\mathrm{Esp})_{/X}$ devient un $\mathscr{V}$-site, et on peut travailler avec le $\mathscr{V}$-topos associé $(\mathrm{Esp})_{/X}$, qui pourra être noté $\mathrm{TOP}(X)$ et sera appelé le gros topos de X. Si on répugne à agrandir $\mathscr{U}$, on peut choisir un cardinal c majorant les cardinaux de X et de tous les espaces topologiques qu'on compte faire intervenir dans les raisonnements (le plus souvent, $\mathrm{Sup}(\mathrm{card}\, X, \mathrm{card}\, \mathbb{R})$ sera suffisant !), et on remplace $(\mathrm{Esp})_{/X}$ par la sous-catégorie $(\mathrm{Esp})'_{/X}$ formée des X' sur X tels que $\mathrm{card}\, X' \leq c$, munie de la topologie induite, et on note $\mathrm{TOP}(X)$ le topos des faisceaux sur ce site. Pour fixer **317**
les idées, supposons que ce soit la première définition qui ait été adoptée.

L'avantage du gros topos de X sur le petit, c'est que le site qui le définit contient $(\mathrm{Esp})_{/X}$ comme sous-catégorie pleine ; comme la topologie de ce site est manifestement moins fine que la canonique, on voit que le foncteur canonique de $(\mathrm{Esp})_{/X}$ dans $\mathrm{TOP}(X)$, associant à tout espace X' sur X le faisceau qu'il représente, est pleinement fidèle. Par suite, un espace X' sur X est connu à X-isomorphisme près quand on connaît le faisceau ($\in \mathrm{Top}(X)$) qu'il définit ; donc la notion de faisceau sur (le gros site de) X peut être considéré comme une généralisation de celle d'espace topologique au-dessus de X, à l'aide de laquelle toutes les constructions de la théorie des faisceaux prennent un sens pour les espaces topologiques sur X.

Ainsi, lorsque G est un objet-groupe de la catégorie $(\mathrm{Esp})_{/X}$ des espaces topologiques au-dessus de X, on peut lui associer le topos classifiant B_G (2.4), d'où des groupes de cohomologie classifiante, des groupes d'homotopie classifiante etc. (définis comme les invariants correspondants du $\mathscr{V}$-topos B_G). En particulier, lorsque X est un espace ponctuel, G s'identifie à un groupe topologique ordinaire. On peut vérifier, moyennant les conditions locales habituelles assurant que la cohomologie singulière des produits cartésiens G^n coïncide avec la cohomologie au sens des faisceaux (pour des coefficients constants, disons), par exemple si G est localement contractible, que la cohomologie du topos classifiant de G est canoniquement isomorphe à celle de l'espace classifiant de G au sens des topologues.

L'introduction des topos classifiants (via les « gros sites ») a sur les espaces classi- **318**
fiants l'avantage de fournir une théorie plus riche, puisqu'ils fournissent notamment des invariants cohomologiques utiles pour des coefficients plus généraux que les coefficients constants ou localement constants. De plus, la définition envisagée ici s'adapte de façon évidente aux autres contextes habituels : variétés différentiables, variétés ou espaces analytiques (réelles ou complexes, au choix), schémas. Ce point de vue permet notamment de faire le lien entre l'étude des classes caractéristiques du point de vue traditionnel et du point de vue « arithmétique », en considérant les « groupes classiques » comme provenant de schémas définis sur l'anneau des entiers ; cf. [7] pour des indications dans ce sens. De même, les résultats généraux de J. Giraud [3] sur la classification

des extensions de Groupes, développés dans le cadre très général et très souple des topos, peuvent grâce aux « gros topos » se spécialiser en des résultats sur la classification d'extensions de groupes topologiques, ou de groupes de Lie réels ou complexes, qui ne semblaient guère connus des topologues que dans le cas des extensions à noyau abélien [11].

2.6. Topos de la forme $\widehat{C}$. Soit C une petite catégorie. Alors la catégorie $\widehat{C}$ des U-préfaisceaux sur C est évidemment un $\mathscr{U}$-topos, puisqu'elle est de la forme $C^{\sim}$, où on munit C de la topologie chaotique. Nous donnerons plus bas quelques détails sur les relations entre C et $\widehat{C}$. Notons seulement ici qu'un topos E équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$ est de nature assez spéciale, du fait qu'il admet une petite famille génératrice (X_i) formée d'objets connexes projectifs, i.e. d'objets X tels que le foncteur
319 $Y \mapsto \operatorname{Hom}(X, Y)$ transforme épimorphismes en épimorphismes et sommes en sommes : il suffit en effet de prendre dans $\widehat{C}$ la famille génératrice formée des foncteurs représentés par les $X \in \operatorname{ob} C$. Notons d'ailleurs que si dans un topos E on a une famille couvrante $X_i \to X$, avec des X_i qui sont projectifs et connexes, alors toute autre famille couvrante de X est majorée (I 4.3.2, I 4.3.3) par la précédente. Par suite, dans un topos E de la forme $\widehat{C}$ tout objet X admet une famille couvrante majorant toutes les autres. Un topos de la forme $\operatorname{Top}(X)$ (2.1), avec X un espace topologique dont les points sont fermés, n'a la propriété précédente que si X est discret.

Lorsque la catégorie C a un seul objet, C s'identifie à un monoïde G. Un préfaisceau sur C s'identifie alors à un ensemble sur lequel G opère à droite (puisque c'est un foncteur $G^{\circ} \to (\mathrm{Ens})$), et $\widehat{C}$ est le topos des ensembles à monoïde d'opérateurs à droite, qu'on pourra aussi noter $B_{G^{\circ}}$, compte tenu de 2.3 : c'est le topos des ensembles à monoïde d'opérateurs G° (le monoïde opposé à G). Lorsque G est un groupe, utilisant l'isomorphisme $g \mapsto g^{-1}$ de G sur G°, on retrouve le topos classifiant B_G de 2.3.

2.7. Topos classifiant d'un pro-groupe.

2.7.1. Soit $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$ un système projectif de groupes, avec $G_i, I \in \mathscr{U}$. On suppose le système projectif strict. i.e. les morphismes de transition $G_j \to G_i$ surjectifs. Si E est un ensemble, on appelle opération de $\mathscr{G}$ sur E (à gauche, disons) la structure suivante : a) une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E, de réunion E ; b) pour tout $i \in I$, une opération
320 du groupe G_i sur l'ensemble E_i ; on suppose de plus ces données soumises à la condition suivante : pour $j \geq i$, E_i est le sous-ensemble de E_j formé des éléments fixes sous le groupe noyau de $G_j \to G_i$. On dit aussi que $\mathscr{G}$ opère sur E (à gauche) si on s'est donnée une opération de G sur E (à gauche). Les ensembles $\in \mathscr{U}$ munis d'une opération de $\mathscr{G}$ forment une catégorie de façon évidente. On constate aussitôt, grâce au critère de Giraud, que cette catégorie est un $\mathscr{U}$-topos. On le note $B_{\mathscr{G}}$ et on l'appelle topos classifiant de $\mathscr{G}$. Lorsque I admet un objet initial $i_{\circ}$, posant $G = G_{i_{\circ}}$, on retrouve le topos classifiant de 2.3.

2.7.2. Un autre exemple important est celui où les groupe G_i sont finis, de sorte que

$$G = \varprojlim G_i$$

est un groupe topologique compact totalement discontinu, ou groupe profini. Une opération de $\mathscr{G}$ sur E revient alors à une opération de G sur E qui est continue, ou ce qui revient au même, telle que le stabilisateur de tout point de E est un sous-groupe ouvert de G. Le topos classifiant $B_{\mathscr{G}}$ sera aussi noté B_G, où, bien entendu, G doit être considéré comme muni de sa topologie profinie.

2.7.3. Il est facile de vérifier, utilisant les remarques de 2.6, que le topos $B_{\mathscr{G}}$ défini par un système projectif strict $\mathscr{G} = (G_i)_{i\in I}$ de groupes n'est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$ que si ce système projectif est essentiellement constant ; dans le cas d'un groupe profini, cela signifie que ce groupe est en fait fini.

2.7.4. L'interprétation géométrique suivante du topos classifiant B_G d'un groupe discret G est utile, pour donner une intuition géométrique correct de ces topos. (Cf. aussi, dans le même sens, 4.5, 5.8, 5.9 et 7.2 ci-dessous.) Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et localement simplement connexe, x un point de X, G son groupe 321
fondamentale en x. (NB il est connu qu'à isomorphisme près, tout groupe discret G peut s'obtenir ainsi.) Alors la théorie de Galois des revêtements de X fournit une équivalence entre la catégorie B_G des G-ensembles, et la catégorie des revêtements étales de X, i.e. des espaces X' sur X qui sont localement X-isomorphes à des X-espaces de la forme $X \times I$, où I est un espace discret. (comparer SGA 1 V 4,5). Cette dernière peut d'ailleurs s'interpréter comme la catégorie des faisceaux localement constants sur X, i.e. la catégorie des objets localement constants (IX 2.0) du topos $\mathrm{Top}(X)$.

Lorsque G est un groupe profini, on a une interprétation géométrique analogue de B_G, comme la catégorie des X-schémas qui sont sommes de revêtements finis étales d'un schéma X connexe, muni d'un point géométrique x et d'un isomorphisme $G \simeq \pi_1(X, x)$. Il est connu encore que tout groupe profini peut s'obtenir comme groupe fondamental d'un schéma connexe convenable (spectre d'un corps si on veut). Enfin, ou rencontre également des pro-groupes (pas nécessairement profinis ni essentiellement constants) pour la classification des revêtements des espaces connexes et localement connexes qui ne sont pas localement simplement connexes, ou la classification des revêtements étales pas nécessairement finis ou ind-finis de schémas connexes non normaux. Pour ce dernier cas, cf. SGA 3 X 6.

Exercice 2.7.5. Définir pour un topos E la notion de connexité, de locale connexité [5], de simple connexité et de simple connexité locale. Définir la notion d'objet constant et localement constant de E (cf. IX 2.0). Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos (3.1), 322
avec E' simplement connexe (par exemple E' le topos ponctuel (2.2)), et E connexe et localement connexe. Définir un pro-groupe strict $\pi_1(E, f) = (G_i)_{i\in I} = \mathscr{G}$ (appelé pro-groupe fondamental de E en f) et une équivalence de catégories de $B_{\mathscr{G}}$ avec la catégorie des objets localement constants de E.[5]. Montrer que lorsque E est localement simplement connexe, $\pi_1(E, f)$ est essentiellement constant et s'identifie donc à un groupe discret ordinaire $\pi_1(E, f)$, qui s'appelle le groupe fondamental de E en f. Montrer que tout pro-groupe strict $\mathscr{G}$ est isomorphe (comme pro-groupe) au pro-groupe fondamental d'un topos connexe et localement connexe convenable en un f convenable, avec E' le topos ponctuel (prendre $E = B_{\mathscr{G}}$, et $f : E' \to E$ défini par le foncteur oubli $f^* : E \to E' = (\mathrm{Ens})$). Lorsque $\mathscr{G}$ est essentiellement constant, i.e. isomorphe (comme pro-groupe) à un groupe discret ordinaire, prouver qu'on peut prendre ci-dessus E localement simplement connexe (prendre encore $E = B_G$).

2.8. Exemple d'un faux topos. Soit $\mathscr{G} = (G_i)_{i\in I}$ un pro-groupe strict, où I est ordonné filtrant et où $i > j$ implique que $G_i \to G_j$ n'est pas un isomorphisme. Supposons que l'on ait $\mathrm{card}(I) \notin \mathscr{U}$. Considérons la catégorie des ensembles $E \in \mathscr{U}$ sur lesquels $\mathscr{G}$ opère à gauche (2.7.1). C'est une $\mathscr{U}$-catégorie, et on voit comme dans 2.7.1 que cette catégorie satisfait aux conditions a), b), c) de 1.1.2. Cependant ce n'est pas un $\mathscr{U}$-topos,

[5] cf. 8.7 1).

[5] On pourra s'inspirer de SGA 3 X 6.

car on voit qu'il n'admet pas de famille génératrice qui soit $\mathscr{U}$-petite. On voit de même que ce n'est un $\mathscr{V}$-topos pour aucun univers $\mathscr{V}$.

3. Morphismes de topos

323 Définition 3.1. Soient E et E' deux $\mathscr{U}$-topos. On appelle morphisme[6] de E dans E', ou parfois (par abus de langage) application continue de E dans E', un triple $u = (u_*, u^*, \varphi)$, formé de foncteurs

$$u_* : E \longrightarrow E' \quad , \quad u^* : E' \longrightarrow E$$

et d'un isomorphisme φ « d'adjonction » de bifoncteurs en $X' \in \mathrm{Ob}\, E'$, $Y \in \mathrm{Ob}\, E$:

$$\varphi : \mathrm{Hom}_E(u^*(X'), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E'}(X', u_*(Y)),$$

le foncteur u^* étant de plus soumis à la condition d'être exact à gauche, i.e. de commuter aux limites projectives finies. Le foncteur u_* est appelé le foncteur image directe pour le morphisme de topos u, le foncteur u^* est appelé le foncteur image inverse pour le morphisme de topos u, l'isomorphisme φ est appelé l'isomorphisme d'adjonction, pour u.

3.1.1. Sauf mention expresse du contraire, on désignera par la suite, pour un morphisme de topos $u : E \to E'$, par u_* et u^* les foncteurs image directe et image inverse correspondants [6]. On notera que, u_* étant adjoint à droite de u^* et u^* étant adjoint à gauche de u_* par l'isomorphisme d'adjonction φ, chacun des deux foncteurs u_*, u^* détermine l'autre à isomorphisme unique près, d'après le sorite bien connu des foncteurs adjoints [14]. En pratique, suivant les cas, il peut être plus commode de définir un morphisme de topos $u : E \to E'$ soit par la donnée de $u^* : E' \to E$, soit par la donnée de $u_* : E \to E'$; dans le premier cas, il faut simplement vérifier que le foncteur donné u^*
324 admet un adjoint à droite, et qu'il est exact à gauche. Dans le deuxième, que le foncteur donné u_* admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche. Dans l'un ou l'autre cas, on déduit de la donnée partielle, grâce au choix d'un foncteur adjoint et d'un isomorphisme d'adjonction, un morphisme de topos $u : E \to E'$, et ce dernier sera « unique à isomorphisme unique près » en termes de la donnée u^* resp. u_*, en un sens assez clair, et qui sera d'ailleurs entièrement explicité plus bas (3.2.1).

3.1.2. Si $u : E \to E'$ est un morphisme de topos, il résulte des propriétés des foncteurs adjoints (I 2.11) que le foncteur image directe $u_* : E \to E'$ commute aux limites projectives, et le foncteur $u^* : E' \to E$ commute aux limites inductives [6]. Comme on suppose de plus que ce dernier est exact à gauche i.e. commute aux limites projectives finies, on voit donc en particulier que u^* est exact. On peut donc dire que c'est le foncteur image inverse u^*, dans le couple (u_*, u^*), qui possède les propriétés d'exactitude les plus remarquables. Ces propriétés assurent que pour toute espèce de structure algébrique Σ dont les données peuvent se décrire en termes de données de flèches entre les ensembles de base et des ensembles déduits de ceux-ci par application répétée d'opérations de limites projectives finies et de limites inductives quelconques, et pour tout « objet de $\mathscr{E}'$ muni d'une structure d'espèce Σ » (notion qui a un sens grâce aux propriétés d'exactitude internes du topos $\mathscr{E}'$ (II 4.1)), son image par u^* est muni des mêmes structures. Plutôt que d'entrer dans la tâche peu engageante de donner un sens précis à cet énoncé

[6]N.D.E. : Certains auteurs parlent de *morphisme géométrique*.

[6]Il y a lieu parfois d'écrire aussi u^{-1} au lieu de u^*, cf. 13.2.3.

[6]D'ailleurs (1.5 et 1.8), pour un foncteur $u_* : E \to E'$ resp. $u^* : E' \to E$ donné, ce foncteur admet un adjoint à gauche (resp. à droite), si et seulement si il commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives (resp. aux $\mathscr{U}$-limites inductives).

et de le justifier de façon formelle, nous conseillons au lecteur de l'expliciter et de se **325**
convaincre de sa validité pour des espèces de structure telles que celle de groupe, d'anneau, de module sur un anneau, de comodule sur un coanneau, de bigèbre sur un anneau, de torseur sous un groupe. (Dans ces exemples, les trois premières espèces de structure se définissent en termes de limites projectives finies exclusivement, tandis que les autres notions impliquent implicitement des constructions faisant appel également à des limites inductives.) De plus, le foncteur u^* « commute » à toutes les opérations fonctorielles habituelles faites en termes de telles structures, plus précisément à toutes les opérations qui peuvent s'exprimer en termes de $\varinjlim$, et de $\varprojlim$ finies : constructions d'objets libres (groupes ou modules libres, p.ex.) engendrés par un objet, produits tensoriels (cf. § 12 plus bas) etc.

Quant au foncteur image directe $u_* : E \to E'$, qui commute aux limites projectives, il « respecte » par suite toute structure algébrique sur un objet (ou une famille d'objets) de E, définissable en termes de limites projectives exclusivement (telles que les structures de groupe, d'anneau ou de module sur un anneau, parmi les exemples précédents). Par contre, le foncteur u_* n'est en général pas exact à droite i.e. il ne commute pas en général aux limites inductives finies, et même ne transforme pas en général épimorphisme en épimorphisme (c'est d'ailleurs ce défaut d'exactitude du foncteur u_* qui est la source de ces propriétés cohomologiques, qui seront étudiées (du point de vue de l'algèbre homologique commutative) dans l'exposé suivant). Par suite, il ne s'étend pas, en général,
en un foncteur sur des objets du type comodule, ou bigèbre, ou torseur sous un groupe, **326**
et ne commute pas en général à des opérations telles que « module libre engendré », produit tensoriel de modules, etc.

3.1.3. En pratique, lorsqu'on est en présence d'un foncteur $f : E \to F$ d'un $\mathscr{U}$-topos dans un autre, il y a lieu d'en expliciter toutes les propriétés d'exactitude, y compris l'existence éventuelle de foncteurs adjoints à gauche ou à droite (cf. la note de bas de page 164), pour parvenir à une compréhension de la « nature géométrique » de f, compréhension qui sera généralement un guide indispensable pour une intuition géométrique correcte de la situation. Ainsi, s'il s'avère que f commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies, il y a lieu d'écrire f sous la forme

$$f = u^*,$$

où

$$u : F \longrightarrow E$$

est un morphisme de topos, i.e. d'interpréter f comme un foncteur « image inverse » par une « application continue » de topos. Lorsque f commute aux limites projectives quelconques, donc qu'il admet un adjoint à gauche, et si ce dernier (qui a priori commute aux limites inductives quelconques) commute de plus aux limites projectives finies, il y a lieu d'écrire f sous la forme

$$f = v_*,$$

où

$$v : E \longrightarrow F$$

est un morphisme de topos. Dans certains cas, il peut arriver que f satisfasse aussi bien **327**
à l'une qu'à l'autre des deux propriétés envisagées (cf. 4.10 pour un exemple). Dans ce cas, il y a lieu d'introduire simultanément les morphismes de topos

$$u : F \longrightarrow E \quad , \quad v : E \longrightarrow F,$$

qui donnent lieu à une suite de trois foncteurs adjoints (I 5.3) :

$$v^* \quad , \quad v_* = u^* = f \quad , \quad u_*.$$

Il convient de distinguer alors soigneusement entre les morphismes de topos u et v, sous peine de perdre l'intuition géométrique de la situation.

On notera à ce propos que lorsque entre deux topos E, F on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$e, f, g \ (e, g : F \rightrightarrows E, f : E \to F),$$

alors f commute aux limites inductives et aux limites projectives quelconques, donc il peut toujours se mettre sous la forme u^*, où $u : F \to E$ est un morphisme de topos. Alors g s'écrit donc $g = u_*$. Par contre, bien sûr, e ne peut s'écrire sous la forme v^* (et alors f sous la forme v_*) que s'il commute de plus aux limites projectives finies. Cela sera évidemment le cas s'il est lui-même l'adjoint à droite d'un quatrième foncteur d. Sans condition de cette nature, on écrira souvent

$$e = u_!$$

pour l'adjoint à gauche d'un foncteur image inverse $f = u^*$, quand un tel adjoint à gauche existe, cette notation étant suggérée par l'exemple d'une immersion ouverte $u : X \to Y$ d'espaces topologiques. De même, si e est de la forme v^*, i.e. f de la forme v_*, on note parfois $g = v^!$ l'adjoint à droite d'un foncteur image directe v_*, lorsque cet adjoint existe [6].

328 3.2. Soient E, E' deux $\mathscr{U}$-topos, et

$$u = (u_*, u^*, \varphi) \quad , \quad v = (v_*, v^*, \Psi) : E \rightrightarrows E'$$

deux morphismes de topos de E dans E'. On appelle morphisme de u dans v tout morphisme de u_* dans v_* (au sens de la catégorie $\mathscr{H}om(E, E')$ des foncteurs de E dans E'). Les morphismes de morphismes de topos se composent de façon évidente, et on définit de cette façon une catégorie, qui est en fait une $\mathscr{U}$-catégorie (I 7.8) notée

$$\mathscr{H}omtop(E, E'),$$

appelée catégorie des morphismes (ou des applications continues) de E dans E'. On définit alors de façon évidente un foncteur

$$u \longmapsto u_* : \mathscr{H}omtop(E, E') \longrightarrow \mathscr{H}om(E, E'),$$

foncteur qui est pleinement fidèle par définition des flèches dans le premier membre (mais qui n'est pas injectif sur les objets).

3.2.1. On fera attention que, si u et v sont donnés comme dessus, la théorie des foncteurs adjoints fournit une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}(u_*, v_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(v^*, u^*);$$

en particulier, on obtient un contrafoncteur sur $\mathscr{H}omtop(E, E')$:

$$u \longmapsto u^* : \mathscr{H}omtop(E, E')^\circ \longrightarrow \mathscr{H}om(E, E').$$

Conformément à l'intuition géométrique, suivant laquelle le foncteur image directe u_* « va dans le même sens » que l'application continue qui lui donne naissance, il y a donc lieu de définir le sens des flèches pour les morphismes entre morphismes de topos en termes des foncteurs images directes, et non en termes des foncteurs images inverses (bien que ce soient ces derniers qui, nous l'avons vu, possèdent les propriétés d'exactitude caractéristiques de la notion de morphisme de topos).

[6]Cf. plus bas 14.4, dans le cas de faisceaux abéliens.

3.2.2. Ayant défini la catégorie $\mathscr{H}omtop(E, E')$ des morphismes du topos E dans le topos E', la notion d'isomorphie entre deux morphismes u, v de E dans E' est également définie. En pratique, il n'y a pas lieu de distinguer essentiellement entre deux morphismes de topos isomorphes, tout au moins lorsqu'on dispose d'un isomorphisme canonique entre les deux (tout comme il n'y a pas lieu souvent de distinguer entre deux éléments d'une catégorie, lorsqu'on se donne un isomorphisme canonique entre eux). Signalons à ce propos que le plus souvent, lorsqu'on traite de diagrammes de morphismes de topos et de questions de commutativité de tels diagrammes (notion qui a un sens grâce à (3.3)), il ne s'agit que de commutativité à isomorphisme (« canonique ») près ; par abus de langage, on traite alors ces diagrammes comme des diagrammes effectivement commutatifs. **329**

On peut songer à justifier cet abus de langage en introduisant l'ensemble $\mathrm{Homtop}(E, E')/\,\mathrm{Isom}$ des morphismes de E dans E' à isomorphisme près, et en appelant morphisme une telle classe d'isomorphie, au lieu de suivre la définition 3.2. Mais ceci se heurte aux inconvénients très graves qui se présentent, chaque fois qu'on essaie d'identifier deux objets isomorphes d'une catégorie, sans disposer d'un isomorphisme canonique entre eux. L'expérience prouve qu'un tel point de vue est impraticable, et qu'il faut garder la notion « fine » 3.1 de la notion de morphisme entre morphismes de topos, quitte à être obligé, parfois, de se battre avec des compatibilités entre isomorphismes canoniques [6].

3.3.1. Soient E, E', E'' trois $\mathscr{U}$-topos, et considérons des morphismes de topos **330**

$$u : E \longrightarrow E' \quad , \quad v : E' \longrightarrow E''.$$

La théorie des foncteurs adjoints nous donne alors un isomorphisme d'adjonction entre les foncteurs composés $v_* u_*$ et $u^* v^*$, en termes des isomorphismes d'adjonction pour les couples (u_*, u^*) et (v_*, v^*). D'autre part, le foncteur $u^* v^*$ exact à gauche, comme composé de deux foncteurs exacts à gauche. Par suite, on trouve un morphisme de E dans E'', qu'on appelle composé des morphismes u et v, et qu'on note vu :

$$vu : E \longrightarrow E''.$$

On vérifie alors trivialement que la composition des morphismes est associative, et que pour tout $\mathscr{U}$-topos E, il y a un morphisme de E dans lui-même qui est une unité bilatère pour la composition : c'est le morphisme $(\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E, \varphi)$, où φ est l'isomorphisme d'adjonction évident de id_E avec lui-même. Soit alors $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. On définit une catégorie

$$(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Top}),$$

dont les objets sont les $\mathscr{U}$-topos qui sont $\in \mathscr{V}$, les flèches sont les morphismes entre de tels $\mathscr{U}$-topos, et la composition des flèches étant celle qu'on vient d'expliciter.

3.3.2. En fait, l'application de composition

$$\mathrm{Homtop}(E, E') \times \mathrm{Homtop}(E', E'') \longrightarrow \mathrm{Homtop}(E, E'')$$

est l'application induite sur les objets par un « foncteur composition des morphismes » :

$$\mathscr{H}omtop(E, E') \times \mathscr{H}omtop(E', E'') \longrightarrow \mathscr{H}omtop(E, E''),$$

dont l'effet sur les flèches est l'opération « produit de convolution » habituel pour des morphismes entre foncteurs (ici des foncteurs image directe). Ces foncteurs composition satisfont à une propriété d'associativité (stricte), pour quatre topos E, E', E'', E''', précisant l'associativité de la composition des morphismes de topos. On peut dire aussi, **331**

[6] Pour des exemples de telles batailles (victorieuses, semble-t-il) nous renvoyons le lecteur au livre de Mme M. Hakim sur les schémas relatifs [9].

dans un langage qui commence à devenir familier [2], [9], que les $\mathscr{U}$-topos sont les objets (ou 0-flèches) d'une 2-catégorie, dont les 1-flèches sont les morphismes de topos, et les 2-flèches sont les morphismes de morphismes de topos.

C'est le fait que les $\mathscr{U}$-topos (éléments d'un univers $\mathscr{V}$) forment une 2-catégorie, et non plus seulement une catégorie ordinaire comme les espaces topologiques ordinaires, qui constitue du point de vue technique la différence la plus importante entre la théorie des topos et celle des espaces topologiques. Ce fait est la source de certaines complications techniques auxquelles on a déjà fait allusion, mais aussi de faits essentiellement nouveaux par rapport à la topologie traditionnelle.

3.4. Le fait que les $\mathscr{U}$-topos (éléments d'un univers $\mathscr{V}$) forment une 2-catégorie (3.3.2) permet en particulier de définir la notion d'équivalence de deux $\mathscr{U}$-topos E, E' : on dit que E et E' sont équivalents s'il existe des morphismes de topos $u : E \to E'$ et $v : E' \to E$, tels que les composés uv et vu soient isomorphes respectivement au
332 morphisme identique de E et de E' ; on dit alors que les morphismes u et v sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.

On constate aussitôt que pour que le morphisme de topos $u : E \to E'$ soit une équivalence, il faut et il suffit que u_* soit une équivalence, ou ce qui revient au même, que u^* soit une équivalence. (Utiliser le fait qu'un foncteur $f : E \to E'$ entre deux topos qui est une équivalence est à la fois de la forme u_* et de la forme v^*, avec u et v des morphismes de topos) ; et pour que E et E' soient équivalents au sens de l'alinéa précédent, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents en tant que catégories (i.e. comme objets de la 2-catégorie ($\mathscr{V}$-cat)). Comme de juste, cela montre que les notions d'équivalence introduites ne dépendent pas du choix de l'univers $\mathscr{V}$ de 3.3.1.

3.4.1. Pratiquement, il n'y a pas lieu le plus souvent de distinguer essentiellement entre $\mathscr{U}$-topos équivalents, tout comme il n'y a pas lieu souvent de distinguer essentiellement entre deux catégories équivalentes, — à condition toutefois qu'on dispose d'une équivalence explicite de l'un à l'autre, ou tout au moins une équivalence définie à isomorphisme unique près. C'est la notion d'équivalence de topos qui remplace ici la notion traditionnelle d'homéomorphie entre deux espaces topologiques. Voir l'exemple 4.2 plus bas pour les relations précises entre ces deux notions.

4. Exemples de morphismes de topos

Nous reprenons ici les exemples de 2, en utilisant la notion de morphisme de topos. Les commentaires de 2.0 s'appliquent également au présent numéro. L'univers $\mathscr{U}$ sera généralement sous-entendu.

333

4.1. Le topos $\mathrm{Top}(X)$ pour un espace topologique X variable.

4.1.1. Soit une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

d'espaces topologiques, on va lui associer canoniquement un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(f) \text{ ou } f : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y),$$

avec les notations de 2.1. Lorsqu'on définit $\mathrm{Top}(X)$ comme $\mathrm{Ouv}(X)\tilde{}$, la description la plus commode de $\mathrm{Top}(f)$ est par le foncteur image directe de faisceaux

$$f_* : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y),$$

défini par la formule

$$f_*(F) = F \circ f^{-1},$$

où

$$f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

est le foncteur évident $U \to f^{-1}(U)$. On a déjà noté que ce foncteur est continu et exact à gauche, dont définit bien un foncteur f_* ci-dessus, admettant un adjoint à droite f^* qui est exact à gauche (III 1.9.1). Bien entendu, en toute rigueur, le morphisme de Topos $\mathrm{Top}(f)$ dépend du choix de l'adjoint à droite f^* de f_*, donc n'est défini qu'à isomorphisme canonique près. On se dispensera par la suite de signaler expressément des phénomènes de ce genre.

Lorsqu'on adopte le point de vue « espaces étalés » pour définir $\mathrm{Top}(X)$, c'est le foncteur image inverse

$$f^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

qui est le plus commode pour définir le morphisme de Topos $\mathrm{Top}(f)$, en posant simplement **334**

$$f^*(Y') = X \times_Y Y'$$

pour tout espace étalé Y' sur Y ; il est évident que le produit fibré est bien un espace étale sur X, et que le foncteur f^* ainsi obtenu est exact à gauche et commute aux $\varinjlim$ quelconques, et définit par suite un morphisme de topos $\mathrm{Top}(f)$. Pour la compatibilité des deux définitions obtenues, nous renvoyons à [TF].

Lorsqu'on a deux applications continues composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z,$$

de morphismes de topos. Ces isomorphismes de transitivité, pour trois applications continues composables f, g, h satisfont à une relation de compatibilité que nous nous dispensons d'écrire ici, et qui n'est autre que celle envisagée dans SGA 1 VI 7.4 B) (pour $\epsilon = (\mathrm{Esp})^\circ$). On peut l'exprimer en disant que pour X variable dans la catégorie (Esp),

$$X \longmapsto \mathrm{Top}(X)$$

est un « pseudo-foncteur »

$$(\mathscr{U}\text{-esp}) \longrightarrow (\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathsf{T}), \tag{4.1.1.1}$$

ou aussi, dans la terminologie des 2-catégories, qu'on a un foncteur non strict de 2-catégories [9]. En pratique, on se permettra le plus souvent l'abus de langage consistant à identifier $\mathrm{Top}(gf)$ et $\mathrm{Top}(g)\,\mathrm{Top}(f)$, c'est-à-dire de raisonner comme si (4.1.1.1) était un vrai foncteur de catégories ordinaires. On se permettra les abus de langage analogues dans **335**
les autres exemples qui seront traités ci-dessous.

4.1.2. Les considérations précédentes s'étendent immédiatement au cas des topos associés aux espaces topologiques à groupes d'opérateurs (2.3). Si $f = (f^{\mathrm{es}}, f^{\mathrm{gr}})$,

$$f : (X, G) \longrightarrow (Y, H)$$

est un morphisme d'espaces à opérateurs (où

$$f^{\mathrm{es}} : X \longrightarrow Y \quad , \quad f^{\mathrm{gr}} : G \longrightarrow H$$

sont respectivement des applications continues et des morphismes de groupes, compatibles dans un sens évident), on lui associe un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(f) \text{ ou } f : \mathrm{Top}(X, G) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y, H),$$

dont la définition est laissée au lecteur. Lorsque les groupes G et H sont les groupes unité, on retrouve la définition de 4.1.1 ; lorsque par contre ce sont les espaces X et Y

qui sont réduits à un point, on trouve comme foncteur image inverse f^* le foncteur « restriction du groupe d'opérateurs »

$$f^* : B_H \longrightarrow B_G,$$

associant à tout H-ensemble le G-ensemble qu'il définit grâce à $f : G \to H$. On retrouvera cet exemple sous d'autres formes encore dans 4.5 et 4.6.1.

4.1.3. Étant donné une application continue $f : X \to Y$ d'espaces topologiques, on lui associe également un morphisme sur les « gros topos » correspondants (2.5)

$$\mathrm{TOP}(f) \text{ ou } f : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(Y),$$

336 défini le plus commodément par le foncteur image inverse

$$f^* : \mathrm{TOP}(Y) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X),$$

qui n'est autre que le foncteur restriction. Ce morphisme $\mathrm{TOP}(f)$ est un cas particulier du morphisme dit « d'inclusion » pour un topos induit, qui sera étudié dans 5. On voit ainsi que, sous les mêmes réserves que dans 4.1.1, le topos $\mathrm{TOP}(X)$ peut être considéré comme un foncteur en X, pour X variable dans (Esp).

4.2. Propriétés de fidélité de $X \mapsto \mathrm{Top}(X)$. Nous nous proposons de préciser dans quelle mesure un espace topologique X peut se reconstituer en termes du topos $\mathrm{Top}(X)$, et dans ce but il convient de décrire, pour deux espaces X et Y, la catégorie des morphismes de $\mathrm{Top}(X)$ dans $\mathrm{Top}(Y)$ (3.2), de façon à pouvoir préciser les propriétés de fidélité du « foncteur » $X \mapsto \mathrm{Top}(X)$. Nous nous bornons à énoncer les résultats auxquels on parvient, en renvoyant le lecteur à [9] pour des détails. Le lecteur qui voudra faire l'exercice de vérification lui-même pourra consulter l'exer. 7.8.

4.2.1. Rappelons qu'un espace topologique X est dit sobre si toute partie fermée irréductible de X a exactement un point générique. Signalons que presque tous les espaces utilisés en pratique sont sobres ; il en est en particulier ainsi d'un espace séparé, plus généralement d'un espace dont tous les points sont fermés, ou de l'espace sous-jacent à un schéma. Si X est un espace topologique, on lui associe (loc. cit. ou EGA $\mathscr{O}_I$, réédition) un
337 espace topologique sobre X_{sob} et une application continue

$$\varphi : X \longrightarrow X_{\mathrm{sob}} \tag{4.2.1.1}$$

qui soit universelle pour les applications continues de X dans des espaces sobres ; en d'autres termes, on construit un foncteur adjoint à gauche $X \mapsto X_{\mathrm{sob}}$ du foncteur d'inclusion (Espsob) $\to$ (Esp) de la catégorie des espaces sobres dans celle des espaces topologiques « quelconques » (les guillemets rappelant qu'il y a un univers !). La construction explicite se fait en prenant comme points de X_{sob} les parties fermées irréductibles de X, comme ouverts les ensembles de la forme U', où U est en ouvert de X et où $U' \subset X_{\mathrm{sob}}$ désigne l'ensemble des parties fermées irréductibles de X qui rencontrent U. L'application (4.2.1.1) est obtenue en associant à tout $x \in X$ l'adhérence de $\{x\}$. L'espace X est sobre si et seulement si l'application précédente est bijective, donc un homéomorphisme.

On constate que le foncteur

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{sob}}) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

induit par φ est un isomorphisme, ce qui implique que le morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(\varphi) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X_{\mathrm{sob}})$$

défini par φ est également un isomorphisme. Ceci explique à priori pourquoi X_{sob} doit s'introduire nécessairement dans la question de reconstituer X à partir de $\mathrm{Top}(X)$: comme ce dernier ne dépend que de X_{sob} à isomorphisme près, la question ne pourra

avoir une réponse affirmative que si X est sobre. Nous préciserons plus bas (7.1) comment X_{sob} peut effectivement se reconstituer en termes de Top(X), en interprétant ses **338**
points comme des « points » du topos Top(X) (ou encore comme des foncteurs fibres).

4.2.2. Sur tout espace topologique, il y a lieu d'introduire la relation d'ordre $\leq$ pour laquelle on a

$$x \leq y \Longleftrightarrow \overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}} \text{ i.e. } x \in \overline{\{y\}}$$

(qu'on exprime encore en disant que x est une spécialisation de y, ou que y est une générisation de x). Pour un espace de la forme X_{sob}, ce n'est autre que la relation d'inclusion entre parties fermées irréductibles de X.

Ceci posé, il y a lieu d'introduire, sur l'ensemble des applications d'un espace X dans un autre Y, la relation d'ordre dite de « spécialisation », déduite de celle de Y, savoir

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Avec ces conventions, on a le résultat suivant :

4.2.3. Soient X, Y deux espaces topologiques, avec Y sobre, et soient f et g deux applications continues de X dans Y. Alors il y a au plus un morphisme de Top(f) dans Top(g), et pour qu'il y en ait un, il faut et il suffit que g soit une spécialisation de f. Enfin, tout morphisme de topos Top(X) $\to$ Top(Y) est isomorphe à un morphisme de la forme Top(f), où $f : X \to Y$ est une application continue (uniquement déterminée grâce à la première assertion).

Si on définit la catégorie cat(I) associé à un ensemble ordonné I en déclarant que pour **339**
$i \geq j$, il y a exactement une flèche de i dans j, on peut résumer le résultat précédent en disant qu'on a une équivalence de catégories canonique

$$\text{cat}(\text{Hom}_{(\text{esp})}(X, Y)) \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}\!omtop(\text{Top}(X), \text{Top}(Y))$$

(où le deuxième membre est défini dans 3.2).

On conclut formellement de ces résultats :

Corollaire 4.2.4. a) Soit $f : X \to Y$ une application continue. Alors Top(f) : Top(X) $\to$ Top(Y) est une équivalence de topos si et seulement si $f_{\text{sob}} : X_{\text{sob}} \to Y_{\text{sob}}$ est un homéomorphisme (donc, lorsque X et Y sont sobres, si et seulement si f est un homéomorphisme).

b) Soient X et Y des espaces topologiques. Pour que Top(X) et Top(Y) soient équivalents, il faut et il suffit que X_{sob} et Y_{sob} soient homéomorphes (donc, si X et Y sont sobres, il faut et suffit que X et Y soient homéomorphes).

4.3. Morphismes dans le topos final : objets constants d'un topos, foncteurs sections. Désignons par P (initiale de « point ») le topos final type, i.e. P = (Ens) (2.2). Soit E un topos quelconque, on va voir qu'à isomorphisme unique près, il existe un unique morphisme de topos

$$f : E \to P$$

plus précisément, que la catégorie $\mathcal{H}\!omtop(E, P)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle : pour deux objets de cette catégorie, il existe donc une unique flèche de l'un dans **340**
l'autre, et c'est un isomorphisme. (Cela justifie dans une certaine mesure l'appellation « topos final »). Pour ceci, rappelons (3.2.1) que $\mathcal{H}\!omtop(E, P)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}\!om(P, E)^{\circ}$ formée des foncteurs

$$f^* : P = (\text{Ens}) \longrightarrow E$$

qui commutent aux $\varinjlim$ et sont exacts à gauche. Soit e un ensemble ponctuel, alors tout ensemble X s'écrit canoniquement comme « somme de X copies de e », d'où résulte que la catégorie des foncteurs $g : (\mathrm{Ens}) \to E$ qui commutent aux $\varinjlim$ est équivalente à la catégorie E, en associant à tout g l'objet $g(e)$ de E. On reconstitue g en termes de $T = g(e)$, à isomorphisme unique près, par $g(I) = T \times I$, où on pose $T \times I = \amalg_{i\in I} T_i$, avec $T_i = T$ pour tout $i \in I$. Que le foncteur en I ainsi défini par T commute bien aux $\varinjlim$ résulte du fait qu'il est manifestement adjoint à droite du foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}(T, X)$ de E dans (Ens). Ceci dit, pour que g soit exact à gauche, il est évidemment nécessaire que $g(e) = T$ soit un objet final de E (puisque e est un objet final de (Ens)), et il résulte facilement du fait que dans E « les sommes sont universelles » (1.1.2 b)) que cette condition est aussi suffisante. On trouve donc que la catégorie des foncteurs f^* images inverses est équivalente à la catégorie des objets finaux de E, qui est évidemment elle-même équivalente à la catégorie finale.

D'après ce qui précède, on voit que le choix d'un morphisme (4.3.1) équivaut essentiellement à celui d'un objet final de E, soit e_E. En termes de celui-ci, on a alors des isomorphismes canoniques de foncteurs

$$f^*(I) \simeq e_E \times I = \text{ somme de } I \text{ copies de } e_E \quad \text{pour } I \in \mathrm{ob(Ens)}, \tag{4.3.2}$$

341 et

$$f_*(X) = \mathrm{Hom}(e_E, X) \qquad \text{pour } X \in \mathrm{Ob}\, E. \tag{4.3.3}$$

4.3.4. Les deux foncteurs précédents joueront par la suite un rôle important. Pour un ensemble I, on appelle objet constant de valeur I dans E (ou, lorsque E est réalisé comme une catégorie $C^\sim$ en termes d'un site C, faisceau constant de valeur I sur C), l'objet $f^*(I) = e_E \times I$ de (4.3.2). On le notera aussi souvent I_E, où I_C lorsque E est défini par le site C. Le fait que $I \mapsto I_E$ soit le foncteur image inverse d'un morphisme de topos en précise les propriétés d'exactitude, qui impliquent en particulier que ce foncteur respecte toutes les espèces de structure algébriques habituelles, transformant un groupe en un objet groupe de E etc (3.1.2). Lorsqu'on a par exemple un Groupe G de E, on dira que c'est un Groupe constant (ou, le cas échéant, un faisceau en groupes constant) s'il est isomorphe à un groupe de la forme $G_{\circ E}$, où $G_\circ$ est un groupe ordinaire. Même terminologie pour toute autre espèce de structure « algébrique », au sens précisé (plus ou moins) dans 3.1.2.

4.3.5. On fera attention que le foncteur $I \mapsto I_E$ n'est pas nécessairement pleinement fidèle (ni même fidèle : prendre pour E le « topos vide » (2.2)), donc un objet constant de E ne détermine pas en général à isomorphisme unique près l'ensemble I qui lui donne naissance. On dit que E est 0-acyclique, ou connexe-non vide, si le foncteur $I \mapsto I_E$ est pleinement fidèle. Il revient au même, d'après les propriétés générales des foncteur adjoints, de dire que le morphisme d'adjonction

$$I \longrightarrow f_*(f^*(I)) = f_*(I_E) = \mathrm{Hom}(e_E, I_E)$$

342 est un isomorphisme (de sorte que le foncteur (4.3.3) permet de récupérer la « valeur » d'un objet constant de E). On vérifie facilement qu'il faut et il suffit pour cela que e_E ne soit pas l'objet initial ϕ_E de E, i.e. que E ne soit pas un « topos vide » (ce qui exprime la fidélité du foncteur $I \mapsto I_E$ [6]), et que e_E soit un objet connexe de E, i.e. ne soit pas somme de deux objets de E qui ne soient pas « vides » (i.e. qui ne soient pas des objets initiaux de E).

[6]ou encore le fait que ce foncteur est conservatif (I 6.3).

4.3.6. Le foncteur (4.3.3) est aussi souvent appelé foncteur sections et noté $\varGamma_E$ ou $\varGamma(E, -)$ ou simplement $\varGamma$:

$$\mathrm{Hom}(e_E, X) = \varGamma_E(X) = \varGamma(E, X) = \varGamma(X). \tag{4.3.6.1}$$

C'est un foncteur commutant aux limites projectives quelconques, mais pas exact à droite en général, dont les foncteurs dérivés (sur les objets groupes abéliens) seront étudiés dans le prochain exposé.

4.4. Morphismes du « topos vide ». Soit ϕ_{top} un topos vide, qui correspond donc à une catégorie de faisceaux $\boldsymbol{\varPhi}$ équivalente à la catégorie finale (2.2). Soit E un topos. La catégorie des foncteurs de E dans $\boldsymbol{\varPhi}$ est évidemment équivalente à la catégorie ponctuelle, et tout tel foncteur commute aux limites inductives et projectives (sans aucun mérite d'ailleurs), donc peut être considéré comme un foncteur image inverse f pour un morphisme de topos $\phi_{\mathrm{top}} \to E$. Il en résulte que la catégorie $\mathscr{H}\!om top(\phi_{\mathrm{top}}, E)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle, et en particulier qu'il existe à isomorphisme unique près 343
un et un seul morphisme de topos

$$\phi_{\mathrm{top}} \longrightarrow E. \tag{4.4.1}$$

Ceci justifie dans une certaine mesure la terminologie « topos initial » introduite dans 2.2.

On peut aussi déterminer les morphismes de topos

$$E \longrightarrow \phi_{\mathrm{top}}\ ; \tag{4.4.2}$$

on vérifie aussitôt qu'il existe un tel morphisme si et seulement si l'objet initial de E est aussi un objet final, i.e. si et seulement si E lui-même est un « topos vide », et que dans ce cas la catégorie $\mathscr{H}\!om top(E, \phi_{\mathrm{top}})$ est encore équivalente à la catégorie ponctuelle. L'unique morphisme (4.4.2) (modulo isomorphie) est alors une équivalence de topos.

4.5. Le topos classifiant B_G pour G Groupe variable.

4.5.1. Soient E un topos, et

$$f : G \longrightarrow H$$

un morphisme de Groupes dans E. On en déduit un foncteur « restriction du Groupe d'opérateurs »

$$f^* : B_H \longrightarrow B_G,$$

où les notations sont celles de 2.4. Il est trivial que ce foncteur commute aux limites inductives et aux limites projectives, a fortiori il peut être interprété comme un foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$B_f \text{ ou } f : B_G \longrightarrow B_H.$$

On explicite aisément le foncteur image directe correspondant 344

$$f_* : B_G \longrightarrow B_H$$

par la formule

$$f_*(X) = \mathscr{H}\!om_G(H_s, X),$$

où X est un objet de X avec G opérant à gauche, où H_s est H regardé comme muni des opérations à gauche par G déduites de F, et où $\mathscr{H}\!om_G$ désigne le sous-objet qu'on devine de l'objet $\mathscr{H}\!om$ défini plus bas (10.2) ; on fait opérer H à gauche sur $\mathscr{H}\!om_G(H_s, X)$ grâce aux opérations droites de H sur H_s par translations à droite.

Comme le foncteur image inverse f^* commute aux $\varprojlim$ quelconques (et non seulement aux $\varprojlim$ finies), il est lui-même l'adjoint à droite d'un foncteur

$$f_! : B_G \longrightarrow B_H,$$

de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints comme dans 3.1.3 :

$$f_!, f^*, f_*.$$

On explicite aisément $f_!$ par la formule

$$f_!(X) = H \times^G X,$$

où le deuxième membre désigne le « produit contracté », déduit des opérations de G sur X (à gauche) et sur H (à droite via translations à droite et f), défini comme le quotient de $H \times X$ par G opérant par la formule

$$g \circ (h, x) = (hg^{-1}, gx).$$

Le foncteur $f_!$, étant un adjoint à gauche, commute évidemment aux limites inductives, mais il n'est pas en général exact à gauche (i.e. il ne peut être considéré à son tour
345 comme un foncteur image inverse par un morphisme de topos $B_H \to B_G$). En fait, on vérifie facilement qu'il ne peut être exact à gauche que si $f : G \to H$ est un isomorphisme. De même, le foncteur f_*, qui commute aux limites projectives, n'est pas en général exact à droite, et a fortiori n'admet pas en général d'adjoint à droite. Tout au moins lorsque E est le topos ponctuel i.e. que G et H sont des groupes ordinaires, f_* n'est exact à droite que si f est un isomorphisme.

Lorsqu'on a un deuxième morphisme de groupes $g : H \to K$, on trouve comme dans 4.1.1 une transitivité à isomorphisme canonique près, de sorte que, sous la réserve habituelle, on peut considérer que le topos classifiant B_G dépend fonctoriellement du Groupe G. On laisse au lecteur le soin de généraliser ce comportement fonctoriel pour le cas où on fait varier simultanément G et le topos E.

4.5.2. Le topos $B_{\mathscr{G}}$ pour un pro-groupe variable G. On laisse au lecteur le soin de préciser le caractère covariant du topos $B_{\mathscr{G}}$ (2.7) par rapport à $\mathscr{G}$, en calquant l'exposé que nous en donnons dans 4.5.1. On fera attention cependant que dans le cas d'un morphisme $f : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ de pro-groupes qui ne sont pas essentiellement constants, le morphisme de topos correspondant $B_{\mathscr{G}} \to B_{\mathscr{H}}$ ne permet pas en général la définition d'un foncteur $f_!$ (dont l'adjoint à droite soit le foncteur f^* de restriction du pro-groupe d'opérateurs). Supposant, pour simplifier l'énoncé, que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ soient définis par des groupes profinis G et H, on voit facilement que $f_!$ existe si et seulement si l'image du morphisme envisagé
346 $f : G \to H$ est d'indice fini dans H, et dans ce cas $f_!$ est donné par la même formule que dans 4.5.

4.6. Le topos $\widehat{C}$ pour C catégorie variable.

4.6.1. Soit

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur d'une catégorie $C \in \mathscr{U}$ dans une autre C', d'où un foncteur

$$f^* : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C} \quad , \quad f^*(F) = F \circ f.$$

Il est trivial que ce foncteur commute aux limites projectives et aux limites inductives, a fortiori il peut être considéré comme le foncteur image inverse pour un morphisme de topos

$$\widehat{f} \text{ ou } f : \widehat{C} \to \widehat{C'}.$$

Le foncteur image directe correspondant

$$f_* : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C'}$$

n'est autre que le foncteur également noté f_* dans I 5.1. De plus (comme il était à prévoir du fait que f^* commute également aux $\varprojlim$ quelconques) f^* admet aussi un adjoint à gauche

$$f_! : C \longrightarrow C',$$

(qui était noté aussi $f_!$ dans I 5.1). On obtient donc une suite de trois foncteurs adjoints

$$f_!, f^*, f_*,$$

le premier étant d'ailleurs un prolongement de $f : C \to C'$ aux catégories de préfaisceaux (pour le plongement habituel de C, C' dans les catégories $\widehat{C}, \widehat{C'}$). On fera attention que le foncteur $f_!$ n'est pas en général exact à gauche, ni f_* exact à droite, ce qui lève donc toute ambiguïté sur la direction de la variance du topos $\widehat{C}$ associé à la catégorie va- **347**
riable C : ce topos est un foncteur covariant en C, sous la réserve habituelle provenant des isomorphismes de transitivité (cf. 4.1.1). Lorsque l'ensemble des objets de C et de C' est réduit à un élément, de sorte que C et C' s'identifient à des monoïdes G, G', les topos correspondants sont les topos classifiants B_{G° et $B_{G'^\circ}$, et on retrouve la variance de ceux-ci pour G variable rencontrée déjà à d'autres points de vue dans 4.1.2 et 4.5 (où la restriction à des groupes au lieu de monoïdes n'avait rien d'essentiel).

4.6.2. On peut préciser la dépendance 2-fonctorielle du topos $\widehat{C}$ par rapport à C, en introduisant pour deux catégories $C, C' \in \mathscr{U}$ un foncteur canonique

$$\mathscr{H}om(C, C') \longrightarrow \mathscr{H}omtop(\widehat{C}, \widehat{C'}). \tag{4.6.2.1}$$

Il reste à définir ce foncteur sur les flèches, et pour ceci on note que $f \mapsto f^*$ permet d'identifier (à équivalence de catégories près) le deuxième membre à une sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om(\widehat{C'}, \widehat{C})^\circ$ (3.2.1). Or si $f, g : C \to C'$ sont deux foncteurs, tout morphisme $u : f \to g$ de foncteurs définit un morphisme $f \circ g \to F \circ f$ de foncteurs en $F \in \operatorname{ob} \widehat{C'}$ (F étant un contrafoncteur), qui est donc un morphisme $g^* \to f^*$ et définit par suite un morphisme $\widehat{f} \to \widehat{g}$ comme annoncé.

Lorsque C est la catégorie ponctuelle, $\widehat{C}$ est le topos ponctuel (2.2) noté P, et (4.6.2.1) s'interprète comme un foncteur naturel

$$C' \longrightarrow \mathscr{H}omtop(P, \widehat{C'}) \overset{\text{dfn}}{=} \mathscr{P}oints(\widehat{C'}) \tag{4.6.2.2}$$

de C' dans la « catégorie des points » de $\widehat{C'}$, qui sera étudiée dans 6. Ce foncteur n'est **348**
pas nécessairement une équivalence de catégories (7.3.3), a fortiori (4.6.2.1) n'est pas nécessairement une équivalence de catégories.

Par contre, le foncteur (4.6.2.1) est toujours pleinement fidèle. Pour voir ceci, notons que si $f, g : E \to E'$ sont deux morphismes de topos tels que $f_!$ et $g_!$ soient définis (3.1.3), il résulte de la théorie des foncteurs adjoints qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\operatorname{Hom}(f_!, g_!) \simeq \operatorname{Hom}(g^*, f^*) \simeq \operatorname{Hom}(f_*, g_*) \overset{\text{dfn}}{=} \operatorname{Hom}(f, g).$$

Appliquant ceci à des foncteurs de la forme $\widehat{f}, \widehat{g}$ associés à $f, g : C \to C'$, on trouve le résultat annoncé, compte tenu que l'application naturelle de prolongement $\operatorname{Hom}(f, g) \to \operatorname{Hom}(f_!, g_!)$ est bijective (I 7.8).

4.6.3. On peut se demander quand le foncteur (4.6.2.1) est une équivalence de catégories, i.e. quand il est essentiellement surjectif, ce qui est un cas particulier de la question de déterminer tous les morphismes de topos $\widehat{C} \to \widehat{C}'$. Plus généralement, si C est une catégorie $\in \mathscr{U}$ et E un topos, on peut se proposer de déterminer les morphismes de topos

$$f : \widehat{C} \longrightarrow E.$$

La catégorie de ces morphismes est équivalente à la catégorie opposée de celle des foncteurs $f^* : E \to \widehat{C}$ commutant aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies. Interprétant les foncteurs $E \to \widehat{C}$ comme des foncteurs $E \times C^\circ \to (\mathscr{U}\text{-Ens}) = (\text{Ens})$, ou encore comme des foncteurs $F : C^\circ \to \mathscr{H}om(E, (\text{Ens}))$, la propriété d'exactitude envisagée s'exprime par la condition que pour tout objet X de C, le foncteur $F(X) : E \to (\text{Ens})$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites pro-
349 jectives finies, (ou, comme nous dirons dans 6, $F(X)$ est un « foncteur fibre » sur E). Il revient au même de dire que $F(X)$ est le foncteur image inverse pour un morphisme de topos $P \to E$, de sorte qu'on trouve finalement une équivalence de catégories canonique

$$\mathscr{H}omtop(\widehat{C}, E) \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}om(C, \mathscr{P}oints(E)), \tag{4.6.3.1}$$

où on désigne pour abréger par

$$\mathscr{P}oints(E) = \mathscr{H}omtop(P, E)$$

la catégorie des points du topos E.

Lorsque E est de la forme $\widehat{C}'$, on voit aussitôt à partir des définitions que la composé de (4.6.2.1) et de l'équivalence précédente (4.6.3.1) est le foncteur

$$\mathscr{H}om(C, C') \longrightarrow \mathscr{H}om(C, \mathscr{P}oints(\widehat{C}')) \tag{4.6.3.2}$$

défini par $F \mapsto i \circ F$, où $i : C' \to \mathscr{P}oints(\widehat{C}')$ est le plongement canonique (4.6.2.2). Il s'ensuit aussitôt que pour que (4.6.2.1) soit une équivalence, il faut et il suffit que C soit vide ou que (4.6.2.2) soit essentiellement surjectif (donc une équivalence de catégories). Cette dernière condition sur C' est satisfaite dans certains cas intéressants, et notamment lorsque C' est la catégorie à un seul objet définie par un groupe G (7.2.5).

Remarque 4.6.4. [7] Le fait d'avoir associé un topos $\widehat{C}$ à une catégorie arbitraire C suggère qu'une catégorie C admet des invariants de nature topologique (groupes de cohomologie, d'homotopie etc.), tout comme un topos. Les groupes de cohomologie de $\widehat{C}$ à coefficients dans un objet groupe abélien F (au sens général étudié dans V) ne sont autres
350 que les valeurs des foncteurs dérivés $\varprojlim^{(n)}$ du foncteur $\varprojlim$, déjà familiers aux topologues. J. L. Verdier et (indépendamment) D. G. Quillen ont vérifié que lorsqu'on se borne aux coefficients constants, ou plus généralement localement constants, ces groupes de cohomologie s'identifient aux groupes de cohomologie de l'ensemble semi-simplicial Nerf(C) canoniquement associé à C [5, $n°$ 212, prop. 4.1] et que de plus, à isomorphie près dans la « catégorie homotopique » de [2], tout ensemble semi-simplicial peut être obtenu à l'aide d'une catégorie C. Moyennant une notion convenable de type d'homotopie pour des topos, que nous ne précisons pas ici, on peut dire que les types d'homotopie semi-simpliciaux des topologues ne sont autres que les types d'homotopie des topos de la forme spéciale $\widehat{C}$, plus généralement des topos E où tout objet admette un recouvrement qui raffine tous les autres (2.6) [7]. En l'absence de cette condition sur E, on peut tout au

[7] N.D.E. : Pour un point de vue récent de la notion de type d'homotopie de topos, voir [15] x 7.1.6.

[7] et, plus généralement encore, des topos qui sont « localement ∞ - connexes » en un sens évident que nous laissons au lecteur le soin de préciser.

mieux exprimer son type d'homotopie par un système projectif convenable d'ensembles semi-simpliciaux [1].

4.7. Le topos $C^{\sim}$ pour un site C variable (foncteurs cocontinus). Soit

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur cocontinu (III 2.1) entre sites $\in \mathscr{U}$, i.e. un foncteur tel que le foncteur $\widehat{f}_*$ de $\widehat{C}$ dans $\widehat{C}'$ (4.6.1) applique $C^{\sim}$ dans $C'^{\sim}$, c'est-à-dire induise un foncteur

$$\widetilde{f}_* : \widetilde{C} \longrightarrow C'^{\sim} \tag{4.7.1}$$

rendant commutatif le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, "i_{ast}"'] & C'^{\sim} \arrow[d, "i'_*"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "\widehat{f}_*"] & \widehat{C}' \end{tikzcd} \quad , \tag{4.7.2}$$

où i_*, i'_* sont les foncteurs d'inclusion. On a vu alors (III 2.3) que le foncteur $\widetilde{f}_*$ admet **351**
un adjoint à gauche $\widetilde{f}^*$, et que ce dernier est exact à gauche. En d'autres termes, $\widetilde{f}_*$ est le foncteur image directe associé à un morphisme de topos

$$\widetilde{f} \text{ ou } f : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim},$$

le foncteur image inverse correspondant étant bien entendu $\widetilde{f}^*$. Prenant les adjoints à gauche des foncteurs en jeu, le diagramme commutatif (4.7.2) donne d'ailleurs un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{tikzcd} C^{\sim} & C'^{\sim} \arrow[l, "\widetilde{f}^*"'] \\ \widehat{C} \arrow[u, "\underline{a}"] & \widehat{C}' \arrow[l, "\widehat{f}^*"'] \arrow[u, "\underline{a}'"'] \end{tikzcd} \quad , \tag{4.7.3}$$

où $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ sont les foncteurs « faisceaux associés », diagramme qui redonne aussitôt la formule (III 2.3)

$$\widetilde{f}^* = \underline{a}\widehat{f}^* i'.$$

La propriété de transitivité pour les morphismes de topos $\widehat{f} : \widehat{C} \to \widehat{C}'$ implique la même propriété pour les morphismes de topos $\widetilde{f} : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ associés à des foncteurs cocontinus, de sorte qu'on peut dire que le topos $C^{\sim}$ varie fonctoriellement en C de façon covariante, quand on prend comme « morphismes » de sites les foncteurs cocontinus.

Dans tous les cas rencontrés jusqu'à présent, le foncteur cocontinu f utilisé est éga- **352**
lement continu, c'est-à-dire (III 1.1) se « prolonge » en un foncteur

$$\widetilde{f}_! : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$$

commutant aux limites inductives, et qui est adjoint à gauche de $\widetilde{f}^*$, de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$\widetilde{f}_!, \widetilde{f}^*, \widetilde{f}_*.$$

On fera attention que le foncteur $\widetilde{f}_!$ n'est pas en général exact à gauche, ni $\widetilde{f}_*$ exact à droite, ce qui lève toute ambiguïté sur la direction de la variance du topos $C^{\sim}$, pour C

variable par des foncteurs dont on suppose seulement qu'ils sont cocontinus, ou même continus et cocontinus.

Remarque 4.7.4. Étant donné un morphisme de topos

$$F : E \longrightarrow E',$$

pour qu'il existe un foncteur $F_!$ adjoint à gauche de F^*, il faut et il suffit qu'on puisse « réaliser » (à équivalence près) E et E' sous la forme $C^{\sim}$ et $C'^{\sim}$, pour deux sites C, $C' \in \mathscr{U}$, et qu'on puisse trouver un foncteur continu et cocontinu $f : C \to C'$ tel que F s'identifie à $\widetilde{f}$. C'est évidemment suffisant, et pour la nécessité, il suffit de prendre pour C et C' des petites sous-catégories pleines génératrices de E et E' respectivement, telles que

$$F_!(\operatorname{ob} C) \subset \operatorname{ob} C',$$

munies des topologies induites par celles de E et de E', et de prendre pour f le foncteur induit par $F_!$ (cf. 1.2.1). Rappelons (1.8) que l'existence de $F_!$ signifie aussi que F^*
353 commute aux limites projectives, ou, ce qui revient ici au même puisque ce foncteur est exact à gauche, qu'il commute aux produits.

4.7.5. Si on se demande quels sont les morphismes de topos $F : E \to E'$ qui peuvent se réaliser par un foncteur cocontinu (pas nécessairement continu) de sites, on voit de même que la réponse est la suivante : l'ensemble des objets X de E tels que le foncteur $X' \mapsto \operatorname{Hom}(X, F^*(X'))$ de E' dans (Ens) commute aux limites projectives (ou, ce qui revient au même, aux produits) doit être une famille génératrice de E.[8]

4.8. Le morphisme de topos $\widetilde{C} \to \widehat{C}$ pour un site C. Soit C un petit site, auquel sont donc associés les deux topos $C^{\sim}$ et $\widehat{C}$ (le deuxième ne dépendant pas de la topologie mise sur C). On a défini dans II 3.4 le foncteur « faisceau associé »

$$\underline{a} : \widehat{C} \longrightarrow C^{\sim},$$

et établi qu'il est exact à gauche et commute aux limites inductives. C'est donc le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$p : \widetilde{C} \longrightarrow \widehat{C},\ p^* = \underline{a},$$

le foncteur image directe correspondant étant l'inclusion canonique

$$i = p_* : C^{\sim} \longrightarrow \widehat{C}.$$

Il est bien connu que ce dernier foncteur n'est pas en général exact à droite (ces foncteur dérivés sur les objets abéliens donnent naissance aux préfaisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^n(F)$ de V 2), et que $\underline{a}$ ne commute pas en général aux $\varprojlim$ quelconques, ce qui lève toute ambiguïté sur la direction du morphisme « naturel » de topos entre $\widehat{C}$ et $C^{\sim}$.

Lorsqu'on a un foncteur cocontinu

$$f : C \longrightarrow C'$$

354 de sites, on en déduit un diagramme de morphismes de topos

[8]N.D.E. : Cet énoncé ne paraît pas correct : la condition exprimée est équivalente au fait que F^* commute aux produits quelconques, ou encore que F^* possède un adjoint à gauche $F_!$. Pour tout site C, le foncteur identité $F = id : C \longrightarrow C$ est cocontinu lorsque l'on munit le membre de droite de la topologie triviale. Le foncteur $F^* : \widehat{C} \longrightarrow \widetilde{C}$ est alors le foncteur faisceau associé, et ne commute pas en général avec les produits quelconques.

$$\begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p_*"'] & C'^{\sim} \arrow[d, "p'_*"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{C'} \end{tikzcd}$$

qui est commutatif à isomorphisme canonique près : c'est en effet ce qu'exprime la commutativité du diagramme de foncteurs (4.7.2). On peut donc dire que le morphisme de topos $p : C^{\sim} \to \widehat{C}$ est fonctoriel en C, quand on varie C par des foncteurs cocontinus entre sites.

4.9. Effet d'un foncteur continu de sites. Morphismes de sites.

4.9.1. Si

$$f : C \longrightarrow C'$$

est un foncteur continu de C dans C'. i.e. tel que le foncteur $\widehat{f}^* : \widehat{C'} \to \widehat{C}$ applique $C'^{\sim}$ dans $C^{\sim}$, donc induise un foncteur

$$f_s : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim},$$

on a vu (III 1.2) que ce dernier admet un adjoint à gauche

$$f^s : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim},$$

qui « prolonge » d'ailleurs f dans un sens évident. On fera attention qu'en général f^s n'est pas exact à gauche (même si f est de plus cocontinu), ni f_s ne commute aux limites inductives, de sorte que la donnée de f ne permet pas, sans autre hypothèse, de décrire un morphisme de topos dans un sens ou dans l'autre entre $C^{\sim}$ et $C'^{\sim}$. Le cas où f est cocontinu, i.e. où f_s commute aux limites inductives et peut donc être regardé comme 355
un foncteur image inverse pour un morphisme de topos $\widetilde{f} : C^{\sim} \to C'^{\sim}$, a été examiné dans 4.7. Nous allons examiner le cas où le foncteur f^s est exact à gauche, donc peut être considéré comme un foncteur image inverse pour un morphisme de topos en sens inverse :

$$\mathrm{Top}(f) = g : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}. \tag{4.9.1.1}$$

On fera attention qu'on a pris garde de ne pas noter ce morphisme par la lettre $\widetilde{f}$ ou f, pour éviter des confusions avec la situation de 4.7, suivant en cela les recommandations générales de 3.1.3. On dit parfois que le foncteur $f : C \to C'$ est un morphisme de sites de C' dans C (attention, pas de C dans C') s'il est continu et si le foncteur f^s est exact à gauche, en d'autres termes s'il existe un morphisme de topos (4.9.1.1) tel que, le foncteur image inverse correspondant

$$g^* : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$$

prolonge le foncteur f, i.e. rende commutatif à isomorphisme près le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon"'] & C' \arrow[d, "\epsilon'"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "g^*"] & C'^{\sim} \end{tikzcd} ,$$

où ϵ, ϵ' sont les foncteurs canoniques de II 4.4.0.

4.9.2. Pratiquement, on reconnaît qu'un foncteur continu $f : C \to C'$ est un morphisme de sites de C' dans C, par le fait que dans C les limites projectives finies
356 sont représentables, et que f y commute (III 1.3 5)). Moyennant la condition indiquée sur C (presque toujours vérifiée en pratique), et supposant de plus que la topologie de C' est moins fine que la topologie canonique (presque toujours vérifiée également), la condition suffisante précédente (f exact à gauche) pour que f soit un morphisme de sites de C' dans C est d'ailleurs aussi nécessaire.

4.9.3. Dans l'esprit de ce qui précède, si C et C' sont deux $\mathscr{U}$-sites, il y a lieu de définir la catégorie des morphismes de site $\mathscr{M}or site(C', C)$ de C dans C' comme la sous-catégorie pleine de la catégorie opposée $\mathscr{H}om(C, C')^{\circ}$ de la catégorie des foncteurs de C dans C', formée des foncteurs qui veulent bien être des morphismes de sites (de C' dans C). De cette façon, on obtient un foncteur canonique (défini à isomorphisme unique près)

$$\mathscr{M}or site(C', C) \longrightarrow \mathscr{H}omtop(C'^{\sim}, C^{\sim}).$$

Proposition 4.9.4. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, C un $\mathscr{U}$-site, alors le foncteur $f \mapsto f^*|C = f^* \circ \epsilon_C$, associant à tout morphisme de topos $f : E \to C^{\sim}$ la « restriction » à C du foncteur image inverse associé $f^* : C^{\sim} \to E$, induit une équivalence de catégories

$$\mathscr{H}omtop(E, C^{\sim}) \xrightarrow{\approx} \mathscr{M}or site(E, C)(\hookrightarrow \mathscr{H}om(C, E)^{\circ}).$$

Lorsque dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables, le foncteur pleinement fidèle correspondant

$$\mathscr{H}omtop(E, C^{\sim}) \longrightarrow \mathscr{H}om(C, E)^{\circ}$$

a comme image essentielle l'ensemble des foncteurs $g : C \to E$ qui sont exacts à gauche
357 et continus, ou encore qui sont exacts à gauche et transforment famille couvrante en famille couvrante.

La dernière assertion résulte de la première grâce à 4.9.2. D'autre part, on déduit de III 1.2 iv) et de IV 1.2 iii) que le foncteur $G \to G \circ \epsilon$ induit une équivalence de la catégorie des foncteurs continus de $C^{\sim}$ dans E, et la catégorie des foncteurs continus de C dans E, un foncteur quasi-inverse étant obtenu par $g \to g^s$ dans les notations de loc. cit. D'autre part, par définition même, g est un morphisme de sites si et seulement si g^s est le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos $E \to C^{\sim}$, d'où la conclusion grâce à 3.2.1, le « ou encore » provenant de III 1.6.

On retiendra surtout de 4.9.4 que (lorsque dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables) « il revient au même » de se donner un morphisme de topos $f : E \to C^{\sim}$, ou un foncteur $g : C \to E$ qui est exact à gauche et transforme familles couvrantes en familles couvrantes.

4.9.5. Utilisant les développements 4.9.1 et 4.9.3, on voit comme d'habitude que pour un $\mathscr{U}$-site C variable, via la notion de morphisme de sites et de morphisme de morphismes de sites qu'on vient d'expliciter, le topos $C^{\sim}$ dépend fonctoriellement (ou plus exactement, 2-fonctoriellement) du site C. On notera que grâce à la terminologie introduite, $C^{\sim}$ dépend de façon covariante du site C.

4.9.6. Il est immédiat que (contrairement à ce qui se passe pour la notion de foncteur cocontinu, cf. 4.7 4)) tout morphisme de topos $F : E \to E'$ peut se réaliser à l'aide d'un morphisme de sites $f : C \to C'$ (i.e. d'un foncteur continu $f : C' \to C$ tel que...) :
358 il suffit de choisir dans E et E' des petites sous-catégories pleines génératrices C et C' respectivement, munies des topologies induites par celles de E et de E', telles que l'on ait

$$F^*(\operatorname{ob} C') \subset \operatorname{ob} C,$$

et de prendre pour f le foncteur induit par F^*. C'est ce qui explique que la plupart des morphismes de topos qu'on rencontre en pratique sont effectivement décrits à l'aide de morphismes de sites (plutôt qu'à l'aide de foncteurs cocontinus comme en 4.7).

4.10. Relations entre le petit et le gros topos associés à un espace topologique X. On reprend les notations de 2.5. En particulier, $\mathscr{V}$ est un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. Nous nous écartons de la convention de 2.1, en désignant par $\mathrm{Top}(X)$ le topos des $\mathscr{V}$-faisceaux (et non pas des $\mathscr{U}$-faisceaux) sur X. Ainsi, nous raisonnerons avec des $\mathscr{V}$-topos et non des $\mathscr{U}$-topos. (NB il serait possible de garder les $\mathscr{U}$-topos, en adoptant la convention appropriée pour la définition $\mathrm{TOP}(X)$, de sorte que celui-ci soit un $\mathscr{U}$-topos, cf. 2.5). Ceci posé, nous allons définir DEUX morphismes de topos

(4.10.1)
$$\begin{cases} f : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X) \\ g : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X) \quad , \quad gf \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Top}(X)} , \end{cases}$$

donnant lieu à une suite de trois foncteurs adjoints

(4.10.1.1)
$$g^* = f_! \quad , \quad g_* = f^* \quad , \quad g^! = f_*,$$

les notations étant celles de 3.1.3. Nous allons définir successivement les deux premiers foncteurs de cette suite, le troisième étant défini alors comme adjoint à droite du deuxième. **359**

4.10.2. Le foncteur

$$g_* = f^* : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

est défini simplement comme le foncteur restriction de $(\mathrm{Esp})_{/X}$ au site $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X, qui transforme bien faisceaux en faisceaux, comme il résulte immédiatement de la définition. Désignant par des lettres soulignées des faisceaux sur le gros site de X, on désigne, pour un tel faisceau $\underline{F}$, par $\underline{F}_X$ sa restriction au site $\mathrm{Ouv}(X)$, d'où un foncteur

(4.10.2.1)
$$\mathrm{Restr} : \underline{F} \longmapsto \underline{F}_X : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X).$$

Il est évident que ce foncteur commute aux $\mathscr{V}$-limites projectives, puis-que celles-ci se calculent argument par argument (on pourrait aussi invoquer l'existence de l'adjoint à gauche, construit dans 4.10.4 ci-dessous.) Je dis qu'il commute également aux $\mathscr{V}$-limites inductives. Pour s'en convaincre, on va donner une interprétation fort commode des « gros » faisceaux sur X, i.e. des objets de $\mathrm{TOP}(X)$, en termes de faisceaux ordinaires (NB il s'agit de $\mathscr{V}$-faisceaux) sur les espaces topologiques X' au-dessus de X.

4.10.3. Pour un gros faisceau $\underline{F}$ sur X, et pour tout espace X' sur X (sous-entendu : $X' \in \mathscr{U}$), on définit de façon évidente, comme dans 4.10.2, le « petit » faisceau $\underline{F}_{X'}$, restriction de $\underline{F}$ à X'. Si

$$u : X'' \longrightarrow X'$$

est un morphisme de $(\mathrm{Esp})_{/X}$, on définit alors de façon évidente un morphisme $u_*(\underline{F}_{X''}) \to$ **360**
$\underline{F}_{X'}$, ou ce qui revient au même, un « morphisme de transition »

(4.10.3.1)
$$\varphi_u : u^*(\underline{F}_{X'}) \longrightarrow \underline{F}_{X''}.$$

Ces morphismes, pour u variable, satisfont à une condition de transitivité évidente pour un composé

$$X''' \xrightarrow{u} X'' \xrightarrow{v} X'$$

de morphismes dans $(\mathrm{Esp})_{/X}$, qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. On obtient de cette façon un foncteur naturel, qui va de la catégorie $\mathrm{TOP}(X)$ des gros faisceaux sur X, dans la catégorie des systèmes

$$(\underline{F}_{X'}) \quad (X' \in \mathrm{ob}(\mathrm{Esp})_{/X}), (\varphi_u) \quad (u \in Fl(\mathrm{Esp})_{/X}),$$

satisfaisant à la condition de transitivité envisagée, et tels de plus que pour tout morphisme $u : X'' \to X'$ qui est une immersion ouverte (ou, plus généralement, un étalement), le morphisme de transition φ_u soit un isomorphisme. Comme les foncteurs $u^* : \mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(X'')$ utilisés pour la description des φ_u commutent aux $\mathscr{V}$-limites inductives, il en résulte aussitôt que dans la description précédente des objets de $\mathrm{TOP}(X)$ en termes de « petits » faisceaux $F_{X'}$, les $\mathscr{V}$-limites inductives se calculent argument par argument, i.e. les foncteurs de la forme $\underline{F} \to \underline{F}_{X'}$ commutent aux $\mathscr{V}$-limites inductives.

En particulier, il en est ainsi du foncteur $\underline{F} \mapsto \underline{F}_X$ envisagé dans 4.10.2. Il admet donc bien un adjoint à droite (1.5). Il reste à en construire un adjoint à gauche (dont l'existence
361 résulte d'ailleurs a priori de 1.8), et de vérifier que ce dernier est exact à gauche. Cela achèvera la définition des morphismes de topos annoncés (4.10.1) en termes des foncteurs (4.10.1.1)

4.10.4. Le foncteur

$$g^* = f_! : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X)$$

s'obtient en associant à tout petit faisceau F sur X le système de ses images inverses $(F_{X'})$, $X' \in \mathrm{ob}(\mathrm{Esp})_{/X}$, par les morphismes structuraux $X' \to X$, le morphisme de transition φ_u pour un $u : X'' \to X'$ étant l'isomorphisme de transitivité pour les images inverses de faisceaux (4.1.1). On voit aussitôt qu'on obtient ainsi un foncteur

$$\mathrm{Prol} : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X),$$

pleinement fidèle, dont l'image essentielle est formée des gros faisceaux $\mathscr{F}$ sur X pour lesquels tous les morphismes de transitivité φ_u de (4.10.3.1) sont des isomorphismes. Nous laissons au lecteur le soin de définir un isomorphisme d'adjonction entre ce foncteur de prolongement canonique et le foncteur restriction de 4.10.2, prouvant que ce dernier est adjoint à droite du premier. C'est immédiat en termes de la description 4.10.3 de la catégorie $\mathrm{TOP}(X)$.

Remarques 4.10.5. a) La construction 4.10.4 montre en même temps que $g^* = f_!$ est pleinement fidèle (ou, ce qui revient au même, que $g_* = f^*$ est un foncteur de passage à une catégorie de fractions, ou enfin que $g^! = f_*$ est pleinement fidèle). Les gros faisceaux sur X qui appartiennent à l'image essentielle du foncteur $g^* = f_! = \mathrm{Prol}$ méritent le nom de gros faisceaux étales sur X, puisqu'ils forment une catégorie équivalente à celle des faisceaux ordinaires sur X, ou en-
362 core à celle des espaces étalés sur X. On voit d'ailleurs facilement que si X' est un espace topologique au-dessus de X, alors le gros faisceau sur X qu'il représente est étale au sens précédent si et seulement si X' et un espace étalé sur X.

b) On peut encore exprimer la pleine fidélité de f_* en écrivant que la morphisme d'adjonction $f^*f_* \to \mathrm{id}_{\mathrm{Top}(X)}$ est un isomorphisme, i.e. que $g_*f_* \simeq \mathrm{id}$, i.e. que $gf \simeq \mathrm{id}$. Ainsi g fait de $\mathrm{TOP}(X)$ un topos sur $\mathrm{Top}(X)$, admettant une « section » f sur $\mathrm{Top}(X)$.

c) Le fait que le foncteur $g^* = f_!$ soit pleinement fidèle, exact et qu'il commute aux $\mathscr{V}$-limites inductives justifie partiellement le point de vue fort commode (dû à J. Giraud) suivant lequel il est inoffensif, dans pratiquement toutes les questions de théorie des faisceaux sur X, de remplacer les faisceaux habituels ou « petits » faisceaux par les « gros » faisceaux associés. Il en est en particulier ainsi des questions cohomologiques, puisque g_* étant exact, les foncteurs $R^i g_*$ (V 5) sont nuls pour $i > 0$, donc (V 5.4) que pour tout gros faisceau $\mathscr{F}$ sur X, on a des isomorphismes canoniques

$$H^i(\mathrm{TOP}(X), \mathscr{F}) \simeq H^i(\mathrm{Top}(X), \mathscr{F}_X) = H^i(X, F).$$

Appliquant ceci à un faisceau de la forme $\mathrm{Prol}(F)$, où F est un petit faisceau sur X, on en conclut (puisque $\mathrm{Prol}(F)_X \simeq F$ canoniquement) un isomorphisme canonique

$$H^i(X, F) = H^i(\mathrm{TOP}(X), \mathrm{Prol}(F)).$$

Ainsi, les invariants cohomologiques de X, calculés via le petit ou le gros topos de X, sont essentiellement identiques. Le même résultat est d'ailleurs valable en cohomologie non commutative.

Exercice 4.10.6. Soient S un $\mathscr{U}$-site dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, $\underline{M}$ une partie de $Fl\ S$ satisfaisant les conditions suivantes : **363**

a) Les morphismes de $\mathscr{M}$ sont quarrables (I 10.7), et $\underline{M}$ est stable par changement de base.
b) $\underline{M}$ contient les flèches identiques et est stable par composition.
c) Une flèche $u : X \to Y$ telle qu'il existe une famille couvrante $Y_i \to Y$, avec les $X \times_Y Y_i \to Y_i$ dans $\underline{M}$, est elle-même élément de $\underline{M}$.
d) Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, S$, toute famille couvrante de X est raffinée par une famille couvrante $(f_i : X_i \to X)$, avec les $f_i \in \underline{M}$.

Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, S$, considérons le site $S(X)$ (« petit site de X ») dont la catégorie sous-jacente est la sous-catégorie pleine de $S_{/X}$ formée des objets dont le morphisme structural est dans $\underline{M}$, munie de la topologie induite (III 3.1) par celle de S.

1°) Pour toute flèche $u : X \to Y$ de S, montrer que le changement de base par u de $S(Y)$ dans $S(X)$ est un foncteur continu, d'où un foncteur commutant aux limites inductives (III 1.2 iv))

$$S(u)^x : S(Y)^\sim \longrightarrow S(X)^\sim.$$

2°) Définir une équivalence entre le topos $S^\sim$ et la catégorie des systèmes

$$(F_X) \quad (X \in \mathrm{ob}\, S) \quad , \quad (\varphi_u) \quad (u \in Fl S)$$

formés d'objets $F_X \in \mathrm{ob}\, S(X)^\sim$, et pour toute flèche $u : X \to Y$ dans S, d'un morphismes $\varphi_u : S(u)^x(F_Y) \to F_X$, ces systèmes étant soumis à une condition de transitivité pour un composé $v \circ u$ de flèches de S, et à la condition que $u \in \underline{M}$ implique que φ_u soit un isomorphisme. **364**

3°) Définir des foncteurs « restrictions » et « prolongement »

$$\mathrm{Res}_X : (S_{/X})^\sim \longrightarrow S(X)^\sim, \mathrm{Prol}_X : S(X)^\sim \longrightarrow (S_{/X})^\sim$$

Montrer que Res_X commute aux petites limites inductives et projectives et que Prol_X est pleinement fidèle, son image essentielle étant formée des faisceaux F tels que φ_u soit un isomorphisme pour toute flèche u de $S_{/X}$.

4°) Définir un morphisme d'adjonction faisant de Res_X l'adjoint à droite de Prol_X. En conclure qu'il existe un morphisme de topos

$$f : S(X)^\sim \to (S_{/X})^\sim$$

faisant de $S(X)^\sim$ un sous-topos de $(S_{/X})^\sim$ et tel que

$$f_! = \mathrm{Prol}_X$$
$$f^x = \mathrm{Res}_X\ .$$

Montrer que Prol_X transforme faisceaux abéliens en faisceaux abéliens.

5°) Montrer que si $S(X)$ admet des produits fibrés, Prol_X est exact. En déduire qu'il existe alors un morphisme de topos $g\,:\,(S_{/X})^\sim \to S(X)^\sim$ qui soit une rétraction à gauche de f, i.e. tel que

$$g^x = \mathrm{Prol}_X$$
$$g_x = \mathrm{Res}_X\ .$$

365 (Pour un exemple où $S(X)$ n'admet pas de produits fibrés, prendre pour S la catégorie des schémas munie de la topologie étale, pour M les morphismes lisses, pour X un schéma noethérien de dimension > 0).

6°) Montrer que pour tout faisceau abélien F de $(S_{/X})^\sim$ on a un isomorphisme

$$H^q(X,F) \simeq H^q(X,\mathrm{Res}_X\,F) \qquad \forall q.$$

Montrer, en utilisant par exemple les hyperrecouvrements, que pour tout faisceau abélien G de $S(X)^\sim$ on a un isomorphisme

$$H^q(X,G) \simeq H^q(X,\mathrm{Prol}_X\,G) \qquad \forall q.$$

7°) Acheter une médaille en chocolat pour le rédacteur.

5. Topos induit

5.1. Soient E un topos, X un objet de E. Alors la catégorie $E_{/X}$ des objets de E au-dessous de X est un topos, comme il résulte par exemple immédiatement du critère de Giraud 1.2 ii). On peut aussi, grâce à 1.2.1 réaliser E comme une catégorie de faisceaux
366 $C^\sim$, où C est une sous-catégorie génératrice de E qu'on peut choisir telle que $X \in \mathrm{ob}\,C$; alors on sait que $E_{/X} = C^\sim_{/X}$ est équivalente à $(C_{/X})^\sim$ (III 5.4), donc c'est un topos.

On appelle le topos $E_{/X}$ le topos induit sur l'objet X de E.

5.2. On va définir un morphisme de topos canonique

$$j_X\,:\,E_{/X} \longrightarrow E, \tag{5.2.1}$$

qui est appelé morphisme d'inclusion du topos induit $E_{/X}$ dans le topos ambiant E, ou mieux (cf. 5.7), morphisme de localisation de E en X. Ce morphisme correspond à une suite de trois foncteurs adjoints (cf. 3.1.3)

$$j_{X!}\quad,\quad j_X^*\quad,\quad j_{X*}, \tag{5.2.2}$$

qui peuvent s'expliciter de la façon suivante :

a) Le foncteur

$$j_{X!}\,:\,E_{/X} \longrightarrow E$$

est le foncteur « oubli de la flèche structurale » de $E_{/X}$ dans E.

b) Le foncteur

$$j_X^*\,:\,E \longrightarrow E_{/X}$$

est défini par

$$j_X^*(Z) = (X \times Z, \mathrm{pr}_1),$$

où $\mathrm{pr}_1 : X \times Z \to X$ est la première projection. On peut aussi l'interpréter comme le foncteur changement de base relativement au morphisme

$$X \longrightarrow e_E,$$

où e_E est l'objet final de E. Il est trivial, par définition du foncteur changement de base, que j_X^* est bien adjoint à droite de $j_{X!}$. Il commute en particulier aux limites projectives. Il commute également aux limites inductives, en vertu des 367
propriétés d'exactitude spéciales des topos (II 4).

c) De ce dernier fait résulte (1.6) que j_X^* admet un adjoint à droite

$$j_{X^*} : E_{/X} \longrightarrow E.$$

Pour un objet X' au-dessus de X, l'objet $j_{X^*}(X')$ est aussi parfois noté par l'un des symboles $\prod_{X/e_E}(X'/X)$, ou $\mathscr{H}om_{X/e_E}(X, X')$, ou $\mathrm{Res}_{X/e_E}(X'/X)$ (« restriction de Weil »), dont l'un ou l'autre est sans doute déjà familier au savant lecteur de notre modeste ouvrage.

5.3. On fera attention que le foncteur $j_{X!}$ commute aux produits fibrés, et transforme monomorphismes en monomorphismes, mais il n'est pas en général exact à gauche pour autant. Il ne l'est que si X est un objet final de $\mathscr{E}$ (puisque $X = j_{X!}(X, \mathrm{id}_X)$, et (X, id_X) est un objet final de $E_{/X}$), c'est-à-dire si et seulement si j_X est en fait une équivalence de topos (donc si tous les foncteurs (5.2.2) sont des équivalences). [8]

De même, le foncteur j_{X^*} n'est pas en général exact à droite, et ne transforme pas nécessairement épimorphismes en épimorphismes.

On conclut de ces observations que la direction du morphisme de topos reliant $E_{/X}$ à E, pour un objet X du topos E, est déterminée sans ambiguïté possible.

5.4. Le foncteur j_X^* est souvent appelé foncteur de localisation ou foncteur restriction. Cette dernière terminologie se justifie en identifiant les objets de E resp. sur $E_{/X}$ aux faisceaux sur E resp. sur $E_{/X}$ (1.2 iii)), et en notant qu'avec cette identification, la formule d'adjonction entre $j_{X!}$ (foncteur oubli) et j_X^* s'interprète en disant que $j_X^*(F)$ est le faisceau restriction à $E_{/X}$ du faisceau F sur E (en prenant « restriction » au sens 368
généralisé : composé avec le foncteur « d'inclusion » $j_{X!} : E_{/X} \to E$). Conformément à des notations familières en d'autres contextes, on écrira aussi souvent, indifféremment :

$$j_X^*(F) = F|X = F_X = \text{ restriction de } F \text{ à } X. \tag{5.4.1}$$

De même, lorsque E est de la forme $C^\sim$, où C est un (petit) site, et que X est de la forme $\epsilon(S)$ avec $S \in \mathrm{ob}\, C$, de sorte qu'on a une équivalence de catégories rappelée dans 5.1

$$E_{/X} = C^\sim_{/\epsilon(S)} \xrightarrow{\approx} (C_{/S})^\sim$$

($C_{/S}$ étant munie de la topologie induite par celle de C), le foncteur j_X^* s'identifie simplement au foncteur « restriction » d'un faisceau variable F sur C à la catégorie $C_{/S}$.

Ces réflexions permettent de prévoir d'ailleurs le rôle important que joueront les topos induits et les morphismes de localisation (5.2.1) dans toutes les questions où on est amené à raisonner par « localisation sur E » (cf. 8), c'est-à-dire pratiquement dans toutes les questions faisant intervenir des sites ou des topos.

[8] Pour une propriété de commutation de $j_{X!}$ au changement de topos, cf. XVII 5.1.2.

5.5. Soit
$$f : X \longrightarrow Y$$
une flèche de E, qui permet donc d'interpréter X (ou plus correctement, (X, f)) comme un objet de $E_{/Y}$. Il est évident qu'on a un isomorphisme canonique

$$(E_{/Y})_{/X} \xrightarrow{\sim} E_{/X} \tag{5.5.1}$$

(transitivité des topos induits). Appliquant la construction de 5.1 à $E_{/Y}$ au lieu de E, on trouve donc un morphisme de topos canonique

$$\mathrm{loc}(f) \text{ ou } f : E_{/X} \longrightarrow E_{/Y}, \tag{5.5.2}$$

369 appelé également morphisme de localisation (associé à f). Lorsque Y est l'objet final de E, on retrouve essentiellement (5.2.1). Le morphisme de localisation pour f est associé à une suite de trois foncteurs adjoints

$$f_! \quad , \quad f^* \quad , \quad f_*, \tag{5.5.3}$$

qui peuvent s'interpréter respectivement comme foncteur d'oubli, comme foncteur restriction, et comme un foncteur noté au choix (X' étant l'argument) $\prod_{X/Y}(X'/X)$, $\mathscr{H}om_{X/Y}(X, X')$ ou $\mathrm{Res}_{X/Y}(X'/X)$.

5.6. La transitivité des foncteurs oubli implique que pour deux morphismes composables
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
de E, on a un isomorphisme canonique de morphismes de topos
$$\mathrm{loc}(gf) \simeq \mathrm{loc}(g)\,\mathrm{loc}(f) : E_{/X} \longrightarrow E_{/Y} \longrightarrow E_{/Z}.$$
De plus, pour trois morphismes composables, on a la relation de compatibilité habituelle pour les isomorphismes de transitivité précédents. Ceci permet donc de considérer, moyennant l'abus de langage habituel, que
$$X \longmapsto E_{/X}$$
est un foncteur covariant de E dans la catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-top) (3.3.1). Plus précisément, on trouve un 2-foncteur (non strict en général) de E dans la 2-catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-top).

Avant de continuer les généralités sur les topos induits (5.10), donnons quelques exemples instructifs.

370 5.7. Soit X un espace topologique, d'où un topos $\mathrm{Top}(X)$ (2.1). Soit X' un objet de $\mathrm{Top}(X)$, qu'il sera commode d'interpréter comme un espace étalé sur X, $p : X' \to X$. La catégorie $\mathrm{Top}(X)_{/X'}$ s'identifie alors à la catégorie des espaces étalés X'' sur X, munis d'un X-morphisme $X'' \to X'$. On sait qu'un tel morphisme fait de X'' un espace étalé sur X', et on trouve de cette façon une équivalence de topos canonique
$$\mathrm{Top}(X)_{/X'} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Top}(X').$$
Le morphisme de localisation s'identifie donc à un morphisme de topos $\mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(X)$, et on constate aussitôt que ce dernier n'est autre que le morphisme
$$\mathrm{Top}(p) : \mathrm{Top}(X') \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$
associé à l'application continue structurale $p : X' \to X$. Intuitivement, le morphisme de localisation n'est donc autre que la traduction, en langage de topos, du morphisme d'étalement $p : X' \to X$. Ceci explique à la fois le bien-fondé de la terminologie « morphisme de localisation », et incite à la prudence dans l'emploi du terme de « morphisme d'inclusion », celui-ci semblant surtout approprié dans le cas où p est une immersion

ouverte. Il sera prudent par conséquent de réserver dans 5.1 le terme de « morphisme d'inclusion » au cas où le morphisme $X \to e_E$ est un monomorphisme, i.e. où X s'identifie à un sous-objet de l'objet final de E.

5.8. Soient E un topos, G un Groupe de E, H un sous-groupe de G,

$$X = G/H$$

l'espace homogène quotient, qu'on regarde comme un objet de E avec groupe d'opérateurs gauche G, i.e. comme un objet du topos classifiant B_G (2.4). Nous allons déterminer **371**
le topos induit

$$(B_G)_{/X} \quad (X = G/H),$$

en définissant une équivalence de topos

$$c : B_H \xrightarrow{\approx} (B_G)_{/X}, \tag{5.8.1}$$

telle que l'on ait commutativité à isomorphisme canonique près dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_H \arrow[r, "c"] \arrow[rr, bend right, "B_i"'] & (B_G)_{/X} \arrow[r, "j_X"] & B_G \end{tikzcd} \tag{5.8.2}$$

où j_X est le morphisme de localisation dans B_G, et où

$$B_i : B_H \longrightarrow B_G$$

est le morphisme déduit de l'inclusion $i : H \to G$ (4.5).

Pour définir (5.8.1), nous allons simplement indiquer la description des foncteurs image inverse c^* et image directe c_*, laissant au lecteur le soin de vérifier que ce sont bien là des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre, donnant lieu au diagramme commutatif (5.8.2) de morphismes de topos. Soit e le sous-objet de E sous-jacent à X, image de la section de X (sur un objet final e_E choisi de E) déduite de la section unité de G. Si X' est un objet de B_G au-dessus de X, alors on désigne par $c^*(X')$ l'image inverse de e dans X',

$$c^*(X') = X' \times_X e,$$

qui est stable par l'opération gauche de H sur X', restriction de l'opération donnée de G sur X'. Cela définit bien un foncteur

$$c^* : (B_G)_{/X} \longrightarrow B_H.$$

D'autre part, si X' est un objet de B_H, alors le morphisme de X' dans l'objet final e_H **372**
de B_H (i.e. l'objet final e_E de E avec opération triviale de H) donne, par application du foncteur $i_!$ (4.5) un morphisme de B_G

$$i_!(X') \longrightarrow i_!(e_H) \simeq X,$$

qui permet d'interpréter $i_!(X')$ comme un objet de $(B_G)_{/X}$, d'où le foncteur cherché

$$c_* : X' \longmapsto (i_!(X') \longrightarrow X) : B_H \longrightarrow B_G.$$

5.8.3. On voit donc, grâce à (5.8.2) que si G est un Groupe d'un topos, H un sous-Groupe, le foncteur « restriction des opérateurs de G à H » peut s'interpréter comme un foncteur de localisation. En particulier, prenant pour H le sous-groupe unité, on voit que le foncteur « oubli des opérations de G » s'interprète comme un foncteur de localisation. On en conclut, plus généralement, que si (X, G) est un objet de E avec opération de G (i.e. un objet du topos classifiant B_G), alors le foncteur « oubli des opérations de G »,

$$E' = (B_G)_{/(X,G)} \longrightarrow E_{/X}$$

peut s'interpréter comme un foncteur de localisation, relativement à un objet $E_{G,(X,G)}$ de E' convenable couvrant l'objet final. Il suffit de prendre $E_{G,(X,G)} = E_G \times (X, G)$, d'où le diagramme cartésien (où $E_G = G_S = G$ avec opération de G par translation à gauche)

(5.8.3.1)
$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[d] & E_{G,(X,G)} = Z \arrow[l] \arrow[d] \\ e_G & (X,G) \arrow[l] \end{tikzcd} \quad ,$$

373 et de noter que par transitivité des topos induits, le topos induit $E' = ((B_G)_{X/G)/Z}$ est équivalent au topos $((B_G)_{/E_G})_{/Z}$; comme $(B_G)_{/E_G}$ est équivalent à E par le foncteur c^* de (5.8.1) (avec $H = e$), il suffit de vérifier que cette équivalence transforme Z en l'objet X de E (ce qui est trivial) pour déduire l'équivalence cherchée de catégories

$$E'_{/Z} \xrightarrow{\approx} E_{/X}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le composé de celle-ci avec le foncteur de localisation

$$E' = (B_G)_{/(X,G)} \longrightarrow E'_{/Z}$$

est le foncteur « oubli des opérations de G ». On voit ainsi que le diagramme cartésien ci-dessus donne, par passage aux topos induits, un diagramme, commutatif à isomorphisme canonique près (5.6), de morphismes de topos :

(5.8.3.2)
$$\begin{tikzcd} (B_G)_{/E_G} \approx E \arrow[d, "j"'] & (B_G)_{/Z} \approx E'_{/Z} \approx E_{/X} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "j'"] \\ B_G & (B_G)_{/(X,G)} = E' \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

où les foncteurs images inverses associés aux flèches verticales j, j' sont les foncteurs « oubli des opérations de G », et où le foncteur image inverse i^* s'identifie au foncteur
374 de localisation $E \to E_{/X}$. Ce diagramme est d'ailleurs « 2-cartésien » au sens 5.11 ci-dessous.

5.8.4. On laisse au lecteur le soin d'étendre les réflexions qui précèdent au cas d'un pro-groupe $\mathcal{G} = (G_i)$, dans le cas particulier où H est défini comme « noyau » de $\mathcal{G} \to G_{i_\circ}$. (Dans le cas des groupes pro-finis, cela signifie qu'on se limite aux sous-groupes H de G ouverts, i.e. fermés et d'indice fini.)

Exercice 5.9. Soient E un topos, G un Groupe de E, B_G le topos classifiant de G (2.4),

$$\pi : B_G \longrightarrow E$$

le morphisme de topos déduit de l'homomorphisme de G dans le Groupe unité e de E (compte tenu que $B_e \approx E$).

a) Soit
$$E_G = G_s$$
l'objet de B_G dont le E-objet sous-jacent est G, les opérations de G étant définies par translation à gauche. Considérons $\pi^*(G)$ comme un Groupe de B_G (c'est le Groupe G de E avec les opérations triviales de G dessus). Montrer que le morphisme de E
$$G_s \times G \longrightarrow G_s$$
défini par les translations droites de G sur G_s, est compatible avec les opérations de G sur G_s et sur $G = \pi^*(G)$, et définit un morphisme de B_G
$$E_G \times \pi^*(G) \longrightarrow E_G.$$
Montrer que ce morphisme fait de E_G un objet de B_G avec une opération à droite du B_G-Groupe $\pi^*(G)$, et que cette dernière fait de E_G un torseur sous $\pi^*(G)$ 375
(i.e. l'objet final de B_G peut se recouvrir par des objets X_i tels que pour tout i, la restriction de E_G à X_i soit isomorphe au fibré à opérateurs trivial $(\pi^*(G)_{X_i})_d$).

b) Soit
$$q : E' \longrightarrow E$$
un topos sur E. Pour tout topos B sur E, définir la catégorie $\mathscr{H}\!omtop_E(E', B)$ des morphismes de topos de E' dans B compatibles avec les morphismes structuraux $E' \to E$ et $B \to E$ à isomorphisme donné près. Prenant $B = B_G$, définir par la formule $f \mapsto f^*(E_G)$ une équivalence de catégories
$$\mathscr{H}\!omtop_E(E', B_G) \longrightarrow \mathscr{T}\!ors(E, q^*(G)),$$
où le deuxième membre désigne la catégorie des $q^*(G)$-torseurs (à droite) sur E.

c) Soit H un sous-Groupe de G, de sorte que $\pi^*(H)$ est un sous-Groupe de $p^*(G)$, et opère donc sur E_G par restriction du Groupe d'opérateurs, d'où un objet quotient
$$X = E_G/\pi^*(H),$$
qui n'est autre que l'objet G/H muni de l'opération à gauche habituelle de G. Soit e_G l'objet final de B_G (i.e. l'objet final e_E de E avec opération triviale - il n'y a pas le choix - de G), et considérons dans B_G le diagramme de morphismes
$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & X = E_G/\pi^*(H) \arrow[dl] \\ e_G & \end{tikzcd}$$
d'où, en passant aux topos induits par B_G sur ces objets, un diagramme de morphismes de topos, commutatif à isomorphisme canonique près (5.6). Montrer 376
que ce diagramme est équivalent au diagramme
$$\begin{tikzcd} E = B_e \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & B_H \arrow[dl] \\ B_G & \end{tikzcd} ,$$

dont les trois flèches sont les flèches associées par 4.5 aux morphismes de Groupes $e \to H \to G$ de E. (Ainsi, le topos classifiant B_H s'interprète intuitivement comme un espace homogène au-dessus de B_G, de groupe $\pi^*(G)$, associé au torseur (= fibré principal homogène) universel E_G sur B_G).

d) Reprendre l'exemple 5.7 dans le cas où X' est un revêtement étale (localement trivial, cf. 2.7.4) de X, en l'interprétant en termes des considérations du présent exercice.

5.10. Images inverses de topos induits. Soient

$$f : E' \to E$$

un morphisme de $\mathscr{U}$-topos, X un objet de E, et $X' = f^*(X)$ son image inverse dans E. On va alors définir un diagramme de morphismes de topos

(5.10.1)
$$\begin{tikzcd} E_{/X} & E'_{/X'} \arrow[l, "f_{/X}"'] \arrow[d, "j_{X'}"] \\ E \arrow[from=u, "j_X"'] & E' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} ,$$

377 où j_X et $j_{X'}$ sont les morphismes de localisation (5.2), et où $f_{/X}$ est défini ci-dessous, diagramme qui sera commutatif à isomorphisme canonique près. Nous définirons ici $f_{/X}$ à l'aide du foncteur image inverse

(5.10.2)
$$(f_{/X})^* : E_{/X} \longrightarrow E'_{/X'},$$

pour lequel nous prendrons simplement le foncteur « induit » par f^*, en un sens évident. Comme les foncteurs d'inclusion $j_{X!} : E_{/X} \to E$ et $j_{X'!} : E_{/X} \to E$ commutent aux $\mathscr{U}$-limites inductives et aux produits fibrés, et qu'ils sont conservatifs, il s'ensuit aussitôt que le foncteur $(f_{/X})^*$ commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives et aux produits fibrés tout comme le foncteur f^* qui l'induit ; comme de plus $(f_{/X})^*$ transforme évidemment objet final X en l'objet final X', il est exact à gauche, donc est associé à un morphisme de topos

(5.10.3)
$$f_{/X} : E'_{/X'} \longrightarrow E_{/X},$$

défini à isomorphisme unique près (3.1.1). D'autre part, le diagramme déduit de (5.10.1) par passage aux foncteurs images inverses est commutatif (à isomorphisme canonique près) par construction et grâce au fait que f^* commute aux produits $X \times Y$, donc (5.10.1) lui-même est commutatif, à un unique isomorphisme près induisant l'isomorphisme canonique sur les foncteurs images réciproques des deux composés $f \circ j_{X'}$ et $j_X \circ f_{/X}$ (3.2.1).

5.10.4. Lorsque $f : E' \to E$ est associé à une application continue $Y' \to Y$ d'espaces topologiques (4.1), de sorte que X s'identifie à un espace étalé au-dessus de Y, et X' au produit fibré $X \times_Y Y'$, alors, identifiant les topos induits $\mathrm{Top}(Y)_{/X}$ et $\mathrm{Top}(Y')_{/X'}$ à $\mathrm{Top}(X)$ et $\mathrm{Top}(X')$ respectivement (5.7), on constate que le morphisme $f_{/X}$ qu'on vient
378 de construire est (à isomorphisme unique près) le morphisme $\mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(Y')$ déduit de l'application continue canonique $X' \to Y'$. On peut donc dire, à la lumière de cet exemple, que le topos $E'_{/X'}$ joue le rôle d'un produit fibré de $E_{/X}$ et de E' sur E. Cette intuition se précise à l'aide du résultat suivant :

Proposition 5.11. Les notations étant celles de 5.10, le diagramme (5.10.1), muni de l'isomorphisme de compatibilité $\alpha : f \circ j_{X'} \to j_X \circ f_{/X}$, est « 2-cartésien » ; de façon précise, pour tout $\mathscr{U}$-topos F, si on associe à tout morphisme de topos $g : F \to E'_{/X'}$ le triplet $(f_{/X} \circ g, j_{X'} \circ g, \alpha * g) = (g_1, g_2, \beta)$, où $g_1 : F \to E_{/X}$ et $g_2 : F \to E'$ sont des morphismes de topos, et $\beta : j_X \circ g_1 \to f \circ g_2$ est un isomorphisme de morphismes de topos de F dans E, on trouve une équivalence de catégories de $\mathscr{H}\!omtop(F, E'_{/X})$ avec la catégorie $\mathscr{H}\!omtop(F, E_{/X}) \times^2_{\mathscr{H}\!omtop(F,E)} \mathscr{H}\!omtop(F, E')$ de tous les triples (g_1, g_2, β) comme ci-dessus.

(NB. On a mis un 2 au-dessus du signe du produit cartésien pour rappeler qu'il ne s'agit pas d'un produit fibré ordinaire de catégories, mais d'un « 2-produit fibré », dans le sens explicité dans l'énoncé.)

Pour prouver 5.11, on explicite les morphismes de topos à l'aide des foncteurs image inverse associés. Nous aurons besoin pour cela de résultats auxiliaires, donnés dans 5.11.1 à 5.12 plus bas.

5.11.1. Considérons de façon générale la situation où on se donne deux catégories E, E', un objet X de E qu'on suppose quarrable i.e. tel que le foncteur

$$j : A \longmapsto A \times X : E \longrightarrow E_{/X}$$

soit défini, enfin un foncteur exact à gauche **379**

$$(*) \qquad \varphi : E_{/X} \longrightarrow E'.$$

Comme $E_{/X}$ a un objet final, savoir $(X, \mathrm{id}_X) = X$, il en est donc de même de E', qui admet l'objet final

$$e' \simeq \varphi(X).$$

Supposant choisi l'objet final e' de E', on va à tout φ comme ci-dessus associer un couple

$$(**) \qquad (\Psi, u), \text{ avec } \Psi = \varphi \circ j : E \to E', \text{ et } u \in \mathrm{Hom}(e', \Psi(X)).$$

Pour définir u, on note que

$$\Psi(X) = X \times X$$

a une section canonique δ_X sur l'objet final X de $E_{/X}$, savoir la section diagonale, et on définit

$$u = \varphi(\delta_X) : \varphi(X) = e' \longrightarrow \varphi(X \times X) = \Psi(X).$$

Je dis que la connaissance du couple $(**)$ permet de reconstituer le foncteur φ de $(*)$ à isomorphisme unique près. Pour ceci, pour tout objet

$$p : X' \longrightarrow X$$

de $E_{/X}$, considérons le diagramme cartésien suivant de $E_{/X}$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & j(X') = X' \times X \arrow[d, "j(p)"] \\ X \arrow[r, "\delta_X"] & j(X) = X \times X \end{tikzcd} ,$$

où la première flèche horizontale est le morphisme graphe $\Gamma_p = (\mathrm{id}_X, p)$. Appliquant le foncteur exact à gauche φ à ce diagramme, et utilisant la définition de Ψ comme $\varphi \circ j$, on trouve un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \varphi(X', p) \arrow[r] \arrow[d] & \Psi(X') \arrow[d, "\Psi(p)"] \\ e' \arrow[r] & \Psi(X) \end{tikzcd} ,$$

380 en d'autres termes on trouve un isomorphisme canonique

$$\varphi(X', p) \simeq \Psi(X') \times_{\Psi(X)} e' \tag{5.11.1.1}$$

On constate aussitôt qu'il est fonctoriel en l'objet (X', p) de $E_{/X}$, ce qui explicite comment on reconstitue à isomorphisme près le foncteur $\varphi : E_{/X} \to E'$ à l'aide du couple (Ψ, u) de $(**)$. Notons d'ailleurs que le foncteur Ψ est exact à gauche ; plus généralement, Ψ commute à tout type de limites projectives auquel commute φ, car j commute aux limites projectives.

Inversement, supposant maintenant que dans E et E' les limites projectives finies sont représentables, et partant d'un couple

$$(\Psi, u), \Psi : E \longrightarrow E', u \in \operatorname{Hom}(e', \Psi(X)),$$

où le foncteur Ψ est exact à gauche, on définit par la formule (5.11.1.1) un foncteur $\varphi : E_{/X} \to E'$. On vérifie aussitôt que ce foncteur est exact à gauche, plus généralement, qu'il commute à tout type de limites projectives représentables dans E auquel commute Ψ. Cela résulte aussitôt du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \varprojlim\limits_I{}^{E} X'_i \arrow[d] & \varprojlim\limits_I{}^{E_{/X}} X'_i \arrow[l] \arrow[d] \\ \varprojlim\limits_I{}^{E} X & X \arrow[l, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

381 reliant les limites projectives calculées dans E ou dans $E_{/X}$ (où δ désigne le morphisme diagonal dans la limites projective du foncteur constant de valeur X), en lui appliquant le foncteur Ψ, d'où un diagramme cartésien dans E', et en composant ce dernier avec le carré cartésien déduit de $\Psi(X) \leftarrow e'$, faisant apparaître un carré cartésien composé qui exprime la compatibilité de φ à la limite projective envisagée.

On reconstitue à isomorphisme près le couple (Ψ, u) à l'aide de φ, en notant que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Psi(X') = \varphi(j(X')), \tag{5.11.1.2}$$

déduit de (5.11.1.1) en y remplaçant (X', p) par $j(X') = (X' \times X, \mathrm{pr}_2)$, et notant que $\Psi(X' \times X) \simeq \Psi(X') \times \Psi(X)$. L'isomorphisme précédent est manifestement fonctoriel en X', i.e. il donne un isomorphisme

$$\Psi \simeq \varphi \circ j,$$

et on vérifie de même que moyennant cet isomorphisme, $u : e' \to \Psi(X)$ s'identifie à $\varphi(\delta_X)$. On a ainsi obtenu l'essentiel du

Lemme 5.11.2. *Soient E et E' deux catégories où les limites projectives finies sont représentables, X un objet de E, $\mathcal{S}ex(E, E')$ la catégorie des foncteurs exacts à gauche Ψ de E dans E', et $\mathcal{S}ex(E_{/X}, E')$ la catégorie analogue des foncteurs exacts à gauche φ de $E_{/X}$ dans E'. On a alors une équivalence entre la catégorie $\mathcal{S}ex(E_{/X}, E')$ et la catégorie $\mathcal{S}ex(E, E')_{/\Gamma}$ des couples (Ψ, u), avec $\Psi \in \operatorname{ob}\mathcal{S}ex(E, E')$ et $u : e' \to \Psi(X)$ (où e' est l'objet final de E'), dont la définition est explicitée dans 5.11.1, ainsi que celle d'un foncteur quasi-inverse. Si φ et (Ψ, u) se correspondent, alors φ commute à un type*
382 *déterminé de limites projectives si et seulement si il en est ainsi de Ψ. Si dans E et E' les foncteurs changement de base commutent à un type déterminé de limites inductives,*

alors pour que φ commute aux limites inductives dudit type, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de Ψ.

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la structure de catégorie $\mathcal{S}ex(E,E')_{/\Gamma}$ correspondant aux couples (Ψ,u). Définissant le foncteur $\Gamma : \mathcal{S}ex(E,E') \to (\mathrm{Ens})$ par $\Gamma(\Psi) = \mathrm{Hom}(e',\Psi(X))$, on peut interpréter u dans le couple (ψ,u) comme un élément de $\Gamma(\Psi)$ i.e. un homomorphisme $\Psi \to \Gamma$ dans la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{S}ex(E,E')^{\circ}$, ce qui justifie la notation $_{/\Gamma}$ utilisée dans l'énoncé de 5.11.1. Il reste, pour prouver 5.11.2, à expliciter dans 5.11.1 le caractère fonctoriel des constructions envisagées pour φ resp. (ψ,u) variable, ce qui est essentiellement trivial et laissé au lecteur, et enfin à vérifier l'assertion concernant les propriétés de commutation aux limites inductives, ce qui est également trivial à l'aide des formules explicites (5.11.1.1) et (5.11.1.2) reliant ces foncteurs.

On trouve en particulier, lorsque E et E' sont des $\mathcal{U}$-topos, et en interprétant les morphismes de topos à l'aide des foncteurs images inverses associés :

Proposition 5.12. Soient E et E' deux $\mathcal{U}$-topos, X un objet de E, et considérons sur $\mathcal{H}omtop(E',E)$ le foncteur contravariant

$$\gamma : f \longmapsto \Gamma(E',f^*(X)) = \mathrm{Hom}(e',f^*(X)) : \mathcal{H}omtop(E',E)^{\circ} \longrightarrow (\mathrm{Ens}).$$

On a alors une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}omtop(E',E_{/X}) \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}omtop(E',E)_{/\gamma}, \tag{5.12.1}$$

où le deuxième membre est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}omtop(E',E)\hat{}_{/\gamma}$ formée des couples (f,u), avec $f \in \mathrm{Homtop}(E',E)$ et $u \in \gamma(f)$ i.e. $u \in \Gamma(E',f^*(X))$. Ce foncteur s'obtient en associant à tout morphisme de topos $h : E' \to E_{/X}$ le couple (f,u) formé du composé **383**

$$f = j_X \circ h : E' \to E_{/X} \to E,$$

et du morphisme

$$u : e' = h^*(X,\mathrm{id}_X) \longrightarrow f^*(X) = h^*(j_X^*(X)) = h^*(X\times X)$$

déduit du morphisme diagonal $\delta_X : X \to X\times X$ en lui appliquant h^*.

5.12.2. Utilisant 5.12, la démonstration de 5.11 devient à peu près évidente, et se réduit essentiellement à ceci (qui tiendra lieu d'une démonstration « en forme » qui ne serait pas plus instructive) : se donner un morphisme de topos $g : F \to E'_{/X'}$ « revient au même » que de se donner un morphisme de topos $g_2 : F \to E'$ et une section u de $g_2^*(X')$; or $g_2^*(X') = g_2^*(f^*(X)) = (fg_2)^*(X)$, donc la donnée de u équivaut aussi à la donnée d'un relèvement du morphisme de topos $fg_2 : F \to E$ en un morphisme de topos $g_1 : F \to E_{/X}$. Cela exprime bien que la donnée d'un morphisme de topos $g : F \to E'_{/X'}$ équivaut essentiellement à la donnée d'un triple (g_1,g_2,α) comme dans 5.11.

Remarque 5.13. Nous verrons (§ 15[9]) que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[d] & \\ E & E_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

384 de topos, il existe un 2-produit fibré au sens de la 2-catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-Top) des $\mathscr{U}$-topos $\in \mathscr{V}$ (ne dépendant pas, à équivalence près, du choix d'un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$). Pour d'autres exemples naturels que 5.11 de « produits fibrés de topos », voir le dernier chapitre du livre de Giraud [3].

Exercice 5.14. a) Soient F, G deux topos au-dessus d'un topos E. Définir la catégorie $\mathscr{H}omtop_E(F, G)$ des couples (f, α), où $f : F \to G$ est un morphisme de topos et $\alpha : p \to q \circ f$ est un isomorphisme de morphismes de topos de E dans G ($p : F \to E$ et $q : G \to E$ étant les morphismes de topos structuraux). Définir des foncteurs d'accouplement $\mathscr{H}omtop_E(F, G) \times \mathscr{H}omtop_E(G, H) \to \mathscr{H}omtop_E(F, H)$, et des isomorphismes d'associativité.

b) Soient X et Y deux objets d'un topos E. Définir un foncteur naturel de la catégorie discrète définie par l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$, dans la catégorie $\mathscr{H}omtop_E(E_{/X}, E_{/Y})$. Compatibilité avec les compositions de morphismes dans E et les accouplements envisagés dans a).

c) Prouver que le foncteur envisagé dans b) est une équivalence de catégories. En particulier, un objet X d'un topos E se reconstitue à isomorphisme unique près, quand on connaît « à E-équivalence près » le topos induit $E_{/X}$ comme topos au-dessus de E. [9]

6. Points d'un topos et foncteurs fibres

6.0. Soit P le $\mathscr{U}$-topos ponctuel type (2.2)

$$P = (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}).$$

385 Étant donné l'intuition assez différente qui s'attache d'une part au symbole P, figurant un objet géométrique dans la nature d'un point, et d'autre part à ($\mathscr{U}$-Ens), figurant une « grosse catégorie », qu'on interprétera comme « la catégorie des faisceaux sur P », il y a lieu suivant le contexte d'utiliser l'un ou l'autre symbole exclusivement, bien que du strict point de vue logique ils désignent un seul et même objet.

Définition 6.1. Soit E un $\mathscr{U}$-topos. On appelle point de E tout morphisme de topos $P \to E$ du topos ponctuel P(6.0) dans E. On appelle catégorie des points de E, et on note $\mathscr{P}oints(E)$ ou $\mathrm{Pt}(E)$, la catégorie $\mathscr{H}omtop(P, E)$ (3.2). Si $p : P \to E$ est un point de E, associé au foncteur image inverse $p^* : E \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, et si F est un objet de E, l'ensemble $p^*(F)$ est appelé fibre de E en p, et noté F_p.

6.1.1. Bien entendu, lorsque F est un objet en groupe (resp. anneau, resp. ...) de E, sa fibre F_p en p est un groupe (resp. un anneau, resp. ...) (3.1.2).

[9] N.D.E. : Ce paragraphe n'existe pas. Voir cependant [16] proposition 4.47 pour un énoncé général d'existence de produits fibrés de topos (en notant que tous les morphismes géométriques entre topos de Grothendieck sont bornés).

[9] Résultat dû à P. Deligne. Le cas où E est le topos ponctuel avait été traité auparavant par Mme Hakim.

6.1.2. En vertu de 3.2.1, la catégorie des points de E est équivalente, via le foncteur $p \mapsto p^*$, à la catégorie opposée à celle des foncteurs

$$\varphi : E \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

qui commutent aux $\mathscr{U}$-limites inductives et qui sont exacts à gauche. Il revient donc essentiellement au même de se donner un point de E, ou un tel foncteur φ.

Définition 6.2. On appelle foncteur-fibre du $\mathscr{U}$-topos E tout foncteur $\varphi : E \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ qui commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives et qui est exact à gauche. On appelle catégorie des foncteurs fibres sur E, et on note $\mathscr{F}\!ib(E)$, la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}\!om(E, (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}))$ 386
formée des foncteurs fibres sur E.

6.2.3. En vertu de 6.1.2, la catégorie $\mathscr{F}\!ib(E)$ des foncteurs fibres sur E est donc équivalente à l'opposée de la catégorie $\mathscr{P}\!oint(E)$ des points de E, via le foncteur $p \mapsto p^*$ de cette dernière dans la première :

$$\mathscr{P}\!oint(E) \xrightarrow{\approx} \mathscr{F}\!ib(E)^{\circ}. \tag{6.2.1.1}$$

Pour qu'un foncteur

$$\varphi : E \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

soit un foncteur fibre, il faut et il suffit qu'il soit le foncteur fibre $F \mapsto F_p$ associé à un point p de E (6.1). En d'autres termes, le foncteur (6.2.1.1) est surjectif. Signalons aussi qu'un foncteur φ est un foncteur fibre si et seulement si il est exact à gauche et s'il transforme familles couvrantes en familles surjectives (1.7). Cette dernière condition s'exprime aussi en disant que φ commute aux $\mathscr{U}$-sommes et transforme épimorphismes en épimorphismes.

6.3. Soit $C \in \mathscr{U}$ un site. On appelle point du site C tout point du topos $C^\sim$, catégorie des points du site C la catégorie

$$\mathscr{P}\!oint(C) = \mathscr{P}\!oint(C^\sim).$$

Considérons d'autre part le foncteur

$$\varphi \longrightarrow \varphi|C = \varphi \circ \epsilon_C : \mathscr{F}\!ib(C^\sim) \longrightarrow \mathscr{H}\!om(C, (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})), \tag{6.3.1}$$

qui est pleinement fidèle et dont l'image essentielle est la sous-catégorie pleine $\mathscr{M}\!orsite((\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}), C)^{\circ}$ (4.9.4), que nous noterons aussi $\mathscr{F}\!ib(C)$. Un foncteur

$$\Psi : C \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

est appelé un foncteur fibre sur le site C s'il est dans l'image essentielle de (6.3.1), qu'on 387
vient d'expliciter. Un tel foncteur est donc continu (a fortiori (III 1.6), il transforme familles couvrantes en familles couvrantes, i.e. en familles surjectives), et il est exact à gauche. Lorsque dans C les limites projectives finies sont représentables, (condition vérifiée dans la quasi-totalité des cas qu'on rencontre en pratique) les propriétés précédentes caractérisent les foncteurs fibres sur C, qui sont alors les foncteurs $\Psi : C \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ qui sont exacts à gauche et qui transforment familles couvrantes en familles surjectives (4.9.4).

On retiendra que le foncteur $\varphi \to \varphi|C$ est une équivalence de catégories

$$\mathscr{F}\!ib(C^\sim) \xrightarrow{\approx} \mathscr{F}\!ib(C),$$

de sorte qu'il revient au même essentiellement de se donner un foncteur fibre sur le topos $C^\sim$ (ou encore un point de ce topos), ou un foncteur fibre sur le site C. Étant donné un foncteur fibre Ψ sur C, provenant donc à isomorphisme près d'un foncteur fibre φ sur $C^{\sim}$, on reconstitue ce dernier à l'aide de Ψ, à isomorphisme canonique près, par la formule

$$\varphi(F) \simeq \varinjlim_{C_{/F}} \Psi(X), \tag{6.3.2}$$

où $C_{/F}$ est la catégorie des objets X de C munis d'un morphisme $X \to F$ (dans $\widehat{C}$), i.e. d'un élément de $F(X)$. La formule (6.3.2) est une conséquence immédiate du fait que φ commute aux limites inductives et qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel en F (II 4.1.1) :

$$F \simeq \varinjlim_{C_{/F}} \epsilon_C(X).$$

388 Plus généralement, lorsque G est un préfaisceau sur C, on a un isomorphisme canonique fonctoriel en G :

$$\varphi(\underline{a}G) \simeq \varinjlim_{C_{/G}} \Psi(X), \tag{6.3.3}$$

où $\underline{a}\,G$ est le faisceau associé à G (II 4.1.1). En effet, on sait qu'on a la formule

$$\underline{a}G \simeq \varinjlim_{C_{/G}} \epsilon_C(X).$$

6.4.0. Nous renvoyons à I 6.1 pour la notion de famille conservative de foncteurs

$$\varphi_i : E \longrightarrow E_i \qquad i \in I.$$

On notera que lorsque E et les E_i sont des $\mathcal{U}$-topos, et les foncteurs φ_i sont des foncteurs images inverses f_i^* associés à des morphismes de topos

$$f_i : E_i \longrightarrow E,$$

alors toutes les propriétés d'exactitude postulées dans I 6.2, I 6.3 et I 6.4 sont vérifiées, à condition dans I 6.2 (v) non respé de supposer que D est fini. Il revient alors au même que $(f_i^*)_{i\in I}$ soit conservative, ou conservative pour les monomorphismes (I 6.1), ou conservative pour les épimorphismes, ou enfin qu'elle soit fidèle.

389 Lorsque la famille des foncteurs f_i^* est conservative, on dira aussi parfois que la famille des morphismes de topos $(f_i)_{i\in I}$ est conservative. En particulier :

Définition 6.4.1. Soient E un $\mathcal{U}$-topos, $(p_i : P \to E)_{i\in I}$ une famille de points de E. On dit que cette famille de points est conservative si la famille des foncteur fibres associés $F \mapsto F_{p_i}$ de E dans ($\mathcal{U}$-Ens) est conservative (6.4.0). On dit que le topos E a suffisamment de points lorsqu'il admet une famille conservative de points (i.e. lorsque la famille de tous les points du topos est conservative).

6.4.2. Signalons que tous les $\mathcal{U}$-topos utilisés jusqu'à présent ont suffisamment de points. On peut cependant « en faisant exprès » construire des topos qui n'ont pas suffisamment de points (7.2.6 e) et 7.4) ; on notera qu'un tel topos est nécessairement non « vide » au sens géométrique de 2.2. Un topos admettant suffisamment de points admet une famille conservative de points indexée par un $I \in \mathcal{U}$ (6.5). Noter cependant à ce sujet que si E est un $\mathcal{U}$-topos, l'ensemble des classes d'isomorphie de points de E n'est pas nécessairement $\mathcal{U}$-petit (7.3). Il l'est cependant dans de nombreux cas rencontrés en pratique. Enfin, pour un intéressant théorème d'existence (dû à P. Deligne) de suffisamment de points, couvrant tous les cas rencontrés en géométrie algébrique, voir VI 9.

6.4.3. Lorsque $(p_i)_{i\in I}$ est une famille conservative de points du topos E, on peut appliquer les remarques de I 6.2, qui impliquent notamment que deux flèches $u, v : F \rightrightarrows G$ de E sont égales si et seulement si pour tout $i \in I$, les flèches induites sur les fibres $u_{p_i}, v_{p_i} : F_{p_i} \rightrightarrows G_{p_i}$ sont égales ; qu'une flèche $u : F \to G$ de E est un monomorphisme 390
(resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $i \in I$, il en est ainsi de l'application $u_{p_i} : F_{p_i} \to G_{p_i}$; qu'un objet F de E est initial (resp. final) si et seulement si pour tout $i \in I$, F_{p_i} est vide (resp. réduit à un point) ; qu'un objet F est un sous-objet de l'objet final e_E si et seulement si pour tout $i \in I$, F_{p_i} a au plus un point.

Proposition 6.5. a) Soient C un $\mathscr{U}$-site, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs fibres sur C (6.3). Pour que la famille $(p_i)_{i\in I}$ des points correspondants du topos $E = C^{\sim}$ soit conservative, il faut et il suffit que pour toute famille $(X_j \to X)_{j\in J}$ dans C, telle que pour tout $i \in I$, la famille correspondante $(\varphi_i(X_j) \to \varphi_i(X))_{j\in J}$ soit surjective, la famille donnée $(X_j \to X)_{j\in J}$ soit couvrante.

b) Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Si E admet suffisamment de points (6.4.1), alors E admet une famille conservative de points qui est $\mathscr{U}$-petite.

L'assertion b) est un cas particulier de I 7.7. Pour prouver a), appliquons I 7.7 à la famille génératrice dans E formée des $\epsilon(X)(X \in \operatorname{ob} C)$. Rappelons (II 4.4) que la famille $X_j \to X$ est couvrante si et seulement si la famille $\epsilon(X_j) \to \epsilon(X)$ est épimorphique. Si la famille des points $(p_i)_{i\in I}$ est conservative, il revient au même (6.4.3) de dire que pour tout $i \in I$, la famille des $(X_j)_{p_i} \to (X)_{p_i}$ soit surjective, i.e. que la famille des $\varphi_i(X_j) \to \varphi_i(X)$ soit surjective. Cela établit le « il faut » dans a). Pour le « il suffit », on applique le critère I 7.7, qui nous ramène à vérifier que tout monomorphisme $F \to \epsilon(X)$, 391
tel que $F_{p_i} \to \epsilon(X)_{p_i}$ soit un isomorphisme pour tout $i \in I$, est un isomorphisme, ou ce qui revient au même, un épimorphisme. Or, on peut trouver une famille couvrante de morphismes $\epsilon(X_j) \to F$, et quitte à raffiner encore, on peut supposer que les morphismes $\epsilon(X_j) \to \epsilon(X)$ sont induits par des morphismes $X_j \to X$. Par hypothèse, pour tout $i \in I$, les morphismes composés $(X_j)_{p_i} \to F_{p_i} \to (X)_{p_i}$ forment une famille surjective (comme composée de deux familles surjectives), i.e. la famille des $\varphi_i(X_j) \to \varphi_i(X)$ est surjective. Il en résulte par hypothèse que la famille $X_j \to X$ est couvrante, donc que la famille des $\epsilon(X_j) \to \epsilon(X)$ est épimorphisme, et a fortiori que $F \to \epsilon(X)$ est épimorphique.

Corollaire 6.5.1. Soit C une catégorie. Une topologie sur C faisant de C un $\mathscr{U}$-site admettant suffisamment de foncteurs fibres (i.e. tel que le topos associé admette suffisamment de points) est entièrement connue quand on connaît la sous-catégorie pleine Φ de $\mathscr{H}om(C, \mathrm{Ens})$ formée des foncteurs fibres sur C.

En effet, en vertu de 6.5 a) on sait alors décrire les familles couvrantes en termes de la famille des foncteurs fibres.

En fait, on va voir plus bas (??) que la sous-catégorie Φ est contenue dans la catégorie des foncteurs proreprésentables sur C, donc $\Phi^{\circ} \simeq \mathscr{P}oint(C^{\sim})$ s'identifie à équivalence près à une sous-catégorie pleine de Pro $-C$.

On comparera 6.5.1 au théorème de Giraud II 5.5, qui établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des topologies sur C et un certain ensemble de sous-catégories pleines de $\mathscr{H}om(C^{\circ}, \mathrm{Ens})$.

Exercice 6.5.2. Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, P une sous- 392
catégorie de $\mathrm{Pro}(C)$. Pour tout $p \in P$, on désigne par $X \mapsto X_p$ le foncteur proreprésenté par p. Une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ dans C est dite P-couvrante si pour tout $p \in P$, la famille $(X_{ip} \to X_p)_{i\in I}$ est surjective. Montrer qu'il existe une topologie T_p sur C pour laquelle les familles couvrantes soient exactement les familles P-couvrantes, et que T_p

est la topologie la plus fine sur C pour laquelle les foncteurs $X \mapsto X_p$ ($p \in P$) soient des foncteurs fibres. Montrer que la topologie T_p fait de C un site ayant suffisamment de foncteurs fibres. Montrer que pour toute topologie T sur C, parmi les topologies T' plus fines que T qui ont assez de foncteurs fibres, il en est une moins fine : c'est la topologie T_p, où P est la sous-catégorie strictement pleine de Pro(C), équivalente à $\mathscr{P}oint(C)$, décrite dans (??) ci-dessous.

Problème 6.5.3. Caractériser les sous-catégories (strictement pleines, stables par $\mathscr{U}$-limites projectives filtrantes...) P de Pro(C) qui peuvent se déduire d'une topologie sur C comme image essentielle de $\mathscr{P}oint(C^{\sim})$ (6.8.5). [9]

6.6. Soit

$$f : E \longrightarrow E'$$

un morphisme de $\mathscr{U}$-topos, on en déduit un foncteur canonique

$$\mathscr{P}oint(f) = (p \longmapsto f \circ p) : \mathscr{P}oint(E) \longrightarrow \mathrm{Point}(E').$$

Lorsqu'on a deux morphismes de topos composables

$$E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E',$$

393 on vérifie trivialement que l'on a

$$\mathscr{P}oint(gf) = \mathscr{P}oint(g) \circ \mathscr{P}oint(f) : \mathscr{P}oint(E) \longrightarrow \mathscr{P}oint(E') \longrightarrow \mathscr{P}oint(E'').$$

Cela précise donc la dépendance fonctorielle (sans abus de langage pour une fois) de $\mathscr{P}oint(E)$ par rapport au topos E : si $\mathscr{V}$ est un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, on trouve un (véritable !) foncteur

$$\mathscr{P}oint : (\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-top}) \longrightarrow (\mathscr{V}\text{-cat})$$

de la catégorie des $\mathscr{U}$-topos qui sont éléments de $\mathscr{V}$ dans la catégorie des catégories éléments de $\mathscr{V}$.

6.7. Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Alors tout objet F de E définit un contrafoncteur

$$p \longmapsto F_p = p^*(F) : \mathscr{P}oint(E)^\circ \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-Ens}),$$

d'où pour F variable un foncteur canonique

$$E \longrightarrow \mathscr{P}oint(E)\hat{} = \mathscr{H}om(\mathscr{P}oint(E)^\circ, (\mathscr{U}\text{-Ens})), \tag{6.7.1}$$

qui par définition (6.5) est fidèle si et seulement si E possède suffisamment de points. (Le foncteur (6.7.1) a une certaine analogie formelle avec une transformation de Fourier...)

Soit X un objet de E, qui définit donc un préfaisceau $\widehat{X}$ sur

$$C = \mathscr{P}oint(E).$$

Nous pouvons donc définir la catégorie

$$C_{/\widehat{X}} = \mathscr{P}oint(E)_{/\widehat{X}}$$

des morphismes $p \to \widehat{X}$ dans le catégorie $\widehat{C}$ des préfaisceaux sur C, i.e. la catégorie des couples (p, ξ), où p est un point de E et ξ un élément de $\widehat{X}(p) = X_p$, fibre de X en p. Ceci posé, je dis qu'on a une équivalence de catégories canonique

$$C' = \mathscr{P}oint(E_{/X}) \xrightarrow{\approx} C_{/\widehat{X}} \quad , \quad \text{où} \quad C = \mathscr{P}oint(E), \tag{6.7.2}$$

394 dont la composée avec le foncteur d'inclusion $C_{/\widehat{X}} \to C$ n'est autre que la foncteur

[9] cf. 9.1.8 a) et e) pour des conditions nécessaires, et 9.1.12 b) pour des conditions nécessaires et suffisantes dans les cas de Top(X), X espace sobre localement noethérien.

$$\mathscr{P}oint(j_X) : C' = \mathscr{P}oint(E_{/X}) \longrightarrow C = \mathscr{P}oint(E)$$

déduit par fonctorialité (6.6) du morphisme de localisation (5.2.1)

$$j_X : E_{/X} \longrightarrow E.$$

C'est simplement le cas particulier de 5.12 obtenu en faisant $E' = P = (Ens)$.

Corollaire 6.7.3. Soit E un topos. Si E a suffisamment de points, il en est de même de tout topos induit $E_{/X}$ ($X \in \mathrm{ob}\, E$). Inversement. si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de E qui couvre l'objet final, telle que pour tout $i \in I$, $E_{/X_i}$ ait suffisamment de points, alors E a suffisamment de points.

Pour la première assertion, soit $f : X' \to X''$ un morphisme dans $E_{/X}$ qui n'est pas un isomorphisme, prouvons qu'il existe un point q de $E_{/X}$ tel que f_q ne soit pas un isomorphisme. Comme E a assez de points, il existe un point p de E tel que $f_p : X'_p \to X''_p$ ne soit pas un isomorphisme. Cela implique qu'il existe un $q \in X_p$ tel que le morphisme induit par f_p pour les fibres X'_q, X''_q de X'_p, X''_p sur X_p en q ne soit pas un isomorphisme. Mais en vertu de l'équivalence (6.7.2), q peut s'identifier à un point de $E_{/X}$, et l'application $X'_q \to X''_q$ qu'on vient d'envisager n'est autre que l'application sur les fibres en q induite par $f : X' \to X''$, d'où la conclusion.

Inversement, supposons que les X_i couvrent l'objet final de E, et que les $E_{/X_i}$ aient assez de points, prouvons qu'il en est de même de E. Soit $f : X' \to X''$ un morphisme 395
dans E qui n'est pas un isomorphisme. Il existe donc un $i \in I$ tel que $f_i : X'_i \to X''_i$ n'est pas un isomorphisme, où l'indice i indique la restriction à X_i. Il existe donc un point p_i de $E_{/X_i}$ tel que $f_{ip_i} : X'_{ip_i} \to X''_{ip_i}$ ne soit pas un isomorphisme. Désignant par p l'image de p_i dans E par le morphisme de localisation $E_{/X_i} \to E$, cela signifie que $X'_p \to X''_p$ n'est pas un isomorphisme, ce qui prouve que E a assez de points.

Remarque 6.7.4. L'argument précédent montre que si (p_α) est une famille conservative de points de E, alors la famille des points de $E_{/X}$ qui sont au-dessus d'un des p_α (famille indexée par l'ensemble somme des E_{p_α}) est conservative. De même, si les X_i couvrent l'objet final de E, et si pour tout $i \in I$, P_i est un ensemble conservatif de points de $E_{/X_i}$, alors l'ensemble des points de E images des $p \in P_i$ pour les morphismes de localisation $E_{/X_i} \to E$ (($i \in I$ et p variables) est conservatif.

6.8. Soient E un topos, p un point de E. On appelle voisinage du point p du topos E un couple (X, u), où $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $u \in X_p$. En vertu de (6.7.2), on peut aussi interpréter u comme un relèvement de p en un point du topos induit $E_{/X}$. Introduisant le foncteur fibre φ_p associé au point p, on peut aussi interpréter un voisinage du point p comme un objet de la catégorie $E_{/\varphi_p}$ (sous-catégorie pleine de $(E^\circ)\hat{}_{/\varphi_p}$ formée des objets dont la source est dans $E \subset \widehat{E}$). Cette dernière catégorie, i.e. la catégorie des couples (X, u) comme ci-dessus, s'appellera comme de juste la catégorie des voisinages du point p du topos E ; on la note aussi $\mathscr{V}ois(p)$. Comme φ_p est exact à gauche et que les limites 396
projectives finies sont représentables dans E, les limites projectives finies sont représentables dans la catégorie $\mathscr{V}ois(p)$, et le foncteur canonique $\mathscr{V}ois(p) \to E$ y commute (??). A fortiori, la catégorie opposée $\mathscr{V}ois(p)^\circ$ est filtrante. De plus, il est clair (I 3.4) qu'on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en $F \in \mathrm{ob}\, E$

$$\varphi_p(F) = F_p \simeq \varinjlim_{\mathscr{V}ois(p)^\circ} F(X). \tag{6.8.1}$$

En d'autres termes le foncteur φ_p « fibre en le point p » est isomorphe à la limite inductive filtrante des foncteurs représentés dans le topos E par les voisinages du point

p de E. On voit même que le foncteur fibre est ind-représentable (I 8), ce qui signifie aussi qu'il est représentable par un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ de E, où I est un ensemble ordonné filtrant tel que $I \in \mathscr{U}$. En effet, en vertu de loc. cit., il revient au même de dire que la catégorie $\mathscr{V}ois(p)$ admet une petite sous-catégorie pleine cofinale. Or soit C une petite sous-catégorie pleine génératrice de E, je dis que la sous-catégorie pleine $C_{/\varphi_p}$ de $\mathscr{V}ois(p) = E_{/\varphi_p}$, formée des voisinages (X, u) de p tels que $X \in \operatorname{ob} C$ (catégorie qui est évidemment petite) est cofinale dans $\mathscr{V}ois(p)$. Soit en effet (X, u) un voisinage de p, il faut trouver un voisinage (X', u') de p au-dessus de (X, u), avec $X' \in \operatorname{ob} C$. Or il existe une famille couvrante $X'_i \to X$, avec les X'_i dans C, d'où résulte que les X'_{ip} couvrent X_p, donc il existe un $X' = X'_{i_\circ}$ et un $u' \in X'_p$ tels que (X', u') soit au-dessus de (X, p), ce qu'on avait affirmé.

397 6.8.2. Soient C un $\mathscr{U}$-site, et p un point de C, i.e. un point du topos $C^\sim$. Désignons encore, par abus de notations, par φ_p la « restriction » du foncteur fibre φ_p à C, i.e. le composé $\varphi_p \circ \epsilon$; nous écrirons aussi souvent, pour un objet X de C

$$X_p = \varphi_p(X) = \epsilon(X)_p.$$

On appelle voisinage du point p dans le site C un couple (X, u), où $X \in \operatorname{ob} C$ et $u \in X_p = \varphi_p(X)$. Ces voisinages forment encore une catégorie $C_{/\varphi_p}$, qu'on pourra noter $\mathscr{V}ois_C(p)$. Montrons que la catégorie $\mathscr{V}ois_C(p)^\circ$ est encore filtrante, qu'elle admet une sous-catégorie pleine cofinale $\mathscr{U}$-petite, et qu'on a un isomorphisme fonctoriel en le faisceau F sur C :

$$F_p \simeq \varinjlim_{\mathscr{V}ois_C(p)^\circ} F(X). \tag{6.8.3}$$

On note d'abord, en reprenant l'argument de (6.8.1), que si C' est une sous-catégorie pleine de C qui est topologiquement génératrice (II 3.0.1), alors $\mathscr{V}ois_{C'}(p)^\circ$ est cofinale dans $\mathscr{V}ois_C(p)^\circ$. Prenant $C' \in \mathscr{U}$-petite, on est donc ramené, pour établir l'assertion, au cas où $C \in \mathscr{U}$. Dans ce cas $\widehat{C}$ est un $\mathscr{U}$-topos, et on a un foncteur faisceau associé $\underline{a} : \widehat{C} \to C^\sim$, qui permet de construire sur $\widehat{C}$ le foncteur fibre composé $\varphi_p\underline{a}$. Appliquant (6.8.1) au topos $\widehat{C}$ et à la sous-catégorie génératrice pleine C de celui-ci, on trouve que la catégorie $C^\circ_{/\varphi_p\underline{a}}$, qui est manifestement isomorphe à $\mathscr{V}ois_C(p)^\circ$, est filtrante, et qu'on a un isomorphisme fonctoriel en le préfaisceau P sur C :

$$\varphi_p\underline{a}(P) \simeq \varinjlim_X P(X).$$

398 Si F est un faisceau sur C, on a $F = \underline{a}F$, et appliquant l'isomorphisme précédent à F considéré comme préfaisceau, on obtient (6.8.3). En même temps, cet argument établit la formule plus générale

$$(\underline{a}P)_p \simeq \varinjlim_{\mathscr{V}ois_C(p)^\circ} P(X), \tag{6.8.4}$$

isomorphisme fonctoriel en le préfaisceau P arbitraire sur C, du moins lorsque C est petit. Le cas général s'en déduit, en introduisant un univers $\mathscr{V}$ tel que $C \in \mathscr{V}$, en considérant φ_p sur C comme un foncteur fibre à valeurs dans $(\mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens})$, et utilisant la compatibilité de la formation du préfaisceau associé avec l'agrandissement des univers (II 3.6).

6.8.5. On a associé à tout point p du topos $C^\sim$ un pro-objet du $\mathscr{U}$-site C, défini par le foncteur canonique $\mathscr{V}ois_C(p) \to C$, compte tenu du fait que la catégorie des voisinages de p dans C est cofiltrante et admet une petite sous-catégorie pleine cofinale. On vérifie aussitôt que pour p variable, on obtient ainsi un foncteur

$$\mathscr{P}oint(C^{\sim}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(C). \tag{6.8.5.1}$$

Ce foncteur est pleinement fidèle. En effet, via les foncteurs fibres associés, il s'interprète comme un foncteur $\mathrm{Fib}(C) \to \mathrm{Fib}(C^{\sim}) \to \mathrm{Pro}(C)^{\circ}$. Le premier foncteur est une équivalence en vertu de 4.9.4 (rappelé pour les foncteurs fibres en 6.3), et le deuxième est pleinement fidèle d'après le sorite général (I 8) des pro-objets.

6.8.6. Prenons le cas particulier où C est $\mathscr{U}$-petite et munie de la topologie chaotique, de sorte que $C = \widehat{C}$. Je dis que dans ce cas le foncteur précédent est même une équivalence de catégories

$$\mathscr{P}oint(\widehat{C}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Pro}(C). \tag{6.8.6.1}$$

En effet, il reste à prouver que ce foncteur est essentiellement surjectif, ce qui résulte du 399
fait que les foncteurs de la forme $P \mapsto P(X)$ sur $\widehat{C}$ sont des foncteurs fibres, et du fait évident que toute limite inductive filtrante de foncteurs fibres sur un topos est encore un foncteur fibre.

Identifiant C à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}(C)$ (I 8), le foncteur

$$C \longrightarrow \mathscr{P}oint(\widehat{C})$$

induit par un foncteur quasi-inverse de (6.8.6.1) est manifestement isomorphe au foncteur canonique déjà envisagé dans (4.6.2.2), dont le quasi-inverse envisagé peut être considéré comme le prolongement canonique (I 8), compte tenu du fait que $\mathscr{P}oint(\widehat{C})$ est stable par petites limites projectives.

6.8.7. Soit de façon générale $(X_i)_{i\in I}$ un pro-objet du $\mathscr{U}$-site C, d'où sur $C^{\sim}$ un foncteur

$$\varphi(F) = \varinjlim_{I} F(X_i), \tag{6.8.7.1}$$

et il est naturel de se demander, vu (6.8.5), quand ce foncteur est un foncteur fibre. On trouve que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur φ précédent est un foncteur fibre sur $C^{\sim}$.

(ii) La « restriction » de φ à C est un foncteur fibre sur le site C (6.3).

(iii) Pour toute famille couvrante $Y_\alpha \to Y$ d'un objet Y de C, tout $i_\circ \in I$ et tout morphisme $X_{i_\circ} \to Y$, il existe un $i \geq i_\circ$, un α et un morphisme $X_i \to Y_\alpha$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_\alpha \arrow[d] \\ X_{i_o} \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

En fait, la condition (iii) exprime simplement le fait que $\varphi|C$ transforme 400
familles couvrantes en familles couvrantes. Les implications (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) sont triviales, et il reste à prouver (iii) ⇒ (i). Comme le foncteur φ est manifestement exact à gauche, il reste à prouver (4.9.4) qu'il transforme familles couvrantes $F_\alpha \to F$ dans $C^{\sim}$ en familles couvrantes, i.e. que pour tout $i_\circ$ et tout $x_\circ \in F(X_{i_\circ})$, il existe un $i \geq i_\circ$, un α et un $y \in F_\alpha(X_i)$, tels que $x_\circ$ et y aient même image dans $F(X_i)$. Or comme $F_\alpha \to F$ est couvrante, il existe une famille couvrante $Z_\gamma \to X_{i_\circ}$ de $X_{i_\circ}$, tel que pour tout γ l'image inverse de $x_\circ$ dans $F(Z_\gamma)$ se remonte en un élément d'un $F_\alpha(Z_\gamma)$. Par hypothèse (iii), il existe un $i \geq i_\circ$ et un $X_{i_\circ}$-morphisme

$X_i \to Z_\gamma$. Alors l'image de $x_\circ$ dans $F(X_i)$ se remonte donc en un élément y d'un $F_\alpha(X_i)$, C.Q.F.D.

Exercice 6.9. Soient C un site $\in \mathscr{U}$, φ un foncteur fibre sur C, proreprésenté par un objet $(X_i)_{i\in I}$ de Pro(C). Pour tout indice $i \in I$, tout objet Y de C, tout morphisme $u : X_i \to Y$ et tout crible couvrant R de Y, choisissons un indice $j \geq i$ tel que le composé $X_j \to X_i \xrightarrow{u} Y$ se factorise par R. Pour i fixé, soit $J(i)$ l'ensemble formé de i, et des j obtenus pour Y, u, R variables ; pour une partie I' de I, soit de même $J(I')$ la réunion des $J(i)$ pour $i \in I'$. D'autre part, si I' est une partie finie de I, soit $m(I') \in I$ un majorant de I', et pour une partie quelconque I' de I, soit $M(I')$ la réunion des
401 $M(I'')$, où I'' parcourt l'ensemble des parties finies de I'. On suppose qu'on choisit la fonction $I' \to m(I')$ de façon que pour I' réduit à un élément i, on ait $m(I') = i$, ce qui implique que pour toute partie I' de I, on a $I' \subset M(I')$. Considérons les itérés $(MJ)^n$ de l'application MJ de l'ensemble des parties de I dans lui-même, et soit, pour toute partie I' de I, $P(I')$ la réunion des $(MJ)^n(I')$.

a) Montrer que pour toute partie I' de I, $P(I')$ est une partie filtrante de I pour l'ordre induit, et que I est réunion filtrante croissante des $P(I')$, lorsque I' parcourt l'ensemble des parties finies de I.
b) Montrer qu'il existe un cardinal $c \in \mathscr{U}$, ne dépendant que du cardinal card fl(C) $= a$, tel que pour toute partie finie I' de I, on ait card($P(I')$) $\leq c$. (Si a est infini, on peut prendre $c = 2^a$).
c) Montrer, en utilisant 6.8.7, que pour toute partie I' de I le foncteur $\varphi_{I'}$ sur C proreprésenté par le pro-objet $(X_i)_{i\in I'}$ est un foncteur fibre sur C, et que le foncteur fibre φ est limite inductive filtrante des foncteurs $\varphi_{I'}$, lorsque I' parcourt l'ensemble des parties finies de I.
d) En conclure qu'il existe une petite sous-catégorie pleine Φ de $\mathscr{F}\!ib(C) \approxeq \mathscr{F}\!ib(C)$, telle que tout objet de $\mathscr{F}\!ib(C)$ soit limite inductive filtrante d'objets de Φ. (Si a est infini, on peut prendre Φ de cardinal $\leq 2^{2^a}$; si a est fini, on peut prendre $\Phi = C$ bien sûr).

Exercice 6.10. Soient C un $\mathscr{U}$-site, D une $\mathscr{U}$-catégorie où les petites $\varinjlim$ filtrantes sont représentables, Fais(C, D) la catégorie des faisceaux sur C à valeurs dans F (II 6.1). Définir, en étendant (6.8.3), un « foncteur fibre »

$$F \longrightarrow F_p : \mathrm{Fais}(C, D) \longrightarrow D. \tag{6.10.1}$$

Si dans D les $\varprojlim$ finies sont représentables, et commutent aux $\varinjlim$ filtrantes, alors le foncteur précédent est exact à gauche.

7. Exemples de foncteurs fibres et de points de topos

402

7.1. Cas de Top(X) pour un espace topologique X. Soit x un point de X. Regardons l'ensemble ponctuel $\{x\}$ comme un espace topologique, et considérons l'inclusion

$$i_x : \{x\} \longrightarrow X.$$

En vertu de 4.1.1 il définit un morphisme de topos (défini à isomorphisme unique près)

$$\mathrm{Top}(i_x) : \mathrm{Top}(\{x\}) \longrightarrow \mathrm{Top}(X). \tag{7.1.1}$$

D'autre part, on peut identifier P à Top($\{x\}$) (2.2), et on trouve ainsi un point p_x de Top(X) :

$$p_x : P \longrightarrow \mathrm{Top}(X), \tag{7.1.2}$$

défini par x à isomorphisme unique près. Le foncteur fibre associé est donné par la formule bien connue [TF], résultant d'ailleurs immédiatement de I 5.1 :

$$p_x^*(F) = F_x = F_{p_x} = \varinjlim_{U \ni x} F(U), \tag{7.1.3}$$

la limite étant prise suivant les voisinages ouverts U de x dans X.

Comme on sait que $\mathrm{Top}(X)$ est isomorphe à $\mathrm{Top}(X_{\mathrm{sob}})$ (4.2.1), on voit plus généralement que tout point de X_{sob}, i.e. toute partie fermée irréductible Z de X, définit un point de $\mathrm{Top}(X)$, ou encore un foncteur fibre sur $\mathrm{Top}(X)$, qu'on notera encore $F \mapsto F_Z$. Revenant à sa définition par la formule (7.1.3) sur X_{sob}, on trouve

$$F_Z = \varinjlim_{U \cap Z \neq \phi} F(U), \tag{7.1.4}$$

la limite inductive étant prise suivant les ouverts U de X qui rencontrent Z. **403**

7.1.5. Il est bien connu que les foncteurs fibres $F \mapsto F_x (x \in X)$ forment déjà une famille conservative. C'est particulièrement évident sur l'interprétation des faisceaux sur X en termes d'espaces étalés, la fibre de F en x n'étant alors autre que sa fibre au sens des espaces fibrés sur X. On notera que l'ensemble d'indices de la famille conservative de foncteurs fibres envisagée est X, donc est $\mathscr{U}$-petite.

7.1.6. En vertu de 4.2.3, la catégorie $\mathscr{P}oint(\mathrm{Top}(X))$ est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble X_{sob} ordonné par la relation de spécialisation. En d'autres termes : tout foncteur fibre sur $\mathrm{Top}(X)$ est isomorphe à un foncteur fibre $F \mapsto F_Z$, où Z est un élément uniquement déterminé de X_{sob}, i.e. une partie fermée irréductible uniquement déterminée de X ; d'autre part, si $Z, Z' \in X_{\mathrm{sob}}$, alors l'ensemble $\mathrm{Hom}(F_Z, F_{Z'})$ est vide ou réduit à un point, ce dernier cas se présentant si et seulement si Z est une spécialisation de Z' dans X_{sob}, i.e. si et seulement si $Z \subset Z'$ comme partie de X. Lorsque X lui-même est sobre, on peut dans ces énoncés remplacer X_{sob} par X lui-même.

On notera que le groupe des automorphismes d'un foncteur fibre de $\mathrm{Top}(X)$ (opposé au groupe des automorphismes du point correspondant de $\mathrm{Top}(X)$) est toujours réduit au groupe unité (plus généralement, 4.2.3 nous apprend la même chose pour le groupe des automorphismes de tout morphisme de topos associés à des espaces topologiques). C'est là un phénomène très spécial au cas particulier envisagé : voir l'exemple 7.2, ainsi **404**
que VIII 7. Dans le cas des topos associés à des « problèmes de modules » (cf. par exemple [10]), les groupes d'automorphismes des foncteurs fibres ont d'ailleurs une interprétation remarquable, comme les groupes d'automorphismes des structures algébriques (sur des corps algébriquement clos) qu'on se propose de classifier.

7.1.7. On vient de voir comment on peut reconstituer un espace sobre X (ou l'espace sobre X_{sob} associé à un espace topologique quelconque), du moins en tant qu'ensemble ordonné par la relation de spécialisation, à l'aide du topos $\mathrm{Top}(X)$ (qu'il suffit même de connaître à équivalence près), comme l'ensemble des classes d'isomorphie de « points » de $\mathrm{Top}(X)$. D'après ce qui a été dit dans 2.1, on reconstitue également la topologie de X, i.e. la famille de ses ouverts, de la façon suivante : pour tout sous-objet U de l'objet final e_E de E, soit $\mathrm{Pt}(U)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $U_x \neq \phi$ (qui s'identifie d'ailleurs, en vertu de (6.7.2), à l'ensemble des classes d'isomorphie de points du topos induit $E_{/U}$). Alors $U \mapsto \mathrm{Pt}(U)$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-objets de e_E sur l'ensemble des ouverts de X.

7.1.8. La détermination 7.1.6 de la catégorie des points du topos $\mathrm{Top}(X)$ défini par un espace topologique X conduit à adopter la terminologie suivante pour les points p, p' d'un topos quelconque E : on dit que p est une spécialisation de p', ou que p' est une générisation de p, lorsqu'il existe un morphisme de p' dans p (au sens de la catégorie

$\mathscr{P}oint(E)$ de 6.1). Ces relations sont encore transitives, mais on trouve facilement grâce à
405 6.8.6 des exemples où p et p' sont chacun spécialisation de l'autre, sans que p et p' soient isomorphes (ni a fortiori égaux). La catégorie des générisations d'un point p du topos E, par quoi on entend la catégorie $\mathscr{P}oint(E)_{/p}$, joue à certains égards un rôle analogue à celui du passage au localisé d'un schéma en un point. Ce rôle sera précisé au VI 8.4 avec la construction du topos localisé de E en le point p, dont la catégorie des points est canoniquement équivalente à la catégorie des générisations de p.

Exercice 7.1.9. Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Prouver que E est équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$, où X est un espace topologique $\in \mathscr{U}$, si et seulement si il satisfait aux deux conditions suivantes :

a) La famille des sous-objets de l'objet final e_E est génératrice pour le topos E.
b) E a suffisamment de points (6.5). (Cette condition n'est pas superflue : cf. 7.4.)

Comparer avec 7.8 c).

Exercice 7.1.10. Soient X un espace topologique muni d'un groupe d'opérateurs G ($X, G \in \mathscr{U}$) et soit $E = \mathrm{Top}(X, G)$ (2.3).

a) Montrer que pour tout objet (X', G) de E, le topos induit $E_{/(X',G)}$ est canoniquement équivalent au topos $\mathrm{Top}(X', G)$ (comparer 5.7).
b) Lorsque G opère proprement et librement sur X' (Bourbaki, Top. Gen. Chap. III 4), montrer que le morphisme d'espaces à opérateurs $(X', G) \to (X'/G, e)$ induit (4.1.2) une équivalence de topos
$$\mathrm{Top}(X', G) \longrightarrow \mathrm{Top}(X'/G).$$
406 c) Conclure de b) qu'il existe un objet Z de E tel que le topos induit $E_{/Z}$ soit équivalent à $\mathrm{Top}(X)$, le foncteur de localisation $E \to E_{/Z}$ étant isomorphe au foncteur « oubli des opérations de G ». (Calquer le raisonnement de 5.8.3)
d) Conclure de c) que tout foncteur fibre sur E est induit, via le foncteur « oubli des opérations de G », par un foncteur fibre sur $\mathrm{Top}(X)$, donc définissable par un point de X_{sob}.
e) Déterminer la structure de la catégorie $\mathscr{P}oint(E)$ (à équivalence près) en termes de l'espace à opérateurs (X_{sob}, G). En conclure en particulier que deux points de X_{sob} définissent des foncteurs fibres sur E isomorphes si et seulement si ils sont conjugués sous l'action de G.

Exercice 7.1.11. Soit $X \in \mathscr{U}$ un espace topologique. Prouver que le V-topos $\mathrm{TOP}(X)$ (2.5) a suffisamment de points. Plus précisément, pour tout objet X' de $\mathrm{TOP}(X)$, et tout $x' \in X'$, définir un foncteur fibre $F \mapsto F_{X',x'}$ sur $\mathrm{TOP}(X)$, ne dépendant que du « germe » d'espace (X', x') au-dessus de X, et prouver que cette famille de foncteurs fibres est conservative (et indexée par un ensemble d'indices $\mathscr{V}$-petit). Montrer, en utilisant un système projectif filtrant convenable $(X'_i, x'_i)_{i\in I}$, avec I non $\mathscr{U}$-petit, que l'on n'obtient pas de cette façon tous les foncteurs fibres du $\mathscr{V}$-topos $\mathrm{TOP}(X)$. Montrer que l'ensemble des classes d'isomorphie de tels foncteurs fibres n'est pas de cardinal $\in \mathscr{V}$.

407

7.2. Points d'un topos classifiant B_G. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, G un Groupe de E, d'où un topos classifiant B_G (2.4). Si e est le Groupe ponctuel, les morphismes $e \to G \to e$ définissent (4.5) des morphismes de topos (compte tenu que $B_e \approx E$)

$$E \longrightarrow B_G \longrightarrow E, \tag{7.2.1}$$

dont le composé est isomorphe à id_E, d'où par passage aux catégories de points des foncteurs

$$\mathscr{P}oint(E) \longrightarrow \mathscr{P}oint(B_G) \longrightarrow \mathscr{P}oint(E), \tag{7.2.2}$$

dont le composé est isomorphe à l'identité. Utilisons le fait que le premier morphisme de topos (7.2.1) s'identifie à un morphisme de localisation relativement à l'objet $E_G = G$ de B_G (5.8), d'où résulte en vertu de (6.7.2) que le premier foncteur (7.2.2) s'identifie au foncteur naturel « d'inclusion »

$$\mathscr{P}oint(B_G)_{/\widehat{E}_G} \longrightarrow \mathscr{P}oint(B_G), \tag{7.2.3}$$

où $\widehat{E}_G$ désigne le préfaisceau $p' \mapsto (E_G)_{p'}$ sur $\mathscr{P}oint(B_G)$. Comme E_G couvre évidemment l'objet final de B_G, ses fibres $(E_G)_p$ sont non vides, d'où résulte que (7.2.3) est essentiellement surjectif, ce qui signifie que tout foncteur fibre sur B_G est induit (à isomorphisme près) par un foncteur fibre de E, via le foncteur « oubli des opérations de G » $B_G \to E$. On en conclut en particulier que si E a suffisamment de points (resp. une petite famille conservative de points) il en est de même de B_G.

Remarque 7.2.4. On peut aller plus loin et déterminer (à équivalence près) la structure de la catégorie $C' = \mathscr{P}oint(B_G)$ en termes de la catégorie $C = \mathscr{P}oint(E)$ et du préfaisceau en groupes

$$\widehat{G} : p \longmapsto G_p : C^\circ \longrightarrow (\text{Groupes})$$

sur celle-ci. Définissons en effet une nouvelle catégorie C_1, ayant mêmes objets que C, **408**
et telle que pour deux objets p, q de C, on ait

$$\mathrm{Hom}_{C_1}(p,q) = \mathrm{Hom}_C(p,q) \times \widehat{G}(p),$$

la composition des flèches dans C_1 étant induite par celle de C, et par la loi de groupe du préfaisceau $\widehat{G}$. La donnée d'un foncteur $\varphi_1 : C_1 \to D$ dans une catégorie quelconque D équivaut alors à la donnée d'un foncteur $\varphi : C \to D$, muni d'une opération du préfaisceau $\widehat{G}$ sur ce dernier (i.e. la donnée, pour tout $p \in \operatorname{ob} C$, d'une opération de $\widehat{G}(p)$ sur $\varphi(p)$, satisfaisant à une condition de fonctorialité évidente pour p variable). Utilisant cette observation, on définit un foncteur canonique

$$\varphi_1 : C_1 \longrightarrow C', \tag{7.2.4.1}$$

correspondant au foncteur $\varphi : C \to C'$ de (7.2.2), associant à tout point p de E le point $\varphi(p)$ induit sur B_G, avec les opérations naturelles de $\widehat{G}(p) = G_p$ sur ce dernier, provenant des opérations de G_p sur les X_p lorsque X parcourt B_G. On laisse au lecteur le soin de prouver que (7.2.4.1) est une équivalence de catégories, en utilisant la structure (7.2.3) du premier foncteur de (7.2.2), et en notant que le foncteur naturel d'inclusion $C \to C_1$ admet une structure analogue, relativement à l'image inverse P_1 du préfaisceau $P' = \widehat{E}_G$ sur C'.

7.2.5. On conclut en particulier que les classes d'isomorphie de points de B_G cor- **409**
respondent exactement aux classes d'isomorphie de points de E : tout point du topos classifiant E_G est induit, à isomorphisme non unique près, par un point de E. En particulier, lorsque E est le topos ponctuel P, donc que G est un groupe ordinaire, alors la catégorie $\mathscr{P}oint(B_G)$ est un groupoïde connexe à groupe fondamental G : tout foncteur fibre sur B_G est isomorphe (de façon non canonique) au foncteur ω « oubli des opérations de G », et le monoïde des endomorphismes de ce dernier foncteur est le groupe G (donc tout endomorphisme de ω est un automorphisme).

Exercice 7.2.6. a) Soit (Tors) la catégorie des couples $(\Gamma, P) \in \mathscr{U}$, avec Γ un groupe et P un torseur à droite sous Γ. La foncteur $(\Gamma, P) \mapsto \Gamma$

$$\text{(Tors)} \longrightarrow \text{(Groupes)} \tag{7.2.6.1}$$

est un foncteur cofibrant. Avec les notations de 7.2.4, considérons le foncteur

$$\widehat{G} : C^{\circ} \longrightarrow \text{(Groupes)},$$

et soit D' la catégorie cofibrée sur C° image inverse de la catégorie cofibrée (7.2.6.1), D la catégorie fibrés correspondants sur C, ayant même catégories fibres que D', de sorte que pour $p \in \operatorname{ob} C$, on ait

$$D_p = \text{ catégorie des } G_p\text{-torseurs à droite.}$$

Construire des foncteurs canoniques

$$D \longrightarrow C' = \mathscr{P}oint(B_G) \quad , \quad C' \longrightarrow D, \tag{7.2.6.2}$$

quasi-inverses l'un de l'autre. En particulier, en conclure que la catégorie des points de B_G au-dessus d'un point donné p de E est canoniquement équivalente à la catégorie des torseurs à droite sous le groupe G_p.

410 b) Soit $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$ un système projectif strict de Groupes du $\mathscr{U}$-topos E ($I \in \mathscr{U}$ un ensemble préordonné filtrant), d'où un topos classifiant $B_{\mathscr{U}}$, en calquant la définition de 2.7.1. Déterminer la catégorie des points de $B_{\mathscr{G}}$, en calquant a). (NB. On remplacera les catégories (Tors) et (Groupes) par les catégories de systèmes projectifs indexés par I de ces catégories.) En conclure que si I admet un ensemble cofinal dénombrable, alors tout foncteur fibre sur $B_{\mathscr{G}}$ est isomorphe à un foncteur induit par un foncteur fibre de E (via le foncteur « oubli des opérations de G »), ce dernier étant déterminé à isomorphisme non unique près.

c) Prenant pour E le topos ponctuel, de sorte que $\mathscr{G}$ est un pro-groupe ordinaire, montrer que la conclusion de b) est également valable si I est quelconque, mais en revanche $\mathscr{G}$ est profini (i.e. les G_i sont finis) : tout foncteur fibre est isomorphe au foncteur « oubli des opérations de G ».

d) Prenant toujours le cas où E est le topos ponctuel, donner un exemple d'un foncteur fibre sur $B_{\mathscr{G}}$, pour un système projectif convenable $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$, qui n'est pas isomorphe au foncteur « oubli des opérations de G ».

e) Considérons $\mathscr{G} = (G_i)$ comme un Groupe du topos $\hat{I}$, et soit $\mathscr{T}$ une gerbe sur I de lien G [3]. Montrer comment on peut « tordre » le topos classifiant B_G à l'aide de la gerbe T, pour obtenir un topos $B^T_{\mathscr{G}}$, limite inductive de sous-catégories $B^T(i)$ équivalentes (non canoniquement) aux topos classifiants B_{G_i}. Montrer que le topos $B^T_{\mathscr{G}}$ admet un foncteur fibre si et seulement si la gerbe T est « neutre »,
411 en établissant une équivalence de catégories entre la catégorie des foncteurs fibres de $B^T_{\mathscr{G}}$ et la catégorie des sections de T sur I. En conclure, si les G_i sont commutatifs, de sorte que la classification des gerbes sur I de lien $\mathscr{G}$ se fait par $\varprojlim_I^{(2)} G_i = H^2(I, \mathscr{G})$ (loc. cit.), un exemple d'un topos (non « vide » (2.2)) de la forme $B^T_{\mathscr{G}}$ qui n'a pas de points. (Prendre un exemple où $\varprojlim_I^{(2)} G_i \neq 0$.)

7.3. Points des topos $\widehat{C}$; exemples de $\mathscr{U}$-topos $\widehat{C}$ dont la catégorie des points ne soit pas équivalente à une petite catégorie. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille filtrante de foncteurs fibres sur E. Il résulte des propriétés d'exactitude des foncteurs $\varinjlim$ (I 2.8) que la foncteur $\varphi = \varinjlim \varphi_i$ est également un foncteur fibre : toute limite inductive filtrante de foncteurs fibres est un foncteur fibre. Par suite, la catégorie $\mathscr{F}b(E)$ admet des

$\mathscr{U}$-limites inductives filtrantes (et le foncteur d'inclusion $\mathscr{Ab}(E) \to \mathscr{Hom}(E, (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}))$ y commute) ; en d'autres termes, la catégorie $\mathscr{Point}(E)$ admet des $\mathscr{U}$-limites projectives filtrantes. Ce fait a déjà été utilisé dans exercice 7.1.11 pour donner un exemple de « grosses » catégories de foncteurs fibres.

On peut construire des exemples nettement plus simples, avec des topos de la forme $E = \widehat{C}$, $C \in \mathscr{U}$, en utilisant (6.8.6.1). Ceci nous donne aussitôt des exemples où $\mathscr{Ab}(\widehat{C})$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$ i.e. où le cardinal de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de cette $\mathscr{U}$-catégorie n'est pas $\in \mathscr{U}$. Ceci signifie que la catégorie $\mathrm{Pro}-(C)$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$. Il suffit par exemple de prendre pour $D = C^{\circ}$ la catégorie des ensembles finis de la forme $[0, n]$, où $n \geq 0$ est un entier, **412**
auquel cas $\mathrm{Ind}(D) \simeq \mathrm{Pro}(C)^{\circ}$ est équivalente à la catégorie des ensembles non vides. Le topos E est dans ce cas la catégorie bien connue des ensembles cosimpliciaux. On pourrait aussi prendre pour C la catégorie des ensembles finis non vides, on trouve que la catégorie des points sur le topos $\widehat{C}$ des ensembles simpliciaux est équivalente à la catégorie des ensembles profinis, ou encore à la catégorie des espaces compacts totalement discontinus.

7.4. Topos non vides sans points. L'exemple suivant est dû à P. Deligne. (Pour un autre exemple, cf. 7.2.6 e).) On prend un espace compact K muni d'une mesure μ, et l'ensemble ordonné U des parties mesurables de K à ensemble de mesure nulle près. On fait de U une catégorie $\underline{U}$ telle que $\mathrm{ob}\,\underline{U} = U$, les morphismes de $\underline{U}$ étant les « morphismes d'inclusion » entre éléments de U. On fait de $\underline{U}$ un site en prenant la prétopologie pour laquelle $\mathrm{Cov}(E)$ (pour $E \in U$) est formé des familles dénombrables d'éléments E_i de E majorés par E, telles que E soit la réunion des E_i à ensemble de mesure nulle près. On en déduit un Topos $\mathrm{Top}(\mu) = \underline{U}^{\sim}$, admettant l'ensemble des sous-objets de l'objet final comme famille génératrice (lequel topos semble avoir échappé à l'attention des probabilistes). Ce topos est un « topos vide » (2.2) si et seulement si $\mu = 0$. D'autre part, la catégorie des points de ce topos est équivalent à la catégorie discrète définie par l'ensemble des points $x \in K$ tels que $\mu(\{x\}) \neq 0$ (démonstration au lecteur). Elle est donc vide si K n'admet pas de tels points, par exemple si K est le segment unité de la droite, avec la mesure induite par la mesure de Lebesgue.

Exercice 7.5. (catégories karoubiennes et morphismes de topos)[9] **413**

a) Soient C une catégorie, X un objet de C, p un endomorphisme de X. On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$. Prouver que si p est un projecteur, pour que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X, p)$ soit représentable, il faut et il suffit que $\mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X, p)$ le soit, et que les deux objets de C ainsi obtenus sont canoniquement isomorphes. On dira alors que la projecteur p admet une image, et $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X, p) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X, p)$ est appelé l'image du projecteur p ; on l'identifie suivant le contexte à un sous-objet ou à un objet quotient de C. Un objet isomorphe à un $\mathrm{Im}\,p$, pour un projecteur convenable p dans X, est appelé un facteur direct de l'objet X de C. On dit que C est une catégorie avec facteurs directs, ou une catégorie karoubienne, si tout projecteur dans un objet de C admet une image. Si $F : C \to C'$ est un foncteur qui commute aux noyaux ou aux conoyaux, alors F transforme un projecteur admettant une image en un projecteur admettant une image[10].

[9] Comparer I 8.7.8.

[10] N.D.E. : Pas besoin de conditions sur F ici, tous les foncteurs préservent les projecteurs admettant des images.

b) Montrer que pour toute catégorie C, on peut trouver un foncteur $\varphi : C \to \mathrm{kar}(C)$ de C dans une catégorie karoubienne (déterminée à équivalence près), tel que pour toute catégorie karoubienne C', le foncteur

$$f \mapsto f \circ \varphi : \mathscr{H}om(\mathrm{kar}(C), C') \longrightarrow \mathscr{H}om(C, C')$$

soit une équivalence de catégories ; on appellera $\mathrm{kar}(C)$ l'enveloppe de Karoubi de la catégorie C. (Hint : prendre pour $\mathrm{ob}\,\mathrm{kar}(C)$ l'ensemble des couples (X, p), avec $X \in \mathrm{ob}\, C$ et p un projecteur dans X, et pour $\mathrm{Hom}((X, p), (Y, q))$ la partie de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ formée des $f : X \to Y$ tels que $f = qfp$.) Montrer que φ est pleinement fidèle.

c) Soit $F : E \to E'$ un foncteur d'une catégorie dans une autre. Montrer que si
414 F commute à un certain type de limites inductives ou projectives, il en est de même de tout facteur direct de F. En particulier, si E et E' sont des $\mathscr{U}$-topos et si F est un foncteur image inverse pour un morphisme de topos $E' \to E$, alors il en est de même de tout facteur direct de F ; par suite, la catégorie $\mathscr{H}omtop(E', E)$ est karoubienne, et en particulier la catégorie $\mathscr{P}oint(E)$ est karoubienne.

d) Montrer que pour toute $\mathscr{U}$-catégorie C, la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ est karoubienne (où $\mathrm{Ind}(C)$ est formée avec les systèmes inductifs de C indexés par un ensemble préordonné filtrant $I \in \mathscr{U}$). (Si $C \in \mathscr{U}$, utiliser par exemple le fait (7.3) que $\mathrm{Ind}(C)$ est équivalente à la catégorie $\mathscr{F}ib((C^\circ)\hat{}\,) = \mathscr{P}oint((C^\circ)\hat{}\,)^\circ$.) En conclure une autre construction de $\mathrm{kar}(C)$ comme sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des images dans $\mathrm{Ind}(C)$ des projecteurs d'objets X de C.

Exercice 7.6. (Morphismes essentiels de topos, points essentiels).

a) Soit $f : E \to F$ un morphisme de topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) $f_!$ existe, i.e. f^* admet un adjoint à gauche.
   ii) f^* commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives.
   ii') f^* commute aux $\mathscr{U}$-produits.

   On dira alors que f est un morphisme essentiel du topos E dans le topos E'.

   Montrer que si f satisfait à ces conditions, il en est de même de tout facteur direct de f. (Utiliser 1.8 et 7.5 c).)

b) Soit E un topos. On appelle point essentiel du topos E tout point $p : P \to E$ de E tel que $p_!$ existe. Montrer que si $E = \mathrm{Top}(X)$, X espace topologique, et si p est
415 le point de E défini par un $x \in X$, alors p est essentiel si et seulement si x admet un plus petit voisinage ouvert U (ce qui signifie, si les points de X sont fermés, que x est un point isolé de X). Pour qu'un morphisme de topos $f : E \to F$ soit essentiel (a)), il faut que f transforme points essentiels en points essentiels, et cette condition est également suffisante lorsque E admet suffisamment de points essentiels (i.e. si la famille de ces points est conservative) (cf. d)).

c) Pour qu'un point p du topos E soit essentiel, il faut et il suffit que le foncteur fibre associé soit représentable par un objet X de E. Pour que le foncteur covariant $\varphi : E \to (\mathrm{Ens})$ représenté par un objet donné X de E soit un foncteur fibre (i.e. définisse un point, nécessairement essentiel, de E), il faut et il suffit que X soit connexe non vide (4.3.5), et projectif (i.e. que le foncteur φ transforme épimorphismes en épimorphismes). (Hint : montrer d'abord que pour que φ commute aux sommes, il faut et il suffit que X soit connexe non vide, puis utiliser le critère 4.9.4.) En conclure une équivalence entre la catégorie $\mathscr{P}ointess(E)$ et la sous-catégorie pleine P de E formée des objets connexes non vides projectifs.

d) Montrer que la topologie de P induite par celle de E est la topologie chaotique. En conclure l'équivalence des conditions suivantes sur E (due à J.E ROOS [12 c), prop. 1]) : (i) La famille des points essentiels de E est conservative ; (ii) La sous-catégorie pleine P de E formée des objets connexes-non vides projectifs est génératrice ; (iii) E est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$ (ou, si on préfère, $C \in \mathscr{U}$). (Utiliser c) et le fait que si P est génératrice, le foncteur naturel $E \to P^{\sim}$ est une équivalence de catégories.) **416**

e) La catégorie des points essentiels d'un topos E est karoubienne (cf. (7.5 c)). Soit C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$. Prouver que le foncteur pleinement fidèle canonique (4.6.2)

$$C \longrightarrow \mathscr{P}oint(\widehat{C})$$

se factorise par un foncteur

$$C \longrightarrow \mathscr{P}ointess(\widehat{C}),$$

qui fait de $\mathscr{P}ointess(\widehat{C})$ une enveloppe de Karoubi (7.5 b)) de C. En particulier, ce foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si la catégorie C est karoubienne. (Hint : utilisant c), prouver que tout point isolé de $\widehat{C}$ est isomorphe à un facteur direct d'un $X \in \operatorname{ob} C$.)

f) Soient C et C' deux catégories équivalentes à des catégories $\in \mathscr{U}$. Prouver que le foncteur pleinement fidèle canonique (4.6.2)

$$\mathscr{H}om(C, C') \longrightarrow \mathscr{H}omtop(\widehat{C}, \widehat{C}')$$

prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathscr{H}omtopess(\widehat{C}, \widehat{C}')$ des morphismes essentiels de topos (a)), et que la foncteur induit

$$\mathscr{H}om(C, C') \longrightarrow \mathscr{H}omtopess(\widehat{C}, \widehat{C}')$$

est une équivalence de catégories si et seulement si C est vide ou C' est karoubienne. (Utiliser g) ci-dessous.)

g) Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, et E un topos. Définir une équivalence entre la catégorie $\mathscr{H}omtopess(\widehat{C}, E)$ des morphismes essentiels de topos $\widehat{C} \to E$, et la catégorie $\mathscr{H}om(C, \mathscr{P}ointess(E))$. (Utiliser b) et le fait que **417**
$\widehat{C}$ a suffisamment de points essentiels).

h) Soit C une catégorie finie. Prouver que tout point de $\widehat{C}$ est essentiel, et que $\mathscr{P}oint(\widehat{C})$ est équivalente à une catégorie finie. (Noter que l'enveloppe de Karoubi de C est finie, et utilisant (6.8.6.1), se ramener à prouver que si C est une catégorie karoubienne finie, alors le foncteur canonique $C \to \operatorname{Pro}(C)$ est une équivalence de catégories). Utilisant b), et conclure que tout morphisme de topos $\widehat{C}' \to \widehat{C}$ est essentiel, et $\mathscr{H}om(C, C') \to \operatorname{Hom}(\widehat{C}, \widehat{C}')$ est une équivalence si et seulement si C est vide ou C' karoubienne.

i) Soit X un espace topologique, $f : \operatorname{Top}(X) \to P$ le morphisme de topos déduit de l'application continue de X dans l'espace ponctuel. Montrer que f est essentiel si et seulement si l'espace X est localement connexe, i.e. satisfait la condition suivante : pour tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert U de x, la composante connexe de x dans U est un voisinage de x, ou encore : pour tout ouvert U de X, les composantes connexes de U sont ouvertes. (cf. 8.7 l) pour généralisation).

Exercice 7.7. (Points inhabituels d'un topos classifiant)[10].

a) Soit G un monoïde. Pour que G contienne un élément g tel que $g \neq e$, $g^2 = g$, il faut et il suffit que le topos classifiant B_G admette un point essentiel qui n'est pas isomorphe au point banal (correspondant au foncteur fibre « oubli des opérations de G »). (Utiliser 7.6 e)).
b) Soit G le monoïde additif des entiers ≥ 0. Montrer que tout point essentiel du topos classifiant B_G est isomorphe au point banal. Construire un point de B_G qui n'est pas isomorphe au point banal. Montrer que la catégorie $\mathscr{P}oint(B_G)$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$.

Exercice 7.8. (Topologie sur Point(E), et topos associés aux ensembles ordonnés).

a) Soit E un topos. Désignons par Point(E) l'ensemble des classes, à isomorphisme
418 près, de points de E. Pour tout ouvert U de E, soit U' l'ensemble des classes de points p de E tels que $U_p \neq \phi$. Montrer que $U \mapsto U'$ est une application croissante de l'ensemble ordonné Ouv(E) des ouverts de E dans l'ensemble des parties de $X = \mathrm{Point}(E)$, et que cette application commute aux Inf finis aux Sup quelconques. En conclure que l'ensemble des parties de X de la forme U' définit sur X une topologie (dite topologie canonique sur l'ensemble des classes de points du topos E). Montrer que si E a suffisamment de points, l'application $U \mapsto U'$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné Ouv(E) avec l'ensemble ordonné Ouv(X).
b) Soit $\mathscr{O} \in \mathscr{U}$ un ensemble ordonné admettant des Inf fins et des Sup quelconques, qui définit donc une catégorie cat($\mathscr{O}$) ayant des produits finis et des sommes quelconques. Nous dirons qu'une famille de morphismes $U_i \to U$ de même but U est couvrante si U est le Sup des U_i. Supposant que dans cat($\mathscr{O}$) les sommes sont universelles i.e. que dans $\mathscr{O}$ les Sup quelconques commutent aux Inf, on définit ainsi sur cat($\mathscr{O}$) une topologie qui en fait un site, d'où un topos cat$(\mathscr{O})^\sim$, noté aussi simplement $\mathscr{O}^\sim$. Montrer que $\mathscr{O}$ est canoniquement isomorphe à Ouv$(\mathscr{O}^\sim)$.

Montrer que la catégorie $\mathscr{H}omtop(E, \mathscr{O}^\sim)$ est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble ordonné des morphismes d'ensembles ordonnés $\mathscr{O} \to \mathrm{Ouv}(E)$ qui commutent aux Inf finis et aux Sup quelconques. (Utiliser le critère 4.9.4.) Si $\mathscr{O}'$ est un ensemble ordonné satisfaisant aux mêmes conditions que $\mathscr{O}$, conclure que $\mathscr{H}omtop(\mathscr{O}^\sim, \mathscr{O}'^\sim)$ est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble ordonné de tous les morphismes d'ensembles ordonnés $\mathscr{O} \to \mathscr{O}'$ qui commutent aux Inf finis et aux Sup quelconques.
419 c) Montrer que pour que le topos E soit équivalent à un topos de la forme $\mathscr{O}^\sim$, avec $\mathscr{O}$ comme dans b), il faut et il suffit que la famille des ouverts de E soit génératrice dans E. Pour qu'il soit équivalent à un Top(X) pour $X \in \mathscr{U}$, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition précédente et qu'il ait suffisamment de points. Supposant réalisée la première condition, exprimer la seconde en termes de la structure de l'ensemble ordonné $\mathscr{O} = \mathrm{Ouv}(E)$, en utilisant la dernière assertion de b).
d) Définir un morphisme de topos canonique

$$E \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E)^\sim,$$

qui soit universel (à équivalence près) pour les morphismes de E dans des topos engendrés par leurs ouverts (cf. c)).

[10] cf. aussi 7.2.6 d).

e) Soit X' un petit sous-ensemble de $X = \mathrm{Point}(E)$, qu'on munit de la topologie induit par celle de X. Définir un morphisme canonique de topos

$$\mathrm{Ouv}(E)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Top}(X'),$$

qui est une équivalence lorsque la famille X' de points de E est conservative. En conclure alors un morphisme canonique de topos

$$E \longrightarrow \mathrm{Top}(X').$$

Donner une caractérisation universelle (à équivalence près) de ce morphisme de topos pour les morphismes du topos E dans des topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$. (Noter à ce propos qu'à équivalence près, $\mathrm{Top}(X')$ ne dépend pas de la petite famille conservative de foncteurs fibres choisie, ou ce qui revient au même (4.2), que X'_{sob} ne dépend pas à homéomorphisme près du choix d'une telle famille).

f) Supposons que la catégorie $\mathscr{P}oint(E)$ ne soit pas équivalente à une petite catégorie (cf. 7.3), et que E admette une petite famille conservative de foncteurs fibres. Montrer que si une telle famille est prise assez grande, la partie X' de $\mathscr{P}oint(E)$ qu'elle définit n'est pas un espace topologique sobre pour la topologie induite. **420**

g) Pour les relations avec l'exercice 7.6, cf. 8.

8. Localisation. Ouverts d'un topos

8.1. Soit C une catégorie, et $T(X)$ une relation faisant intervenir un objet X de C. On dit que la relation $T(X)$ est stable par changement de base (en X), si pour tout morphisme $X' \to X$ de C, la relation $T(X)$ implique $T(X')$. Il revient au même de dire que la sous-catégorie pleine R de C, formée des objets X de C tels qu'on ait $T(X)$, est un crible (I 4.1).

Remarque 8.1.1. Supposons que C soit une $\mathscr{U}$-catégorie (I 1.1), de sorte que C peut être identifié à une sous-catégorie pleine de $\widehat{C}$ (I 1.4). Il est parfois commode d'étendre la définition de la relation T dans $\mathrm{ob}\, C$ en une relation $\widehat{T}$ portant sur un objet F de $\widehat{C}$, en désignant par $\widehat{T}(F)$ la relation : pour toute flèche $X \to F$ dans $\widehat{C}$, avec $X \in \mathrm{ob}\, C$, on a $T(X)$. La relation $\widehat{T}(F)$ est évidemment encore stable par changement de base en F. Désignant encore par R le sous-objet de l'objet final e de $\widehat{C}$ défini par le crible R de C (I 4.2.1), la relation $\widehat{T}(F)$ peut aussi s'exprimer par $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F, R) \neq \varnothing$, i.e. elle signifie que l'unique morphisme $F \to e$ se factorise par le sous-objet R de e.

8.2. Supposons maintenant que C soit un site. Une relation $T(X)$ en un argument $X \in \mathrm{ob}\, C$ est dite stable par descente si pour toute famille couvrante $(X_i : X_i \to X)_{i \in I}$ d'un objet X de C, la relation « $T(X_i)$ pour tout $i \in I$ » implique la relation $T(X)$. On dit que T est une relation de nature locale si elle est stable par changement de base (8.1) et stable par descente. Lorsque C est une $\mathscr{U}$-catégorie, et que T est déjà supposée stable par changement de base, i.e. qu'elle est définissable par un crible R de C, qu'on identifiera à un sous-préfaisceau du préfaisceau final sur C, on voit aussitôt que C est de nature locale si et seulement si R est un faisceau. Ainsi, les relations de nature locale en un argument $X \in \mathrm{ob}\, C$ correspondent exactement aux sous-faisceaux du faisceau final de C, i.e. aux sous-objets de l'objet final du topos $C^{\sim}$. Elles ne dépendent donc essentiellement que du topos $C^{\sim}$ défini par le site C (comme toutes les notions importantes associées à un site !). En termes du sous-faisceau R du faisceau final, la relation $T(X)$ s'exprime comme $\mathrm{Hom}(\epsilon(X), R) \neq \varnothing$. Elle se prolonge canoniquement en la relation $T^{\sim}(F) : \mathrm{Hom}(F, R) \neq \varnothing$ sur le topos $C^{\sim}$. **421**

Remarque 8.2.1. Avec la notation introduite dans 8.1.1, pour un préfaisceau F sur C, comme $\mathrm{Hom}(F, R) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}(F), R)$, la relation $\widehat{T}(F)$ équivaut à la relation $\widehat{T}(\underline{a}(F))$.

Définition 8.3. On appelle ouvert d'un $\mathscr{U}$-topos E tout sous-objet de l'objet final e_E de E ; si X est un objet de E, on appelle parfois ouvert de X tout ouvert du topos induit $E_{/X}$, i.e. tout sous-objet de X.

On appelle ouvert d'un $\mathscr{U}$-site C un ouvert du $\mathscr{U}$-topos associé $C^{\sim}$.

On notera que, les objets finaux de E étant canoniquement isomorphes, l'ambiguïté
422 introduite dans 8.3 par le choix de e_E inoffensive ; on peut aussi, de façon plus intrinsèque mais moins maniable du point de vue pratique, définir les ouverts de E comme étant les sous-catégories pleines R de E qui sont telles que la relation $F \in \mathrm{ob}\, R$ pour un objet F de E soit une relation de nature locale. De même, les ouverts d'un $\mathscr{U}$-site C correspondent biunivoquement aux sous-catégories pleines de C telles que la relation $F \in \mathrm{ob}\, R$ pour un objet de C soit de nature locale ; cette notion est donc essentiellement indépendante de l'univers choisi $\mathscr{U}$. Enfin, en vertu de ce qui a été dit dans 8.2, une relation de nature locale sur un topos (ou sur un site) est essentiellement la même chose qu'un ouvert dudit topos (ou du site).

8.4. Exemples d'ouverts.

8.4.1. Soit X un espace topologique, et interprétons $\mathrm{Top}(X)$ (2.1) comme la catégorie des espaces étales sur X. Comme il est clair que les monomorphismes dans $\mathrm{Top}(X)$ sont les applications injectives, il s'ensuit que les ouverts du topos $T(X)$ s'identifient aux ouverts de l'espace X. Plus généralement, les ouverts d'un topos $\mathrm{Top}(X, G)$ (2.4) s'identifient aux ouverts de X invariants par l'action de G.

8.4.2. Les ouverts d'un $\mathscr{U}$-topos E forment un ensemble $\mathscr{U}$-petit (I 7.4) ordonné par l'inclusion, admettant des sup quelconques et des inf finis. Il admet l'objet initial (ou « objet vide ») ϕ_E comme plus petit élément, et l'objet final e_E de E comme plus grand élément. Ces deux éléments ne sont identiques que si E est un « topos vide » (2.2).

8.4.3. Soit G un Monoïde dans E, d'où un topos B_G (2.6), catégorie des objets de
423 E sur lesquels G opère à gauche. L'objet final e_G de B_G est l'objet final e_E de E avec opération triviale de G. On voit par suite que l'ensemble ordonné des ouverts de B_G est canoniquement isomorphe à la catégorie des ouverts de E. En particulier, si E est le topos ponctuel donc G est un monoïde ordinaire, l'ensemble des ouverts de B_G est exactement formé de deux éléments, savoir ϕ_{B_G} et e_G.

8.4.4. Si E est un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une $\mathscr{U}$-catégorie, alors (8.1) l'ensemble ordonné des ouverts de E est isomorphe à l'ensemble ordonné des cribles de C.

8.4.5. Soit X un espace topologique sobre non discret. Montrer que $\mathrm{TOP}(X)$ (2.5) a des ouverts qui ne proviennent pas d'ouverts de X, i.e. d'ouverts de $\mathrm{Top}(X)$, par image inverse à l'aide du morphisme canonique (4.10.1) $\mathrm{TOP}(X) \to \mathrm{Top}(X)$.

8.5. Exemples de relations de nature locale. Pour tout objet X du topos E, on désigne par $F \to F_X$ le foncteurs de localisation $j_X^* : E \to E_{/X}$, $Y \mapsto Y \times X$ (5.2).

8.5.1. Soit $u : F \to G$ un morphisme de E. La relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, E$,

$u_X : F_X \to G_X$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme)

est une relation de nature locale. En particulier, si G est un Groupe de E, la relation « G_X est le groupe unité sur X » est de nature locale ; l'ouvert de E qui lui correspond est appelé le cosupport du Groupe G.

424 8.5.2. Soient $u, v : F \rightrightarrows G$ deux morphismes de E. La relation en l'argument $X \in \operatorname{ob} E$
$$u_X = v_X : F_X \longrightarrow G_X$$
est une relation de nature locale. En particulier, si G est un Groupe de E, et u une section de G (4.3.6), la relation en X

$$\text{la section } u_X \text{ du Groupe } G_X \text{ de } E_{/X} \text{ est nulle}$$

est de nature locale ; l'ouvert de E qui lui correspond est appelé le cosupport de la section u du Groupe G.

Remarque 8.5.3. Lorsque $E = \mathrm{Top}(X)$, le cosupport d'un faisceau en groupes G, resp. d'une section d'un tel faisceau G, n'est autre que l'ouvert de X complémentaire du support de G resp. du support de u dans la terminologie classique [TF].

8.5.4. Soit $P(f)$ une relation en l'argument $f \in f\ell\, C$, C un site. Lorsque dans C les produits fibrés sont représentables, on dit que la relation $P(f)$ est stable par changement de base (resp. stable par descente), resp. de nature locale) sur le but (ou sur la base, ou « en bas »), si pour tout morphisme $f : X \to Y$ de C, la relation en l'argument $Y' \in \operatorname{ob} C_{/Y}$:

« le morphisme $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ déduit de f par changement de base par le morphisme structural $Y' \to Y$ satisfait $P(f')$ »

est stable par changement de base, resp. stable par descente, resp. est de nature locale. Lorsque la topologie de E est définie à l'aide d'une prétopologie, on dit que la relation $P(f)$ est de nature locale sur la source (ou « en haut ») si pour tout morphisme $f : X \to Y$ de C et toute famille $(g_i : X_i \to X)_{i\in I}$ de $\mathrm{Cov}(X)$, la relation $P(f)$ équivaut 425
à la relation « $P(fg_i)$ pour tout $i \in I$ ». Lorsque $\mathrm{Cov}(X)$ est formée de toutes les familles couvrantes de C, cette condition signifie donc aussi que la relation en l'objet X' du site induit $C_{/X}$

$$P(fg), \text{ où } g : X' \to X \text{ est le morphisme structural}$$

est de nature locale. Noter que si la relation $P(f)$ est de nature locale en haut, elle est a fortiori de nature locale en bas.

8.5.5. Prenons par exemple $C = (\mathrm{Sch})$, catégorie des schémas $\in \mathscr{U}$, avec la topologie fidèlement plate quasi-compacte (SGA 3 IV 6.3) ou une topologie moins fine. Alors chacune des propriétés suivantes d'un morphisme est de nature locale en bas :

surjectif, radiciel, universellement ouvert, universellement finie, propre, quasi-compact, quasi-compact et dominant, homéomorphisme universel, séparé, quasi-séparé, localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, de présentation finie, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion ouverte, une immersion fermée, une immersion quasi-compacte, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, entier, plat, fidèlement plat, net, lisse, étale

(EGA IV 2.6.4, 2.7.1 et EGA IV 17.7.1). D'autre part, munissons (Sch) de la prétopologie pour laquelle, pour tout schéma $X \in \mathscr{U}$, $\mathrm{Cov}(X)$ est formé des familles de morphisme $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ qui sont surjectives et telles que les f_i soient plats et localement de présentation finie. Alors chacune des propriétés suivantes est de nature locale en haut :

localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, plat, net, lisse, étale.

(EGA IV 17.7.5, 17.7.7).

Exercice 8.6. Soit $f : E \to F$ un morphisme de $\mathscr{U}$-topos. Considérons la relation 426
en l'argument $X \in \operatorname{ob} F$: le morphisme induit $E_{/f^*(X)} \to F_{/X}$ est une équivalence de topos. Prouver que cette relation est de nature locale.

Exercice 8.7. (Partitions d'un topos, somme de topos). Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E, i.e. de sous-objets de l'objet final e de E, est appelée une partition de e (ou encore, du topos E) si le morphisme canonique $\amalg_{i\in I} e_i \to e$ est un isomorphisme, i.e. (II 4.6.2)) si e est le sup des e_i et si $i \neq j$ implique $e_i \cap e_j = \varnothing_E$.

a) Montrer que pour que la famille $(e_i)_{i\in I}$ d'objets de E soit une partition de E, il faut et il suffit que le foncteur

$$E \longrightarrow \prod_i E_{/e_i} \tag{8.7.1}$$

défini par les foncteur de localisation $E \to E_{/e_i}$ soit une équivalence de catégories.

b) Soit réciproquement $(E_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{U}$-topos, avec $I \in \mathscr{U}$. Prouver que $E = \Pi_{i\in I} E_i$ est un $\mathscr{U}$-topos (qui sera appelé le topos somme de la famille des topos $(E_i)_{i\in I}$). Définir une partition $(e_i)_{i\in I}$ de E et des équivalences de catégories $E_{/e_i} \approx E_i$, de telle façon que les foncteurs de projection $E \to E_i$ s'identifient aux foncteurs de localisation $E \to E_{/e_i}$.

c) Soit E le topos somme de la famille des topos $(E_i)_{i\in I}$. Montrer que pour tout $i \in I$ le foncteur projection $E \to E_i$ est de la forme u_i^*, où

$$u_i : E_i \longrightarrow E \tag{8.7.2}$$

427 est un morphisme de topos. Prouver que pour tout $\mathscr{U}$-topos F, le foncteur $v \mapsto (v \circ u_i)_{i\in I}$

$$\mathscr{H}omtop(E, F) \longrightarrow \prod_i \mathscr{H}omtop(E_i, F) \tag{8.7.3}$$

est une équivalence de catégories.

d) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une partition du topos E. Pour tout morphisme de topos $g : F \to E$, la famille $(f_i)_{i\in I}$, avec $f_i = g^*(e_i)$, est une partition de F, et les morphismes induits $g_i : E_{/e_i} \to F_{/f_i}$ permettent de reconstituer g (à isomorphisme unique près), le foncteur g^* s'identifiant au produit cartésien des foncteurs g_i^* (compte tenu des équivalences du type (8.7 1)). En conclure une description complète de la catégorie $\mathscr{H}omtop(F, E)$, en termes des catégories de la forme $\mathscr{H}omtop(F', E_i)$, où F' est un topos de la forme $F_{/f}$ (f sommande directe de l'objet final de F) et $E_i = E_{/e_i}$.

e) En particulier, si F est connexe non vide (cf. 4.3.5) i.e. si pour toute partition $(f_i)_{i\in I}$ de F il existe un $i \in I$ et un seul tel que $f_i \neq \phi_F$, prouver que le foncteur canonique

$$\coprod_{i\in I} \mathscr{H}omtop(F, E_i) \longrightarrow \mathscr{H}omtop(F, E) \tag{8.7.4}$$

déduit des morphismes de topos (8.7.2) est une équivalence de catégories. Plus particulièrement, la famille des morphismes de topos (8.7.2) induit une équivalence de catégories

$$\coprod_{i\in I} \mathscr{P}oint(E_i) \xrightarrow{\approx} \mathscr{P}oint(E).$$

428 f) Une partie I de l'ensemble des ouverts de E est appelée une partition réduite de E si la famille identique $(e_i)_{i\in I}$ indexée par I est une partition, et si les e_i sont $\neq \phi_E$. Montrer que la relation de raffinement (I 4.3.2) entre partitions réduites fait de l'ensemble P des partitions réduites un ensemble ordonné $\mathscr{U}$-petit, tel que la borne supérieure de deux éléments de P existe. On trouve ainsi un système

projectif strict $(I_p)_{p\in P}$, qui sera considéré comme un pro-ensemble et noté $\pi_\circ(E)$. On l'appelle le pro-$\pi_\circ$ du topos E.

g) Prouver que $\pi_\circ(E)$ pro-représente le foncteur

$$T \longmapsto f_* f^*(T) = \Gamma(E, T_E) : (\mathscr{U}\text{-Ens}) \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-Ens})$$

associé au morphisme canonique $f : E \to P$ de E dans le topos ponctuel P (4.3). En particulier, pour que ce foncteur soit représentable, il faut et il suffit que $\pi_\circ(E)$ soit essentiellement constant, i.e. isomorphe (en tant que pro-ensemble) à un ensemble « ordinaire », qui sera noté encore $\pi_\circ(E)$. Pour que $\pi_\circ(E)$ soit réduit à un point, il faut et il suffit que E soit « connexe non vide ». Pour que $\pi_\circ(E)$ soit vide, il faut et il suffit que E soit le « topos vide » (2.2).

h) Supposons E quasi-compact, i.e. que tout recouvrement de son objet final e admette un sous-recouvrement fini. Montrer qu'alors $\pi_\circ(E)$ est un ensemble profini, et peut s'identifier par suite (moyennant l'équivalence de catégories bien connue entre pro-objets de la catégorie des ensembles finis, et espaces compacts totalement discontinus) à un espace compact totalement discontinu, qu'on notera également $\pi_\circ(E)$.

i) Soit X un espace topologique, $\pi_\circ(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X, considéré comme un pro-ensemble constant. Définir un morphisme canonique de pro-ensembles 429

$$\pi_\circ(X) \longrightarrow \pi_\circ(\mathrm{Top}(X)), \tag{8.7.5}$$

ou ce qui revient au même, une application canonique

$$\pi_\circ(X) \longrightarrow \varprojlim \pi_\circ(\mathrm{Top}(X)). \tag{8.7.6}$$

Montrer que le premier morphisme est un isomorphisme si et seulement si X est homéomorphe à un espace somme d'espaces connexes (ce qui est le cas en particulier si X est localement connexe).

j) Supposons que X soit un schéma quasi-compact. Prouver qu'alors (8.7.6) est bijectif.

k) Établir le « caractère fonctoriel » en X des morphismes (8.7.5) et (8.7.6), en précisant pour commencer le sens de cette expression.

l) (Comparer 7.6 i)). Montrer que les deux conditions suivantes sur le $\mathscr{U}$-topos E sont équivalentes : (i) Le morphisme canonique de E dans le topos ponctuel est « essentiel » (exercice 7.6 a)) i.e. le foncteur $I \mapsto I_E$ de $(\mathscr{U}\text{-Ens})$ dans E commute aux produits indexés par des ensembles $\in \mathscr{U}$. (ii) Pour tout objet X de E, le topos induit $E_{/X}$ a un $\pi_\circ(E_{/X})$ qui est un ensemble ordinaire, i.e. X est isomorphe à la somme d'une famille d'objets connexes de E. - On dit alors que E est un topos localement connexe (comparer 2.7.5).

Exercice 8.8. (Morphismes dominants de topos).

a) Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   (i) $f_*(\phi_{E'}) = \phi_E$ (où $\phi_E, = \phi_{E'}$ désignent les objets initiaux de E, E').
   (ii) Pour tout objet X de E qui est « non vide » i.e. non isomorphe à ϕ_E, $f^*(X)$ est un objet non vide de E'. 430
   (ii') Comme (ii), avec X un sous-objet de l'objet final e_E de E, i.e. X un ouvert du topos E.

   On dit alors que le morphisme f de topos est dominant.

b) Soit $f : X' \to X$ une application continue d'espaces topologiques, d'où un morphisme de topos $\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(X)$ (4.1). Montrer que $\mathrm{Top}(f)$ est dominant si et seulement si f est dominant, i.e. $f(X')$ est dense dans X.

c) Montrer que si $f : E' \to E$ est un morphisme « conservatif » de topos (6.4.0), i.e. tel que f^* soit fidèle, alors f est dominant. Montrer que le réciproque n'est pas nécessairement vraie, même pour un morphisme de localisation $E_{/U} \to E$, où U est un ouvert du topos E, ((Montrer que dans ce cas f n'est conservatif que si U est l'objet final de E (donc si f est une équivalence de topos), et utiliser l'exemple b).)

d) Soit $f : X' \to X$ une flèche dans un topos E. On dit que f est un morphisme dominant dans le topos E si le morphisme correspondant des topos induits $E_{/X'} \to E_{/X}$ (5.5.2) est dominant. Montrer que cette propriété ne dépend que de l'image $f(X')$ de X' dans X, en tant qu'élément de l'ensemble ordonné $\mathrm{ouv}(X)$ des sous-objets de X. Montrer que le morphisme $E_{/X'} \to E_{/X}$ est conservatif si et seulement si f est couvrant.

9. Sous-topos et recollement de topos

431

9.1. Sous-topos et plongement de topos.

Définition 9.1.1. a) Un morphisme de topos $f : F \to E$ est appelé un plongement si le foncteur $f_* : F \to E$ est pleinement fidèle (i.e. si le morphisme d'adjonction $f^* f_* \to \mathrm{id}_F$ est un isomorphisme).

b) On appelle sous-topos d'un topos E une sous-catégorie strictement pleine E' de E qui est un topos et tel que le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ soit de la forme i_*, où $i : E' \to E$ est un morphisme de topos (i.e. (3.1.1) α admet un adjoint à gauche i^* qui est exact à gauche). Le morphisme i (qui est déterminé à isomorphisme unique près) est alors appelé le morphisme d'inclusion du sous-topos E' dans E.

Remarque 9.1.2. a) Il est clair que le morphisme d'inclusion d'un sous-topos est un plongement, et qu'une sous-catégorie E' du topos E est un sous-topos si et seulement si c'est l'image essentielle d'un foncteur image directe f_* associé à un morphisme de topos $g : F \to E$ qui est un plongement.

b) Il résulte aussitôt des définitions qu'un morphisme de topos $f : F \to E$ est un plongement si et seulement s'il est isomorphe à un morphisme composé

$$F \xrightarrow{g} E' \xrightarrow{i} E,$$

où g est une équivalence de topos et i le morphisme d'inclusion d'un sous-topos E' de E. Ce dernier est déterminé de façon unique par les conditions précédentes, comme l'image essentielle de f_*, et la factorisation précédente est également unique à isomorphisme unique près. Bien entendu, il y a lieu en pratique d'identifier, au moyen de g, F au sous-topos E' de E (comparer 3.4.1).

c) Une équivalence de topos (3.4) $u : E \xrightarrow{\approx} E_1$ définit de façon évidente une bijection entre l'ensemble des sous-topos de E et l'ensemble des sous-topos de
432 E_1. En effet, u_* étant une équivalence de catégories, établit une bijection entre l'ensemble des sous-catégories strictement pleines de E et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines de E_1 (à $E' \subset E$ correspondant l'image essentielle E'_1 de $u_* | E'$), et on constate aussitôt que E' est un sous-topos de E si et seulement si E'_1 est un sous-topos de E_1. On peut donc, pour l'étude des sous-topos, se ramener au cas où E est de la forme $\widetilde{C}$, où C est un petit site. Dans

ce cas, il résulte de II 5.5 qu'une sous-catégorie strictement pleine E' de E est un sous-topos si et seulement si le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche (cela implique donc déjà que E' est un topos), et que l'ensemble de ces sous-topos est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des topologies T' sur C qui sont plus fines que la topologie donnée T de C, en associant à toute telle T' la sous-catégorie strictement pleine $(C, T')^{\sim}$ de $C^{\sim}$, formée des faisceaux pour la topologie T'. Ceci montre en même temps, pour tout $\mathscr{U}$-topos E : une sous-catégorie strictement pleine E' de E est un sous-topos si et seulement si le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche ; l'ensemble ordonné $\mathfrak{E}(E)$ des sous-topos de E est $\mathscr{U}$-petit, et toute partie de $\mathfrak{E}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

d) Si E' et E'' sont deux sous-topos du topos E, leur intersection est un sous-topos de E. En effet, comme cette intersection est strictement pleine, on est ramené au cas où E est de la forme $C^{\sim}$. Avec les notations de c), E' et E'' correspondent alors à deux topologies T', T'' sur C plus fines que T, et il suffit de voir qu'alors $E' \cap E''$ est la catégorie des faisceaux pour la topologie T''' borne supérieure de T' de et de T''. Indiquons la démonstration de ce fait (qui aurait dû figurer en corollaire après II 4.4 ou II 5.5 !). Soit E''' la catégorie des faisceaux pour T''', évidemment contenue dans E' et E'' donc dans $E' \cap E''$. Soit, pour toute sous-catégorie pleine D de E, $t(D)$ la topologie la plus fine parmi celles pour lesquelles les éléments de D sont des faisceaux (II 2.2). Les inclusions $E''' \subset$ 433
$E' \cap E'' \subset E', E''$ impliquent évidemment $t(E'), t(E'') \leq t(E' \cap E'') \leq t(E''')$, d'autre part on a (II 4.4.4) $t(E') = T'$, $t(E'') = T''$, $t(E''') = T'''$, de sorte que les inégalités précédentes et la définition de T''' comme borne supérieure impliquent que $T''' = t(E' \cap E'')$, donc $E' \cap E'' \subset E'''$, C.Q.F.D. Plus généralement, cet argument montre que si T' est une topologie borne supérieure d'une famille quelconque de topologies (T_i), la catégorie E' des faisceaux pour T' est l'intersection des catégories E_i de faisceaux pour les T_i. On en conclut en particulier :

Proposition 9.1.3. Soit E un topos. Alors pour toute famille de sous-topos $(E_i)_{i \in I}$ de E, l'intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-topos de E.

Proposition 9.1.4. Soient $i : E' \to E$ un plongement de topos, et F un topos. Le foncteur

$$f \longmapsto i \circ f \ : \mathscr{H}\!omtop(F, E') \longrightarrow \mathscr{H}\!omtop(F, E) \tag{9.1.4.1}$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des morphismes de topos $g : F \to E$ tels que l'image essentielle de g_* soit contenue dans celle de i_*.

Considérons en effet le diagramme commutatif évident

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}\!omtop(F, E') \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{H}\!omtop(F, E) \arrow[d, hook] \\
\mathscr{H}\!om(F, E') \arrow[r] & \mathscr{H}\!om(F, E),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs $h \mapsto h_*$, qui sont pleinement fidèles par définition de $\mathscr{H}\!omtop$ (3.2). D'autre part la deuxième flèche horizontale $G \mapsto i_* G$ est pleinement fidèle, puisque i_* l'est, donc il en est de même de la première flèche horizontale.

Reste à prouver la caractérisation de l'image essentielle de (9.1.4.1). La nécessité de la condition étant évidente par la formule $(if)_* = i_* f_*$, il reste à prouver que si l'image essentielle de g_* est contenue dans celle de i_*, i.e. si on peut écrire $g_* = f_* i_*$, avec $f_* : F \to E'$ un foncteur, alors g est dans l'image essentielle de (9.1.4.1). Il revient au
434 même de dire que f_* admet un adjoint à gauche qui est exact à droite. Or il est clair que f_* admet $g^* i_*$ comme adjoint à gauche, et ce foncteur est exact à gauche, comme composé des foncteurs exacts à gauche g^* et i_*, C.Q.F.D.

Pour une réciproque de 9.1.4, cf. exercice 9.1.6.

Prenant pour F le topos ponctuel (2.2), on déduit en particulier de 9.1.5 :

Corollaire 9.1.5. Si $f : E' \to E$ est un morphisme de plongement de topos, le foncteur correspondant

$$\mathrm{Point}(f) : \mathscr{P}oint(E') \longrightarrow \mathscr{P}oint(E) \tag{9.1.5.1}$$

est pleinement fidèle.

Exercice 9.1.6. (Plongements de topos et 2-monomorphismes).

Soit $i : E' \to E$ un morphisme de topos.

a) Si F et G sont deux topos au-dessus de E', définir (avec les notations de 5.14 a)) un foncteur canonique

$$f \longmapsto f * i : \mathscr{H}omtop_{E'}(F, G) \longrightarrow \mathscr{H}omtop_{E}(F, G). \tag{9.1.6.1}$$

b) Supposons que i, en tant que 1-flèche de la 2-catégorie des $\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-topos (3.3.2), soit un 2-monomorphisme, i.e. tel que pour tout $\mathscr{U}$-topos F qui soit élément de $\mathscr{V}$, le foncteur (9.1.4.1) soit pleinement fidèle. Montrer que pour tout couple de $\mathscr{U}$-topos F, G (pas nécessairement $\in \mathscr{V}$) le foncteur (9.1.6.1) est pleinement fidèle.

c) Montrer que i est un plongement si et seulement si i est un 2-monomorphime. (Pour la suffisance, appliquer b) à des topos induits $E'_{/X'}$ et $E'_{/Y'}$, et utiliser 5.14 c)).

d) Soit $g : F \to E$ un morphisme de topos, et supposons que le 2-produit fibré (5.11) $F' = F \times^2_E E'$ existe (condition toujours vérifiée, comme l'a montré P. DELIGNE[11]). Soit $j : F' \to F$ le morphisme de projection. Prouver que si i est un plongement, il en est de même de j. (Utiliser c), et noter que la stabilité de la notion de 2-monomorphisme par 2-changement de base est formelle). Dans le cas où E' est un sous-topos de E et $i : E' \to E$ est le morphisme canonique d'inclusion, l'image essentielle de F' par j_* (qui est un sous-topos de F qui
435 ne dépend pas de l'indétermination dans la construction d'un produit 2-fibré) s'appelle le sous-topos de F image inverse par $g : F \to E$ du sous-topos E' de E.

e) Avec les notations de la fin de d), choisissons comme produit 2-fibré le sous-topos de F image inverse du sous-topos E' de E. Soit X un objet de F. Montrer que pour que X appartienne à F', il faut qu'il satisfasse la condition suivante : pour tout objet U de F, désignant par $g_U : F_{/U} \to E$ la morphisme de topos induit par f, on a $g_{U*}(X|U) \in \mathrm{Ob}\, E'$, où $X|U = (X \times U \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} U)$ est la « restriction de X à U ». (NB : On peut noter que si $i_U : F_{/U} \to F$ est l'inclusion canonique, on a $g_U = g \circ i_U$, d'où $g_{U*}(X|U) = g_*(i_{U*}(X|U)) = g_*(\mathscr{H}om(U, X))$ où $\mathscr{H}om(U, X)$ est l'objet défini dans 10.1 plus bas).

[11]N.D.E. : Voir aussi [16] proposition 4.47.

Problème Réciproquement, la condition précédente sur X est-elle suffisante pour que X appartienne à F' ? Il revient au même de demander si la sous-catégorie strictement pleine de F formée par ces objets X est un sous-topos de F

f) Soient X un objet de E, $X' = i^*(X)$, et $i_{/X} : E'_{/X'} \to E_{/X}$ le morphisme de topos induit par i (5.10.1). Montrer que si i est un plongement, il en est de même de $i_{/X}$. (Utiliser d) et 5.11). Réciproquement, si $(X_\alpha)_\alpha$ est une famille d'objets couvrant l'objet final, et si pour tout α, $i_{/X_\alpha}$ est un plongement, il en est de même de i.

Exercice 9.1.7. (Sous-topos et ensembles multiplicatifs de flèches).

a) Soient $i : E' \to E$ un morphisme de topos, S l'ensemble des flèches u de E telles que $i^*(u)$ soit un isomorphisme, et considérons le foncteur canonique induit par i^* (cf. [2, Chap I] ou la preuve de VI 6.2) :

$$\rho : E[S^{-1}] \longrightarrow E'. \tag{9.1.7.1}$$

Montrer que i est un plongement si et seulement si le foncteur précédent ρ est une équivalence de catégories, et dans ce cas S admet un calcul des fractions à gauche et un calcul des fractions à droite. (Utiliser [2, Chap 1 1.3]). Dans ce cas, i'image essentielle de i_* se retrouve à partir de S comme formée des $X \in \mathrm{Ob}(E)$ tels que pour tout $u : Y \to Y'$ dans S $\mathrm{Hom}(u, X) : \mathrm{Hom}(Y', X) \to \mathrm{Hom}(Y, X)$ **436**
soit bijective.

b) Nous supposons désormais que i est un plongement. Montrer que pour tout topos F, le foncteur

$$f^* \longmapsto f^*i^* : \mathscr{H}om(E', F) \longrightarrow \mathscr{H}om(E, F)$$

induit une équivalence entre la catégorie des f^* provenant de morphismes de topos $f : F \to E'$ (i.e. exacts à gauche et admettant un adjoint à droite) et la catégorie des foncteurs $g^* : E \to F$ provenant de morphismes de topos $g : F \to E$, et tels que g^* transforme objets de S en isomorphismes.

c) Soit S une partie de $Fl\ E$, où E est un $\mathscr{U}$-topos. Montrer que S est associé à un sous-topos E' de E par le procédé de a) si et seulement si S satisfait aux conditions suivantes :

ST 1) S contient les flèches inversibles, est stable par composition et par changement de base.

ST 2) Si un composé vu est dans S, alors $u \in S$ si et seulement si $v \in S$.

ST 3) Si $u : X \to Y$ est tel qu'il existe une famille couvrante $Y_i \to Y$, $i \in I$, tel que $u_i : X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ est dans S pour tout $i \in I$, alors $u \in S$.

Montrer qu'on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-topos E' de E, et l'ensemble des parties S de $Fl\ E$ satisfaisant aux conditions ST 1), ST 2), ST 3). (S étant donné, lui associer une $\mathscr{U}$-topologie T', plus fine que la topologie canonique T de E, dont les familles couvrantes $(X_i \to X)_{i\in I}$ sont celles pour lesquelles l'inclusion $X' \hookrightarrow X$ de l'image des X_i est $\in S$. Montrer que la catégorie des faisceaux pour T' est équivalente à un sous-topos E' de E, et utiliser II 4.4. pour prouver que celui-ci redonne S.

d) Montrer que S est connu quand on connaît la partie S_0 de S formée des monomorphismes. Montrer que l'application $S \mapsto S_0$ établit une bijection entre l'ensemble des parties S de $Fl\ E$ satisfaisant les conditions ST 1) à ST 3) de c), et l'ensemble des parties de $Fl\ E$ formées de monomorphismes et satisfaisant **437**
aux mêmes conditions ST 1) à ST 3).

e) Soit $(E'_i)_{i\in I}$ une famille de sous-topos de E, et $(S_i)_{i\in I}$ la famille des parties correspondantes de $Fl\ E$. Montrer que $\bigcap_{i\in I} S_i$ satisfait aux conditions ST 1) à ST 3) de c), donc correspond à un sous-topos E' de E, et que ce dernier est le sous-topos engendré par les E_i, i.e. la borne supérieure (cf. 9.1.2 c)) des sous-topos E'_i.

f) Soit A une partie de $Fl\ E$. Montrer qu'il existe une plus petite partie S de $Fl\ E$ parmi celles contenant A et satisfaisant aux conditions ST 1) à ST 3), et que S correspond au plus grand sous-topos E' de E tel que la partie multiplicative de $Fl\ E$ correspondante contienne S. Montrer que S est égale à la réunion des parties A_n ($n \geq 0$) de $Fl\ E$, construites par récurrence de la façon suivante : $A_0 = A$, A_{n+1} est formée des flèches $u : X \to Y$ qui sont d'un des trois types suivants (i) à (iv) :
   (i) u est inversible, ou le composé de deux flèches de A_n, ou déduit par changement de base d'une flèche de A_n.
   (ii) u est l'un des facteurs d'une flèche composées dont l'autre facteur ainsi que le composé sont dans A_n.
   (iii) u est une somme d'une petite famille de flèches $\in A_n$.
   (iv) Il existe un épimorphisme $Y' \to Y$, tel que $u' = X' = X \times_Y Y' \to Y'$ déduit de u par changement de base soit dans A_n.

g) Avec les notations de e), soient A la réunion des S_i, S la partie de $Fl\ E$ déduite de A par le procédé de f), et E' le sous-topos correspondant de E. Montrer que E' est l'intersection (= borne inférieure) des sous-topos E'_i.

Exercice 9.1.7.2. (Factorisation canonique d'un morphisme de topos).

a) Soit $f : F \longrightarrow E$ un morphisme de topos. Montrer qu'on peut trouver une factorisation de f, à isomorphisme près, en

(9.1.7.3)
$$F \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{i} E,$$

438 où f' est conservatif (i.e. (6.4.0) f'^* est conservatif, ou encore fidèle) et où i est un plongement, et que cette factorisation est unique à équivalence près (cf. 9.1.4). Pour ceci, introduire l'ensemble $S_f \subset Fl\ E$ des flèches u de E telles que $f^*(u)$ soit un isomorphisme, prouver que S_f satisfait aux conditions de 9.1.7. c), prendre pour E' le sous-topos correspondant de E, et définir f'^* par (9.1.7.1), qui correspond à un morphisme de topos f' grâce à 9.1.7 b).

b) Le sous-topos de E défini par le plongement i est appelé le sous-topos de E image du morphisme de topos f. Montrer que c'est le plus petit des sous-topos E_1 de E tels que f se factorise, à isomorphisme près, à travers E_1, i.e. (9.1.4) le plus petit des sous-topos de E contenant l'image de f_* (ou encore, l'image essentielle de f_*). Pour que f soit un plongement, il faut et il suffit que f induise une équivalence f' de E avec son image ; pour que f soit conservatif, il faut et il suffit que son image soit égale à E tout entier.

c) Supposons que $f = \mathrm{Top}(f_0)$ soit associé à une application continue d'espaces topologiques sobres $f_0 : Y \to X$ (4.1) Considérons la factorisation canonique de f_0 en

$$Y \xrightarrow{f'_0} X' = f_0(Y) \xrightarrow{i_0} X,$$

où i_0 est l'inclusion. Montrer que la factorisation canonique de f s'identifie alors à la factorisation correspondante

$$\mathrm{Top}(Y) \xrightarrow{\mathrm{Top}(f_0')} \mathrm{Top}(X') \xhookrightarrow{\mathrm{Top}(i_0)} \mathrm{Top}(X).$$

Soit Z le plus petit sous-espace sobre de X contenant $X' = f(Y)$, i.e. l'ensemble des points x de X tels que $\{\overline{x}\} \cap X'$ soit dense dans $\{\overline{x}\}$. (On notera que $Z = X'$ si les points de X sont fermés, ou si X' est une partie constructible de X supposé localement noethérien). Alors f est conservatif, i.e. le sous-topos de $E = \mathrm{Top}(X)$ image de $F = \mathrm{Top}(Y)$ par $f = \mathrm{Top}(f_0)$ est égal à E lui-même, si et seulement si $Z = X$, i.e. si et seulement si $f(Y)$ est très dense (EGA IV 10.13) dans X. Ceci précise dans quelle mesure il est licite de regarder la notion de morphisme conservatif de topos il est licite de regarder la notion de morphisme conservatif de topos comme la généralisation naturelle de la notion d'application continue surjective d'espaces topologiques.

d) Soit **439**

$$\begin{tikzcd} Y & Y' \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[from=u] & X' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien d'espaces topologiques. Si Y et X' sont des espaces discrets, donc Y' discret, alors le diagramme correspondant de topos est 2-cartésien (5.11). (NB. Pour un contre-exemple lorsque l'on ne suppose plus Y, X' discrets, Y, X' étant des sous-espaces de l'espace séparé X, cf. 9.1.10 c)). En déduire un exemple d'un diagramme 2-cartésien de topos

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "f"'] & F' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ E & E' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

tel que f soit conservatif, mais f' non conservatif, plus précisément $E' =$ topos ponctuel, $F' =$ topos vide (2.2). (Prendre Y tel que l'image de Y dans X soit très dense et $\neq X$, et prendre X' réduit à un point qui n'est pas dans l'image).

e) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-topos d'un topos E. Prouver que E est le sup des E_i si et seulement si la famille des morphismes de plongement $E_i \to E$ est conservative (6.4.0).

Exercice 9.1.8. (Sous-topos et points de E. Cas des espaces topologiques). Soit E un topos.

a) Soit Z une sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}oint(E)$ (ou ce qui revient au même : une partie de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{P}oint(E)$). Montrer que l'ensemble $S(Z)$ des flèches de E qui sont transformées en bijections par les foncteurs fibre correspondants aux $z \in \mathrm{Ob}\, Z$ satisfait aux conditions de 9.1.7. c), et définit donc un sous-topos E_Z de E. Montrer que celui-ci admet suffisamment de points, et que Z est équivalente à une sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}oint(E_Z)$. Montrer qu'on peut obtenir par le procédé précédent tout sous-topos E' de E qui admet suffisamment de points. (Prendre pour Z l'image essentielle du foncteur (9.1.5.1.)). Montrer qu'on obtient une bijection entre l'ensemble des sous-topos E' de E admettant suffisam- **440**
ment de points, et un sous-ensemble de l'ensemble des sous-catégories strictement pleines Z de $\mathscr{P}oint(E)$ qui sont stables par facteurs directs (I 10.6) et par

petites limites projectives filtrantes (cf. 7.3.). (Problème : Quelles sont les sous-catégories de $\mathscr{P}oint(E)$ qu'on trouve ainsi ? C'est essentiellement, sous une autre forme, le problème déjà soulevé dans 6.5.3., compte-tenu du dictionnaire 9.1.2 c). Noter qu'en plus des conditions nécessaires signalées à l'instant, il y a aussi des conditions plus subtiles sur la nature topologique de $\mathrm{Point}(E)$, genre, sobriété, cf. e)).

b) Soit $(Z_i)_{i\in I}$ une famille de sous-catégories pleines de $\mathscr{P}oint(E)$, et soit Z la sous-catégorie pleine réunion des Z_i. Montrer que le sous-topos correspondant E_Z défini en a) est le sous-topos de E engendré par les E_{Z_i}. (Utiliser 9.1.7. e)). En conclure que le sous-topos de E engendré par une famille de sous-topos ayant suffisamment de points, a également suffisamment de points.

c) Soit $f : E' \to E$ un plongement de topos. Montrer que l'application $U \mapsto f^*(U)$

$$\mathrm{Ouv}(E) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E') \tag{9.1.8.1}$$

est surjective, et en conclure que l'application

$$\mathrm{Point}(E') \longrightarrow \mathrm{Point}(E) \tag{9.1.8.2}$$

induite par f sur les classes d'isomorphie de points induit un homéomorphisme de $\mathrm{Point}(E')$ sur un sous-espace de $\mathrm{Point}(E)$, pour les topologies définies dans 7.8 a). (Pour l'injectivité, utiliser 9.1.5.).

d) Soit $f : X' \to X$ une application continue, d'où un morphisme de topos (4.1)

$$\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X') \longrightarrow \mathrm{Top}(X).$$

Prouver que ce dernier est un plongement si et seulement si la topologie de X' est image inverse par f de celle de X (i.e. , lorsque X' est un espace de Kolmogoroff, par exemple un espace sobre, si et seulement si f induit un ho-
441 méomorphisme de X' sur un sous-espace de X). (Pour la nécessité, utiliser c), pour la suffisance, 9.1.7.2 c)).

e) Soit X un espace topologique sobre, et $E = \mathrm{Top}(X)$. Utilisant a) et d), établir un isomorphisme d'ensembles ordonnés $X' \mapsto E_{X'}$ entre l'ensemble des sous-espaces sobres X' de X (i.e. , lorsque X est séparé, entre l'ensemble de toutes les parties de X et l'ensemble des sous-topos de E ayant suffisamment de points. Montrer que $E_{X'}$ est équivalent à $\mathrm{Top}(X')$. Si $(X'_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces sobres de X, montrer qu'il existe un plus petit sous-espace sobre X' de X contenant les X'_i, égal à la réunion des X'_i si I est fini ou X est séparé, et que $E_{X'}$ est le sous-topos de E engendré par les $E_{X'_i}$. (Utiliser b)).

f) Donner un exemple d'un topos E de la forme $\mathrm{Top}(X)$, et d'un sous-topos E' qui n'a pas suffisamment de points, et même qui est non vide (2.2) sans points. (Prendre E de la forme $\widehat{U}$, $E' = U^\sim$, où U est l'ensemble ordonné défini dans 7.4. Ou mieux, prendre l'exemple de 9.1.10 b), qui montre qu'on peut prendre pour X n'importe quel espace compact non vide sans point isolé).

Exercice 9.1.9. (Cas des topos définis par un ensemble ordonné).

a) On utilise le yoga de 7.8 b) et c), donnant un dictionnaire entre, d'une part les topos engendrés par leurs ouverts et les morphismes de tels topos, d'autre part les ensembles ordonnées ayant des Sup quelconques, des Inf finis et où le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup quelconques, les morphismes entre de tels ensembles ordonnés étant les applications croissantes commutant aux Inf finis et aux Sup quelconques.

b) Soit E un topos, $f : E' \to E$ un plongement de topos. Montrer que pour toute famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ dans E, la famille $(f^*(X_i))_{i\in I}$ est génératrice. En déduire que si E est engendré par ses ouverts, il en est de même de E' (Utiliser 9.1.8. c)).

c) Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos engendrés par leurs ouverts, associé à un morphisme $g : \mathscr{O} \to \mathscr{O}'$ sur les ensembles ordonnés correspondants. Montrer que f est un plongement si et seulement si g est surjectif, et g est surjectif sur les graphes des relations d'ordre, i.e. l'ordre de $\mathscr{O}'$ est quotient de celui de $\mathscr{O}$. **442**

d) Soit E un topos de la forme $\mathscr{O}^\sim$ comme dans a). Déduire de b) et c) une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-topos de E, et l'ensemble des relations d'équivalence R dans $\mathscr{O}$ ayant les propriétés suivantes, analogues aux conditions ST 1) à ST 3) de 9.1.7 c) :

Q0 1) La relation R est compatible avec les Inf finis, ou encore : si U, U' sont équivalents par R, il en est de même de $U \cap V$ et $U' \cap V$ pour tout $V \in \mathscr{O}$.

Q0 2) La relation R est compatible aux Sup quelconques, ou encore : si U_i est équivalent à U'_i pour tout $i \in I$, alors $\operatorname{Sup}_i U_i$ est équivalent à $\operatorname{Sup}_i U'_i$.

Montrer que si des sous-topos $E_i^!$ de E correspondent aux relations d'équivalence R_i, alors le sous-topos engendré par les $E_i^!$ correspond à la relation intersection des R_i.

Exercice 9.1.10. (Intersection de sous-espaces ; nouveaux topos sans points ; non existence du complémentaire d'un sous-topos).

Soient X un espace topologique, $E = \mathrm{Top}(X) = \mathrm{Ouv}(X)^\sim$ (2.1).

a) Soit R la relation suivante sur $\mathrm{Ouv}(X)$: $(U, U') \in R \iff U \cap U'$ est dense dans U et dans U'. Montrer que R est une relation d'équivalence satisfaisant les conditions Q0 1) et Q0 2) de 9.1.9 d), et définit donc un sous-topos E' de E. Montrer que pour un point $x \in X$, le point correspondant est dans l'image essentielle de $\mathscr{P}oint(E')$ si et seulement si x est épais i.e. appartient à l'adhérence de l'intérieur de $\overline{x}$. Montrer que E' est le topos vide (2.2) si et seulement si X est vide.

b) Si X est sobre, montrer que la catégorie $\mathscr{P}oint(E')$ est équivalente à la catégorie définie par le sous-ensemble ordonné de X (pour la relation de spécialisation) défini par les points épais de X. Montrer que si les points de X sont fermés (resp. si X est noethérien) alors les points épais de X sont les points isolés de X i.e. tel que $\{x\}$ soit ouvert (resp. sont les points maximaux de X). En conclure que si X est un espace topologique séparé non vide sans points isolés, alors le sous-topos E' de $E = \mathrm{Top}(X)$ est un topos non « vide » qui n'a pas de points. **443**

c) Soit X' une partie de X, et $E_{X'}$ le sous-topos de E associé à X' par le procédé 9.1.8. a). Montrer que si X' est dense, alors $E_{X'}$ contient E'. Montrer que si X est sobre et si X' et X'' sont deux parties sobres de X, leur intersection $X' \cap X''$ est sobre et $E_{X'\cap X''} \subset E_{X'} \cap E_{X''}$, et que l'inclusion peut être stricte [11]. (Prendre un espace séparé X non vide admettant deux parties disjointes denses X', X''). Montrer que l'inclusion précédente est une égalité si et seulement si le sous-topos $E_{X'} \cap E_{X''}$ a assez de points. Montrer qu'il en est ainsi si X' ou X'' est une partie localement fermée de X.

d) Soit X' une partie de X, et X'' le complémentaire de X'. Un sous-topos F de E contient les $E_{\{x\}}$ pour $x \in X''$ si et seulement si il contient $E_{X''}$ (cf. 9.1.8

[11] Voir cependant 9.1.11 b) ci-dessous pour le cas X localement noethérien.

b)). En conclure que si X'' est réunion de parties localement fermées de X (par exemple si les points de X'' sont fermés), alors l'ensemble des sous-topos F de E dont l'intersection avec $E_{X'}$ est le sous-topos vide Top($\varnothing$) contient un plus grand élément (qui mérite alors le nom de sous-topos de E complémentaire faible de $E_{X'}$, cf. 9.1.13), que si $E_{X'} \cap E_{X''}$ est le sous-topos vide (condition qui n'est pas satisfaite si $X \neq \varnothing$ et si X' et X'' sont tous deux denses dans X, X, X', X'' étant sobres, cf. c)). Montrer que lorsque cette condition est en défaut, alors dans l'ensemble ordonné des sous-topos de E, le Inf de deux éléments n'est pas distributif par rapport aux Sup quelconques. (Le rédacteur ignore s'il est distributif par rapport aux Sup finis ; cf. cependant 9.1.11 e) et 9.1.12 d)).

Exercice 9.1.11. (Sous-topos des topos localement noethériens. Cas des espaces noethériens).

a) Soit $f : E' \to E$ un plongement de topos. Montrer que si X est un objet
444 prénoethérien de E (i.e. (VI 1.30) toute suite croissante de sous-objets de x est stationnaire) alors $X' = f^*(X)$ est un objet prénoethérien de E'. (Introduisant les topos induits $E'_{/X'}$ et $E_{/X}$, et utilisant 9.1.6 e), se ramener d'abord au cas où X est l'objet final e de E, donc X' est l'objet final e' de E'. Noter ensuite que toute suite croissante de sous-objets de e' définit, par application de f_*, une suite croissante de sous-objets de $f_*(e') = e$). En conclure que si E admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens (resp. si E est un topos noethérien, resp. localement noethérien (VI 2.11) alors E' satisfait à la même condition. (Utiliser 9.1.9 b)).

b) Soit E un topos localement noethérien (VI 2.11). Montrer que tout sous-topos de E est de la forme E_Z (9.1.8 a)), pour une sous-catégorie pleine convenable Z de $\mathscr{P}oint(E)$. (Utiliser a) et le théorème de Deligne que tout topos localement noethérien admet suffisamment de points). En conclure que si E est de la forme Top(X), où X est un espace topologique sobre localement noethérien, alors $Z \mapsto E_Z$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des sous-espaces sobres de X, avec l'ensemble ordonné des sous-topos de X. (Utiliser 9.1.8 e)). L'intersection de sous-espaces sobres Z_i (est nécessairement sobre et) définit l'intersection des sous-topos E_{Z_i} (contrairement à ce qui peut se passer dans le cas général (9.1.10 c)).

c) Soient X un espace sobre localement noethérien, X' une partie de X, X'' son complémentaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X' est constructible.

(ii) X' et X'' sont sobres.

(iii) X' est sobre, et le sous-topos $E_{X'} \approxeq$ Top(X') de $E =$ Top(X) admet un sous-topos « complémentaire » (cf. 9.1.13.

(iv) L'intersection des sous-topos $E_{X'} \approx$ Top(X') et $E_{X''} \approx$ Top(X'') de $E =$ Top(X) est le sous-topos « vide » de E.

Montrer que si E' et E'' sont deux sous-topos de E, ils sont complémentaires faibles si et seulement si ils sont complémentaires (9.1.13).

445 d) Soit X un espace sobre noethérien. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) Tout sous-espace sobre X' de X est constructible, i.e. (c)) son complémentaire est sobre.

(i bis) Pour tout point maximal x de X, $X - \{x\}$ est sobre, i.e. $\{x\}$ est constructible.

(ii) X est fini.

(iii) Tout sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$ admet un sous-topos complémentaire (cf. 9.1.13).
(iv) Dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$, le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup quelconques.

(Utiliser l'argument de 9.1.10 d), grâce à la formule d'intersection prouvée en b)).

e) Soit X un espace localement noethérien. Montrer que dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$, le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup finis. (Se ramener au cas X sobre, et utiliser b)).

f) Pour tout sous-espace sobre Z de l'espace sobre localement noethérien X, soit T_Z la topologie sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X pour laquelle une famille d'inclusions $U_i \to U$ est couvrante si et seulement si on a $U \cap Z = \bigcup_i U_i \cap Z$. Montrer que $Z \mapsto T_Z$ établit une bijection (renversant les relations d'inclusion) entre l'ensemble des sous-espaces sobres Z de X, et l'ensemble des topologies sur $\mathrm{Ouv}(X)$ plus fines que la topologie canonique T_X. (Utiliser b) et 9.1.2 c)).

g) Soit X un espace topologique sobre. Une partie X' de X est sobre si et seulement si son complémentaire est réunion de parties localement fermées ; si X est localement noethérien, cela signifie aussi que X' est « proconstructible » (EGA IV 1.9.4). Montrer qu'il existe sur X une topologie $T_{\mathrm{cons}'}$, de telle façon que les parties fermées de $X_{\mathrm{cons}'} = (X, T_{\mathrm{cons}'})$ soient les parties sobres de X. Supposons désormais X localement noethérien, $X_{\mathrm{cons}'}$ n'est donc autre que l'espace X_{cons} **446**
de EGA IV 9.1.13. Déduire alors de b) et c) que l'ensemble ordonné Σ des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$ est isomorphe à l'ensemble ordonné des parties fermées de X_{cons}, et dans cette correspondance, les sous-topos admettant un complémentaire correspondent aux parties à la fois ouvertes et fermées de X_{cons}. Montrer que X_{cons} est localement compact, et qu'il est compact si et seulement si X est noethérien i.e. le topos $\mathrm{Top}(X)$ est noethérien.

h) Soit E un topos localement noethérien. Supposons qu'il ait la propriété envisagée dans 9.1.14 b) (condition peut-être toujours remplie...). Montrer que les images essentielles des foncteurs canoniques $\mathscr{P}\!oint(E') \to \mathscr{P}\!oint(E)$, où E' parcourt l'ensemble Σ des sous-topos de E, définissent dans l'ensemble $X = \mathrm{Point}(E)$ des classes d'isomorphie de points de E un ensemble de parties, qui est l'ensemble des parties fermées pour une topologie T_{cons} sur X, et qu'on obtient de cette façon un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble Σ des sous-topos de E et l'ensemble des parties fermées de X_{cons}. En conclure que dans Σ, le Sup de deux éléments est distributif par rapport aux Inf quelconques. Montrer que X_{cons}, qui n'est pas nécessairement $\mathscr{U}$-petit, a un espace sobre associé (4.2.1) qui est $\mathscr{U}$-petit.

Exercice 9.1.12. (Topos finis). Un topos E est dit fini s'il est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, avec C une catégorie finie.

a) (Dictionnaire). Soit $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. Soit (Karfiness) la 2-catégorie définie comme 2-sous-catégorie pleine de la catégorie $(\mathrm{Cat})_{\mathscr{V}}$, formée des catégories éléments de $\mathscr{V}$, qui sont Karoubiennes et équivalentes à une catégorie finie et (Topfin) la 2-catégorie définie comme la 2-sous-catégorie pleine de $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Top})$ (3.3.1) formée des $\mathscr{U}$-topos finis qui sont $\in \mathscr{V}$. Montrer qu'on a des

2-équivalences quasi-inverses l'une de l'autre :

$$C \longmapsto \widehat{C} \, : \, (\text{Karfiness}) \longrightarrow (\text{Topfin}) \tag{9.1.12.1}$$

$$E \longmapsto \mathscr{P}oint(E) \, : \, (\text{Topfin}) \longrightarrow (\text{Karfiness}). \tag{9.1.12.2.}$$

(Utiliser 7.6 h), e)).

447 b) Montrer qu'un topos fini est noethérien VI 2.11.

c) Montrer que tout sous-topos d'un topos fini E est un topos fini. Plus précisément, si E est équivalent à $\widehat{C}$, où C est une catégorie karoubienne finie (ou, plus généralement, équivalente à une catégorie finie), montrer qu'on obtient un isomorphisme ordonné entre l'ensemble des sous-topos E' de E et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines C' de C qui sont karoubiennes (ou, ce qui revient au même, stables dans C par facteurs directs), en associant à toute C' l'image essentielle de $f_* : \widehat{C'} \to \widehat{C}$, où $f : C' \to C$ est le foncteur d'inclusion. (Utiliser 5.6. pour s'assurer que f_* est pleinement fidèle, et b) et 9.1.11 b) pour le fait que tout sous-topos E' de E s'obtient comme indiqué).

d) Soit E un topos fini. Construire sur l'ensemble fini $X = \text{Point}(E)$ des classes d'isomorphie de points de E une topologie qui en fasse un espace topologique sobre, et telle que l'ensemble ordonné des sous-topos de E soit canoniquement isomorphe à l'ensemble des parties fermées de X. (Prendre la « topologie constructible » $\mathscr{C}_{\text{cons}}$ de X, définie via la relation d'ordre $(x \leq y) \Leftrightarrow (x$ est un facteur direct de $y)$, pour laquelle l'adhérence d'un point x est formée des y tels que $y \leq x$). En particulier l'ensemble Σ des sous-topos de E est fini, et le Inf y est distributif par rapport aux Sup quelconques.

e) Soit C une catégorie équivalente à une catégorie finie. Montrer que pour toute sous-catégorie pleine C' de C, il existe sur C une topologie $T_{C'}$ pour laquelle une famille $(X_i \to X)_{i \in I}$ est couvrante si et seulement si pour tout $Y \in \operatorname{Ob} C'$, la famille des applications $\operatorname{Hom}(Y, X_i) \to \operatorname{Hom}(Y, X)$ $(i \in I)$ est surjective. Montrer que la catégorie des faisceaux sur $(C, T_{C'})$ est équivalente à $\widehat{C'}$, et que $C' \mapsto T_{C'}$ est une bijection (renversant les relations d'ordre) entre l'ensemble des sous-catégories strictement pleines C' de C qui sont karoubiennes (ou, ce qui revient au même, stables dans C par facteurs directs), et l'ensemble des to-
448 pologies (II 1.1) sur la catégorie C. (Utiliser c) et 9.1.2 c)). En particulier, si C est un site dont la catégorie sous-jacente est équivalente à une catégorie finie, alors le topos $C^\sim$ est un topos fini.

f) Soit $f : C' \to C$ un foncteur de $\mathscr{U}$-catégories, avec C équivalente à une catégorie finie. Montrer que le morphisme de topos $\widehat{f} : \widehat{C'} \to \widehat{C}$ (4.6) est conservatif si et seulement si tout objet de C est isomorphe à un facteur direct d'un objet dans l'image de f. (Se ramener au cas où f est une inclusion $f : C' \hookrightarrow C$, avec C' comme dans c)).

g) Soit C la catégorie ayant deux objets e (l'objet final) et a, et, en plus des flèches identiques, trois flèches $f : a \to e$, $g : e \to a$, $p = gf$ (donc $p^2 = p$). Montrer que $E = \widehat{C}$ a, en plus des sous-topos E et $\text{Top}(\varnothing)$, exactement un sous-topos E', savoir $E' = \widehat{\{e\}}$; par suite, pour tout sous-topos E'' de E, $E'' \neq \text{Top}(\varnothing)$, on a $E' \cap E'' \neq \text{Top}(\varnothing)$.

Exercice 9.1.13. (Sous-topos complémentaires d'un topos).

Soient E un topos, E' et E'' deux sous-topos. On dit que E' et E'' sont complémentaires l'un de l'autre si $E' \cap E'' = \text{Top}(\varnothing)$, $E' \vee E'' = E$ (où le signe $\vee$ désigne le Sup dans l'ensemble ordonné des sous-topos de E).

On supposera que dans l'ensemble Σ des sous-topos de E, le Inf de deux éléments est distributif par rapport au Sup fini.

a) Si E' et E'' sont complémentaires, E'' est le plus grand parmi les sous-topos E''_1 de tels que $E' \cap E''_1 = \mathrm{Top}(\varnothing)$ (i.e. E'' est un complémentaire faible de E', dans la terminologie de 9.1.10 d)).

b) Montrer que les conditions suivantes sur E sont équivalentes :

(i) Si E' et E'' sont deux sous-topos de E tels que E'' soit un complémentaire faible de E', alors E'' est un complémentaire de E'.

(ii) Pour tout sous-topos E' de E tel que $E' \neq E$, il existe un sous-topos E'' de E tel que $E'' \neq \mathrm{Top}(\varnothing)$ et $E' \cap E'' = \mathrm{Top}(\varnothing)$.

(i bis) Si E' et E'' sont deux sous-topos de E tels que E'' soit maximal dans l'ensemble des sous-topos E''_1 tels que $E' \cap E''_1 = \mathrm{Top}(\varnothing)$, alors E'' est un complémentaire de E.

Montrer que même si E est un topos fini (9.1.12), ces conditions ne sont pas **449**
nécessairement vérifiées (9.1.12 g)). Elles le sont cependant si E est de la forme $\mathrm{Top}(X)$, X un espace localement noethérien. (Utiliser 9.1.11 b)).

c) Un sous-topos E' de E est appelé complémenté s'il admet un complémentaire (comparer 9.1.12 c)). Prouver que l'ensemble des sous-topos complémentés est stable par Inf et Sup finis, et par complémentarité, et que cette dernière transforme Inf en Sup, Sup en Inf.

d) Énoncer les duales des observations a), b), c) (qui étaient en fait des énoncés généraux triviaux sur un ensemble ordonné abstrait Σ ; noter que l'hypothèse faite sur Σ est en fait autoduale).

9.1.14. Questions ouvertes[12]. Soit E un topos.

a) Dans l'ensemble des sous-topos de E, le Inf de deux éléments est-il distributif par rapport aux Sup finis ?

b) Soient E', E'' deux sous-topos de E tels que $E = E' \vee E''$. Alors est-il vrai que tout point de E est isomorphe à l'image d'un point de E' ou d'un point de E'' ?

On notera que si la réponse à b) est affirmative pour E et tout ses sous-topos, alors la réponse à a) est affirmative du moins pour le cas de sous-topos ayant suffisamment de points (donc pour tous les sous-topos, si E est localement noethérien (9.1.11 b)). La réponse à a) (et, à fortiori à b)), n'est pas connue cependant pour tous les topos noethériens. Cependant la réponse à a) et b) est affirmative si E est de la forme $\mathrm{Top}(X)$, X est un espace localement noethérien (9.1.11), ou si E est un topos fini (9.1.12).

On notera que a) peut se reformuler sous la forme suivante (appliquée à tous les sous-topos F de E) :

a') Si E' et E'' sont deux sous-topos d'un topos F, tels que le morphisme canonique (cf. 8.7 b))

$$E' \amalg E'' \longrightarrow F \tag{9.1.14.1}$$

soit conservatif (ce qui signifie aussi $E = E' \vee E''$ (9.1.7.2 e)), alors il en est de même pour le morphisme déduit par 2-changement de base $F_1 \hookrightarrow F$, où F_1 est **450**
un sous-topos de F.

On a une reformulation analogue b') de b), en prenant un changement de base $F_1 \to F$ par un topos ponctuel F_1 (2.2). On voit donc qu'une réponse

[12] N.D.E. : Des réponses positives aux questions a) et d) ont été apportées dans [17].

affirmative à a), b) résulterait d'une réponse affirmative à la question suivante (où on prend pour F n'importe quel sous-topos de E) :

c) Si E' et E'' sont deux sous-topos du topos F, dont le Sup soit F i.e. tel que le morphisme de topos (9.1.14.1) soit conservatif, alors ce morphisme est-il même universellement conservatif, i.e. reste-t-il conservatif après tout 2-changement de base $F_1 \to F$?

Cet énoncé a un sens, grâce au résultat de Deligne (voir [16] proposition 4.47) affirmant l'existence des 2-produits-fibrés de topos. Voir cependant l'exemple 9.1.7.2 d).

D'autre part, on voit par 9.1.11 h) qu'une réponse affirmative à b) fournirait dans le cas localement noethérien une réponse affirmative à la question suivante :

d) Dans l'ensemble ordonné Σ des sous-topos de E, le Inf de deux éléments est-il distributif par rapport aux Sup quelconques (pas nécessairement finis) ?

Cela signifie aussi que Σ s'interprète comme l'ensemble ordonné des « sous-topos fermés » d'un topos convenable $E_{\mathrm{cons}'}$ (savoir $\Sigma^{0^\sim}$, où l'ensemble ordonné opposé Σ^0 de Σ, considéré comme une catégorie, est munie de sa topologie canonique, cf. 7.8 b)), qui est engendré par les sous-objets de l'objet final, donc est très proche d'un espace topologique ordinaire. Il resterait à étudier ce topos $E_{\mathrm{cons}'}$, en s'inspirant des exemples 9.1.11 g) et 9.1.12 d), et notamment à déterminer s'il est noethérien si E l'est, ce qui revient à la question suivante pour les sous-topos F de E, qui a un sens indépendamment de d) :

e) Soient F un topos noethérien, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-topos de E dont l'intersection soit $\mathrm{Top}(\varnothing)$. Alors existe-t-il une sous-famille finie ayant la même propriété ?

451 Dans un ordre d'idées assez différent, rappelons également la question soulevée dans (9.1.6 e)), qui mériterait d'être éclaircie.

9.2. Cas des sous-topos ouverts.

9.2.1. Soit U un ouvert d'un topos E, i.e. un sous objet de l'objet final e de E (8.3). Considérons le morphisme de localisation (5.2)

$$j : E_{/U} \longrightarrow U. \tag{9.2.2}$$

Comme $U \to e$ est ici un monomorphisme, le foncteur $j_!$ (qui s'interprète comme le foncteur oubli) est pleinement fidèle, donc son biadjoint j_* l'est également (I 5.7). En d'autres termes, le morphisme de localisation j (9.2.2) associé à un ouvert U du topos E est un plongement de topos (9.1.1 a)).

Un plongement de topos $F \to E$ est appelé un plongement ouvert s'il est isomorphe au plongement de topos défini par un ouvert U de E. Un sous-topos E' (9.1.1 b)) de E est appelé un sous-topos ouvert s'il est défini à l'aide d'un ouvert de E, i.e. si le morphisme d'inclusion canonique $E' \to E$ est un plongement ouvert. On notera que l'ouvert U de E associé à un plongement ouvert de topos $j : E' \to E$ est déterminé de façon unique comme égal au sous-objet $j_!(e')$ de e, où e' désigne l'objet final de E'. Par suite, on trouve une correspondance biunivoque entre ouverts U de E et sous-topos ouverts de E.

Remarque 9.2.3. Conformément aux définitions précédentes, le sous-topos ouvert de E associé à l'ouvert U de E est la sous-catégorie strictement pleine de E image essentielle du foncteur image directe

$$j_* : E_{/U} \longrightarrow E$$

On se gardera de confondre cette sous-catégorie de E avec la sous-catégorie strictement pleine, image essentielle de $j_!$, formée des objets X de E tels que le morphisme structural $X \to e$ se factorise par U. Il est clair cependant que ces deux sous-catégories se déterminent mutuellement, et qu'elles sont canoniquement équivalentes. C'est pourquoi certains auteurs ont pu être tentés d'appeler (voire, ont pu appeler) « sous-topos ouvert défini par U » la sous-catégorie strictement pleine image essentielle de $j_!$, dont la description en termes de U est plus simple que celle de l'image essentielle de j_*. Cette termi- **452**
nologie ne présente pas d'inconvénient tant qu'on ne se propose pas d'étudier d'autres sortes de sous-topos que des sous-topos ouverts. Comme ce n'est pas notre cas, nous ne suivrons pas ici les auteurs sus-mentionnés.

Pour la commodité du lecteur, nous allons résumer les propriétés spéciales les plus importantes des plongements ouverts :

Proposition 9.2.4. Soit

$$j : \mathcal{U} \longrightarrow E$$

un plongement ouvert de topos (9.2.1). Alors le foncteur $j_!$ adjoint à gauche de j^* existe, de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$j_!, \quad j^*, \quad j_* :$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, shift left=2ex, "j_!"] \arrow[r, shift right=2ex, "j_*"'] & E \arrow[l, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

De plus :

a) Le foncteur $j_!$ et le foncteur j_* sont pleinement fidèles.
b) Le foncteur $j_!$ commute aux produits fibrés, aux produits indexés par des petits ensembles $I \neq \phi$, et aux limites projectives relatives à de petites catégories d'indices co-filtrantes (I 2.7).
c) Pour tout objet X de E, le morphisme d'adjonction

$$j_! j^*(X) \longrightarrow X$$

est un monomorphisme.

Démonstration. On peut supposer que j est le morphisme de localisation défini par un ouvert U de E. Alors a) est mis pour mémoire, b) provient de l'interprétation de $j_!$ comme un foncteur oubli et du fait que $U \to e$ est un monomorphisme. Enfin c) est immédiat en notant que la morphisme envisagé n'est autre que le morphisme déduit de l'inclusion $U \to e$ par le changement de base $X \to e$, compte tenu que par changement de base un monomorphisme est transformé en monomorphisme.

Remarque 9.2.4.1. On peut trouver des plongements de topos $j : E' \to E$ tels que $j_!$ existe, mais que $j_!$ ne commute pas aux produits de deux objets, ni aux limites projectives cofiltrantes (exercice 9.5.9 c)).

9.2.5. Soit maintenant **453**

$$g : E' \longrightarrow E$$

un morphisme de topos quelconque, et soit $U' = g^*(U)$ l'image inverse de l'ouvert U de E. On a vu dans 5.11 que le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} E'/_{U'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g_U"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ E/_U \arrow[r, "j"] & E \end{tikzcd}$$

est 2-cartésien. On en conclut en particulier que l'image inverse par g d'un sous-topos ouvert de E (cf. 9.1.6 d)) est un sous-topos ouvert de E', ou ce qui revient au même, que la notion de plongement ouvert de topos (9.2.1) est stable par 2-changements de base dans la 2-catégorie des $\mathscr{U}$-topos (éléments d'un univers donné $\mathscr{V}$).

Notons aussi que pour que le morphisme de topos $g : E' \to E$ se factorise, à isomorphisme près, par $j : E_{/U} \to E$, il faut et il suffit évidemment que $j' : E'_{/U'} \to E'$ soit une équivalence de catégories, ce qui signifie encore que l'inclusion $U' \hookrightarrow e'$ (= objet final de E') est un isomorphisme. Ceci précise donc 9.1.4, en caractérisant de façon simple l'image essentielle du foncteur envisagé dans loc. cit.

9.2.6. Appliquons 9.2.5 au cas où E' est de la forme $E_{/V}$, où V est un deuxième ouvert de E, g étant le morphisme de localisation. Alors $U' = U \cap V$, et on trouve que le produit 2-cartésien de $E_{/U}$ et $E_{/V}$ sur E s'identifie à $E_{/U\cap V}$. On en conclut qu'une intersection finie de sous-topos ouverts de E est un sous-topos ouvert de E, plus précisément l'application (9.2.6.1)

$$U \longmapsto \text{sous-topos de } E \text{ défini par } U$$

commute aux intersections finies.

Exercice 9.2.7. Prouver que l'application (9.2.6.1) commute également aux Sup quelconques. (Utiliser 9.1.7.2 e)).

454

9.3. Construction du sous-topos fermé complémentaire d'un sous-topos ouvert.

9.3.1. Soient T un espace topologique, et U un ouvert de T, de sorte que $\mathrm{Top}(U)$ s'identifie à un sous-topos ouvert de $\mathrm{Top}(T)$ (notations de 2.1). Soit Y le sous-espace topologique fermé de T complémentaire de U. On peut alors, (à équivalence près) considérer $\mathrm{Top}(Y)$ comme un sous-topos de $\mathrm{Top}(T)$, savoir le sous-topos formé des objets F de $\mathrm{Top}(T)$ dont la restriction à U est l'objet final de U. Cette description d'une sous-catégorie de $E = \mathrm{Top}(T)$ garde un sens chaque fois qu'on a un topos et un ouvert U de celui-ci, et on verra qu'elle fournit toujours un sous-topos de E. De plus, il est immédiat dans le cas particulier envisagé d'abord (et avec la terminologie introduite dans l'exercice 9.1.13) que $\mathrm{Top}(Y)$ et $\mathrm{Top}(U)$ sont des sous-topos complémentaires l'un de l'autre (utiliser 9.2.5 et 9.1.7.2 e)). Il en sera encore de même dans le cas général, et nous verrons que cette propriété caractérise de façon unique le sous-topos envisagé. Il mérite donc à tous points de vue, le nom de sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert envisagé U, ou du sous-topos ouvert défini par U. Le détail de la construction de ce topos $\mathscr{F}$, et du foncteur image inverse $i^* : E \to \mathscr{F}$, sera donné dans la présente section, tandis que la section 9.4 en développera les premières propriétés.

9.3.2. Soient donc, comme dans 9.2.1, E un topos, U un ouvert de E, et considérons le morphisme de localisation

$$j : \mathscr{U} = E_{/U} \longrightarrow E, \tag{9.3.2.1}$$

qui est un plongement ouvert.

Pour tout objet X de E, posons

$$\mathscr{X}_{\complement U} = U \coprod_{U\times X} X, \tag{9.3.2.2}$$

où l'amalgamation est faite pour les projections canoniques

$$\mathrm{pr}_I : U \times X \longrightarrow U, \quad \mathrm{pr}_2 : U \times X \longrightarrow X$$

On a donc un diagramme cocartésien (I 10) dans E, dépendant fonctoriellement de X : **455**

$$\begin{tikzcd} U \times X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X_{\complement U} \end{tikzcd} \tag{9.3.2.3}$$

On notera que dans l'exemple envisagé dans 9.3.1, $X_{\complement U}$ est canoniquement isomorphe à $i_* i^*(X)$ (où $i : Y \to T$ est l'inclusion), et $X \to X_{\complement U}$ s'identifie au morphisme d'adjonction.

Proposition 9.3.3. Avec les notations précédentes, on a ce qui suit :

a) Pour tout objet X de E, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe un objet Y de E et un isomorphisme $X \simeq Y_{\complement U}$.
   (ii) Le morphisme canonique $X \xrightarrow{m} X_{\complement U}$ est un isomorphisme.
   (iii) Le morphisme canonique $\mathrm{pr}_2 : X \times U \to U$ est un isomorphisme (i.e. $j^*(X)$ est un objet final de $E_{/U}$).

b) Pour tout morphisme

$$m : E \longrightarrow X'$$

dans E, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i') Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ X_{\complement U} \arrow[r] & X'_{\complement U} \end{tikzcd}$$

   est cartésien.
   (ii') Le morphisme $m \times \mathrm{id}_U : X \times U \to X' \times U$ est un isomorphisme, i.e. $j^*(m)$ est un isomorphisme.

c) le foncteur

$$X \longrightarrow X_{\complement U}$$

de E dans E est exact à gauche, transforme les familles épimorphiques en familles épimorphiques, commute aux limites inductives filtrantes et aux sommes **456** amalgamées.

Démonstration. On démontre d'abord la proposition dans le cas où E est de la forme $\widehat{C}$, où C est une petite catégorie, et pour cela on est ramené par I.3.1 au cas où E est le topos « ponctuel » (Ens), où la proposition est évidente. On passe de là au cas général par les procédés standard de II 4, par utilisation du foncteur « faisceau associé ».

Proposition 9.3.4. Avec les notations de 9.3.2, la sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{F}$ de E définie par les sous-objets X de E tels que $j^*(X)$ soit un objet final de $\mathcal{U}$ (cf. 9.3.3 a)) est un sous-topos de E, i.e. (9.1.1)) c'est un topos, et le foncteur d'inclusion $i_* : \mathcal{F} \to E$ est le foncteur image directe par un morphisme de topos $i : \mathcal{F} \to E$, dont le foncteur image réciproque est le foncteur $X \mapsto i^*X = X_{\complement U}$. Le morphisme d'adjonction $X \to i^*i_*X$ est le morphisme canonique $X \to X_{\complement U}$ de (9.3.2.3)

Démonstration : Pour tout objet X de E, désignons par $u(X)$ le morphisme canonique $X \to X_{\complement U}$. Le morphisme $u(X)$ est fonctoriel en X et pour tout objet X, $u(X_{\complement U})$ est un isomorphisme. Il résulte alors formellement et trivialement de ces deux propriétés que le foncteur i^* est adjoint à gauche au foncteur i_* et que le morphisme d'adjonction est $u(X)$. Comme le foncteur $X \to X_{\complement U}$ est exact à gauche, le foncteur i^* est exact à gauche. Il résulte alors de II 5.5 que $\mathcal{F}$ est un topos, et de la définition 3.1 que le couple (i^*, i_*) est un morphisme de topos.

9.3.5. Le sous-topos $\mathcal{F}$ de E décrit dans 9.3.4 est appelé le sous-topos fermé de E complémentaire de l'ouvert U de E, ou (au choix) du sous-topos ouvert de E correspondant à U. Conformément à 9.1.1 b), le morphisme $i : \mathcal{F} \to E$ construit dans 9.3.4 est appelé le morphisme d'inclusion. Une sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de E est appelé un sous-topos fermé de E s'il existe un ouvert U de E tel que $\mathcal{F}$ soit le sous-topos fermé complémentaire de U. On notera que cet U est déterminé de façon unique comme $i_*(\phi_{\mathcal{F}})$, où $\phi_{\mathcal{F}}$ est l'objet initial de $\mathcal{F}$, égal à $i^*(\phi_E)$; on l'appelle aussi l'ouvert de E com-
457 plémentaire du sous-topos fermé $\mathcal{F}$ et le sous-topos de E défini par U s'appelle aussi le sous-topos ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}$. Enfin, un plongement de topos (9.1.1 a)) $i : F \to E$ est dit plongement fermé si le sous-topos correspondant de E est fermé.

Si G est un Groupe sur E, $s \in \mathrm{Hom}(e_E, G)$, on appelle support de G (resp. de s) le sous-topos fermé de E complémentaire de l'ouvert cosupport de G (resp. s) (8.5.1, 8.5.2).

9.3.6. Avec les notations de 9.3.2 et 9.3.4 on trouve donc deux morphismes de topos

$$\mathcal{U} \xrightarrow{j} E \xleftarrow{i} \mathcal{F}, \tag{9.3.6.1}$$

définissant cinq foncteurs formant deux suites de foncteurs adjoints $(j_!, j^*, j_*)$ et (i^*, i_*) :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, shift left=2, "j_!"] \arrow[r, shift right=2, "j_*"'] & E \arrow[l, "j^*" description] \arrow[r, shift left, "i^*"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift left, "i_*"] \end{tikzcd} \tag{9.3.6.2}$$

Le foncteur

$$\rho = i_*j^* : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F} \tag{9.3.6.3}$$

est appelé le foncteur de recollement relatif à l'ouvert U de E ; plus généralement si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont deux topos quelconques, un foncteur $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est appelé foncteur de recollement s'il est exact à gauche et accessible (I.9.2), ou ce qui revient au même (I 8), s'il admet un pro-adjoint. Les raisons de cette terminologie vont apparaître dans 9.4.1 d) et 9.5.4 ci-dessous.

9.4. Premières propriétés du sous-topos fermé $\mathcal{F}$ et de $i : \mathcal{F} \to E$.

Proposition 9.4.1. Les notations sont celles de 9.3.2 et 9.3.4

a) Le foncteur $i_* : \mathcal{F} \to E$ transforme les familles épimorphiques en familles épimorphiques. Il commute à la formation des sommes amalgamées et des limites inductives filtrantes.
b) Pour tout objet X de E tel que le morphisme de projection $U \times X \to U$ soit un épimorphisme, le morphisme d'adjonction $X \to i_*i^*X$ est un épimorphisme.

c) Le couple de foncteurs (i^*, j^*) de E dans $\mathscr{F}$ et $\mathscr{U}$ respectivement est conservatif 458
(I 6.1) i.e. un morphisme m de E est un isomorphisme si et seulement si $i^*(m)$ et $j^*(m)$ sont des isomorphismes (ceci équivaut à dire que le couple de foncteurs (i^*, j^*) est fidèle (6.4.0)).

d) Le foncteur de recollement $\rho = i^* j_* : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$ est un foncteur exact à gauche et accessible (I 9.2), ou ce qui revient au même (I 8.) il admet un pro-adjoint $\sigma : \operatorname{Pro} \mathscr{F} \to \operatorname{Pro} \mathscr{U}$.

Démonstration : a) résulte le 9.3.3 c). Pour démontrer b) il suffit de se reporter à la définition (9.3.2.2) de $X_{\complement U}$ compte-tenu de ce que $i_* i^* X = X_{\complement U}$ (9.3.4). L'assertion c) résulte de 9.3.3 b). Les foncteurs i_* et j_* sont exacts à gauche et par suite ρ est exact à gauche. Le foncteur j_* est un foncteur image directe par un morphisme de topos et par suite il est accessible (I 9.5) ; on note qu'un topos est une catégorie accessible (I 9.11.3)). Comme le foncteur i^* commute aux limites inductives (c'est un foncteur image réciproque), le foncteur ρ composé de deux foncteurs accessibles est accessible.

Proposition 9.4.2. Soit E' un topos. Alors le foncteur $h \mapsto i \circ h$:

$$\operatorname{Homtop}(E', \mathscr{F}) \longrightarrow \operatorname{Homtop}(E', E)$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des morphismes de topos $g : E' \to E$ tels que $g^*(U)$ soit un objet initial $\phi_{E'}$ de E'.

Par 9.1.4, on sait que le foncteur envisagé est pleinement fidèle et que g est dans son image essentielle si et seulement si pour tout objet X' de E', l'objet $g_*(X')$ de E appartient à $\mathscr{F}$, i.e. qu'on a

$$(*) \qquad j^*(g_*(X')) \simeq e_{\mathscr{U}} \text{ pour tout } X' \in \operatorname{Ob} E'.$$

Or, posons $U' = g^*(U)$, et considérons le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} E'_{/U'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g_U"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ E_{/U} \arrow[r, "j"] & E \end{tikzcd},$$

il est clair qu'on a un isomorphisme canonique 459

$$j^*(g_*(X')) \simeq g_{U_*}(j'^*(X')),$$

d'autre part il est immédiat aussi que le foncteur j'^* est essentiellement surjectif, donc la condition (**) équivaut à la condition

$$(**) \qquad g_{U*}(Y') \simeq e_{\mathscr{U}} \text{ pour tout } Y' \in \operatorname{Ob} E'_{/U'}.$$

Utilisant la propriété d'adjonction de g_{U*} et g_U^*, on voit aussitôt que cela signifie que $g_U^*(Y)$ est un objet initial de $E'_{/U'}$ pour tout objet Y de $E_{/U}$, ou encore (utilisant que l'objet initial de $E'_{/U'}$ est strict (II 4.5) qu'il en est ainsi pour $Y = e_{\mathscr{U}}$, objet final de $\mathscr{U}$. Mais cela signifie aussi que l'objet final U' de $E'_{/U'}$ est initial, ou, ce qui revient manifestement au même, si et seulement si U' est un objet initial $\phi_{E'}$ de E'. C.Q.F.D.

Corollaire 9.4.3. Soient $g : E' \to E$ un morphisme de topos $U' = g^*(U)$, $\mathscr{U}' = E'_{/U'}$ et $\mathscr{F}'$ le sous-topos fermé de E' complémentaire de l'ouvert U', enfin $i' : \mathscr{F}' \to E'$ le morphisme d'inclusion. Alors le morphisme de topos $g \circ i' : \mathscr{F} \to E$ se factorise à isomorphisme près en un morphisme de topos $g_{\mathscr{F}} : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$, et le diagramme de topos correspondant

(9.4.3.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g_{\mathscr{F}}"'] & E' \arrow[d, "g"] \\
\mathscr{F} \arrow[r, "i"] & E
\end{tikzcd}$$

est 2-cartésien (cf. 5.11).

Résulte formellement de 9.4.2 et des définitions.

Avec la terminologie introduite dans 9.1.6 d), on peut donc dire, en particulier, que l'image inverse par un morphisme de topos $g : E' \to E$ d'un sous-topos fermé $\mathscr{F}$ de E est un sous-topos fermé $\mathscr{F}'$ de E' (savoir le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert $U' = g^*(U)$, où U est l'ouvert de E complémentaire de $\mathscr{F}$).

Corollaire 9.4.4. Soient E un topos, $\mathscr{U}$ un sous-topos ouvert de E, $\mathscr{F}$ le sous-topos fermé complémentaire.

460 a) On a
$$\mathscr{U} \cap \mathscr{F} \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing) \quad , \quad \mathscr{U} \vee \mathscr{F} = E,$$
où le signe $\vee$ désigne le Sup dans l'ensemble de tous les sous-topos de E (9.1.2 c)). (Avec la terminologie introduite dans 9.1.13, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$ sont des sous-topos de E complémentaires l'un de l'autre).

b) $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{F}$) est le plus-grand parmi les sous-topos E' de E tels que l'on ait $E' \cap \mathscr{F} \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$ (resp. $\mathscr{U} \cap E' \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$).

Démonstration.

a) la première relation revient à dire que si E' est un topos et $g : E' \to E$ est un morphisme de topos qui se factorise à isomorphisme près par $\mathscr{U}$ et par $\mathscr{F}$, alors $E' \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$; or en vertu de 9.2.5 et 9.4.2, l'hypothèse signifie que $g^*(U)$ est à la fois un objet initial et un objet final de E', d'où la conclusion. Pour la deuxième relation, on note que par 9.1.7.2 e) elle équivaut à 9.4.1 c).

b) Supposons que $E' \cap \mathscr{F} \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$; en vertu de 9.4.3 $E' \cap \mathscr{F}$ est équivalent au sous-topos de E' complémentaire de $g^*(U)$, où $g : E' \to E$ est le morphisme d'inclusion, donc la condition envisagée signifie que $U' = g^*(U)$ est un objet final de E', i.e. (9.2.5) que $E' \subset \mathscr{U}$. Supposons que $\mathscr{U} \cap E' \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$; en vertu de 5.11 $\mathscr{U} \cap E'$ est équivalent à $E'_{/U'}$, donc la condition envisagée signifie que U' est objet initial de E', i.e. (9.4.2) que $E' \subset \mathscr{F}$.

Corollaire 9.4.5. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i \in 1}$ une famille de sous-topos fermés du topos E, et pour tout $i \in 1$, soit U_i l'ouvert de E complémentaire de $\mathscr{F}_i$. Alors le sous-topos de E intersection de $\mathscr{F}_i$ (9.1.3) est un sous-topos fermé, dont l'ouvert complémentaire est $U = \mathrm{Sup}_i U_i$.

Cela résulte formellement de la propriété universelle de l'intersection comme 2-produit et de 9.4.2, compte tenu que pour un morphisme de topos $g : E' \to E$, $g^*(U) = \mathrm{Sup}_i g^*(U_i)$ est un objet initial si et seulement si les $g^*(U_i)$ le sont.

On prouve de façon analogue :

461 Corollaire 9.4.6. Avec les notations de 9.4.5 supposons I fini. Alors le sous-topos de E borne supérieure de $\mathscr{F}_i$ (9.1.2 c)) est un sous-topos fermé de E, dont l'ouvert complémentaire est égal à $\bigcup_i U_i$.

Exercice 9.4.7. (Recollement de sous-topos). Soit E un topos.

a) Soient E' un sous-topos de E, $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de E recouvrant l'objet final, et pour tout $i \in I$, soit S'_i l'image inverse de S_i dans E', et $E'_i \approx E'_{/S'_i}$ le sous-topos de $E_i = E_{/S_i}$ image inverse par le morphisme de localisation $E_i \to E$ du sous-topos E' de E (9.1.6 d) et 5.11). Montrer que pour un objet X de E, X appartient à E' si et seulement si pour tout $i \in I$, l'image inverse $X|S_i$ de X dans E_i appartient à E'_i.

b) Supposons que E soit de la forme $C^\sim$, où C est un $\mathscr{U}$-site. Montrer que le préfaisceau sur C

$$S \mapsto \text{ensemble des sous-topos du topos } (C_{/S})^\sim \approx E^\sim_{/\varepsilon(S)}$$

est un faisceau. E étant de nouveau quelconque, en conclure qu'il existe un élément de E qui représente le foncteur

$$S \mapsto \text{ensemble des sous-topos du topos } E_{/S};$$

c) Avec les notations de a), montrer que pour que le sous-topos E' de E soit un sous-topos ouvert (resp. un sous-topos fermé), il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, il en soit de même du sous-topos induit E'_i de E_i.

Exercice 9.4.8. (Intérieur, extérieur, adhérence et frontière d'un sous-topos.) Soient E un topos, E' un sous-topos, $i : E' \to E$ le morphisme d'inclusion.

a) Montrer que $i_*(\phi_{E'})$ est le plus grand ouvert U de E tel que l'on ait $E'|\mathscr{U} \approx \mathrm{Top}(\varnothing)$, où $\mathscr{U}$ est le sous-topos ouvert de E défini par U. On appellera cet U, ou $\mathscr{U}$, l'extérieur du sous-topos E' de E, et le sous-topos fermé de E complémentaire de U l'adhérence de E'.

b) Montrer qu'il existe un plus grand ouvert V de E tel que le sous-topos ouvert correspondant $\mathscr{V}$ de E soit contenu dans E'. (Utiliser 9.2.7) On appellera ce V, ou $\mathscr{V}$, l'intérieur du sous-topos E' de E. Les ouverts U et V de E sont disjoints ($U \cap V = \phi_E$) ; le sous-topos fermé de E complémentaire de $\mathrm{Sup}(U, V) = \mathscr{U} \amalg \mathscr{V}$ **462**
s'appelle la frontière du sous-topos E' de E.

c) Pour que E' soit un sous-topos ouvert (resp. fermé) de E, il faut et il suffit qu'il soit égal à son intérieur (resp. qu'il soit égal à son adhérence). Pour que la frontière de E' soit vide, il faut et il suffit que E' soit un sous-topos ouvert et fermé de E, ou encore, qu'il soit le sous-topos ouvert de E défini par un ouvert V de E qui soit sommande direct de l'objet final e, i.e. tel qu'il existe un sous-objet V de e avec $e \simeq U \amalg V$. Pour que l'extérieur de E' soit « vide » i.e. pour que l'adhérence soit égale à E, il faut et il suffit que $i : E' \to E$ soit dominant (8.8).

d) Soient S un objet de E, $F = E_{/S}$ le topos induit, $F' \simeq F_{/S'}$ le sous-topos de F induit par le sous-topos E' de E. Montrer que l'extérieur (resp. l'adhérence, resp. l'intérieur, resp. la frontière) de F' est induit par l'extérieur (resp. ...) de E'.

Exercice 9.4.9. (Sous-topos localement fermés d'un topos.) Un sous-topos F d'un topos E est dit sous-topos localement fermé de E s'il est une intersection d'un sous-topos ouvert et d'un sous-topos fermé.

a) Prouver que l'intersection d'une famille finie de sous-topos localement fermés de E est localement fermé. Si $g : E' \to E$ est un morphisme de topos, prouver que l'image inverse (9.1.6 d)) d'un sous-topos localement fermé de E est un sous-topos localement fermé de E'.

b) Soient X un espace topologique, et $E = \mathrm{Top}(X)$. Pour toute partie X' de X, considérons le sous-topos $T(X')$ de E image essentielle de $\mathrm{Top}(X')$ dans $\mathrm{Top}(X)$. Montrer que si X' est une partie localement fermée, $T(X')$ est un sous-topos localement fermé de E, la réciproque étant vraie si on suppose de plus X et X' sobres. Prouver que $X' \mapsto T(X')$ établit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des parties localement fermées X' de X et l'ensemble des sous-topos localement fermés de E.

463 c) Soit F un sous-topos de E. Monter que tout sous-topos ouvert de F est induit par un sous-topos ouvert de E. (Utiliser 9.1.8 c)). Montrer que F est un sous-topos localement fermé de E si et seulement si c'est un sous-topos ouvert de son adhérence (9.4.8 a)). En conclure, en utilisant 9.4.8 d), que la propriété pour F d'être un sous-topos localement fermé de E est une propriété locale sur E.

d) Soit F un sous-topos localement fermé de E. Montrer que parmi toutes les façons d'écrire F comme un intersection d'un sous-topos ouvert $\mathscr{U}$ et d'un sous-topos fermé $\mathscr{F}$ de E, il en est une avec $\mathscr{U}$ le plus grand possible, et $\mathscr{F}$ le plus petit possible. (Prendre $\mathscr{F}$ = adhérence de F, et $\mathscr{U}$ = plus grand sous-topos ouvert induisant sur $\mathscr{F}$ le sous-topos F.) Compatibilité de la formation de $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ avec la localisation sur E.

Exercice 9.4.10. Développer la notion de sous-topos constructible, localement constructible, quasi-constructible, localement quasi-constructible, sur le modèle des notions familières dans le cas des espaces topologiques (EGA O_{III} 9.1, EGA IV 10.1). Dans le cas d'un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$, on retrouvera une bijection entre l'ensemble des parties constructibles (resp. ...) de X, et l'ensemble des sous-topos constructibles (resp. ...) de $\mathrm{Top}(X)$.

9.5. Le théorème de recollement.

9.5.1. Soit $f : A \to B$ un foncteur entre deux catégories. Désignons par (B, A, f) la catégorie suivante : les objets de (B, A, f) sont les triples

$$(X, Y, u)$$

où X est un objet de B, Y un objet de A, et u un morphisme de X dans $f(Y)$; les morphismes entre deux objets (X, Y, u) et (X', Y', u') sont les couples (m, m'), où m est un morphisme de X dans X' et m' un morphisme de Y dans Y', tels que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & f(Y) \arrow[d, "f(m')"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & f(Y') \end{tikzcd}$$

464 la composition des morphismes est définie de la manière évidente.

9.5.2. Remarquons que la catégorie (B, A, f) dépend de manière fonctorielle du système des données A, B, f, en un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser. En particulier, si f' est un deuxième foncteur de A dans B, alors tout morphisme de foncteurs

$$f \xrightarrow{u} f'$$

définit un foncteur $(A, B, f) \to (A, B, f')$, qui est un isomorphisme si $u : f \to f'$ l'est.

9.5.3. Revenons à la situation de 9.3, et considérons la catégorie $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ définie dans 9.5.1. À chaque objet X de E correspond un objet $(i^*X, j^*X, h(X) : i^*X \to \rho j^*X)$ de $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ où $h(X)$ s'obtient en transformant par le foncteur i^* le morphisme d'adjonction $X \to j_*j^*(X)$ (on a $\rho = i^*j_*$ 9.3.6.3). On a donc défini ainsi un foncteur

$$\boldsymbol{\Phi} : E \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho). \tag{9.5.3.1}$$

Théorème 9.5.4. a) Soient E un topos, $\mathscr{U}$ un sous-topos ouvert de E, $\mathscr{F}$ le sous-topos fermé complémentaire. Le foncteur

$$\rho = i^*j_* : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{F}$$

est exact à gauche et accessible et le foncteur $\boldsymbol{\Phi}$ (9.5.3.1) est une équivalence de catégories.

b) Réciproquement, soient $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$ deux topos et $\rho : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$ un foncteur de recollement (9.3.6) (i.e. accessible (I 9.2) et exact à gauche). La catégorie $E = (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ est un topos. Soient $\phi_{\mathscr{F}}$ un objet initial de $\mathscr{F}$, $e_{\mathscr{U}}$ un objet final de $\mathscr{U}$, et soit $U = (\phi_{\mathscr{F}}, e_{\mathscr{U}}, \phi_{\mathscr{F}} \to \rho(e_{\mathscr{U}})) \in \operatorname{Ob} E$. Le foncteur $X \mapsto (\phi_{\mathscr{F}}, X, \phi_{\mathscr{F}} \to \rho(X))$ induit une équivalence de $\mathscr{U}$ sur $E_{/U}$, donc avec le sous-topos ouvert $\mathscr{U}'$ de E défini par U. Le foncteur $Y \mapsto (Y, e, Y \to \rho(e))$ est un plongement fermé (9.3.5), i.e. induit une équivalence de $\mathscr{F}$ avec un sous-topos fermé $\mathscr{F}'$ de E. Les sous-topos $\mathscr{U}'$ et $\mathscr{F}'$ sont complémentaires. Soit $\rho' : \mathscr{U}' \to \mathscr{F}'$ le foncteur 465
de recollement. Les foncteurs ρ et ρ' sont compatibles avec les équivalences explicitées ci-dessus.

Définition 9.5.5. Soient $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$ deux topos et $\rho : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$ un foncteur de recollement (9.3.6). Le topos $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ est appelé le topos construit à partir de $\mathscr{U}$ et de $\mathscr{F}$ par recollement à l'aide du foncteur ρ.

9.5.6. Démonstration de 9.5.4 a) [12] La première assertion n'est qu'un rappel de 9.4.1 d). Le couple de foncteurs (i^*, j^*) est conservatif, ou encore, fidèle (9.4.1 c)). A fortiori le foncteur $\boldsymbol{\Phi}$ est fidèle. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Il résulte de 9.3.3 b) que, pour tout objet X de E, le diagramme ci-après est cartésien :

(∗)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*X \arrow[d] \\ i_*i^*X \arrow[r] & i_*i^*j_*j^*X; \end{tikzcd}$$

Soient alors X et Y deux objets de E, et (m, m') :

$$\begin{tikzcd} i^*X \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & i^*j_*j^*X \arrow[d, "i^*j_*m'"'] \\ i^*Y \arrow[r] & i^*j_*j^*Y; \end{tikzcd}$$

un morphisme entre $\boldsymbol{\Phi}(X)$ et $\boldsymbol{\Phi}(Y)$. En utilisant la fonctorialité du produit cartésien et les diagrammes (∗), on obtient un morphisme $w : X \to Y$ qui rend commutatif les

[12]Pour un énoncé de recollement plus général que 9.5.5, cf. exercice[13].

diagrammes ci-après :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dash, "w"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ j_*j^*X \arrow[r, "j_*m'"] & j_*j^*Y, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, dash, "w"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ i_*i^*X \arrow[r, "i_*m"] & i_*i^*Y \end{tikzcd}$$

466 En appliquant respectivement les foncteurs j^* et i^* on obtient : $j^*w = m'$, $i^*w = m$. Montrons maintenant que le foncteur Φ est essentiellement surjectif. Soit $(Y, X, u : Y \to i^*j_*(X))$ un objet de $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, i^*j_*)$. On en déduit un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & j_*X \arrow[d] \\ i_*Y \arrow[r, "i_*u"] & i_*i^*j_*X \end{tikzcd}$$

D'où, en prenant le produit fibré, un diagramme cartésien :

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & j_*X \arrow[d] \\ i_*Y \arrow[r, "i_*u"] & i_*i^*j_*X \end{tikzcd}$$

Nous laissons au lecteur, le soin de montrer que $\Phi(W)$ est isomorphe à $(Y, X, u : Y \to i^*j_*(X))$ et que le diagramme $(**)$ est isomorphe au diagramme $(*)$ relatif à W.

9.5.7. Démonstration de 9.5.4 b). Nous nous bornerons à montrer que $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ est un topos. La démonstration des autres assertions est laissée au lecteur. Vérifions les propriétés a), b), c), d) de 1.1.2.

a) Les limites projectives finies sont représentables : Clair car les catégories $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$ sont des topos et ρ commute aux limites projectives finies.

b) Les sommes directes sont représentables, disjointes et universelles : Soit $(Y_i \xrightarrow{u_i} \rho(X_i))$, $i \in I$, une famille d'objets de $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$. Par définition des limites inductives, on a un morphisme canonique

$$\coprod_{i\in I} \rho(X_i) \longrightarrow \rho(\coprod_{i\in I} X_i)$$

467 d'où, en composant avec le morphisme $\coprod u_i$, un morphisme

$$n : \coprod_{i\in 1} Y_i \longrightarrow (\coprod_{i\in I} X_i).$$

On vérifie immédiatement que ce dernier objet est la somme directe de la famille considérée, et que cette somme directe est disjointe et universelle.

c) Les relations d'équivalence sont effectives et universelles :

Soit

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & Y \arrow[d, "w"] \\ \rho(R_2) \arrow[r, shift left, "f(u)"] \arrow[r, shift right, "f(v)"'] & \rho(X) \end{tikzcd}$$

une relation d'équivalence sur l'objet $Y \xrightarrow{w} \rho(X)$. La relation $R_1 \rightrightarrows Y$ est alors une relation d'équivalence sur Y dans $\mathscr{F}$, et la relation $R_2 \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} X$ est un relation d'équivalence sur X dans $\mathscr{U}$. Les quotients Y/R_1, $\rho(X)/\rho(R_2)$, X/R_2 sont représentables dans $\mathscr{F}$ et $\mathscr{U}$ car ces catégories sont des topos. De plus, par définition des limites inductives, le morphisme canonique $\rho(X) \to \rho(X/R_2)$ se factorise par $\rho(X)/\rho(R_2)$. On en déduit, par la fonctorialité des limites inductives, un morphisme canonique $Y/R_1 \xrightarrow{t} \rho(X/R_2)$. On vérifie que ce dernier objet est le quotient de $Y \xrightarrow{w} \rho(X)$ par la relation d'équivalence considérée, que ce quotient est effectif (I 10) et que toutes ces propriétés sont conservées par changement de base.

d) $(\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ admet une petite famille génératrice. Cette propriété résulte de I 9.25 (compte tenu de ce que ρ est accessible), en prenant $B = \Delta_1 = (0 \xrightarrow{f} 1)$, $E_0 = \mathscr{F}$, $E_1 = \mathscr{U}$, $f^* = \rho : E_1 \to E_0$, d'o $\mathscr{H}om_B(B, E) = (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$.

On peut aussi éviter le recours à I 9.25 (dont la démonstration donnée était assez pénible !) et utiliser l'hypothèse sur ρ sous la forme que ρ admet un pro-adjoint

$$\sigma : \operatorname{Pro}(\mathscr{F}) \longrightarrow \operatorname{Pro}(\mathscr{U}),$$

(cette interprétation (I 8) reposant sur (I 9), dont la démonstration est nette- **468**
ment plus compréhensible). Il suffit alors de noter que si C' (resp. C'') est une sous-catégorie génératrice de $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{F}$), et si pour tout $X'' \in \operatorname{Ob} C''$, on représente $\sigma(X'')$ sous forme d'un système projectif $(\sigma(X'')_i)_{i \in I(X')}$, où $I(X')$ est un petit ensemble ordonné filtrant, alors la famille des objets de E qui sont, soit de la forme $(\phi_{\mathscr{F}}, X', \phi_{\mathscr{F}} \to \phi(X'))$ avec $X' \in \operatorname{Ob} C'$, soit de la forme $(X'', \sigma(X'')_i, u_{X''} : X'' \to \rho(\sigma(X'')_i)$, où $X'' \in \operatorname{Ob} C''$, $i \in I(X'')$, et $u_{X''}$ correspond par adjonction au morphisme canonique $\sigma(X'') \to \sigma(X'')_i$, –est une famille génératrice (évidemment petite) si C', C'' sont choisis petits. La vérification de ce fait est effectivement immédiate, et laissée au lecteur.

. Utilisons les notations de 9.5.7 b), et montrons comment on peut expliciter, à isomorphismes canoniques près de foncteurs, le système de foncteurs (9.3.6.2), où on fait $E = (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$. Le détail des vérifications des assertions ci-dessous (essentiellement mécaniques à l'aide de 9.5.4) est laissé au lecteur.

. Le foncteur

$$i^* : (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho) \longrightarrow \mathscr{F}$$

est donné par

$$i^*(X, Y, u : X \longmapsto \rho(Y)) = X.$$

. Le foncteur

$$i_* : \mathscr{F} \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$$

est donné par $i_*(X) = (X, e, X \to \rho(e))$ (e = objet final de $\mathscr{U}$).

. Le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{id} \longrightarrow i_* i^*$$

est isomorphe au morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & \rho(Y) \arrow[d] \\
X \arrow[r] & \rho(e)
\end{tikzcd}$$

469 . Le foncteur

$$j^* : (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho) \longrightarrow \mathcal{U}$$

est donné par $\quad j^*(X, Y, u : X \longrightarrow \rho(Y)) = Y.$

. Le foncteur

$$j_! : \mathcal{U} \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$$

est donné par $\quad j_!(Y) = (\phi_{\mathcal{F}}, Y, \phi_{\mathcal{F}} \longrightarrow \rho(Y))$

(ϕ objet initial de)

. Le foncteur

$$j_* : \mathcal{U} \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$$

est donné par $\quad j_*(Y) = (\rho(Y), Y, \mathrm{id} : \rho(Y) \longrightarrow \rho(Y)).$

. Le morphisme d'adjonction

$$j_! j^* \longrightarrow \mathrm{id}$$

est isomorphe au morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd}
\phi_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \rho(Y) \arrow[d, "\rho(\mathrm{id})"] \\
X \arrow[r, "u"] & \rho(Y)
\end{tikzcd} .$$

. Le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{id} \longrightarrow j_* j^*$$

est isomorphe aux morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & \rho(Y) \arrow[d, "\rho(\mathrm{id})"] \\
\rho(Y) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \rho(Y)
\end{tikzcd}$$

Exercice 9.5.9. (Propriétés d'exactitude d'un topos recollé.) Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ deux topos, $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ un foncteur de recollement, $E = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ le topos recollé, $j : \mathcal{U} \to E$ et $i : \mathcal{F} \to E$ les morphismes de topos canoniques, de sorte que $\rho = i^* j_*$.

a) Prouver que i^* commute aux (petits) produits (i.e. (1.8 ou I 8) le foncteur i^* admet un adjoint à gauche $i_!$) si et seulement si il en est de même de ρ, i.e. (loc. cit.) si et seulement si ρ admet un adjoint à gauche $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ (ou encore si et
470 seulement si le proadjoint de ρ restreint à $\mathcal{F}$ (9.6.3) se factorise à isomorphisme près par $\mathcal{U}$) : on a alors $\sigma = j^* i_!$. Donc les foncteurs de recollement ρ ayant cette propriété correspondent à isomorphisme près aux foncteurs $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ qui ont un adjoint à droite, i.e. (1.6) qui commutent aux $\mathcal{U}$-limites inductives, ou encore qui sont continus. Lorsque $\mathcal{F}$ est équivalent à un topos $C^{\sim}$, où C est un $\mathcal{U}$-site, ces foncteurs correspondent donc à isomorphisme près aux foncteurs continus $C \to \mathcal{U}$ (III 1.2 et III 1.7).

b) Supposons que le foncteur $i_!$ soit défini. Montrer que pour que $i_!$ commute à un type déterminé de petites limites projectives, il faut et il suffit que $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ y commute. (Pour la nécessité, utiliser que j^* commute aux petites limites projectives ; pour la suffisance, utiliser la description équivalente de E en termes de σ comme formé des triples (Y, X, u) avec $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, $u : \sigma(Y) \to X$.)

c) Déduire de a) et b) un exemple de plongement fermé de topos $i : \mathscr{F} \to E$ tel que $i_!$ existe, mais ne commute ni aux produits fibrés, ni aux limites projectives filtrantes. (Il suffit de trouver un foncteur continu entre deux topos qui ne possède aucune de ces deux propriétés d'exactitude.)

Exercice 9.5.10. (Recollement de topos de la forme $\widehat{C}$.) Soient C une petite catégorie, et $E = \widehat{C}$, qui est un $\mathscr{U}$-topos.

a) Se rappeler que les ouverts U de E correspondent aux cribles C' de C (I 4.1, 8.4.4, $E_{/U}$ étant alors équivalent à $\widehat{C'}$, le foncteur $j^* : E \to E_{/U}$ s'identifiant au foncteur restriction ??, i.e. le morphisme d'inclusion $j : E_{/U} \to E$ étant $\widehat{f} : \widehat{C'} \to \widehat{C}$ (4.6.1), où $f : C' \to C$ est l'inclusion. Soit C'' la sous-catégorie pleine de C complémentaire de C' (i.e. $\operatorname{Ob} C''$ est le complémentaire de $\operatorname{Ob} C'$ dans $\operatorname{Ob} C$), $g : C'' \to C$ l'inclusion. Alors le sous-topos fermé $\mathscr{F}$ de $E = \widehat{C}$, complémentaire du sous-topos ouvert défini par C', est canoniquement équivalent à $\widehat{C''}$, le morphisme d'inclusion $i : \mathscr{F} \to E$ s'identifiant à $\widehat{g} : \widehat{C''} \to \widehat{C}$.

b) Considérer le foncteur 471

$$h : C'^0 \times C'' \longrightarrow (\mathrm{Ens}), \quad h(X', X'') = \operatorname{Hom}_C(X', X''), \tag{9.5.10.1}$$

et noter que C se reconstitue à isomorphisme près, avec sa sous-catégorie pleine C', par la connaissance des catégories C', C'' et du bifoncteur h (ce dernier pouvant être choisi arbitrairement). (Comparer 9.7.1 plus bas.) La donnée de h équivaut à celle d'un foncteur $C'' \to \widehat{C'} = \mathscr{H}om(C'^0, (\mathrm{Ens}))$, ou encore (III 1.2 et III 1.7) à celle d'un foncteur

$$\sigma : \widehat{C''} \longrightarrow \widehat{C'} \tag{9.5.10.2}$$

continu, i.e. (1.6) commutant aux petites limites inductives, ou encore, admettant un adjoint à droite.

$$\rho : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C''}. \tag{9.5.10.3}$$

Montrer que ρ n'est autre que le foncteur de recollement associé au sous-topos ouvert $\widehat{C'}$ de $E = \widehat{C}$.

c) Déduire de a) et b) que si on se donne un foncteur de recollement (9.5.10.3) entre deux catégories de préfaisceaux, d'où un topos recollé E, les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) E est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$.
  (ii) Le foncteur ρ commute aux petits produits (ou encore, il admet un adjoint à gauche (9.5.10.2).
  (iii) Le morphisme d'inclusion $i : \widehat{C''} \to E$ est « essentiel » i.e. i^* commute aux produits, ou encore i^* admet un adjoint à gauche $i_!$.

Lorsqu'il en est ainsi, expliciter une catégorie C telle que $E \approx \widehat{C}$ à l'aide du bifoncteur (9.5.10.1) défini par la restriction de (9.5.10.2) à C''.

d) Montrer qu'un topos obtenu en recollant deux topos ponctuels n'est pas nécessairement équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$.

Exercice 9.5.11. (Morphisme d'un topos recollé dans un topos.)

a) Soient : $\rho : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$ un foncteur entre deux catégories, $E = (\mathscr{F}, \mathscr{U}, \rho)$ la catégorie « recollée » de 9.5.1, et F une catégorie quelconque. Considérer le foncteur $f \mapsto \rho \circ f$: 472

$$\overline{\rho} : \overline{\mathscr{U}} = \mathscr{H}om(F, \mathscr{U}) \longrightarrow \overline{\mathscr{F}} = \mathscr{H}om(F, \mathscr{F}),$$

et définir une équivalence de catégories

$$\mathscr{H}\!om(F,E) \xrightarrow{\approx} (\overline{\mathscr{U}},\overline{\mathscr{F}},\overline{\rho}).$$

b) Soit $f : F \to E$ un foncteur, et considérons ses composés avec les foncteurs canoniques $j^* : E \to \mathscr{U}$ et $i^* : E \to \mathscr{F}$. Montrer que f commute à un type déterminé de limites inductives (supposé représentable dans $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$, donc dans E) si et seulement si $j^* f$ et $i^* f$ y commutent. Montrer que si ρ commute à un type déterminé de limites projectives (qui est donc représentable dans E), alors f y commute si et seulement si il en est de même de $j^* f$ et $i^* f$.

c) Supposons maintenant que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$ soient des topos, et ρ un foncteur de recollement. Soit F un topos, $f : F \to E$ un foncteur. Conclure de b) que f est un foncteur image inverse associé à un morphisme de topos $E \to F$ si et seulement si il en est de même des foncteurs $j^* f : F \to \mathscr{U}$ et $i^* f : F \to \mathscr{F}$. Conclure de ceci et de a) que l'on a une équivalence entre la catégorie $\mathscr{H}\!omtop(E,F)$, et la catégorie des triples (f', f'', u), où f' (resp. f'') est un objet de $\mathscr{H}\!omtop(\mathscr{U},F)$ (resp. $\mathscr{H}\!omtop(\mathscr{F},F)$), et où $u : f''^* \to \rho \circ f'^*$ est un homomorphisme de foncteurs $F \to \mathscr{F}$: si f est un objet de $\mathscr{H}\!omtop(E,F)$, (f', f'', u) le triple correspondant, alors $f' = f \circ j$, $f'' = f \circ i$.

d) Préciser en quel sens on peut dire que c) fournit une caractérisation à équivalence près (dans une 2-catégorie de topos) du topos E en termes du triple $(\mathscr{U},\mathscr{F},\rho)$.

Exercice 9.5.12. (Recollement de deux espaces topologiques.)

a) Soient X un espace topologique, $\rho : \mathrm{Top}(X) \to (\mathrm{Ens}) = \mathrm{Top}(pt)$ un foncteur de recollement, i.e. (I 8) un foncteur proreprésentable, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(X))$ l'objet qui le pro-représente, E le topos déduit de ρ par recollement. Montrer que E est équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$ si et seulement si A est isomorphe à
473 un objet de $\mathrm{Pro}(\mathrm{Ouv}(X))$. En conclure que si X n'est pas vide, on peut trouver ρ tel que E ne soit pas équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$.

b) Plus généralement, considérons un foncteur recollement $\rho : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y)$, avec X, Y deux espaces topologiques. En déduire une application

$$\phi : X \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(Y))$$

(composée de $X \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{P}\!oint(\mathrm{Top}(X)) \to \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(X))$ (6.8.5) et du pro-adjoint σ de ρ. (N.B. pour $x \in X$, $\phi(x)$ s'identifie à la fibre en x du faisceau de recollement (9.6.4) défini par ρ.) Montrer que si E est équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(Z)$, alors ϕ prend ses valeurs dans l'image essentielle de $\mathrm{Pro}(\mathrm{Ouv}(Y))$.

Problème. A-t-on une réciproque ?

9.6. Faisceau de recollement. Nous avons vu dans 9.5.4 que la donnée d'un topos E muni d'un ouvert U revient essentiellement à celle de deux topos $\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$ et d'un foncteur de recollement

$$\rho : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{F} \tag{9.6.1}$$

i.e. d'un foncteur admettant un pro-adjoint

$$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathscr{U}). \tag{9.6.2}$$

D'après le sorite sur les foncteurs proadjoints (I 8), le foncteur ρ est connu à isomorphisme unique près (et par suite le topos recollé $E = (\mathscr{F},\mathscr{U},\rho)$ est connu à équivalence de topos près) quand on connaît le foncteur σ, ou encore, le foncteur induit par σ

(9.6.3) $$\sigma_\circ : \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathscr{U}).$$

Le foncteur σ est déterminé, à isomorphisme unique près, par la propriété de commuter aux petites limites projectives filtrantes et de prolonger le foncteur $\sigma_\circ$. D'autre part, pour qu'un foncteur donné (9.6.3) soit isomorphe à un pro-adjoint, il faut et il suffit évidemment que pour tout objet X de $\mathscr{U}$, le foncteur contravariant

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathscr{U})}(\sigma_\circ(Y), X)$$

sur $\mathscr{F}$ soit représentable, ou encore, que ce soit un faisceau sur $\mathscr{F}$ pour la topologie 474
canonique (1.2 iii)). On voit tout de suite que ceci signifie aussi que le foncteur opposé

(9.6.4) $$\sigma_\circ^\circ : \mathscr{F}^\circ \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathscr{U})^\circ \subset \check{\mathscr{U}} = \mathscr{H}\!om(\mathscr{U}, (\mathrm{Ens}))$$

est un faisceau sur $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathscr{U})^\circ$ (II 6.1). Ainsi, la donnée d'un foncteur de recollement (9.6.1) équivaut aussi (à isomorphisme près) à celle d'un faisceau sur $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathscr{U})^\circ$. Le faisceau ainsi associé à un foncteur de recollement (ou à une situation $(E, U, \mathscr{F})$ comme dans (9.3) s'appelle le faisceau de recollement associé au foncteur de recollement envisagé ρ (resp. à l'ouvert U du topos E).

Exercice 9.6.5. Préciser 9.5.4 en un énoncé de 2-équivalence de 2-catégories, entre la 2-catégorie formée des couples (E, U) d'un topos E et d'un ouvert U dudit, et la 2-catégorie formée des triples $(\mathscr{U}, \mathscr{F}, \rho)$ de topos $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ et d'un foncteur de recollement $\rho : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$ (la description explicite des 2-catégories en question étant à la charge du lecteur). Donner une variante de cet énoncé faisant intervenir la 2-catégorie des triples $(\mathscr{U}, \mathscr{F}, \phi)$, où ϕ est maintenant un faisceau sur $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathscr{U})^\circ$.

9.7. Points d'un topos recollé.

9.7.1. Soient C une catégorie, et

$$u : D' \longrightarrow C \quad , \quad v : D'' \longrightarrow C$$

deux foncteurs pleinement fidèles, tels que les images essentielles C', C'' de u et de v soient telles que

$$\mathrm{Ob}\, C' \cap \mathrm{Ob}\, C'' = \phi \quad , \quad \mathrm{Ob}\, C' \cup \mathrm{Ob}\, C'' = \mathrm{Ob}\, C.$$

Supposons de plus que

$$X' \in \mathrm{Ob}\, C' \quad , \quad X'' \in \mathrm{Ob}\, C'' \Rightarrow \mathrm{Hom}(X'', X') = \phi,$$

ou ce qui revient au même, qu'on ait

$$\mathrm{Hom}(v(A''), u(A')) = \phi \text{ pour } A' \in \mathrm{Ob}\, D', A'' \in \mathrm{Ob}\, D''.$$

Il est alors immédiat que la catégorie C se reconstitue, à isomorphisme canonique près, 475
par la connaissance des catégories C' et C'' et du foncteur

$$(X', X'') \longmapsto \mathrm{Hom}(X', X'') : C'^\circ \times C'' \longrightarrow (\mathrm{Ens});$$

de même, C se reconstitue à équivalence près (celle-ci définie à isomorphisme unique près) par la connaissance de D', D'' et du foncteur

$$(A', A'') \longmapsto \mathrm{Hom}(u(A'), v(A'')) : D'^\circ \times D'' \longrightarrow (\mathrm{Ens}).$$

Cette remarque s'applique en particulier à la situation décrite dans la proposition suivante, et nous montre que la catégorie $\mathscr{P}\!oint(E)$ est déterminée, à équivalence près, par la connaissance des catégories $\mathscr{P}\!oint(\mathscr{U})$ et $\mathscr{P}\!oint(\mathscr{F})$ et d'un certain foncteur

$$\mathscr{P}\!oint(\mathscr{U})^\circ \times \mathscr{P}\!oint(\mathscr{F}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

déduit du foncteur de recollement $\rho : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$.

Proposition 9.7.2. Soient E un topos, U un ouvert de E, $\mathscr{U} = E_{/U}$ et $\mathscr{F}$ le sous-topos fermé de E complémentaire de U. Considérons les foncteurs $p \mapsto p \circ j$ et $q \mapsto q \circ i$ induits par les morphismes d'inclusion $j : \mathscr{U} \to E$ et $i : \mathscr{F} \to E$:

$$u : \mathscr{P}oint(\mathscr{U}) \longrightarrow \mathscr{P}oint(E), \quad v : \mathscr{P}oint(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{P}oint(E). \tag{9.7.2.1}$$

Alors on a ce qui suit :

a) Les foncteurs précédents u et v sont pleinement fidèles, et tout point de E appartient à l'image essentielle de l'un ou l'autre des foncteurs u et v exclusivement.
b) Soient p et q deux points de E, tels que p (resp. q) appartienne à l'image essentielle de u (resp. de v). Alors on a

$$\mathrm{Hom}(q, p) = \phi. \tag{9.7.2.2}$$

c) Soient p (resp. q) un point de $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{F}$). On a alors un isomorphisme, fonctoriel en (q, p) :

$$\mathrm{Hom}(u(p), v(q)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Pro}(\rho)(p), q) \simeq \mathrm{Hom}(p, \sigma(q)), \tag{9.7.2.3}$$

où

$$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathscr{U})$$

est le foncteur (9.6.2) pro-adjoint du foncteur de recollement $\rho : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$, et où

$$\rho : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{F},$$

476 on a identifié (à équivalence près) les catégories $\mathscr{P}oint(\mathscr{U})$, $\mathscr{P}oint(\mathscr{F})$ à des sous-catégories pleines de $\mathrm{Pro}(\mathscr{U})$, $\mathrm{Pro}(\mathscr{F})$ respectivement (6.8.5).

Démonstration

a) La pleine fidélité de u et v est connue (9.1.4). L'assertion sur les images essentielles de u, v résulte des critères 9.2.5 et 9.2.4 pour qu'un point $P \to E$ se factorise à isomorphisme près par $\mathscr{U}$ resp. $\mathscr{F}$, compte tenu du fait que le topos ponctuel P n'a que deux ouverts, savoir l'objet initial et l'objet final de P.
b) Compte tenu de a), l'assertion signifie que si le point $p : P \to E$ se factorise par $\mathscr{U}$, il en est de même de tout point $p' : P \to E$ tel que $\mathrm{Hom}(p', p) \neq \phi$. Or si $\alpha : p' \to p$ il induit $p^*(e_{\mathscr{U}}) \to p'^*(e_{\mathscr{U}})$, et alors $p^*(e_{\mathscr{U}}) = e_p$ implique $p'^*(e_{\mathscr{U}}) = e_p$, C.Q.F.D.
c) Grâce au lemme 9.7.2.4 ci-dessous, appliqué aux inclusions $j : \mathscr{U} \to E$ et $i : \mathscr{F} \to E$, on a un diagramme de foncteurs commutatif à des isomorphismes canoniques près

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Point}(\mathscr{U}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Point}(E) \arrow[d, hook] & \mathrm{Point}(\mathscr{G}) \arrow[l, "v"'] \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Pro}(\mathscr{U}) \arrow[r, "\mathrm{Pro}(j_*)"] & \mathrm{Pro}(E) & \mathrm{Pro}(\mathscr{G}), \arrow[l, "\mathrm{Pro}(i_*)"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs pleinement fidèles canoniques (6.8.5). D'autre part, comme i_* admet un adjoint à gauche i^*, $\mathrm{Pro}(i_*)$ admet un adjoint à gauche $\mathrm{Pro}(i^*)$??, et on obtient finalement des isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(u(p), v(q)) \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(E)}(\mathrm{Pro}(j_*)(p), \mathrm{Pro}(i_*)(q)) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathscr{F})}(\mathrm{Pro}(i^*)(\mathrm{Pro}(j_*)(p)), q) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathscr{F})}(\mathrm{Pro}(i^* j_*)(p), q),\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la première formule (9.7.2.3), la deuxième étant alors triviale par définition de σ comme pro-adjoint de ρ. Cela prouve donc 9.7.2, modulo le

Lemme 9.7.2.4. Soit $f : F \to E$ un morphisme de topos. Alors le diagramme de foncteurs

(9.7.2.4.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Point}(F) \arrow[r, "p\mapsto f\circ p"] \arrow[d] & \mathrm{Point}(E) \arrow[d] \\ \mathrm{Pro}(F) \arrow[r, "\mathrm{Pro}(f_*)"] & \mathrm{Pro}(E) \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près (les flèches verticales désignant les foncteurs pleinement fidèles 6.8.5). 477

La vérification est immédiate à partir des définitions, et laissée au lecteur.

Corollaire 9.7.3. Soit E un topos admettant assez de points, alors il en est de même pour tout sous-topos fermé $\mathscr{F}$ de E. Plus précisément, si $(p_i)_{i\in I}$ est une famille conservative de points de E, alors la famille des points de $\mathscr{F}$, définie par la sous-famille $(p_i)_{i\in J}$ formée des p_i qui proviennent de points de $\mathscr{F}$, est conservative. (Comparer 6.7.3, 6.7.4.)

En effet, soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathscr{F}$ transformée en isomorphisme par les foncteurs fibre associés aux points envisagés de $\mathscr{F}$. Comme $i^*i_* \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$, on voit que $i_*(f) : i_*(X) \to i_*(Y)$ est transformé en isomorphisme par les foncteurs fibre associés aux p_i avec $i \in J$; il en est de même pour les p_i avec $i \in I - J$, i.e. provenant de points de U, puisque j^*i_* est le foncteur constant de valeur l'objet final. Donc $i_*(f)$ est un isomorphisme, donc aussi $f \simeq i^*i_*(f)$, C.Q.F.D.

Remarque 9.7.4. Si E est un topos ayant assez de points, il est clair qu'un ouvert U de E est déterminé quand on connaît la sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}oint(E)$ image essentielle de $\mathscr{P}oint(E_{/U})$; en fait, si C est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}oint(E)$ définissant une famille conservative de points de E, il suffit même de connaître la sous-catégorie $C_{/U}$ des éléments de C appartenant à l'image essentielle de $\mathscr{P}oint(U)$. De ceci et de 9.7.2 a) il résulte qu'un sous-topos fermé $\mathscr{F}$ de E est déterminé quand on connaît l'image essentielle de $\mathscr{P}oint(\mathscr{F})$ dans $\mathscr{P}oint(E)$ ou même seulement l'intersection de celle-ci avec C.

Exercice 9.7.5. Soit E un topos. Pour tout sous-topos F de E, soit $P(F)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Point}(E)$ formé des classes d'isomorphie de points de E qui se factorisent par F. Ainsi, $P(F)$ est homéomorphe à $\mathrm{Point}(F)$ (9.1.8 c)). Montrer que si F est un sous-topos ouvert (resp. fermé, resp. localement fermé (9.4.9)) de E, alors $P(F)$ est une partie ouverte (resp. fermée, resp. . localement fermée) de $\mathrm{Point}(E)$. Montrer que lorsque E 478
a suffisamment de points, il en est de même de tout sous-topos localement fermé de

E, et l'application $F \mapsto P(F)$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-topos ouverts (resp. fermés, resp. localement fermés) de E, et l'ensemble des parties ouvertes (resp. fermées, resp. localement fermées) de Point(E). Généraliser les considérations précédentes au cas où on remplace Point(E) par n'importe quel sous-espace X de Point(E) correspondant à une famille conservative de points de E.

9.8. Compléments sur certains topos liés aux espaces topologiques. Nous indiquons dans ce numéro quelques compléments, qui seront donnés sous forme d'exercices. Il est conseillé au lecteur de les parcourir, pour s'habituer au point de vue des topos dans diverses situations de type classique.

Exercice 9.8.1. (Descente de faisceaux sur un espace topologique.)

Soit $f : X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques $\in \mathscr{U}$, d'où un foncteur

$$f^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X).$$

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f^* est fidèle.
   (ii) f^* est conservatif.
   (iii) $f(X)$ est une partie très dense (EGA IV 10.1.3) de Y.

   Il suffit pour ceci que f ou f_{sob} soit surjectif. Donner un exemple où f^* est fidèle et où $f = f_{\mathrm{sob}}$ n'est pas surjectif (prendre X discret, f injectif, $f(X) =$ ensemble des points fermés de Y, Y un espace topologique noethérien non discret). Donner un exemple où f_{sob} est surjectif mais non f, un autre où f est surjectif mais non f_{sob}.
b) Supposons $f(X)$ très dense dans Y, et sa topologie quotient de celle de X. Prouver que la flèche f de (Esp) est un morphisme de descente pour la catégorie fibrée des faisceaux d'ensembles sur des espaces variables, i.e. que le foncteur f^*
479 induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie Top(Y) dans la catégorie des objets de Top(X) munis d'une donnée de descente relativement à $f : X \to Y$. Se ramener un cas f surjectif, et calquer le raisonnement de VIII 9.1 donné dans le contexte des topologies étales de schémas.) Donner une réciproque.
c) Supposons que $f(X)$ soit très dense dans Y, que sa topologie soit quotient de celle de X, et que les fibres de f soient connexes. Prouver que le foncteur f^* est pleinement fidèle. (Calquer le raisonnement de SGA 1 IX 3.4.) Donner une réciproque, tout au moins si les points de Y sont fermés.
d) Supposons que Y soit réunion d'ouverts Y_i au-dessus desquels X admette des sections. Prouver qu'alors f est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des faisceaux d'ensembles sur des espaces topologiques variables, i.e. que le foncteur envisagé dans c) est même une équivalence de catégories.

Exercice 9.8.2. (Topos quotients d'espaces topologiques. Étendues topologiques.)

a) Soit

$$X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \;\underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}}\; X_0 \tag{9.8.5.1}$$

un objet semi-simplicial tronqué à l'ordre 2 de la catégorie (Esp) des espaces topologiques $\in \mathscr{U}$, d'où par les foncteurs images inverses un diagramme de catégories de faisceaux

$$\mathrm{Top}(X_0) \;\underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}}\; \mathrm{Top}(X_1) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathrm{Top}(X_2),$$

(de façon plus précise, on a une catégorie cofibrée sur la catégorie des simplexes-types Δ_n, $0 \leq n \leq 2$). Montrer que la catégorie $\varprojlim$ de ce diagramme (i.e. la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X_0, munis d'une donnée de descente relativement au diagramme 9.8.2.1, i.e. d'un isomorphisme $p_1^*(F) \simeq p_2^*(F)$ tel que...), est un $\mathscr{U}$-topos T. (Pour un énoncé plus général de stabilité des topos par opérations $\varprojlim$, cf. VI 8 Définir un morphisme de topos q : $\mathrm{Top}(X_0) \to T$,
et prouver que pour tout $\mathscr{U}$-topos E, $\mathscr{H}omtop(T, E)$ est équivalent via q^* à la 480
catégorie $\varprojlim$ du diagramme suivant de catégories, déduit de (9.8.2.1) :

$$\mathscr{H}omtop(\mathrm{Top}(X_o), E) \rightrightarrows \mathscr{H}omtop(\mathrm{Top}(X_1), E) \overset{\textstyle\rightarrow}{\rightrightarrows} \mathscr{H}omtop(\mathrm{Top}(X_2), E).$$

b) En particulier, soit R une relation d'équivalence dans un objet X de (Esp), i.e. (I 10.9) un sous-objet R de $X \times X$ (N.B. l'inclusion $R \hookrightarrow X \times X$ est continue, mais la topologie de R n'est pas nécessairement induite par celle de $X \times X$), tel que pour tout objet Y de (Esp), $\mathrm{Hom}(Y, R)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}(Y, X)$. On en déduit un diagramme de la forme (9.8.2.1), avec $X_0 = X$, $X_1 = R$, $X_2 = (R, p_2) \times_X R, p_1$, où p_1, p_2 sont les deux projections de R dans X, d'où un topos, qu'on notera $\mathrm{Top}(X)/R$, ou même $\mathrm{Top}(X/R)$, voire X/R, par abus de notations, et qui joue le rôle d'un quotient de X par R, en un sens précisé par a). Supposons que la topologie de R soit induite par celle de $X \times X$, et que, désignant par X/R l'espace topologique quotient ordinaire, X admette localement des sections sur X/R, prouver qu'alors T est équivalent à $\mathrm{Top}(X/R)$. (Utiliser 9.8.1 d)).

c) Soit $H \to X$ un morphisme injectif de groupes topologiques, i.e. un monomorphisme d'objets groupes dans (Esp), et soit R la relation d'équivalence qu'il définit dans X, i.e. $R = H \times X$, avec $p_1 = \mathrm{pr}_1$ et p_2 défini par l'action de H sur X via translations à gauche. Montrer que pour que la topologie de R soit induite par celle de $X \times X$, il faut et il suffit que la topologie de H soit induite par celle de X. Donner des exemples où cette condition n'est pas remplie, et où la topologie quotient ordinaire de X/H est la topologie grossière avec a) $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, et b) $H = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, (« géodésiques du tore »). Prouver que les deux topos obtenus sont équivalents et ne sont pas équivalents à $\mathrm{Top}(X/H)$ (qui est un topos final (2.2), ni à aucun topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$).

d) Soit G un groupe topologique opérant sur un espace topologique X, d'où de façon bien connue un objet semi-simplicial

$$\ldots G \times G \times X \overset{\textstyle\rightarrow}{\rightrightarrows} G \times X \rightrightarrows X.$$

Montrer que le topos T qui s'en déduit en vertu de a) s'identifie à la catégorie 481
des espaces X' à groupe d'opérateurs G au-dessus de X, tels que $X' \to X$ soit un étalement (compatible à l'action de G). En particulier, lorsque G est discret, on retrouve le topos $\mathrm{Top}(X, G)$ de 2.3.

Les considérations qui précèdent justifient la notation $\mathrm{Top}(X)/G$, voire $\mathrm{Top}(X/G)$ ou même simplement X/G, pour le topos précédent T. On fera attention cependant que lorsque G est un groupe discret (pour fixer les idées) opérant proprement sur X, de sorte que l'espace quotient ordinaire X/G possède des propriétés assez raisonnables, le morphisme de topos naturel $T \to \mathrm{Top}(X/G)$ déduit de la caractérisation universelle a) de T n'est une équivalence de topos que si G opère librement i.e. sans points fixes, i.e. lorsque $G \times X \to X \times X$ est un monomorphisme ; donc dans le cas d'une « pré-relation d'équivalence » (ou « groupoïde » au sens de (SGA 3 V 1) qui n'est pas une relation d'équivalence, la notion de passage au quotient au sens des topos (ou « passage au quotient fin ») ne correspond pas en général (via la correspondance $X \to \mathrm{Top}(Y)$) au passage au quotient topologique habituel.

e) Soit T un $\mathscr{U}$-topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe une famille $(S_i)_{i\in I}$ d'objets de T couvrant l'objet final de E, telle que pour tout $i \in I$, le topos induit $T_{/S_1}$ soit équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$, avec $X \in (\mathrm{Esp})$.
   (i') Il existe un $S \in \mathrm{Ob}\, E$ couvrant l'objet final tel que le topos induit $T_{/S}$ soit équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$.
   (ii) Il existe un espace topologique X, et une pré-relation d'équivalence R dans X (au sens de la catégorie (Esp)) qui soit étale (i.e. telle que $p_1 : R \to X$ soit un étalement), tels que T soit équivalent à $\mathrm{Top}(X/R)$, où les notations sont celles de b).

482 On dira alors que le topos T est localement un espace topologique, ou encore que T est une étendue topologique (ou simplement une étendue, si aucune confusion n'est à craindre).

f) Montrer que le topos T construit dans a) a suffisamment de points, et plus précisément, qu'il admet une famille conservative de points paramétrée par le (petit) ensemble X_0. En particulier, toute étendue à une petite famille conservative de points, donc a suffisamment de points. Lorsqu'une étendue T est réalisée sous la forme $\mathrm{Top}(X/R)$ comme dans e) ii), prouver que tout point de T est isomorphe à l'image d'un point de $\mathrm{Top}(X)$, donc est défini par un point ordinaire de X_{sob} (ou encore de X, lorsque X est sobre).

g) Montrer que le topos $\mathrm{Top}(X/G)$ de 2.3 est une étendue. (Utiliser sa description d) ou 7.1.10 c).) Montrer que pour tout $x \in X$, le monoïde des endomorphismes du point de $\mathrm{Top}(X, G) = \mathrm{Top}(X)/G$ défini par x est canoniquement isomorphe au groupe de stabilité G_x de x. En particulier, les points d'une étendue peuvent avoir des groupes d'automorphismes non triviaux. Déterminer $\mathscr{P}\!oint(J)$ pour l'étendue T définie par une prérelation d'équivalence étale dans un espace X, et montrer que tout endomorphisme d'un point de T est un automorphisme.

h) Soit T un topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Pour tout point p de T, tout endomorphisme de p (resp. tout automorphisme de p) est l'identité.
   ii) Pour tout topos S ayant suffisamment de point, et tout morphisme de topos $f : S \to T$, tout endomorphisme de f (resp. tout automorphisme de f) est l'identité.

   Montrer de même que les conditions suivantes sont équivalentes :
   $i')$ Pour deux points p, q de T, il existe au plus un morphisme de p dans q.
483 $ii')$ Pour deux morphismes $f, g : S \rightrightarrows T$ d'un topos S ayant suffisamment de points dans T, il existe au plus un morphisme de f dans g.

   Lorsque ces dernières conditions sont vérifiées, on dit que le topos T est ponctuellement rigide, ou simplement rigide. Montrer que si X est un espace topologique muni d'une pré-relation d'équivalence étale R, l'étendue quotient $T = \mathrm{Top}(X)/R$ est rigide si et seulement si R est une relation d'équivalence.

i) Soient (X, G) un espace topologique à groupe discret d'opérateurs, H un sous-groupe distingué de G tel que l'opération induite de H sur X soit propre et libre, et soient $X' = X/H$, $G' = G/H$, de sorte que G' opère sur X' de façon évidente. Prouver que le morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(X, G) \longrightarrow \mathrm{Top}(X', G')$$

induit par le morphisme canonique $(X, G) \to (X', G')$ d'espaces à opérateurs (4.1.2) est une équivalence de topos.

Montrer que l'ensemble des ouverts du topos $\mathrm{Top}(X/G)$ s'identifie à l'ensemble des ouverts de X stables par l'action de G, ou encore à l'ensemble des ouverts de l'espace topologique quotient X/G. En conclure que $\mathrm{Top}(X/G)$ est connexe si et seulement si toute partie de X à la fois ouverte et fermée et stable sous l'action de G est vide ou égale à X. Lorsque les composantes connexes de X sont ouvertes, $\mathrm{Top}(X/G)$ est connexe si et seulement si G opère transitivement sur l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X ; plus généralement $\pi_0(\mathrm{Top}(X/G))$ (8.7 g)) est un pro-ensemble essentiellement constant isomorphe à l'ensemble quotient $\pi_0(X)/G$.

Montrer que lorsque X est localement connexe et localement simplement connexe, et $T = \mathrm{Top}(X, G)$ connexe i.e. G transitif sur $\pi_0(X)$, alors parmi toutes les façons de réaliser T à l'aide d'un espace à opérateurs (X', G') (cf. ci-dessus pour certaines telles façons), il y en a une, unique à isomorphisme non unique près, pour laquelle X' est connexe et simplement connexe. Montrer que le choix d'un tel (X', G') revient au choix d'un « revêtement universel » de l'objet final de T, et que G' est isomorphe au groupe $\pi_1(T)$ relatif à ce revêtement universel (cf. 2.7.5).
(Hint : montrer que la donnée d'une équivalence de T avec un $\mathrm{Top}(X, G)$ revient **484**
à la donnée d'un G_T-torseur P dans T, et que si (X, G) et P se correspondent, on a une équivalence canonique $\mathrm{Top}(X) - T/P$).

Conclure de ceci une démonstration triviale de la dernière assertion de c). Caractériser les topos T équivalents à des $\mathrm{Top}(X, G)$, où G est un groupe discret opérant sur un espace topologique localement connexe et localement simplement connexe en permutant transitivement les composantes connexes, comme étant les étendues connexes, localement connexes et localement simplement connexes dont le revêtement universel P de l'objet final e_T de T soit tel que le topos induit $T_{/P}$ soit équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$ (ou, comme on dira simplement par abus de langage $T_{/P}$ « est » un espace topologique).

Donner un exemple d'une étendue, localement isomorphe à $\mathbb{R}$, qui est connexe et simplement connexe mais qui n'est pas un espace topologique. (Prendre le revêtement universel de la droite $\mathbb{R}$ avec origine dédoublée.)

j) Un topos annelé $(T, \mathscr{O}_T)$ (cf. § 11) est appelé une étendue différentiable (resp. une étendue analytique réelle. resp. une étendue analytique complexe) s'il existe des objets S_i de T couvrant l'objet final, tels que le topos annelé induit $(T_{/E}, \mathscr{O}_T/E)$ soit équivalent au topos annelé défini par une variété différentiable avec son faisceau de fonctions réelles C^∞ (resp. au topos annelé défini par un espace analytique réel, resp. au topos annelé défini par un espace analytique complexe). Donner une description constructive de ces topos annelés, du type de e) ii) (où on prendra pour X respectivement une variété différentiable, un espace analytique complexe ou un espace analytique réel). Donner des exemples de tels topos annelés qui ne soient pas équivalents à des topos annelés associés à des espaces topologiques, en reprenant les exemples envisagés dans c).

Exercice 9.8.3. (Topos associés aux relations d'équivalence locales et aux feuille- **485** tages) [13].

Soit X un espace topologique.

a) Pour tout ouvert U de X, soit $\mathrm{Quot}(U)$ l'ensemble des relations d'équivalence dans U, et pour un ouvert $V \subset U$, considérons l'application naturelle $\mathrm{Quot}(U) \to \mathrm{Quot}(V)$, d'où un préfaisceau Quot_X sur X. Soit Q_X ou simplement Q le faisceau associé, et soit r une section de Q (« relation d'équivalence locale sur X »). De la relation d'ordre sur l'ensemble $\mathrm{Quot}(U)$ des relations d'équivalence sur un ouvert U de X, déduire sur le préfaisceau Quot, et sur le faisceau associé Q, une structure d'ordre i.e. une structure de préfaisceau resp. de faisceau à valeurs dans la catégorie des ensembles ordonnés.

b) Considérer, pour toute relation d'équivalence R sur X, la section $\mathrm{loc}(R)$ de Q qu'elle définit. Soit $E(r)$ l'ensemble des relations d'équivalence sur X telles que $\mathrm{loc}(R)$ soit moins fine que r, et soit $\mathrm{glob}(r)$ la relation d'équivalence borne supérieure de $E(r)$, (dont le graphe est l'intersection des graphes des $R \in E(r)$). Soit $(U_x)_{x\in X}$ une famille de voisinage ouverts des $x \in X$, et pour tout $x \in X$ soit R_x une relation d'équivalence dans U_x dont le germe en x soit r_x. Pour toute famille $\mathscr{V}$ d'ouverts V_x ($x \in X, x \in V_x \subset U_x$), soit $R_{\mathscr{V}}$ la relation d'équivalence dans X engendrée par la famille des relations $R_x|V_x$. Montrer que si $\mathscr{V}' \leq \mathscr{V}$ (dans un sens évident) on a $R_{\mathscr{V}'} \geq R_{\mathscr{V}}$, et que $\mathrm{glob}(r)$ est la borne supérieure de la famille filtrante croissante de relations d'équivalence $R_{\mathscr{V}}$. Donner un exemple
486 où $\mathrm{glob}(r)$ n'est pas dans $E(r)$, i.e. où il existe un $a \in X$ tel que, pour tout voisinage ouvert $W \subset U_a$ de a, il existe un $\mathscr{V} = (V_x)$ et deux points y, z de W qui sont équivalents pour R_a, mais qui ne sont pas équivalents pour $R_{\mathscr{V}}$. Montrer que pour toute $R \in \mathrm{Quot}(X)$ on a $\mathrm{glob}\,\mathrm{loc}(R) \geq R$.

c) On dit que r est une relation d'équivalence locale précohérente (resp. cohérente) si $\mathrm{glob}(r) \in E(r)$ i.e. $\mathrm{loc}(\mathrm{glob}(r)) \leq r$ (resp. si pour tout ouvert U de X, la restriction de r à U est précohérente). On dit que r est globalement cohérente si elle est cohérente, et si, de plus, $r = \mathrm{loc}\,\mathrm{glob}(r)$. On dit qu'une relation d'équivalence R sur X est localement cohérente si $r = \mathrm{loc}(R)$ est cohérente, cohérente si de plus $R = \mathrm{glob}(r)$ i.e. $R = \mathrm{glob}(\mathrm{loc}(R))$. Montrer que les relations d'équivalence localement cohérentes r sur X correspondent biunivoquement aux relations d'équivalence cohérentes R sur X, par $r \mapsto \mathrm{glob}(r)$ et $R \mapsto \mathrm{loc}(R)$;

d) Montrer que pour que r soit cohérente il suffit que pour tout $a \in X$ et tout voisinage ouvert $W' \subset U_a$ de a, il existe un voisinage ouvert $W \subset W'$ de a, tel que toute classe d'équivalence de $R_a|W$ soit contenue dans une composante connexe d'une classe d'équivalence de $R_a|W'$ (à fortiori, il suffit qu'il existe une famille fondamentale de voisinages ouverts $W_a \subset U_a$ de a tels que les fibres de la relations d'équivalence induite $R_a|W_a$ soient connexes). (Hint : se ramener à établir la pré-cohérence dans le cas où r est définie par une $R \in \mathrm{Quot}(X)$, et noter dans ce cas que les fibres des relations d'équivalence $R_{\mathscr{V}}$ sont des parties relativement ouvertes - donc aussi relativement fermées- des fibres de R). Montrer que pour qu'une relation d'équivalence globale R soit cohérente, il suffit qu'elle soit localement cohérente et que ses fibres soient connexes ; prouver que cette

[13]Cet exercice est donné sous toutes réserves, ayant été rédigé hâtivement et insuffisamment vérifié. Monsieur N. Saavedra a vérifié les parties a) à e). Prière au lecteur de nous communiquer ses observations éventuelles.

condition est nécessaire si les fibres sont fermées. Donner un exemple d'une relation d'équivalence à fibres connexes et localement connexes, et qui n'est pas localement cohérente (?).

e) Soit $f : X' \to X$ une application continue. Définir un homomorphisme de préfaisceaux naturel $f_*(\mathrm{Quot}_{X'}) \leftarrow \mathrm{Quot}_X$, induisant un homomorphisme de faisceaux $f_*(Q_{X'}) \leftarrow Q_X$ d'où $f^*(Q_X) \to Q_{X'}$. Si r est une relation d'équivalence locale sur X, on dit que f est une « application fibre » pour la relation d'équivalence locale r sur X, si l'image inverse de r est la relation d'équivalence locale grossière sur X'. Soit, pour tout espace topologique X', $\mathrm{Homfib}_r(X', X)$ l'ensemble des applications continues de X' dans X qui sont des applications fibres relativement à r. Montrer que pour X' variable, on obtient un contrafoncteur en X'. 487

f) Supposons r cohérente. Montrer que le foncteur précédent est représentable par un espace topologique X^r au-dessus de X. Montrer que l'application fibre universelle $\Phi : X^r \to X$ est bijective, et que tout $x \in X^r$ admet un voisinage ouvert U tel que l'application $U \to X$ induite par Φ soit un homéomorphisme de U sur son image. Montrer que les composantes connexes X^r sont ouvertes et correspondent par la bijection Φ aux fibres de la relation d'équivalence $R = \mathrm{glob}(r)$. Donner un exemple où la restriction de Φ aux composantes connexes de X^r n'induit pas des homéomorphismes de ces espaces avec leurs images dans X.

g) La relation d'équivalence locale r est dite ouverte si elle est une section du sous-faisceau Qouv_X de Q provenant du sous-préfaisceau $\mathrm{Quotouv}_X$ de Quot_X dont la valeur en tout ouvert U de X est l'ensemble des relations d'équivalence ouvertes de U. On dira que la relation d'équivalence locale r est strictement ouverte si elle est cohérente et ouverte ou ce qui revient au même, si elle est cohérente et si pour tout ouvert U de X, $\mathrm{glob}(r|U)$ est une relation d'équivalence ouverte dans U. On dit que la relation d'équivalence R dans X est strictement ouverte si elle est cohérente et si $\mathrm{loc}(R)$ est une relation d'équivalence locale strictement ouverte. Prouver que pour que r supposée ouverte soit strictement ouverte, il suffit qu'elle satisfasse à la condition envisagée dans d) ; si r est localement définie par 488
une R à fibres fermées, alors cette condition est aussi nécessaire.

h) Soit F un faisceau d'ensembles sur X. Pour tout ouvert U de X, soit $\mathrm{Quot}(U, F)$ l'ensemble des couples formés d'une relation d'équivalence R_U dans U et d'une relation d'équivalence $R_{F|U}$ dans $F|U$ (F étant interprété comme espace étalé sur X) tels que le morphisme structural $p : F|U \to U$ soit compatible avec les relations d'équivalence R_U, $R_{F|U}$, et que le diagramme correspondant d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} F|U \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & (F|U)/R_{F|U} \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[r] & U/R_U \end{tikzcd}$$

soit cartésien avec q un étalement (de sorte que $F|U$ s'identifie à l'image inverse du faisceau $(F|U)/R_{F|U}$ sur U/R_U). Montrer que les $\mathrm{Quot}(U, F)$ pour U variable définissent un préfaisceau sur X, dont le faisceau associé sera noté $Q(F/X)$. Définir un homomorphisme de faisceaux $Q(F/X) \to Q_X$. Pour une section donnée r de Q_X, on appelle r-structure sur le faisceau F toute section de $Q(F/X)$ au-dessus de la section donnée r de Q_X. Définir la catégorie $\mathrm{Top}(X/r)$

des r-faisceaux sur X, et définir un foncteur conservatif en fidèle : « oubli de la r-structure » $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$. Prouver que dans $\mathrm{Top}(X/r)$ les limites projectives finies et les limites inductives finies sont représentables, et que le foncteur précédent commute aux dites limites. En conclure que dans $\mathrm{Top}(X/r)$ les sommes finies sont disjointes et universelles et les relations d'équivalence sont effectives universelles. Prouver que $\mathrm{Top}(X/r)$ admet une petite famille génératrice. Donner un exemple avec r cohérente, où $\mathrm{Top}(X/r)$ n'admet pas des sommes directes infinies (?), donc n'est pas un topos.

i) Soit $f : X \to Y$ une application continue compatible avec $R = \mathrm{glob}(r)$. Définir un foncteur

$$f_r^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r)$$

489 dont le composé avec le foncteur d'inclusion $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$ soit f^*. Montrer que si r est globalement cohérente et strictement ouverte (i.e. si R est strictement ouverte et $r = \mathrm{loc}(R)$), et si f est l'application canonique $X \to Y = X/R$, alors f_r^* est une équivalence de catégories, donc $\mathrm{Top}(X/r)$ est un $\mathscr{U}$-topos, et $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$ est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos.

j) Conclure de i) que si r est strictement ouverte, alors $\mathrm{Top}(X/r)$ est un topos, et le foncteur d'inclusion $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$ est le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$p : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r).$$

k) Définir une loi fonctorielle du topos $\mathrm{Top}(X/r)$ et du morphisme de topos précédent p, par rapport au couple (X, r) d'un espace topologique X muni d'une relation d'équivalence locale strictement ouverte. Montrer que si $X' \to X$ est un étalement et si r' est l'image inverse de r dans X', alors le morphisme induit $\mathrm{Top}(X'/r') \to \mathrm{Top}(X/r)$ est équivalent à un morphisme de localisation $\mathrm{Top}(X/r)_{/E} \to \mathrm{Top}(X/r)$, où E est un objet de $\mathrm{Top}(X/r)$ (déterminé à isomorphisme unique près). Pour que E couvre l'objet final de $\mathrm{Top}(X/r)$, il faut et il suffit que le saturé sous $R = \mathrm{glob}(r)$ de l'image de X' dans X soit égal à X.

l) Déduire de k) que $\mathrm{Top}(X/r)$ est une étendue rigide (9.8.2 h)). Montrer que si X est sobre l'ensemble des classes d'isomorphie de points de $\mathrm{Top}(X/r)$ est homéomorphe, pour sa topologie canonique (7.8) à l'espace topologique quotient $X/\mathrm{glob}(r)$, et que pour deux points de $\mathrm{Top}(X/r)$, provenant de points x et x' de X, il existe au plus un morphisme de l'un dans l'autre ; il y en a effectivement un si et seulement si x' et x sont équivalents mod $\mathrm{glob}(r)$ à des points x_1' et x_1 tels que x_1 générise x_1'.

490 m) Étudier le morphisme de topos canonique $\mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(X/r)$, en notant que pour tout objet U de $\mathrm{Top}(X/r)$ tel que le topos induit sur U « soit » un espace topologique ordinaire, le morphisme induit $\mathrm{Top}(X)_{/p^*(U)} \to \mathrm{Top}(X/r)/U$ « est » une application continue d'espaces topologiques ordinaires $X_U \to U$. Montrer que les fibres de l'application $X_U \to U$ sont homéomorphes à des composantes connexes de l'espace X^r de f.

n) Soit X une variété différentiable munie d'un feuilletage, i.e. d'un sous-faisceau F localement facteur direct du faisceau tangent de X, stable par crochets. Définir sur X une relation d'équivalence locale strictement ouverte associée au feuilletage, et définir sur le topos quotient $T = \mathrm{Top}(X/r)$ un Anneau qui en fasse une étendue différentiable (9.8.2 j)). Définir une équivalence de la catégorie des Modules localement libres sur l'étendue différentiable T (appelés aussi fibrés vectoriels différentiables sur T), et la catégorie des Modules localement libres sur X munis d'une connexion relativement au sous-fibré F donné du fibré tangent. Donner des variantes dans le cas analytique réel et analytique complexe.

10. Faisceaux de morphismes

Proposition 10.1. Soient E un topos, X et Y deux objets de E ; le foncteur $Z \mapsto$ 491
$\mathrm{Hom}_E(Z \times X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(X_Z, Y_Z)$ est représentable.

En effet, les limites inductives sont universelles dans E (II 4.3). Le foncteur $Z \mapsto Z \times X$ commute donc aux limites inductives. Par suite, le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}_E(Z \times X, Y)$ transforme les limites inductives de l'argument Z en limites projectives. Il est donc représentable (1.2.1).

10.2. L'objet représentant le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}_E(Z \times X, Y)$ est noté $\mathscr{H}om_E(X, Y)$ (ou plus simplement $\mathscr{H}om(X, Y)$) et est appelé le faisceau des morphismes de X dans Y. C'est un bifoncteur en X et Y. On a donc un isomorphisme trifonctoriel.

(10.2.1) $$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathscr{H}om_E(X, Y)) \simeq \mathscr{H}om_E(Z \times X, Y).$$

Il résulte alors de la formule (10.2.1) que le bifoncteur $(X, Y) \mapsto \mathscr{H}om(X, Y)$ transforme les limites inductives de l'argument X (resp. les limites projectives de l'argument Y) en limites projectives dans E.

Proposition 10.3. Soit $v : E \to E'$ un morphisme de topos. Pour un objet variable X de E et un objet variable Y de E', on a un isomorphisme bifonctoriel.

(10.3.1) $$v_* \mathscr{H}om_E(v^*Y, X) \simeq \mathscr{H}om_{E'}(Y, v_*X).$$

Démonstration. Pour tout objet Z de E', on a une suite d'isomorphismes, fonctoriels en tout les arguments :

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathscr{H}om_E(v^*Y, X)) & \simeq \mathrm{Hom}_E(v^*Z, \mathscr{H}om_E(v^*Y, X)) & \text{(adjonction)} \\
\mathrm{Hom}_E(v^*Z, \mathscr{H}om_E(v^*Y, X)) & \simeq \mathrm{Hom}_E(v^*Z \times v^*Y, X) & \text{(10.2.1)} \\
\mathrm{Hom}_E(v^*Z \times v^*Y, X) & \simeq \mathrm{Hom}_E(v^*(Z \times Y), X) & (v^* \text{ exact à gauche}) \\
\mathrm{Hom}_E(v^*(Z \times Y), X) & \simeq \mathrm{Hom}_{E'}(Z \times Y, v_*X) & \text{(adjonction)} \\
\mathrm{Hom}_{E'}(Z \times Y, v_*X) & \simeq \mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathscr{H}om_{E'}(Y, v_*X)) & \text{(10.2.1)}
\end{array}$$

Les deux membres de (10.3.1) représentent donc des foncteurs isomorphes, C.Q.F.D.

Corollaire 10.4. Soient C un $\mathscr{U}$-site, X un $\mathscr{U}$-préfaisceau sur C, Y un $\mathscr{U}$-faisceau 492
sur C, $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ tel que C soit $\mathscr{V}$-petit, $\widehat{C}_{\mathscr{V}}$ le topos des $\mathscr{V}$-préfaisceaux sur C, $\widetilde{C}_{\mathscr{U}}$ le topos des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C. Le préfaisceau $\mathscr{H}om_{\widehat{C}_{\mathscr{V}}}(X, Y)$ est un $\mathscr{U}$-faisceau. Soit $X \to \underline{a}X$ le morphisme canonique de X dans son faisceau associé. Le morphisme correspondant $\mathscr{H}om_{\widehat{C}_{\mathscr{V}}}(\underline{a}X, Y) \to \mathscr{H}om_{\widehat{C}_{\mathscr{V}}}(X, Y)$ est un isomorphisme. On a un isomorphisme canonique $\mathscr{H}om_{\widehat{C}_{\mathscr{V}}}(\underline{a}X, Y) \simeq \mathscr{H}om_{\widetilde{C}_{\mathscr{U}}}(\underline{a}X, Y)$.

10.4.1. Supposons d'abord que C soit un petit site et que $\mathscr{V} = \mathscr{U}$. On a alors un morphisme de topos : $\widetilde{C}_{\mathscr{U}} \to \widehat{C}_{\mathscr{U}}$ (4.8), d'où (10.3.1) les assertions dans ce cas. Pour passer de là au cas général, on remarque tout d'abord que le foncteur « faisceau associé » ne dépend pas de l'univers (II 3.6) et que le topos des $\mathscr{V}$-faisceaux sur C est équivalent au topos des $\mathscr{V}$-faisceaux sur $\widetilde{C}_{\mathscr{U}}$ (III 4 et 1). Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 10.4.2. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$, $E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ le topos des $\mathscr{V}$-faisceaux sur E, X et Y deux objets de E. Il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{H}om_E(X,Y) \simeq \mathscr{H}om_{E^{\sim}_{\mathscr{V}}}(X,Y)$.

10.4.3. Le foncteur $\epsilon_E : E \to E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ est pleinement fidèle et exact à gauche. Par suite on a, pour tout objet Z de E un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{E^{\sim}_{\mathscr{V}}}(\epsilon_E Z, \epsilon_E \mathscr{H}om_E(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E^{\sim}_{\mathscr{V}}}(\epsilon_E Z \times \epsilon_E X, \epsilon_E Y)$$

Mais tout objet de $E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ est limite inductive d'objets provenant de E, d'où (10.2.1) l'assertion.

10.5. Soit $v : E \to E'$ un morphisme de topos. On se propose de définir quatre morphismes bifonctoriels.

$$\begin{aligned}
&\Phi_v : v^* \mathscr{H}om(X,Y) \longrightarrow \mathscr{H}om(v^*X, v^*Y) \quad , \quad X \text{ et } Y \text{ objets de } E',\\
&\Psi_v : v_* \mathscr{H}om(X,Y) \longrightarrow \mathscr{H}om(v_*X, v_*Y) \quad , \quad X \text{ et } Y \text{ objets de } E,\\
&\Xi_v : \mathscr{H}om(v_!X, Y) \longrightarrow v_* \mathscr{H}om(X, v^*Y) \quad , \quad X \in \mathrm{ob}\, E, Y \in \mathrm{ob}\, E',\\
&\Lambda_v : v_!(X \times v^*Y) \longrightarrow v_!(X) \times Y \qquad\quad X \in \mathrm{ob}\, E, Y \in \mathrm{ob}\, E',
\end{aligned}$$

493 où, pour définir les morphismes Ξ_v et Λ_v on suppose que le foncteur v^* image réciproque par v admet un adjoint à gauche $v_!$.

10.5.1. Définition de Ψ_v. Soit X un objet de E. On a un morphisme d'adjonction $v^*v_*X \to X$, d'où, pour tout objet Z de E', un morphisme bifonctoriel $v^*(Z \times v_*X) \to (v^*Z) \times X$. On a donc, pour tout objet Y de E, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_E((v^*Z) \times X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(v^*(Z \times v_*X), Y).$$

On en déduit, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathscr{H}om(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathscr{H}om(v_*X, v_*Y));$$

d'où le morphisme Ψ_v.

10.5.2. Définition de Λ_v. Pour tout objet X de E, on a un morphisme d'adjonction $X \to v^*v_!X$, d'où, pour tout objet Y de E, un morphisme bifonctoriel $X \times v^*Y \to v^*v_!(X) \times v^*Y \simeq v^*(v_!(X) \times Y)$; d'où, par adjonction, le morphisme Λ_v.

10.5.3. Définition de Ξ_v. Soient X un objet de E, Z et Y deux objets de E'. Le morphisme $\Lambda_v : v_!(X \times v^*Z) \to v_!(X) \times Z$ fournit un morphisme trifonctoriel $\mathrm{Hom}_{E'}(v_!(X) \times Z, Y) \to \mathrm{Hom}_{E'}(v_!(X \times v^*Z), Y))$; d'où, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathscr{H}om(v_!X, Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathscr{H}om(X, v^*Y));$$

d'où le morphisme Ξ_v.

10.5.4. Définition de Φ_v. Le morphisme trifonctoriel de (10.5.3)

$$\mathrm{Hom}_{E'}(v_!(Z) \times X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(v_!(Z \times v^*X), Y);$$

où Z est un objet de E et X, Y sont des objets de E', permet d'obtenir, par adjonction, un morphisme trifonctoriel,

$$\mathrm{Hom}_E(Z, v^* \mathscr{H}om(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(Z, \mathscr{H}om(v^*X, v^*Y));$$

d'où une définition du morphisme Φ_v. Il existe une deuxième manière de définir Φ_v. Soient X, Y, Z trois objets de E'. Le foncteur $v^* : E' \to E$ fournit un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z \times X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(v^*(Z) \times v^*(X), v^*Y);$$

d'où, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathscr{H}om(X, Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathscr{H}om(v^*X, v^*Y)).$$

On a donc un morphisme bifonctoriel **494**

$$\mathscr{H}om(X, Y) \longrightarrow v_* \mathscr{H}om(v^*X, v^*Y);$$

d'où, par adjonction, un morphisme dont on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien le morphisme Φ_v défini ci-dessus.

Proposition 10.6. Soit $v : E \to E'$ un morphisme de topos.

1) Le morphisme Ψ_v (10.5.1) est un isomorphisme pour tout objet Y de E si et seulement si le morphisme d'adjonction $v^*v_*X \to X$ est un isomorphisme. En particulier, le morphisme Ψ_v est un isomorphisme pour tout couple d'objets (X, Y) si et seulement si le foncteur $v_* : E \to E'$ est pleinement fidèle, i.e. si v est un plongement de topos.
2) Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Pour tout couple (X, Y) d'objets de E', le morphisme Φ_v (10.5.4) est un isomorphisme.
   (ii) Le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$ et pour tout objet X de E et tout objet Y de E', le morphisme Ξ_v (10.5.3) est un isomorphisme.
   (iii) Le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$ et pour tout objet X de E et pour tout objet Y de E', le morphisme Λ_v (10.5.2) est un isomorphisme.

10.6.1. La première assertion résulte immédiatement de (10.5.1). Il résulte aussi immédiatement de (10.5.2), (10.5.3), (10.5.4) que (iii) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ ((i) et le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$). Il reste donc à montrer que (i) implique que v^* admet un adjoint à gauche, i.e. (1.8) que (i) implique que v^* commute aux petits produits. Soient e' l'objet final de E' et I un petit ensemble. Comme v^* est exact à gauche, $v^*(e')$ est un objet final de E et comme v^* commute aux limites inductives $v^*(\amalg_I e') \simeq \amalg_I v^*(e')$. Pour tout objet Y de E', on a $\mathscr{H}om(\amalg_I e', Y) \simeq \Pi_I \mathscr{H}om(e', Y) \simeq \Pi_I Y$ et $\mathscr{H}om(\amalg_I v^*(e'), v^*Y) \simeq \Pi_i \mathscr{H}om(v^*(e'), v^*Y) \simeq \Pi_I v^*Y$. Le morphisme fonctoriel Φ_v induit donc un isomor- **495**
phisme $v^* \Pi_I Y \simeq \Pi_I v^*Y$ dont on vérifie que c'est l'isomorphisme canonique. C.Q.F.D.

Corollaire 10.7. Soient E un topos, Z un objet de E, $j_Z : E_{/Z} \to E$ le morphisme de localisation (5.2), X, Y deux objets de E.

1) Il existe un isomorphisme bifonctoriel

$$j_Z^* \mathscr{H}om(X, Y) \simeq \mathscr{H}om(j_Z^*X, j_Z^*Y).$$

2) Soit X' un objet de $E_{/Z}$. Il existe un isomorphisme bifonctoriel

$$\mathscr{H}om_E(j_{Z!}X', Y) \simeq j_{Z*} \mathscr{H}om_{E/Z}(X', j_Z^*Y).$$

3) Soit Y' un objet de E/Z. Lorsque Z est un ouvert de E, il existe un isomorphisme bifonctoriel

$$j_{Z*} \mathscr{H}om(X', Y') \simeq \mathscr{H}om(j_{Z*}X', j_{Z*}Y').$$

Les assertions 1) et 2) se démontrent en remarquant que le morphisme Λ_{j_Z} est un isomorphisme. Pour l'assertion 3), il suffit de remarquer que j_{Z*} est pleinement fidèle, car $j_{Z!}$ est pleinement fidèle (I 5.7. a)).

Corollaire 10.8. Soient E un topos, X, Y et Z trois objets de E, $j_Z : E_{/Z} \to E$ le morphisme de localisation.

1) On a un isomorphisme canonique

$$j_{Z*}j_Z^*Y \simeq \mathscr{H}om(Z, Y).$$

2) On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathscr{H}om(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^*X, j_Z^*Y).$$

Soit e_Z l'objet final de $E_{/Z}$ (i.e. l'objet $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$)). Il résulte de (10.2.1) qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_{E/Z}(e_Z, j_Z^*Y) \simeq j_Z^*Y;$$

d'où, d'après (10.7 2), un isomorphisme

$$j_{Z*}j_Z^*Y \simeq \mathscr{H}om(j_{Z!}e_Z, Y).$$

496 Comme $j_{Z!}e_Z = Z$, on a démontré 1). Démontrons 2). De (10.7), on tire un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(e_Z, j_Z^* \mathscr{H}om(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^*X, j_Z^*Y);$$

d'où, par adjonction sur le premier membre,

$$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathscr{H}om(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^*X, j_Z^*Y).$$

11. Topos annelés, localisation dans les topos annelés

11.1.1. Soit $\mathscr{U}$ un univers. On appelle $\mathscr{U}$-topos annelé un couple (E, A) où E est un $\mathscr{U}$-topos et A un objet muni d'une structure d'anneau. On appelle $\mathscr{U}$-site annelé un couple (C, A) où C est un $\mathscr{U}$-site et A un $\mathscr{U}$-faisceaux d'anneaux sur C. On ne mentionne pas l'univers lorsque le contexte ne prête pas à confusion. À un site annelé (C, A) est associé le topos annelé $(C^\sim, A)$. À un topos annelé (E, A) est associé le site annelé constitué par le site E et le faisceau d'anneaux représenté par A.

11.1.2. Soit (E, A) un topos annelé. On note ${}_AE$ (resp. E_A) la catégorie des faisceaux de A-modules (nous écrirons aussi A-Modules) à gauche (resp. à droite) unitaires. La catégorie ${}_AE$ (resp. E_A) est une catégorie abélienne (II 6.7). Soient M et N deux faisceaux de A-modules à gauche (resp. à droite). Le groupe commutatif des morphismes de A-Modules de M dans N est noté $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

11.1.3. Soient A, B et C trois anneaux d'un topos E, M un faisceau de $A - B$ bimodules, N un faisceau de $A - C$ bimodules à gauche. Soit e un objet final de E et posons $\mathrm{Hom}(e, B) = \Gamma(B)$, $\mathrm{Hom}(e, C) = \Gamma(C)$. La structure de $A - B$ bimodule de M fournit un homomorphisme d'anneaux de $\Gamma(B)^\circ$ dans l'anneau des endomorphismes du A-module M et de même, la structure de $A - C$ bimodule de N fournit un homomorphisme d'anneaux de $\Gamma(C)^\circ$ dans l'anneau des endomorphismes du A-module N. On en déduit, par fonctorialité, une structure de $\Gamma(B) - \Gamma(C)$ bimodule sur le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. En particulier, lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs, le groupe $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est muni canoniquement d'une structure de $\Gamma(A)$-module.

497 11.1.4. Soient E un topos, A et B deux anneaux de E, $u : A \to B$ un morphisme de faisceaux d'anneaux, M un B-module (à gauche pour fixer les idées). Le faisceau M peut-être considéré comme un faisceau de A-modules par l'intermédiaire de u : pour tout objet X de E, $M(X)$ est muni de la structure de $A(X)$-module déduite de sa structure de $B(X)$-module et de l'homomorphisme $u(X) : A(X) \to B(X)$ par restriction des scalaires. On obtient ainsi un foncteur « restriction des scalaires par u »

$$\mathrm{Res}(u) : {}_BE \longrightarrow {}_AE.$$

11.1.5. En particulier lorsque $A = \mathbf{Z}$ (faisceau constant $\underline{\mathbf{Z}}$ i.e. faisceau associé au préfaisceau constant $\mathbf{Z}$) et lorsque $u : \underline{\mathbf{Z}} \to B$ est l'unique morphisme canonique, on obtient un foncteur de ${}_BF$ dans la catégorie ${}_{\underline{\mathbf{Z}}}E$ qui n'est autre que la catégorie des faisceaux abéliens notée E_{Ab}. Ce foncteur est appelé le foncteur faisceau abélien sous-jacent.

Proposition 11.1.6. *Le foncteur restriction des scalaires par u commute aux limites inductives et projectives. Il est conservatif.*

La proposition est vraie pour le foncteur restriction des scalaires pour les modules ordinaires, i.e. lorsque E est le topos ponctuel. Elle est donc vraie lorsque E est le topos des préfaisceaux sur un petit site. Il résulte alors de la détermination des limites inductives et projectives à l'aide du foncteur faisceau associé (II 6.4) que la proposition est vraie dans le cas général.

11.2.1. Soient (E, A) un topos annelé, X un objet de E, $j_X : E_{/X} \to E$ le morphisme de localisation 5.2. D'après III 1.7 ou 3.1.2, le faisceau $j_X^* A$ est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Le faisceau d'anneaux $j_X^* A$ est noté le plus souvent $A|X$ ou bien encore, abusivement, A. Sauf mention du contraire, le topos $E_{/X}$ sera annelé par $A|X$. Le faisceau $j_{X*}j_X^* A$ est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Le morphisme d'adjonction $A \to j_{X*}j_X^* A$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

11.2.2. Soit de plus M un A-module (à gauche pour fixer les idées). Le faisceau $j_X^* M$ **498**
est muni d'une structure de $A|X$-module (III 1.7 ; ou 3.1.2) ; d'où un foncteur :

$$j_X^* : {}_AE \longrightarrow {}_{A|X}E_{/X}$$

appelé foncteur de restriction à $E_{/X}$, ou encore foncteur de restriction à X. Le foncteur j_X^* commute aux limites inductives et projectives (loc. cit.). Il est en particulier exact. Soit maintenant N un $A|X$-Module. Le faisceau $j_{X*}N$ est un faisceau de $j_{X*}A|X$-Modules (III 1.7 ou 3.1.2) ; d'où, par restriction des scalaires par le morphisme d'adjonction $A \to j_{X*}(A|X)$ (11.1.4), un A-Module encore noté $j_{X*}N$. On a donc défini un foncteur

$$j_{X*} : {}_{A|X}E_{/X} \longrightarrow {}_AE$$

qui commute aux limites projectives (11.1.6 et III 1.7). Pour tout A-Module M, le morphisme d'adjonction $M \to j_{X*}j_X^* M$ est un morphisme de A-Modules. Pour tout $A|X$-Module N et tout A-Module M, le morphisme d'adjonction $M \to j_{X*}j_X^* M$ définit un morphisme bifonctoriel en M et N

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}N). \tag{11.2.2.1}$$

Ce dernier morphisme est un isomorphisme i.e. les foncteurs j_X^* et j_{X*} pour les A-Modules, sont adjoints (III 1.7).

11.2.3. Les foncteurs j_X^* et j_{X*} pour les Modules, commutent au foncteur « ensemble sous-jacent » (III 1.7 4)). Ils commutent donc aux foncteurs restriction des scalaires et en particulier au foncteur faisceau abélien sous-jacent.

Proposition 11.3.1. *Soient (E, A) un topos annelé, X un objet de E. Le foncteur*

$$j_X^* : {}_AE \longrightarrow {}_{A|X}E_{/X}$$

admet un adjoint à gauche noté $j_{X!} : {}_{A|X}E_{/X} \to {}_AE$ et appelé le prolongement par zéro. Le foncteur prolongement par zéro est exact et fidèle et commute aux limites inductives. Les foncteurs $j_{X!}$ pour les Modules commutent aux foncteurs restriction des scalaires et, **499**
en particulier, ils commutent au foncteur faisceau abélien sous-jacent.

L'existence du foncteur $j_{X!}$ résulte de III 1.7. Comme $j_{X!}$ est un adjoint à gauche, il commute aux limites inductives (I 2). Pour démontrer les autres assertions, supposons d'abord que E soit le topos des préfaisceaux d'ensembles sur une petite catégorie C contenant l'objet X. On sait alors que $E_{/X}$ est équivalent à la catégorie des préfaisceaux sur $C_{/X}$ et que, modulo cette équivalence, le foncteur $j_X^* : E \to E_{/X}$ n'est autre que la composition avec le foncteur d'oubli $C_{/X} \to C$ (I 5.11). Il résulte alors immédiatement de la construction explicite de $j_{X!}$ (I 5.1) que pour tout $A|X$-Module N et pour tout objet Y de C, on a

$$j_{X!}N(Y) = \bigoplus_{u \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)} N(u);$$

d'où l'exactitude de $j_{X!}$ et le fait que le prolongement par zéro commute aux foncteurs restriction des scalaires dans ce cas. Dans le cas général, on peut supposer que E est le topos des faisceaux sur un petit site C et que X provient d'un objet de C (1.2.1). Le topos $E_{/X}$ est alors équivalent au topos des faisceaux sur $C_{/X}$ (muni de la topologie induite) (III 5.4) et le morphisme de topos $j_X : E_{/X} \to E$ provient du foncteur d'oubli $C_{/X} \to C$ qui est continu et cocontinu (III 5.2). Il résulte alors de III 1.7) que le prolongement par zéro pour les faisceaux s'obtient en composant le prolongement par zéro pour les préfaisceaux avec le foncteur faisceau associé ; d'où l'assertion d'exactitude et la commutation aux restrictions des scalaires.

Pour démontrer la fidélité, il revient au même de montrer que pour $A|X$-Module N, le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{ad}_N : N \longrightarrow j_X^* j_{X!} N$$

est un monomorphisme. Or, en notant $j_{\widehat{X}!}$ le foncteur prolongement par zéro pour les préfaisceaux et $\underline{a}$ le foncteur « faisceau associé », on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\mathrm{ad}_N"] \arrow[drr, "\mathrm{ad}_{\widehat{N}}"'] & & j_X^* \underline{a} j_{\widehat{X}!} N \\ & & \underline{a} j_X^* j_{\widehat{X}!} N, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

500 où $\mathrm{ad}_{\widehat{N}}$ est le morphisme d'adjonction pour les préfaisceaux. Le morphisme $\mathrm{ad}_{\widehat{N}}$ est un monomorphisme d'après ce qui précède, donc $\underline{a}(\mathrm{ad}_{\widehat{N}})$ est un monomorphisme. De plus, comme le foncteur d'oubli $C_{/X} \to C$ est continu et cocontinu, le morphisme canonique $\underline{a} j_X^* \to j_X^* \underline{a}$ est un isomorphisme (III 2.3). Par suite ad_N est un monomorphisme.

Remarque 11.3.2. Soit N un $A|X$-Module. Le faisceau d'ensemble sous-jacent à $j_{X!}N$ n'est pas, en général, isomorphe au faisceau obtenu en prolongeant par le vide (?? et 5.2) le faisceau d'ensemble sous-jacent à N. On prendra donc garde de ne pas confondre le foncteur prolongement par zéro noté $j_{X!} : {}_{A|X}E_{/X} \to {}_A E$ dans 11.3.1, et le foncteur prolongement par le vide noté encore $j_{X!} : E_{/X} \to E$ dans III 5.3 et IV 5.2. Dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique, l'abus de notations signalé ci-dessus n'amène pas de confusions. Lorsqu'une confusion est néanmoins possible, nous utiliserons les notations $j_{X!}^{\mathrm{ab}}$ et $j_{X!}^{\mathrm{ens}}$ pour désigner respectivement les foncteurs prolongement par zéro et prolongement par le vide.

Proposition 11.3.3. Soient (E, A) un topos annelé et X un objet de E. Le A-Module $j_{X!}(A|X)$, noté le plus souvent A_X ou $A_{X,E}$, est le A-Module libre engendré par X (II 6.5) i.e. pour tout A-Module M, on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en M :

$$\mathrm{Hom}_E(X, M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A_X, M).$$

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille topologiquement génératrice de E (II 3.0.1). La famille $(A_{X_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de la catégorie des A-Modules.

Soit e_x l'objet final du topos $E_{/X}$ ($e_X = X \xrightarrow{\text{id}} X$). On a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(A|X, j_X^* M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E_{/X}}(e_X, j_X^* M);$$

déduit de la section unité $e_X \to A/X$; d'où, par adjonction, un isomorphisme **501**

$$\mathrm{Hom}_A(j_{X!}^{\mathrm{ab}}(A|X), M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_E(j_{X!}^{\mathrm{ens}}(e_X), M).$$

Comme $j_{X!}^{\mathrm{ens}}(e_X) = X$, on obtient l'isomorphisme annoncé. La dernière assertion résulte de II 6.6.

Remarque 11.3.4. Soient A et B deux faisceaux d'anneaux sur un topos E, X un objet de E et N un $A|X$-$B|X$-bi Module. Le faisceau abélien obtenu en prolongeant N par zéro est muni canoniquement d'une structure de A-B-biModule ainsi qu'il résulte immédiatement de sa description explicite (11.3.1). En particulier le A-module libre engendré A_X est un A-biModule.

Exercice 11.3.5. Soient E un topos, X un objet de E, $x : P \to E$ un point de E (6.1), $(x_i)_{i\in I}$ la famille des points de $E_{/X}$ au-dessus de x (en correspondance biunivoque avec la fibre X_x (6.7.2). Montrer que pour tout faisceau abélien M sur $E_{/X}$, la fibre $(j_{X!}M)_x$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_i M_{x_i}$.

12. Opération sur les modules

Proposition 12.1. Soient (E, A) un topos annelé, M et N deux A-Modules à gauche (resp. à droite). Le foncteur sur E qui a tout objet X de E associe le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_E(X, N))$ est représentable par un faisceau abélien noté $\mathscr{H}om_A(M, N)$ (ou parfois $\mathscr{H}om(M, N)$ lorsqu'aucune confusion n'en résulte). Pour tout objet X de E on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_A(M, N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, j_X^* N). \tag{12.1.1}$$

On a un isomorphisme canonique $\mathscr{H}om_E(X, N) = j_{X*}j_X^* N$ (10.8) et par suite $\mathscr{H}om_E(X, N)$ est muni fonctoriellement en X d'une structure de A-Module à gauche (resp. à droite). Le foncteur $X \to \mathscr{H}om_E(X, N)$ transforme les limites inductives de l'argument X en limites projectives de A-Modules (10.2 et 11.2.3) et par suite le foncteur

$$X \longrightarrow \mathrm{Hom}_Z(M, \mathscr{H}om_E(X, N))$$

transforme les limites inductives de l'argument X en limites projectives de groupes com- **502**
mutatifs, donc en limites projectives des ensembles sous-jacents. Il est donc représentable (1.4 et 1.2) et l'objet qui le représente est muni d'une structure de faisceau abélien. On a, par définition, pour tout objet X de E, un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_A(M, N)(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathscr{H}om_A(M, N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om(X, N)) \tag{12.1.2}$$

et l'isomorphisme (12.1.1) résulte de (12.1.2), de l'isomorphisme $\mathscr{H}om(X, N) \approx j_{X*}j_X^* N$ (10.8) et des formules d'adjonction de 10.

12.2. Le faisceau abélienne $\mathcal{H}om_A(M,N)$ est appelé le faisceau des morphismes de A-Modules de M dans N. C'est un bifoncteur en M et N. Il résulte de sa définition et de (10.2) qu'il transforme les limites projectives de l'argument N (resp. les limites inductives de M) en limites projectives de faisceaux abéliens. En particulier il est exact à gauche en ses deux arguments.

Proposition 12.3. Soient (E,A) un topos annelé, M et N deux A-Modules à droite (resp. à gauche), X un objet de E :

a) On a des isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{H}om_A(M,N)(X) \approx \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}j_X^*M, N)$$

b) On a un isomorphisme canonique :

$$\Phi_X : j_X^*\,\mathcal{H}om_A(M,N) \simeq \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M, j_X^*N)$$

Soit de plus P un $A|X$-Module à droite (resp. à gauche) :

c) On a un isomorphisme canonique :

$$j_{X*}\,\mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M, P) \simeq \mathcal{H}om_A(M, j_{X*}P)$$

d) On a un isomorphisme canonique :

$$\Xi_X : \mathcal{H}om_A(j_{X!}P, N) \simeq j_{X*}\,\mathcal{H}om_{A|X}(P, j_X^*N)$$

Les isomorphismes de a) résultent de (12.1.2), de l'isomorphisme $\mathcal{H}om_E(X,N) \simeq j_{X*}j_X^*N$ (10.8) et des formules d'adjonction de 10.

Démontrons d). Pour tout objet Y de $E_{/X}$ on a la suite d'isomorphismes :

$\mathrm{Hom}(Y, j_X^*\,\mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}(j_{X!}Y, \mathcal{H}om_A(M,N))$ (adjonction pour les faisceaux d'ensembles)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(j_{X!}Y, \mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_E(j_{X!}Y, N)) && (12.2.1)\\
&\mathrm{Hom}(M, \mathcal{H}om_E(j_{X!}Y, N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\,\mathcal{H}om_{E_{/X}}(Y, j_X^*N)) && (10.7)\\
&\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\,\mathcal{H}om_{E_{/X}}(Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_E(Y, j_X^*N)) && (11.2.2.1)\\
&\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_E(Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M, j_X^*M)) && (12.2.1)
\end{aligned}$$

503

Démontrons c). Pour tout objet Y de E, on a la suite d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(Y, j_{X*}\,\mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M, P)) \simeq \mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M; P)) && \text{(adjonction)}\\
&\mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(j_X^*M, P)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) && (12.2.1)\\
&\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\,\mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) && (11.2.2.1)\\
&\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\,\mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_E(Y, j_{X*}P)) && (10.3)\\
&\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_E(Y, j_{X*}P)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om_A(M, j_{X*}P)) && (12.2.1)
\end{aligned}$$

Démontrons d). Pour tout objet Y de E, on à la suite d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om_A(j_{X!}P, N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathcal{H}om_E(Y,N)) && (12.2.1)\\
&\mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathcal{H}om_E(Y,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^*\,\mathcal{H}om_E(Y,N)) && (11.3.1)\\
&\mathrm{Hom}_{A/X}(P, j_X^*\,\mathcal{H}om_E(Y,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, j_X^*N)) && (10.7)\\
&\mathrm{Hom}_{A/X}(P, \mathcal{H}om_{E_{/X}}(j_X^*Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A/X}(P, j_X^*N)) && (12.2.1)\\
&\mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathcal{H}om_{A|X}(P, j_X^*N)) \simeq (Y, j_{X*}\,\mathcal{H}om_{A|X}(P, j_X^*N)) && \text{(adjonction)}
\end{aligned}$$

Corollaire 12.4. Soient C un $\mathscr{U}$-site, A' un $\mathscr{U}$-préfaisceau d'anneaux sur C, M un $\mathscr{U}$-préfaisceau de A'-modules (à gauche pour fixer les idées), N un $\mathscr{U}$-faisceau de A'-modules (à gauche). Notons A le faisceau associé à A', de sorte que les faisceaux N et $\underline{a}M$ (faisceau associé à M) sont des A-Modules. Le préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Hom}_{A'|X}(j_X^* M, j_X^* N)$ est un $\mathscr{U}$-faisceau abélien canoniquement isomorphe à $\mathscr{H}om_A(\underline{a}M, N)$.

En effet il résulte de III 5.5 et III 2.3 que le foncteur de localisation à $C_{/X}$ commute avec les foncteurs faisceaux associés (pour C et $C_{/X}$). Par suite, on a des isomorphismes fonctoriels en l'objet variable X de C :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A'|X}(j_X^* M, j_X^* N) &\simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(\underline{a}j_X^* M, j_X^* N)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* \underline{a}M, j_X^* N) \simeq \mathscr{H}om_A(\underline{a}M, N)(X).\end{aligned}$$

Corollaire 12.5. Soient E un topos, A, B, C trois faisceaux d'anneaux sur E, M **504**
un $A-B$ biModule, N un $A-C$ biModule. Le faisceau abélien $\mathscr{H}om_A(M, N)$ est muni canoniquement d'une structure de $B-C$ biModule. En particulier lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs et lorsque M et N sont des A-Modules, $\mathscr{H}om_A(M, N)$ est muni canoniquement d'une structure de A-Module. Les isomorphismes canoniques b), c), d) de 12.3 sont des isomorphismes de biModules.

Nous nous bornerons à donner des indications. Pour tout objet X de E, on a $\mathscr{H}om_A(M, N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, j_X^* N)$ (12.3). Par suite, le groupe commutatif $\mathscr{H}om_A(M, N)(X)$ est muni canoniquement d'une structure de $B(X) - C(X)$ bimodule (11.1.3) dont on vérifie qu'elle est fonctorielle en X. Les autres assertions sont laissées au lecteur.

Corollaire 12.6. Soient (E, A) un topos annelé, X un objet de A, N un A-Module (à gauche pour fixer les idées). On a des isomorphismes canoniques de A-Modules :

$$\mathscr{H}om_E(X, N) \simeq j_{X*} j_X^* N \simeq \mathscr{H}om_A(A_X, N);$$

la structure de A-Module sur $\mathscr{H}om_A(A_X, N)$ provenant de la structure de biModule sur A_X (11.3.4).

Le premier isomorphisme résulte de 10.7, le deuxième de l'isomorphisme de A-Modules $N \simeq \mathscr{H}om_A(A, N)$ et de 12.3.

Proposition 12.7. Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module à droite et N un A-Module à gauche. Le foncteur qui à tout faisceau abélien P associe le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(N, P))$ est représentable par un faisceau abélien noté $M \otimes_A N$ et appelé le produit tensoriel sur A de M et de N.

On a une injection canonique de $\mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(N, P))$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{H}om(N, P)) \simeq \mathrm{Hom}(M \times N, P)$; On constate aussitôt, en revenant aux définitions, qu'un morphisme f de faisceaux d'ensembles de $M \times N$ dans P provient d'une élément de $\mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_Z(N, P))$ si et seulement si pour tout objet X de E, $f(X) : M(X) \times N(X) \to P(X)$ est une application $A(X)$-bilinéaire de $M(X) \times N(X)$ **505**
dans $P(X)$. Appelons morphisme A-bilinéaire les morphismes de faisceaux d'ensembles de $M \times N$ dans P qui possèdent cette propriété. Il s'agit donc de représenter le foncteur des morphismes A-bilinéaires de $M \times N$ dans P. Pour cela on procède comme dans le cas ordinaire i.e. comme dans le cas où E est le topos ponctuel. Considérons les huit morphismes :

(i): $M \times M \times N \longrightarrow M \times N \qquad 1 \leq i \leq 3$
(i): $M \times N \times N \longrightarrow M \times N \qquad 4 \leq i \leq 6$

$$(\mathrm{i})\colon\ M \times A \times N \longrightarrow M \times N \qquad 7 \leq i \leq 8$$

définis par les formules :

$$\begin{array}{lll}
(1)\ (m_1, m_2, n) & \longmapsto & (m_1 + m_2, n)\\
(2)\ (m_1, m_2, n) & \longmapsto & (m_1, n)\\
(3)\ (m_1, m_2, n) & \longmapsto & (m_2, n)\\
(4)\ (m, n_1, n_2) & \longmapsto & (m, n_1 + n_2)\\
(5)\ (m, n_1, n_2) & \longmapsto & (m, n_1)\\
(6)\ (m, n_1, n_2) & \longmapsto & (m, n_2)\\
(7)\ (m, a, n) & \longmapsto & (ma, n)\\
(8)\ (m, a, n) & \longmapsto & (m, an);
\end{array}$$

où la formule (i) décrit l'application (i)(X) pour les objets variables X de E. Notons L le foncteur « faisceau abélien libre engendré ». Il est clair que le plus grand quotient (au sens des faisceaux abéliens) de $L(M \times N)$ qui égalise le morphisme $L(1)$ à $L(2) + L(3)$, $L(4)$ à $L(5) + L(6)$ et $L(7)$ à $L(8)$ représente le foncteur des morphismes A-bilinéaires de $M \times N$ dans P.

12.8. On constate que le foncteur $P \mapsto \mathrm{Hom}_A(N, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(M, P))$ est aussi canoniquement isomorphe au foncteur des applications A-bilinéaires de $M \times N$ dans P. Par suite le produit tensoriel $M \otimes_A N$ représente aussi le foncteur $\mathrm{Hom}_A(N, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(M, P))$. On a donc des isomorphismes, fonctoriel en tout les arguments :

$$\mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(N, P)), \tag{12.8.1}$$

$$\mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(M, P)). \tag{12.8.2}$$

506 12.9. Il résulte de (12.8), ou bien de (12.8.1) et de (12.2) que le foncteur $\otimes_A$ commute aux limites inductives en ses deux arguments.

Proposition 12.10. Soient C un $\mathscr{U}$-site, A' un préfaisceau d'anneaux sur C, M' (resp. N') un A'-module à droite (resp. à gauche), A, M, N les faisceaux associés à A', M' et N' respectivement. Le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto M'(X) \otimes_{A(X)} N'(X)$ $(X \in \mathrm{ob}\, C)$ est canoniquement isomorphe au faisceau $M \otimes_A N$.

Le préfaisceau $X \mapsto M'(X) \otimes_{A'(X)} N'(X)$ peut se construire à partir des préfaisceaux M', N' et A' par les opérations indiquées dans la démonstration de 12.7. Comme le foncteur « faisceau associé » commute aux limites projectives et inductives finies et aux foncteurs « objet abélien libre engendré », la formation du produit tensoriel commute au foncteur « faisceau associé ».

Proposition 12.11. Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module à droite, N un A-Module à gauche, X un objet de E.

a) On a un isomorphisme canonique

$$j_X^*(M \otimes_A N) \simeq (j_X^* M) \otimes_A (j_X^* N).$$

Soient de plus P un A/X-Module à droite et Q un A/X module à gauche.

b) On a des isomorphismes canoniques (formules de projection) :

$$j_{X!}(P \otimes_{A|X} j_X^* N) \simeq (j_{X!} P) \otimes_A N$$
$$j_{X!}(j_X^* M \otimes_{A|X} Q) \simeq M \otimes_A (j_{X!} Q).$$

Démontrons a). Pour tout faisceau abélien R sur $E_{/X}$, on a la suite d'isomorphismes fonctoriels en R :

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^*(M \otimes_A N), R) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M \otimes_A N, j_{X*}R) & (11.2.2.1)\\
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M \otimes_A N, j_{X*}R) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_Z(N, j_{X*}R)) & (12.8.1)\\
\mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_Z(N, j_{X*}R)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\,\mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R)) & (12.3)\\
\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\,\mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R)) & (11.2.2.1)\\
\mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^* M, \mathscr{H}om_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* M \otimes_A j_X^* N, R) & (12.8.1)
\end{array}
$$

Exhibons le premier isomorphisme de b). Pour tout faisceau abélien R, on a une suite d'isomorphismes fonctoriels en R : 507

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Hom}_Z(j_{X!}(P \otimes_{A|X} j_X^* N), R) \simeq \mathrm{Hom}_Z(P \otimes_{A|X} j_X^* N, j_X^* R) & (11.3.1)\\
\mathrm{Hom}_Z(P \otimes_{A|X} j_X^* N, j_X^* R) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(P, \mathscr{H}om_Z(j_X^* N, j_X^* R)) & (12.8.1)\\
\mathrm{Hom}_{A|X}(P, \mathscr{H}om_Z(j_X^* N, j_X^* R)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^*\,\mathscr{H}om_Z(N, R)) & (12.3)\\
\mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^*\,\mathscr{H}om_Z(N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathscr{H}om_Z(N, R)) & (11.3.1)\\
\mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathscr{H}om_Z(N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(j_{X!}P \otimes_A N, R) & (12.8.1)
\end{array}
$$

Le deuxième isomorphisme s'obtient de manière analogue à l'aide de (12.8.2).

Corollaire 12.12. Soient E un topos, A, B, C trois faisceaux d'anneaux sur E, M un $B - A$ biModule, N un $A - C$ biModule. Le faisceau abélien $M \otimes_A N$ est muni canoniquement d'une structure de $B - C$ biModule. En particulier, lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs et lorsque M et N sont des A-Modules, $M \otimes_A N$ est muni canoniquement d'une structure de A-Module. Les isomorphismes de 12.9 sont des isomorphismes de biModules.

Pour tout objet X de E, $j_X^* M$ est un $A|X$-Module à droite sur lequel opère, à gauche, l'anneau $B(X)$ et de même, $j_X^* N$ est un A/X-Module à gauche sur lequel opère, à droite, $C(X)$. Par fonctorialité, le faisceau abélien $j_X^* M \otimes_{A/X} j_X^* N \simeq j_X^*(M \otimes_A N)$ est muni d'une structure de $B(X) - C(X)$ « objet », structure qui varie fonctoriellement en X. Par suite $M \otimes_A N$ est muni d'une structure de $B - C$ biModule. Cette structure de $B(X) - C(X)$ objet sur $j_X^*(M \otimes_A N)$ se reflète de façon évidente sur le foncteur « morphisme A-bilinéaire ». On constate alors que, lorsque A est commutatif et lorsque M et N sont des A-Modules, les structures de A-Modules à droite et à gauche qu'on obtient sont « égales » et par suite $M \otimes_A N$ est dans ce cas un A-Module. La dernière assertion est laissée au lecteur.

Corollaire 12.13. Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module à gauche (resp. à droite), X un objet de E. On a (avec la notation A_X de 11.3.3) un isomorphisme canonique 508

$$A_X \otimes_A M \simeq J_{X!} j_X^* M \text{ (resp. } M \otimes_A A_X \simeq j_{X!} j_X^* M)).$$

résulte des formules de projections (12.11).

Proposition 12.14. Soient E un topos, A et B deux faisceaux d'anneaux sur E, M un A-Module à droite, N un $A - B$ biModule, P un B-Module à droite. On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathscr{H}om_B(N, P)).$$

De (12.8.1) on tire un morphisme A-bilinéaire canonique $\mathscr{H}om_Z(N, P) \times N \to P$; d'où, en se restreignant à $\mathscr{H}om_B(N, P) \times N$ (qui est un sous-faisceau), un morphisme A-bilinéaire

$\mathcal{H}om_B(N,P) \times N \to P$ dont on vérifie immédiatement qu'il est B-linéaire sur le deuxième facteur. On a donc un morphisme canonique de B-Modules $\mathcal{H}om_B(N,P) \otimes_A N \to P$; d'où une application canonique, fonctorielle en M :

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{H}om_B(N,P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P). \tag{12.14.1}$$

Montrons que ce morphisme de foncteurs est un isomorphisme. Comme les deux membres transforment les limites inductives de M en limites projectives, il suffit de montrer que (12.14.1) est un isomorphisme, lorsque M parcourt une famille génératrice de la catégorie E_A. Il suffit donc de montrer que (12.14.1) est un isomorphisme lorsque $M = A_X$ où X est un objet de E. La vérification est alors immédiate.

13. Morphisme de topos annelés

Définition 13.1. Soient (E, A) et (E', A') deux topos annelés. Un morphisme de topos annelé $u : (E, A) \to (E', A')$ est un couple (m, θ) où $m : E \to E'$ est un morphisme de topos (3.1) et $\theta : m^*A' \to A$ est un morphisme d'Anneaux.

13.1.1. Comme le foncteur $m^* : E' \to E$ est adjoint à gauche au foncteur $m_* : E \to E'$, se donner un morphisme de topos annelés $(m, \theta) : (E, A) \to (E', A')$ revient à se donner un morphisme de topos $m : E \to E'$ et un morphisme de faisceaux d'anneaux $\Theta : A' \to m_*A$.

509 13.2. A un morphisme de topos annelés $u = (m, \theta) : (E, A) \to (E', A^*)$, on associe deux foncteurs remarquables entre les catégories de Modules :

13.2.1. Le foncteur image directe pour les Modules : Soit M un A-Module à gauche (resp. à droite). L'objet m_*M est muni canoniquement d'une structure de m_*A-Module ; d'où par restriction des scalaires par le morphisme canonique $\Theta' : A' \to m_*A$, un A'-Module noté $u_*(M)$ et appelé l'image directe de M par le morphisme u.

13.2.2. Le foncteur image réciproque pour les Modules : Soit N un A'-Module à gauche (resp. à droite). L'objet m^*N de E est muni canoniquement d'une structure de m^*A'-Module à gauche (resp. à droite). Le A-Module à gauche $A \otimes_m *_{A'} m^*N$ (resp. à droite $m^*N \otimes_m *_{A'} A$) où A est muni de la structure de m^*A'-Module définie par $\theta : m^*A' \to A$, est noté u^*N et est appelé l'image réciproque du Module N par le morphisme de topos annelé u.

13.2.3. On notera que pour tout A-Module M, le faisceau d'ensembles et le faisceau abélien sous-jacent à u_*M est le faisceau m_*M. Aussi emploie-t-on le plus souvent la notation u_* pour désigner le foncteur m_* : image directe pour les faisceaux d'ensembles. En revanche pour un A'-Module N, le faisceau d'ensembles ou le faisceau abélien sous-jacent à u^*N n'est ni égal ni isomorphe en général à m^*N (sauf toutefois lorsque θ est un isomorphisme). Il y a donc lieu de distinguer entre l'image réciproque pour les Modules et l'image réciproque pour les faisceaux d'ensembles ou les faisceaux abéliens. On utilise le plus souvent la notation $u^{-1} : E' \to E$ pour désigner le foncteur m^* image inverse pour les faisceaux d'ensembles. Le foncteur u^{-1} est appelé le foncteur image réciproque « ensembliste » par le morphisme de topos annelé u, par opposition avec l'image réciproque « au sens modules » u^*.

Définition 13.3. Soient (C, A) et (C', A') deux $\mathcal{U}$-sites annelés. Un morphisme de sites annelés $u : (C, A) \to (C', A')$ est un couple (m, θ) où m est un morphisme du site
510 C dans le site C' (4.9) et $\theta : m^*A' \to A$ un morphisme d'Anneaux.

13.3.1. Un morphisme de topos annelé est un morphisme de $\mathscr{U}$-sites annelés. Un morphisme de sites annelés donne naissance à un morphisme entre les topos annelés correspondants (11.1.1 et 4.9.1).

Proposition 13.4. Soit $u : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de topos annelés.

a) Pour un A-Module à gauche (resp. à droite) variable M, et pour un A'-Module à gauche (resp. à droite) variable N, on a des isomorphismes bifonctoriels canoniques (dits isomorphismes d'adjonction) :

$$\mathrm{Hom}_A(u^*N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N, u_*M), \tag{13.4.1}$$

$$u_* \mathscr{H}om_A(u^*N, M) \simeq \mathscr{H}om_{A'}(N, u_*M). \tag{13.4.2}$$

b) Pour un objet variable X de E', on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en X :

$$u^*A'_X \longrightarrow A_{u^{-1}(X)}, \tag{13.4.3}$$

où A'_X et $A_{u^{-1}(X)}$ désignent les Modules libres engendrés (11.3.3).

c) Lorsque A' est commutatif et lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$ est central (resp. lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$ est un isomorphisme) on a, pour un A'-Module à droite M variable et un A'-Module à gauche N variable, un isomorphisme bifonctoriel canonique :

$$u^*M \otimes_A u^*N \simeq u^*(M \otimes_{A'} N) \tag{13.4.4}$$

(resp. (13.4.5) $\qquad u^*M \otimes_A u^*N \simeq u^{-1}(M \otimes_{A'} N)$).

On a tout d'abord un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(u^*N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{u^{-1}A'}(u^{-1}N, M)$ (12.14), puis un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{u^{-1}A'}(u^{-1}N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N, u_*M)$ (III 1.7) ; d'où (13.4.1). Exhibons l'isomorphisme (13.4.2). Pour tout objet X de E', on a la suite d'isomorphismes fonctoriels :

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Hom}_{E'}(X, u_* \mathscr{H}om_A(u^*N, M)) \simeq & \mathrm{Hom}(u^{-1}X, \mathscr{H}om_A(u^*N, M)) & \text{(adjonction)},\\
\mathrm{Hom}_A(u^*N, \mathscr{H}om_E(u^{-1}X, M)) \simeq & \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' & (12.1),\\
\mathrm{Hom}_A(u^*N, \mathscr{H}om_E(u^{-1}X, M)) \simeq & \mathrm{Hom}_{A'}(N, u_* \mathscr{H}om_E(u^{-1}X, M)) & (13.4.1),\\
\mathrm{Hom}_{A'}(N, \mathscr{H}om_{E'}(X, u_*M)) \simeq & \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' & (10.3.1),\\
\quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \simeq & \mathrm{Hom}_{A'}(X, \mathscr{H}om_{A'}(N, u_*M)) & (12.1).
\end{array}$$

La formule (13.4.5) s'obtient alors à partir de la formule 13.3.2. par adjonction (définition du produit tensoriel (12.7)). La formule (13.4.4) se déduit de (13.4.5) en utilisant la commutativité du produit tensoriel lorsque l'anneau de base est commutatif (12.8). Enfin, pour démontrer (13.4.3), on considère la suite d'isomorphismes 511

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Hom}_A(u^*A'_X, M) \simeq & \mathrm{Hom}_{A'}(A'_X, u_*M) & (13.4.1),\\
\mathrm{Hom}_{E'}(X, u_*M) \simeq & \quad '' \quad '' \quad '' & (11.3.3),\\
\quad '' \quad '' \quad '' \simeq & \mathrm{Hom}_E(u^{-1}X, M) & \text{(adjonction)},\\
\mathrm{Hom}_A(A_{u^{-1}X}, M) \simeq & \quad '' \quad '' \quad '' & (11.3.3).
\end{array}$$

Corollaire 13.5. Soient (E, A) un topos annelé, $x : P \to E$ un point de E, $F \mapsto F_x$ le foncteur fibre associé (6.1). Le foncteur fibre en x transforme le produit tensoriel des A-Modules en produit tensoriel (ordinaire) des A_x-modules.

Le produit tensoriel dans P est le produit tensoriel ordinaire des modules (P le topos ponctuel est la catégorie des ensembles). L'assertion résulte donc de (13.4.4).

Corollaire 13.6. Soit $u : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de topos annelés. Le foncteur u_* image directe pour les Modules à droite ou à gauche commute aux limites projectives et en particulier est exact à gauche. Le foncteur u^* image réciproque pour les Modules à droite ou à gauche commute aux limites inductives et en particulier est exact à droite.

Ceci résulte de la formule (13.4.1) (I 2.11).

13.7. On notera que le foncteur u^*, image réciproque pour les Modules, n'est pas, en général, exact, alors que le foncteur u^{-1}, image réciproque ensembliste, est exact. On peut cependant affirmer l'exactitude de u^* lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$
512 est plat (à droite ou à gauche) (V 1.8). C'est en particulier le cas lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$ est un isomorphisme.

13.8. Soient C un $\mathcal{U}$-site, A' un préfaisceau d'anneaux sur C, et notons A le faisceau associé à A'. La catégorie des préfaisceaux de A'-modules qui sont des faisceaux est équivalente à la catégorie des A-Modules. On utilise parfois la notation $\mathrm{Hom}_{A'}(M, N)$ pour désigner le groupe $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ (11.1.2). De même, et abusivement, on utilise les notations $\mathcal{H}om_{A'}(M, N)$ et $M \otimes_{A'} N$ pour désigner les faisceaux $\mathcal{H}om_A(M, N)$ et $M \otimes_A N$. Lorsque $A' = k_E$ est le préfaisceau constant, défini par un anneau ordinaire k, on écrit aussi $\mathcal{H}om_k$, $\otimes_k$ au lieu de $\mathcal{H}om_{k_E}$, $\otimes_{k_E}$

Exercice 13.9. Topos localement annelés (cf. [9] pour plus de renseignements dans l'ordre d'idées qui suit).

Soit $(E, \mathcal{O}_E)$ un topos commutativement annelé. Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f \in \mathcal{O}_E(X)$, soit X_f le plus grand sous-objet de X sur lequel f soit inversible.

a) Montrer que pour $X' \in \mathrm{ob}\, E_{/X}$, $f_{X'}$ est inversible si et seulement si le morphisme structural $X' \to X$ se factorise par X_f, et que pour $f, g \in \mathcal{O}_E(X)$, on a
$$X_{fg} = X_f \cap X_g.$$
b) Montrer que les conditions suivantes (i) à (iii) sont équivalentes :
   (i) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f, g \in \mathcal{O}_E(X)$, on a
   $$X_{f+g} \subset \mathrm{Sup}(X_f, X_g)$$
   (ii) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f, g \in \mathcal{O}_E(X)$ tels que $f + g$ soit inversible, on a $X = \mathrm{Sup}(X_f, X_g)$.
   (iii) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f \in \mathcal{O}_E(X)$, on a
   $$X = \mathrm{Sup}(X_f, X_{1-f}).$$
513 Montrer que ces conditions impliquent la condition suivante (iv), et sont équivalentes à cette dernière si E a suffisamment de points :
   (iv) Pour tout point p de E, l'anneau fibre $\mathcal{O}_{E,p}$ est un anneau local.

   Lorsque les conditions équivalentes (i) à (iii) sont satisfaites, on dira que $(E, \mathcal{O}_E)$ est un topos localement annelé, et on dit de même qu'un site annelé est un site localement annelé si le topos annelé correspondant est un topos localement annelé.
c) Soient $(E, \mathcal{O}_E)$ et $(E', \mathcal{O}_{E'})$ deux topos localement annelés, et f un morphisme de topos annelés du premier dans le second. Montrer que la condition (i) suivante implique la condition (ii) et lui est équivalente si E a suffisamment de points :

(i) Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, E'$ et $s' \in \mathscr{O}_{E'}(X')$, posant $X = f^{-1}(X)$, $s = f^*(s')$, on a

$$X'_{s'} = f^{-1}(X_s).$$

(ii) Pour tout point p de E, posant $p' = f(p)$, l'homomorphisme naturel sur les fibres

$$\mathscr{O}_{E',p'} \longrightarrow \mathscr{O}_{E,p}$$

est un homomorphisme local d'anneaux locaux.

Lorsque la condition (i) est satisfaite, on dira que f est un morphisme de topos localement annelés, ou encore un morphisme admissible de topos localement annelés si une confusion est à craindre. On désigne par $\mathscr{H}\!omtoplocan(E, E')$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathscr{H}\!omtopan(E, E')$ de tous les morphismes de topos annelés de E dans E' définie par les morphismes admissibles de E dans E'.

d) Supposons que $(E, \mathscr{O}_E)$ soit le topos annelé associé à un espace topologique annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ (2.1). Montrer que pour que $(E, \mathscr{O}_E)$ soit localement annelé, il faut et il suffit que $(X, \mathscr{O}_X)$ soit localement annelé, i.e. que pour tout $x \in X$, la fibre $\mathscr{O}_{X,x}$ soit un anneau local. (Noter que dans le critère (iv) de b), il suffit de prendre le point p dans une famille conservatrice de points de E). Soit $f : (X, \mathscr{O}_X) \to$ **514**
$(X', \mathscr{O}_{X'})$ un morphisme d'espaces annelés, où $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{O}_{X'}$ sont des faisceaux d'anneaux locaux. Montrer que le morphisme de topos annelés correspondant $\mathrm{Top}(X, \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Top}(X', \mathscr{O}_{X'})$ est admissible si et seulement si il en est de même pour le morphisme f, i.e. ; si et seulement si pour tout $x \in X$, $\mathscr{O}_{X',f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est un homomorphisme local d'anneaux locaux.

e) Soient $(E, \mathscr{O}_E)$ et $(E', \mathscr{O}_{E'})$ deux topos localement annelés, tels que E ait suffisamment de points et que $(E', \mathscr{O}_{E'})$ soit équivalent au topos annelé défini par un schéma $(X', \mathscr{O}_{X'})$; prouver que la catégorie $\mathscr{H}\!omtoplocan(E, E')$ est équivalente à une catégorie discrète, i.e. que c'est un groupoïde (tout morphisme est un isomorphisme) rigide (les groupes d'automorphismes des objets sont les groupes unité).
(Hint : se ramener au cas où $(E, \mathscr{O}_E)$ est le topos ponctuel annelé par un corps). On se rappellera que, par contre, $\mathscr{H}\!omtop(E, E')$ n'est pas en général équivalent à une catégorie discrète, même si E et E' sont des topos définis par des schémas (et même si E est le topos ponctuel), cf. 4.2.3.

f) Soient E un topos localement annelé, P le topos annelé défini par l'espace annelé $\mathrm{Spec}\, k$, où k est un corps. Montrer que les morphismes admissibles de topos localement annelés $P \to E$ correspondent aux couples (p, u) d'un point p de E, et d'une injection de $k(p)$ dans k. où $k(p)$ est le corps résiduel de l'anneau local $\mathscr{O}_{E,p}$. Généraliser en un énoncé exhibant les morphismes admissibles d'un topos localement annelé ponctuel dans E (généralisant EGA 1 2.4.4).

On appelle point géométrique d'un topos localement annelé E tout morphisme admissible dans E du topos localement annelé défini par un espace annelé de la forme $\mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos. Définir la catégorie des points géométriques de E (sous-entendu : correspondants à des corps $k \in \mathscr{U}$), notée $\mathscr{P}\!tg\acute{e}om(E)$, et un foncteur canonique $\mathscr{P}\!tg\acute{e}om(E) \to \mathscr{P}\!oint(E)$. Montrer que ce foncteur est fidèle si et seulement si E n'a pas de point i.e. $\mathscr{P}\!oint(E)$ **515**
est la catégorie vide.

g) Soient E un $\mathscr{U}$-topos, V un univers tel que $U \in V$. Définir une 2-catégorie $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Top})_{/E}$ en termes de l'objet E de la 2-catégorie $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Top})$ (3.3.1), en s'inspirant de 5.14 a). Lorsque E est annelé par un Anneau A, définir de même une 2-catégorie $(V\text{-}\mathscr{U}\text{-Topan})_{/E}$, et lorsque E est localement annelé, utilisant la notion de morphisme admissible (cf. c)), définir une 2-catégorie $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-Topanloc})_{/E}$, admettant $\mathscr{P}\!\mathit{tg\acute{e}om}(E)$ (cf. f)) comme sous-catégorie pleine.

14. Modules sur un topos défini par recollement

14.1. Soient (E, A) un topos annelé, U un sous-topos ouvert de E, F le sous-topos fermé complémentaire, $j : U \to E$ et $i : F \to E$ les morphismes canoniques (9.3). Le topos U est annelé par j^*A (11.2.1) et le morphisme de topos i, complété de manière évidente, devient un morphisme de topos annelés. Dans ce numéro, le topos F sera annelé par le faisceau i^*A, noté $A|F$, et le morphisme j, complété de manière évidente, est alors un morphisme de topos annelés.

14.2. On a donc deux morphismes de topos annelés :

$$j : (U, A|U) \longrightarrow (E, A) \text{ et } i : (F, A|F) \longrightarrow (E, A);$$

d'où cinq foncteurs entre les catégories de Modules (à gauche pour fixer les idées) correspondantes :

$$\begin{tikzcd} ({}_{A|U}U) \arrow[r, shift left=2, "j_!"] \arrow[r, shift right=2, "j_*"'] & ({}_{A}E) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[r, shift left, "i^*"] & ({}_{A|F}F) \arrow[l, shift left, "i_*"] \end{tikzcd} \quad . \tag{14.2.1}$$

Chaque foncteur du diagramme (14.2.1) est adjoint à gauche à celui qui se trouve au-dessous de lui.

516 14.3. On sait que le foncteur $X \mapsto (j^*X, i^*X; i^*X \to i^*j_*j^*X)$ est une équivalence de E dans le topos (U, F, i^*j_*) (9.5.4). Cette équivalence induit une équivalence entre les catégories de Modules correspondantes et par suite le foncteur $P \mapsto (j^*P, i^*P; i^*P \to i^*j_*j^*P)$ est une équivalence, notée Φ, de la catégorie ${}_AE$ dans la catégorie $({}_{A|U}U, {}_{A|F}F, i^*j_*)$. Les foncteurs de (14.2.1) composés avec Φ ou Φ^{-1} sont alors les foncteurs :

$$\begin{aligned}
\Phi \circ j_* &: M \mapsto (M, i^*j_*M; i^*j_*M \xrightarrow{\mathrm{id}} i^*j_*M),\\
j^* \circ \Phi^{-1} &: (M, N; N \to i^*j_*M) \mapsto M,\\
\Phi \circ j_! &: M \mapsto (M, 0; 0 \to i^*j_*M),\\
\Phi \circ i_* &: N \mapsto (0, N; N \to 0),\\
i^* \circ \Phi^{-1} &: (M, N; N \to i^*j_*M) \mapsto N.
\end{aligned}$$

Le lecteur pourra, à titre d'exercice, expliciter les différents morphismes d'adjonction.

14.4. Notons

$$i^! : {}_AE \longrightarrow {}_{A|F}F \tag{14.4.1}$$

le foncteur défini par la formule :

$$i^! \circ \Phi^{-1}(M, N; N \xrightarrow{u} i^*j_*M) = \mathrm{Ker}(u). \tag{14.4.2}$$

Proposition 14.5. Le foncteur $i^!$ est adjoint à droite au foncteur i_*. Le morphisme d'adjonction $i_*i^! \to \mathrm{id}$ est un monomorphisme. Les foncteurs $i^!$ (pour des anneaux variables) commutent aux foncteurs restriction des scalaires.

Il est clair que tout morphisme

$$(0, N; 0) \longrightarrow (M, N; N \xrightarrow{u} i^* j_* M)$$

se factorise d'une manière unique par $(0, \ker(u)\,; 0)$; ce qui démontre la propriété d'adjonction. Les autres assertions sont triviales.

Proposition 14.6. Pour tout objet P de ${}_A E$, on a les suites exactes fonctorielles en P : **517**

$$0 \longrightarrow j_! j^* P \longrightarrow P \longrightarrow i_* i^* P \longrightarrow 0; \tag{14.6.1}$$

$$0 \longrightarrow i_! i^* P \longrightarrow P \longrightarrow j_* j^* P, \tag{14.6.2}$$

où les flèches non triviales sont les flèches d'adjonction.

Remarquons d'abord qu'une suite

$$(M', N'; u') \longrightarrow (M, N; u) \longrightarrow (M'', N''; u'')$$

de $({}_{A/U}U, {}_{A/F}F; i^* j_*)$ est exacte si et seulement si les suites correspondantes

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$
$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$$

sont exactes.

Les suites (14.6.1) et (14.6.2) sont transformées par l'équivalence Φ en des suites du type (14.3) :

$$0 \longrightarrow (M, 0; 0) \longrightarrow (M, N; u) \longrightarrow (0, N; 0) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow (0, \ker(u); 0) \longrightarrow (M, N, u) \longrightarrow (M, i^* j_* M; \mathrm{id}).$$

La vérification de l'exactitude de ces suites est triviale.

14.7. La suite exacte (14.6.2) permet d'obtenir une nouvelle interprétation du foncteur $i_! i^*$. En effet soit X un objet de E. De (14.6.2) on tire la suite exacte de groupes commutatifs :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X, i_* i^! P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X, j_* j^* P).$$

Notons encore U l'ouvert de E, objet final du sous-topos ouvert U. Il résulte des propriétés d'adjonction des foncteurs j_*, j^* et $j_!^{\mathrm{ens}}$ que le groupe $\mathrm{Hom}_E(X, j_* j^* P)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_E(X{\times}U, P)$ et que le morphisme $\mathrm{Hom}_E(X, P) \to \mathrm{Hom}_E(X, j_* j^* P)$ n'est autre que le morphisme défini par le monomorphisme $X \times U \to X$ (5). En d'autres termes (8.5.2) :

Proposition 14.8. Les sections de $i_* i^! P$ sur $E_{/X}$ sont les sections de P sur $E_{/X}$ dont le support (9.3.5) contient F . En d'autres termes, $i_* i^! P$ est le plus grand sous-faisceau de P à support contenu dans F. **518**

14.9. Par abus de langage, on dit parfois que $i_* i^! P$ est le sous-Module de P défini par les sections de P à support dans F. Il résulte de 8.5.3 que cette terminologie ne fait qu'étendre aux topos généraux une terminologie utilisée pour les topos de faisceaux sur des espaces topologiques.

Proposition 14.10. 1) Le foncteur $P \mapsto i_* i^* P$ est isomorphe au foncteur $P \mapsto i_* i^* A \otimes_A P$.

2) Le foncteur $P \mapsto i^! i^* P$ est isomorphe au foncteur $P \to \mathscr{H}\!om_A(i_* i^* A, P)$.

La suite exacte (14.6.1) s'écrit, dans le cas particulier où P est le A-Module A :

$$0 \longrightarrow A_U \longrightarrow A \longrightarrow i_* i^* A \longrightarrow 0 \tag{14.10.1}$$

où A_U est le A-Module libre engendré par l'ouvert U correspondant au sous-topos ouvert U (9 et 11.3.3). Pour tout A-Module P, les A-Modules $j_! j^* P$ et $j_* j^* P$ sont canoniquement isomorphes respectivement à $A_U \otimes_A P$ et $\mathcal{H}om_A(A_U, P)$ (12.3. et 12.6). De plus, les morphismes canoniques $j_! j^* P \to P$ et $P \to j_* j^* P$ proviennent, modulo ces isomorphismes, du monomorphisme $A_U \to A$. On tire donc de la suite exacte ??, deux suites exactes (12.2 et 12.11) :

$$j_! j^* P \longrightarrow P \longrightarrow i_* i^* A \otimes_A P \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_A(i_* i^* A, P) \longrightarrow P \longrightarrow j_* j^* P;$$

d'où les isomorphismes annoncés par comparaison avec (14.6.1) et (14.6.2).

Bibliographie

[1] M. Artin et B. Mazur, Homotopy of varieties in the etale topology, in : Proceedings of a Conference on Local Fields, Driebergen 1966, Springer. 519

[2] P. Gabriel et G. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.

[3] J. Giraud, Algèbre homologique non commutative : Grundlehren Springer 1971.

[4] A. Grothendieck, sur quelques points d'Algèbre homologique, Tohoku Math. Journal, (cité [Toh]).

[5] A. Grothendieck, Fondements de la Géométrie Algébrique, (Recueil d'exposés Bourbaki 1957/62), Secrétariat mathématique, II rue P. Curie Paris.

[6] A. Grothendieck, Crystals and the De Rham cohomology of schemes, (notes by I. Coates et O. Jussila), in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub, Cie, 1969.

[7] A. Grothendieck, Classes de Chern des représentations linéaires des groupes discrets, in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie, 1969.

[8] R. Godement, Théorie des faisceaux, Act. Scient. Ind. *n*° 1 252, (1958), Hermann (Paris) (cité [TF]).

[9] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, Thèse multigraphiée, Orsay 1967.

[10] D. Mumford, Picard groups of moduli problems, in Arithmetic Algebraic Geometry, Harper's Series in Modern Mathematics.

[11] Nguyen Dinh Ngoc, Thèse Sciences Mathématiques, Paris 1963, *n*° 4 995.

[12] J.E. Roos, Distributivité des $\varinjlim$ par rapports aux $\varprojlim$ des topos
a) CR t.259 p. 969-972 b) CR T. 259 p. 1605-1608
c) CR t.259 p. 1801-1804 (août et septembre 1964).

[13] P. Deligne - D. Mumford, The irreductibility of the space of curves of given genus, Pub. math. *n*° 36 (1969).

[14] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press (1965).

[15] J. Lurie, Higher Topos Theory, Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. xviii+925 pp.

[16] P. Johnstone, Topos theory, London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1977. xxiii+367 pp.

[17] F. Borceux, G. Van den Bossche, Structure des topologies d'un topos, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, t. 25, n°1 (1984), p 37-39.

EXPOSÉ V

Cohomologie dans les topos

J.-L. Verdier

Introduction

On présente dans cet exposé les invariants cohomologiques commutatifs et élémentaires des topos. Dans le *n*° 1, on étudie les modules plats et les morphismes plats de topos annelés. Les démonstrations sont faites en utilisant l'hypothèse, le plus souvent vérifiée dans la pratique, que les topos ont suffisamment de points (IV 6). Ces démonstrations sont reprises dans le cas général dans l'appendice *n*° 8 où Deligne, à l'aide de la technique des limites inductives locales, généralise en outre au cas des topos, le théorème de D. Lazard sur la structure des modules plats. Les théorèmes de cet exposé, sont des théorèmes d'existence de suites spectrales reliant les différents invariants cohomologiques (N° 3, 5, 6). On sait que, même pour les espaces topologiques, la cohomologie de Čech ne coïncide pas en général avec la cohomologie des faisceaux [11]. On introduit dans l'appendice *n*° 7, un calcul de Čech modifié permettant d'obtenir, à l'aide de recouvrement, la cohomologie des faisceaux dans un topos quelconque. On est amené dans cet appendice à utiliser des recouvrements simpliciaux (hyper-recouvrements) dont les invariants homotopiques ont été étudiés dans [1] (cf. aussi [17]). 2

Les invariants cohomologiques introduits sont élémentaires en ce sens que nous n'utilisons pas les catégories dérivées [12]. Le lecteur familier avec ce langage fera immédiatement la traduction des différents énoncés de cet exposé et pourra alors les généraliser aux complexes et à l'hypercohomologie. Ce langage des catégories dérivées est d'ailleurs utilisé dans la suite de ce séminaire.

On se limite ici à la cohomologie commutative. Pour le H^1 non commutatif, utilisé dans ce séminaire, et pour le H^2 non commutatif, nous renvoyons à [17]. Les foncteurs qu'on dérive sont additifs ; on reste muet sur les structures multiplicatives (cf. [15]).

0. Généralités sur les catégories abéliennes

Dans ce numéro nous rappelons quelques lemmes dont la plupart se trouvent dans [11]. 3

Proposition 0.1. Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne possédant un générateur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La catégorie $\mathfrak{A}$ vérifie l'axiome AB 5) : Les petites sommes directes sont représentables et si (X_i), $i \in I$, est une petite famille filtrante croissante de sous-objets d'un objet X de $\mathfrak{A}$ et Y est un sous-objet de X, on a

$$(\sup_i X_i) \cap Y = \sup_i (X_i \cap Y).$$

ii) Les petites limites inductives pseudo-filtrantes (I.2.7) sont représentables et commutent aux limites projectives finies.

De plus, si les conditions ci-dessus sont remplies, les petites limites inductives filtrantes sont universelles (I 2.6).

Preuve. Il est clair que (ii) ⇒ (i). Pour montrer que (i) ⇒ (ii), et pour prouver l'assertion supplémentaire, il suffit d'utiliser que $\mathfrak{A}$ est une sous-catégorie pleine d'une catégorie de modules $\mathscr{M}$ sur un anneau convenable, telle que le foncteur d'inclusion $u : \mathfrak{A} \to \mathscr{M}$ admette un adjoint à gauche v exact [5]. La vérification est alors triviale.

0.1.1. On sait [11] qu'une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ possédant un générateur et vérifiant l'axiome AB 5) possède suffisamment d'injectifs i.e. tout objet se plonge dans un objet injectif. De plus, d'après le résultat déjà cité [5], les petits produits sont représentables dans $\mathfrak{A}$ (axiome AB 3) *).

Proposition 0.2. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux catégories abéliennes et $\mathfrak{A} \underset{u}{\overset{v}{\leftrightarrows}} \mathfrak{B}$ deux foncteurs adjoints (u est adjoint à gauche de v). Considérons les deux propriétés :

i) Le foncteur u est exact.

4 ii) Le foncteur v transforme les objets injectifs de $\mathfrak{B}$ en objets injectifs de $\mathfrak{A}$.

1) On a toujours l'implication (i) ⇒ (ii).
Si, de plus, tout objet non nul de $\mathfrak{B}$ est source d'un morphisme non nul dans un objet injectif, alors (ii) ⇔ (i).

2) Supposons que :

a) la catégorie $\mathfrak{B}$ possède suffisamment d'injectifs.

b) l'une des deux conditions équivalentes (i) et (ii) ci-dessus soit remplie.

c) le foncteur u soit fidèle.

Alors, la catégorie $\mathfrak{A}$ possède suffisamment d'injectifs.

Preuve. La preuve est laissée au lecteur.

Remarque 0.2.1. La catégorie des groupes commutatifs possède suffisamment d'injectifs. Appliquant la proposition 0.2 on en déduit que toute catégorie de modules unitaires sur un anneau à élément unité possède suffisamment d'injectifs. Appliquant alors le résultat de [5] (utilisé dans la preuve de 0.1) et 0.2, on en déduit que toute catégorie abélienne possédant un générateur et des petites limites inductives filtrantes exactes possède suffisamment d'injectifs ; ce qui fournit une nouvelle démonstration de ce fait.

Proposition 0.3. Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ trois catégories abéliennes et $u : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $v : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux foncteurs additifs exacts à gauche. Supposons que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ possèdent suffisamment d'objets injectifs. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un foncteur spectral dont le terme $E_2^{p,q}$ est :

$$R^p v R^q u$$

et qui aboutit à $R^{p+q} vu$ (convenablement filtré).

ii) Le foncteur u transforme les objets injectifs de $\mathfrak{A}$ en objets acycliques pour le foncteur v.

5 Preuve. (i) ⇒ (ii) est trivial car il suffit d'appliquer le foncteur spectral à un objet injectif. L'implication (ii) ⇒ (i) est démontrée dans [11].

Proposition 0.4. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux catégories abéliennes et $u : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un foncteur additif exact à gauche. Soit M un sous-ensemble de l'ensemble des objets de $\mathfrak{A}$ possédant les propriétés suivantes :

1) Tout objet de $\mathfrak{A}$ se plonge dans un élément de M.

2) Si $X \oplus Y$ appartient à M, l'objet X appartient à M.
3) Si
$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$
est une suite exacte et si X' et X appartiennent à M, alors X'' appartient à M et la suite
$$0 \longrightarrow u(X') \longrightarrow u(X) \longrightarrow u(X'') \longrightarrow 0$$
est exacte. Les objets nuls appartiennent à M.

Alors tout injectif appartient à M, et les objets de M sont acycliques pour u, i.e. pour tout $q \neq 0$ et tout objet X de M, on a $R^q u(X) = 0$. (En particulier les résolutions par des objets de M permettent de calculer les foncteurs dérivés de u.)

Pour la preuve, voir [11] 3.3.1.

Proposition 0.5. Soient $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ deux univers, $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{B}$) une $\mathscr{U}$-catégorie (resp. $\mathscr{V}$-catégorie) abélienne vérifient l'axiome $AB\,5$) relativement à $\mathscr{U}$ (resp. à $\mathscr{V}$) et possédant une famille génératrice $\mathscr{U}$-petite (resp. $\mathscr{V}$-petite). Soit $\epsilon : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un foncteur exact et pleinement fidèle. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{A}$ telle que la famille $(\epsilon(X_i))_{i\in I}$ soit génératrice dans $\mathfrak{B}$.
1') Tout objet de $\mathfrak{B}$ est isomorphe à un quotient d'un objet du type $\bigoplus_{\alpha\in A}\epsilon(Y_\alpha)$ où $A \in \mathscr{V}$.

Sous ces conditions, on a la propriété suivante :

2) ϵ transforme les produits $\mathscr{U}$-petits en produits (donc commute aux limites projectives $\mathscr{U}$-petites).

De plus, sous les conditions équivalentes 1) ou 1'), les conditions suivantes sont équivalentes : 6

a) Pour tout objet Y de $\mathfrak{A}$, tout sous-objet de $\epsilon(Y)$ est isomorphe à l'image par ϵ d'un sous-objet de Y.
a') Il existe une famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{A}$ telle que la famille $(\epsilon(X_i))_{i\in I}$ soit génératrice dans $\mathfrak{B}$ et telle que pour tout $i \in I$, tout sous-objet de $\epsilon(X_i)$ soit isomorphe à l'image par ϵ d'un sous-objet de X_i.
b) Tout objet de $\mathfrak{B}$ est isomorphe à un sous-objet d'un objet du type $\prod_{\alpha\in A}\epsilon(Y_\alpha)$ où $A \in \mathscr{V}$.
c) ϵ commute aux sommes directes $\mathscr{U}$-petites (donc commute aux limites inductives $\mathscr{U}$-petites.

De plus, sous les conditions 1) et a') on a :

d) ϵ transforme les objets injectifs en objets injectifs.

Remarque 0.5.1. Lorsque dans 0.5 on a $\mathscr{U} = \mathscr{V}$, les conditions 1) et a') entraînent que ϵ est une équivalence de catégories (car on a alors b), 2) et a)).

0.5.2. Nous nous bornerons à donner des indications sur la démonstration. Les implications 1) $\Leftrightarrow$ $1'$), 1) $\Rightarrow$ 2), sont laissées au lecteur. Il est clair que a) $\Rightarrow$ a'). Montrons que a') entraîne d). Soit M un injectif dans $\mathfrak{A}$. Pour tout $i \in I$ et tout sous-objet $Y \hookrightarrow X_i$ de X_i, l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(X_i, M) \to \mathrm{Hom}(Y, M)$ est surjectif. Donc, en vertu de a') et de la pleine fidélité de ϵ, pour tout sous-objet $U \hookrightarrow \epsilon(X_i)$, l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(\epsilon(X_i), \epsilon(M)) \to \mathrm{Hom}(U, \epsilon(M))$ est surjectif. Comme les $\epsilon(X_i)$ forment une famille génératrice de $\mathfrak{B}$, $\epsilon(M)$ est injectif [11].

Montrons que a') $\Rightarrow$ b). Quitte à augmenter la famille des X_i, on peut supposer que pour tout $i \in I$, tout quotient de X_i est isomorphe à un X_j pour un j convenable. Soit alors, pour tout $i \in I$, $X_i \hookrightarrow M_i$ un monomorphisme dans un objet injectif. La famille $(\epsilon(X_i))_{i\in I}$ est stable par quotient et pour $i \in I$, le morphisme $\epsilon(X_i) \hookrightarrow \epsilon(M_i)$ est, d'après d), un monomorphisme dans un objet injectif. On vérifie alors immédiatement que, la famille $\epsilon(X_i)$ étant génératrice, la famille $(\epsilon(M_i))_{i\in I}$ est cogénératrice, d'où b).

Montrons que b) ⇒ c). Soit $(Z_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille $\mathscr{U}$-petite d'objets de $\mathfrak{A}$ et montrons que le morphisme canonique

$$\bigoplus_{\alpha\in A} \epsilon(Z_\alpha) \longrightarrow \epsilon(\bigoplus_{\alpha\in A} Z_\alpha)$$

7 est un isomorphisme. Comme la famille des objets $\epsilon(Y)$ est cogénératrice, il suffit montrer que pour tout objet Y de $\mathfrak{A}$, l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\epsilon(\bigoplus_a Z_a), \epsilon(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bigoplus_a \epsilon(Z_a), \epsilon(Y))$$

est un isomorphisme ce qui résulte de la pleine fidélité de ϵ.

Il reste à montrer que c) ⇒ a). Soit Z un sous-objet de $\epsilon(Y)$. Il existe, en vertu de 1′), une famille $\mathscr{U}$-petite Y_α d'objets de $\mathfrak{A}$ et un épimorphisme de $\oplus_\alpha \epsilon(Y_\alpha)$ sur Z. Comme ϵ commute aux sommes directes $\mathscr{U}$-petites, il existe donc un épimorphisme $\epsilon(Y') \to Z$. Notons $u : \epsilon(Y') \to Z \to \epsilon(Y)$ le morphisme composé. On a $Z = \mathrm{Im}(u)$. Comme ϵ est pleinement fidèle, on a $u = \epsilon(v)$ et par suite $Z = \mathrm{Im}(\epsilon(v)) = \epsilon(\mathrm{Im}(v))$.

Exercice 0.5.2. Soit $\mathrm{Sex}_{\mathscr{V}}(\mathfrak{A})$ la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathfrak{A}$ dans la catégorie des $\mathscr{V}$-groupes commutatifs qui commutent aux limites inductives $\mathscr{U}$-petites. Montrer que sous les conditions 1) et a') le foncteur canonique de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{Sex}_{\mathscr{V}}(\mathfrak{A})$ est une équivalence.

1. Modules plats

Définition 1.1. Soit (E, A) un topos annelé (IV 11.1.1). Un A-Module à droite (resp. à gauche) M est dit plat si le foncteur $M \otimes_A \cdot$ (resp. $\cdot \otimes_A M$) de la catégorie des A-Modules à gauche (resp. à droite) dans la catégorie des faisceaux abéliens de E est exact.

Proposition 1.2. Soit M un B-A bi-Module.

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) Le module M est A-plat à gauche.
   ii) Pour tout B-Module injectif I, le A-Module à gauche $\mathscr{H}om_B(M, I)$ est injectif.
2) Un Module M, limite inductive pseudo-filtrante (I 2.7.1) de Modules plats, est plat.
3) Enfin, si $M_\bullet = \cdots \to M_{i+1} \to M_i \to \cdots$ est un complexe acyclique de Modules plats ($M_i = 0$ pour $i < i_0$), alors pour tout Module F, le complexe :

$$M_\bullet \otimes_A F = \cdots \longrightarrow M_{i+1} \otimes_A F \longrightarrow M_i \otimes_A F \longrightarrow \cdots$$

8 est acyclique.

Preuve. D'après (IV 12.12) on a un isomorphisme d'adjonction :

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A \cdot, \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\cdot, \mathscr{H}om_B(M, \cdot)).$$

Il suffit alors d'appliquer 0.2 pour obtenir l'équivalence (i) ⇔ (ii). Cet isomorphisme d'adjonction montre par ailleurs que le produit tensoriel commute aux limites inductives. Le fait que les limites inductives pseudo-filtrantes soient exactes (0.1) entraîne la deuxième assertion. Pour montrer que le complexe $M_\bullet \otimes_A F$ est acyclique, il suffit de montrer que pour tout faisceau abélien injectif I le complexe $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Z}}(M_\bullet \otimes_A F, I)$ est acyclique. Ce complexe est isomorphe, en vertu des formules d'adjonction, au complexe $\mathrm{Hom}^\bullet_A(F, \mathcal{H}om_{\mathbf{Z}}(M_\bullet, I))$. Or d'après l'équivalence (i) ⇔ (ii), le complexe de faisceaux

$$\mathcal{H}om_{\mathbf{Z}}(M_\bullet, I)$$

est un complexe acyclique dont les objets sont injectifs, d'où la conclusion.

Proposition 1.3.1. Soient (E, A) un topos annelé, H un objet de E, M un $A_{/H}$-Module plat. Alors $j_{H!}M$ est un A-Module plat. En particulier A_H est plat à droite et à gauche.

Supposons, pour fixer les idées, que M soit un $A_{/H}$-Module à droite. Pour tout A-Module à gauche P, on a un isomorphisme canonique (IV 12)

$$P \otimes_A j_{H!}M \simeq j_{H!}(P \otimes_{A_{/H}} M).$$

Les foncteurs $j_{H!}$ et j_H^* sont exacts (IV 11.3.1 et 11.12.2) et par hypothèse, le foncteur $- \otimes_{A_{/H}} M$ est exact. Par suite le foncteur $P \to P \otimes_A j_{H!}M$ est exact et $j_{H!}M$ est plat.

Proposition 1.3.2. (Formule de projection pour les immersions fermées) :
Soient (E, A) un topos annelé, $i : F \to E$ un sous-topos fermé de E. Posons $i^*A = A_{/F}$. Pour tout $A_{/F}$-Module (à droite) M et tout A-Module (à gauche) P, on a 9
un isomorphisme fonctoriel

$$i_*(M \otimes_{A_{/F}} i^*P) \simeq (i_*M) \otimes_A P$$

Soient U l'ouvert complémentaire de F et $j : U \to E$ le morphisme canonique d'immersion. On a $j^*(i_*M \otimes_A P) \simeq 0 \otimes_{A_{/U}} j^*(P)$ (IV 12) ; par suite $i_*M \otimes_A P$ a son support dans F. Donc le morphisme d'adjonction $i_*M \otimes_A P \to i_*i^*(i_*M_A P)$ est un isomorphisme (IV 14). On a $i^*(i_*M \otimes_A P) \simeq i^*i_*M \otimes_{A_{/F}} i^*P$ (IV 12) et comme $i : F \to E$ est une immersion fermée, $i^*i_*M \simeq M$ (IV 14) ; d'où l'isomorphisme annoncé.

Corollaire 1.3.3. Pour tout $A_{/F}$-Module plat M, i_*M est plat.

Il résulte de 1.3.2, et de (IV 14) que le foncteur $P \mapsto (i_*M) \otimes_A P$ est un foncteur exact.

1.4. Soient (E, A) un topos annelé, $x : P \to E$ un point de E (IV 6.1), Vois(x) la catégorie des voisinages de x (IV 6.8). À tout objet V de Vois(x) correspond un objet de E, encore noté V, et un point $x_V : P \to E/V$ de E/V. De plus, à tout morphisme $u : V \to W$ de Vois(x), correspond un diagramme essentiellement commutatif de morphisme de topos (IV 6.7)

(1.4.1)
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "x_V"] \arrow[dr, "x_W"'] & E/V \arrow[d, "j_u"] \\ & E/W \end{tikzcd} .$$

Soit N un A_x-module (resp. un ensemble). Du diagramme (1.4.1), on déduit un diagramme de A_x-modules (resp. d'ensembles) :

(1.4.2)
$$\begin{tikzcd} x_W^* x_{W*}N \arrow[r, "\mathrm{ad}_W"] \arrow[d, "\phi(u)"'] & N \\ x_V^* x_{V*}N \arrow[ur, "\mathrm{ad}_V"'] & \end{tikzcd}$$

où ad_W et ad_V sont les morphismes d'adjonction. De plus, on vérifie immédiatement que $\phi(uv) = \phi(v)\phi(u)$. On a donc un foncteur de la catégorie filtrante $\mathrm{Vois}(x)^\circ$ dans la catégorie des A_x-modules (resp. ensembles) et un homomorphisme : 10

(1.4.3) $$\Lambda(N) : \varinjlim_{V \in \mathrm{Vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} N \longrightarrow N.$$

Proposition 1.5. Pour tout A_x-module (resp. ensemble) N, $\Lambda(N)$ est un isomorphisme.

Cette proposition est un cas particulier d'une proposition due à Deligne (8.2.6). Donnons-en une démonstration directe. En passant aux ensembles sous-jacents, il suffit de démontrer la proposition lorsque N est un ensemble (I 2.8). La catégorie cofiltrante $\mathrm{Fl}(\mathrm{Vois}(x))$ des flèches de $\mathrm{Vois}(x)$ est fibrée sur la catégorie $\mathrm{Vois}(x)$ par le foncteur $p : \mathrm{Fl}(\mathrm{Vois}(x)) \to \mathrm{Vois}(x)$ qui, à une flèche, associe son but. Soit D une catégorie et $F : \mathrm{Fl}(\mathrm{Vois}(x)) \to D$ un pro-objet (I 8.10). Pour tout objet V de $\mathrm{Vois}(x)$, notons F_V le pro-objet obtenu en restreignant le foncteur F à la catégorie fibre $\mathrm{Vois}(x)/V$. A tout morphisme $m : U \to V$ de $\mathrm{Vois}(x)$, le foncteur changement de base par m associe un morphisme du pro-objet F_U dans le pro-objet F_V et les morphismes canoniques de pro-objets $F \to F_V$ déterminent un morphisme de pro-objets :

(1.5.1) $$F \longrightarrow \varprojlim_{V \in \mathrm{Vois}(x)^\circ} F_V$$

dont on vérifie immédiatement que c'est un isomorphisme. Appliquons cette remarque au pro-objet d'ensembles pointés :

(1.5.2) $$(U, V, m) \longmapsto x_V^*(m) = F(U, V, m),$$

on obtient un isomorphisme de pro-objets :

(1.5.3) $$F \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathrm{Vois}(x)} \varprojlim_{\mathrm{Vois}(x)/V} x_V^*(m);$$

d'où, pour tout ensemble N, une bijection

(1.5.4) $$\varinjlim_{\mathrm{Fl}(\mathrm{Vois}(x))^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m), N) \simeq \varinjlim_{\mathrm{Vois}(x)^\circ} \varinjlim_{(\mathrm{Vois}(-x)/V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m), N).$$

11 Mais, pour V fixé, $\varinjlim_{(\mathrm{Vois}(x)/V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m), (N))$ s'identifie à $x_V^* x_{V*} N$. En effet, on a $x_V^* x_{V*} N \simeq \varinjlim_{\mathrm{Vois}(x_V)^\circ} \mathrm{Hom}_{E/V}(W, x_{V*} N)$ d'après IV 6.8.1 donc, par adjonction, on a $x_V^* x_{V*} N \simeq \varinjlim_{\mathrm{Vois}(x_V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(w), N)$ et de plus la catégorie $\mathrm{Vois}(x_V)$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Vois}(x)/V$ (IV 6.7.2). Enfin, les applications canoniques de transition $\varinjlim_{(\mathrm{Vois}(x)/U)^\circ} \mathrm{Hom}(x_U^*(m), N) \to \varinjlim_{(\mathrm{Vois}(x)/V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(n), N)$ dans (1.5.4) s'identifient aux applications canoniques $x_U^* x_{U*} N \to x_V^* x_{V*} N$ (1.4.3) ainsi que le lecteur voudra bien le vérifier. On a donc une bijection

(1.5.5) $$\varinjlim_{\mathrm{Fl}(\mathrm{Vois}(x))^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m), N) \simeq \varinjlim_{\mathrm{Vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} N$$

et l'application $\Lambda(N) : \varinjlim_{\mathrm{Vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} N \to N$ (1.4.3) composée avec la bijection (1.5.5) provient des applications $\mathrm{Hom}(x_V^*(m), N) \to N$ qui a une application $r : x_V^*(m) \to N$ associe l'image par r du point marqué de $x_V^*(m)$. Pour démontrer la proposition, il suffit alors de remarquer que tout objet (U, V, m) de $\mathrm{Fl}(\mathrm{Vois}(x))$ est minoré par (U, U, id_U) et que $x_U^*(\mathrm{id}_U)$ est réduit à un élément ou, en d'autres termes, que le morphisme canonique de pro-objet constant réduit à un élément dans F est un isomorphisme de pro-objets.

Proposition 1.6. Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module.

1) Lorsque M est plat, pour tout point $x : P \to E$ de E, le A_x-module M_x est plat.
2) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille conservatrice de points de E telle que pour tout $i \in I$, M_{x_i} soit un A_{x_i}-module plat.

Alors M est plat.

Lemme 1.6.1. Soient M un Module plat et V un objet de E. Le A/V-Module $j_V^* M$ est plat.

Il faut montrer que le foncteur $P \mapsto P \otimes_{A/V} j_V^* M$ est exact. Comme le foncteur prolongement par zéro $j_{V!}$ est exact et fidèle (IV 11.3.1), il suffit de montrer que le foncteur $P \mapsto j_{V!}(P \otimes_{A/V} j_V^* M)$ est exact. On a un isomorphisme fonctoriel $j_{V!}(P \otimes_{A/V} j_V^* M) \simeq$ 12
$j_{V!}(P) \otimes_A M$ (IV 12.11) et par suite le foncteur $P \mapsto j_{V!}(P) \otimes_A M$ est exact (IV 11.3.1).

1.6.2. Démontrons 1). Supposons pour fixer les idées que M soit un A-Module à gauche plat et soit $x : P \mapsto E$ un point de E. Montrons que le foncteur $N \mapsto N \otimes_{A_x} M_x$ de la catégorie des A_x-modules à droite dans la catégorie des groupes commutatifs est exact. Il suffit pour cela de montrer que ce foncteur est exact à gauche. Avec les notations de 1.4, soient V un voisinage de x et $j_V : E/V \to E$ le morphisme de localisation. On a, pour tout A_x-module N, $x_V^* x_{V*} N \otimes_{A_x} M_x \simeq x_V^* x_{V*} N \otimes_{A_*} x_V^* j_V^* M \simeq x_V^*(x_{V_*} N \otimes_{A_x} j_V^* M)$ (IV 12.11). Donc le foncteur $N \mapsto x_V^* x_{V*} N \otimes_{A_x} M_x$ est exact à gauche. Par suite, le foncteur $N \mapsto N \otimes_{A_x} M_x$, limite inductive filtrante de foncteurs exacts à gauche (1.5), est exact à gauche. Démontrons 2). Soit $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ une suite exacte de A-Modules et montrons que la suite $0 \to P' \otimes_A M \to P \otimes_A M \to P'' \otimes_A M \to 0$ est exacte. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $i \in I$, la suite obtenue en passant aux fibres en x_i est exacte (IV 6). Or la suite des fibres en x_i est la suite (IV 13.5) $0 \to P'_{x_i} \otimes_{A_x} M_x \to P_{x_i} \otimes_{A_{x_i}} M_{x_i} \to P''_{x_i} \otimes_{A_{x_i}} M_{x_i} \to 0$ et comme M_{x_i} est plat, cette suite est exacte.

Proposition 1.7. Soient (E, A) un topos annelé, $u : E' \to E$ un morphisme de topos et posons $A' = u^* A$. Soit M un A'-Module à droite (resp. à gauche). Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur $N \mapsto M \otimes_{A'} u^* N$ (resp. $N \mapsto u^* N \otimes_{A'} M$) de la catégorie des A-Modules à gauche (resp. à droite) dans la catégorie des faisceaux abéliens de E' est exact.
ii) M est un A'-Module plat.

Il est clair que ii) $\Rightarrow$ i).

Montrons que i) $\Rightarrow$ ii). Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où E' possède une famille conservatrice de points $(x_i)_{i \in I}$. Le cas général est traité en (8.2.7). Dans ce cas particulier, qui couvre la plupart des applications, on est ramené au cas où E' est 13
le topos ponctuel et où, par suite, le morphisme u, qu'on notera x, est un point de E (1.6 et IV 11.3.1). Nous nous bornerons au cas où M est un A'-Module à droite. Le cas où M est un A'-Module à gauche s'y ramène en passant aux anneaux opposés. Soient V un voisinage de x et V_x sa fibre en x. On a, avec les notations de 1.4, un diagramme essentiellement commutatif de morphismes de topos :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "x_V"'] & P/V_x \arrow[r, "j_{V_x}"] \arrow[d, "x/V"] & P \arrow[d, "x"] \\ & E/V \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

où x/V est le morphisme déduit de x par localisation sur V (IV 5.10) et j est le morphisme déduit du point marqué de V_x. Montrons que le foncteur $N' \to M \otimes_{A'} x_V^* N'$ est exact. On a $x_V^* - j^*(x/V)^*$ et $\mathrm{id} = j^* j_{V_x}^*$ et par suite, on a un isomorphisme canonique $M \otimes_{A'} x_V^* N' \simeq j^*(j_{V_x}^* M \otimes_{A'/V_x} (x/V)^* N')$. Comme le foncteur j^* est exact et comme le foncteur $j_{V_x !}$ est exact et fidèle (IV 11.3.1), il suffit de montrer que le foncteur $N' \mapsto j_{V_x !}(j_{V_x}^* M \otimes (x/V)^* N')$ est exact, et par suite (IV 12.11), il suffit de montrer que le foncteur $N' \mapsto M \otimes_{A'} x^* j_{V!} N'$ est exact. Mais il résulte de la définition de l'image inverse d'un topos induit (IV 5.10.2) que $j_{V_x !}(x/V)^* N'$ est égal à $x^* j_{V!} N'$ et comme le foncteur $j_{V!}$ est exact (IV 11.3.1), le foncteur $N' \mapsto M \otimes j_{V_x !}(x/V)^* N'$ est exact par hypothèse. Pour tout A'-module Q, on a un isomorphisme fonctoriel (1.5) :

$$Q \simeq \varinjlim_{\mathrm{Vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} Q.$$

D'après ce qui précède, le foncteur $Q \mapsto M \otimes_{A'} Q$ est limite inductive filtrante de foncteurs exacts à gauche. Il est donc exact à gauche et par suite M est plat.

Corollaire 1.7.1. Soient $u : (E', A') \to (E, A)$ un morphisme de topos annelés, et M un A-Module plat. Alors $u^* M$ est un A'-Module plat.

Résulte du critère donné dans 1.7 et de la formule (IV 13.4.5).

14 Corollaire 1.7.2. Soit $u : (E', A') \to (E, A)$ un morphisme de topos annelés. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) le $u^{-1}(A)$-Module à droite (resp. à gauche) A' est plat.

ii) le foncteur u^* de la catégorie des A-Modules à gauche (resp. à droite) dans la catégorie des A'-Modules à gauche (resp. à droite) est exact.

L'équivalence résulte de 1.7 et de la définition de u^* (IV 13.2.1).

Définition 1.8. Un morphisme de topos annelé qui possède les propriétés équivalentes de 1.7.2 est appelé un morphisme de topos plat à gauche (resp. à droite).

Proposition 1.9. Soient $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ deux univers, C un $\mathscr{U}$-site, $C_{\mathscr{U}}^{\sim}$ et $C_{\mathscr{V}}^{\sim}$ les catégories des $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$-faisceaux d'ensembles respectivement, $\epsilon : C_{\mathscr{U}}^{\sim} \to C_{\mathscr{V}}^{\sim}$ le foncteur d'inclusion canonique, A un $\mathscr{U}$-faisceau d'anneaux sur C.

1) Le foncteur ϵ commute aux limites inductives et projectives $\mathscr{U}$-petites de Modules. Le foncteur ϵ est conservatif et pleinement fidèle sur les catégories de Modules.
2) Pour tout objet H de $C_{\mathscr{U}}^{\sim}$, il existe un isomorphisme canonique $\epsilon(A_H) \simeq \epsilon(A)_{\epsilon(H)}$.
3) Tout A-Module injectif à gauche ou à droite est transformé par ϵ en $\epsilon(A)$-Module injectif.
4) Tout A-Module plat à droite ou à gauche est transformé par ϵ en $\epsilon(A)$-Module plat.
5) Le foncteur ϵ commute à la formation du produit tensoriel et du faisceau des homomorphismes.

La formation du faisceau associé ne dépend pas de l'univers (II 3.6). Il résulte alors de la construction des limites inductives et projectives dans les catégories de faisceaux (II 4.1 et 6.4) que le foncteur ϵ commute aux $\mathscr{U}$-petites limites projectives d'ensembles ou de Modules, d'où 1). Démontrons 2). En prenant une $\mathscr{U}$-petite sous-catégorie génératrice
15 de $C_{\mathscr{U}}^{\sim}$, on peut se ramener au cas où C est $\mathscr{U}$-petite (III 4.1). Il résulte alors de (II 6.5) que le A-Module libre engendré par H s'obtient en formant le préfaisceau de A-modules libres engendré par H, formation qui commute à l'agrandissement des univers, puis en

formant le faisceau associé, opération qui elle aussi commute à l'agrandissement des univers (II 3.6). Pour démontrer 3) il suffit de montrer, en vertu de 0.5, que tout sous $\mathscr{V}$-faisceau d'un $\mathscr{U}$-faisceau est un $\mathscr{U}$-faisceau ce qui est bien clair. Démontrons 4). Soit M un A-Module plat. Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon(A)$-Module injectif J, le faisceau abélien $\mathscr{H}om_{\epsilon(A)}(\epsilon(M), J)$ est injectif (1.2). En vertu de 0.5, J est sous-objet, donc facteur direct d'un objet du type $\prod_\alpha \epsilon(I_\alpha)$, où les I_α sont injectifs. On peut donc supposer que $J = \epsilon(I)$ où I est un objet injectif. Si l'homomorphisme $\epsilon(\mathscr{H}om_A(M, I)) \to \mathscr{H}om_{\epsilon(A)}(\epsilon(M), \epsilon(I))$ est un isomorphisme on en déduit que $\mathscr{H}om_{\epsilon(A)}(\epsilon(M), \epsilon(I))$ est injectif d'après 3). Il reste donc à démontrer 5). Le fait que la formation du produit tensoriel commute au foncteur ϵ résulte de IV 12.6 et du fait que la formation du faisceau associé commute à l'agrandissement de l'univers (II 3.6). Pour tout objet X de $C^\sim_{\mathscr{U}}$ et tout couple de A-Modules M et N de $C^\sim_{\mathscr{U}}$ on a donc

$$\mathrm{Hom}_{C^\sim_{\mathscr{V}}}(\epsilon(X), \epsilon(\mathscr{H}om_A(M, N))) \simeq \mathrm{Hom}_{C^\sim_{\mathscr{U}}}(X, \mathscr{H}om_A(M, N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}} M, N)$$

en vertu de la pleine fidélité de ϵ, puis

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}} M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\epsilon(A)}(\epsilon(\mathbf{Z}_A \otimes_{\mathbf{Z}} M), \epsilon(N)) \simeq \mathrm{Hom}_{\epsilon(A)}(\epsilon\mathbf{Z}_A \otimes_{\mathbf{Z}} \epsilon(M), \epsilon(N))$$

en vertu de la pleine fidélité de ϵ et de ce qui précède. Utilisant alors 2) et IV 12.14, on obtient en définitive un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{C^\sim_{\mathscr{V}}}(\epsilon(X), \epsilon(\mathscr{H}om_A(M, N))) \simeq \mathrm{Hom}_{C^\sim_{\mathscr{V}}}(\epsilon(X), \mathscr{H}om_{\epsilon(A)}(\epsilon(M), \epsilon(N)));$$

d'où l'isomorphisme annoncé.

1.10. Soient E un topos, $\mathscr{U} = (U_i \to X)_{i\in I}$ une petite famille de morphismes de même but. Pour tout ensemble fini $\Delta_n = [0, \dots, n]$, posons

$$S_n(\mathscr{U}) = \coprod_{f:\Delta\to I} U_{f(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(n)},$$

la somme étant prise sur l'ensemble des applications de Δ_n dans I. Soient m et n deux entiers, $g : \Delta_m \to \Delta_n$ une application. On définit un morphisme **16**

(1.10.1) $$s(g) : S_n(\mathscr{U}) \longrightarrow S_m(\mathscr{U})$$

de la manière suivante : pour tout $f : \Delta_n \to I$, la restriction de $s(g)$ à $U_{f(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(n)}$ est le morphisme composé de l'inclusion canonique

$$U_{f(g(1))} \times_X \dots \times_X U_{f(g(m))} \hookrightarrow S_m(\mathscr{U}),$$

et de l'unique morphisme

$$s_f(g) : U_{f(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(n)} \longrightarrow U_{f(g(1))} \times_X \dots \times_X U_{f(g(m))}$$

tel que pour tout $i \in \Delta_m$

$$\mathrm{pr}_{f(g(i))}\, s_f(g) = \mathrm{pr}_{f(g(i))}$$

(pr_a désigne la a-ième projection). On obtient ainsi un foncteur contravariant $\Delta_n \mapsto S_n$ de la catégorie des ensembles finis dans E ; autrement dit un complexe semi-simplicial $S.(\mathscr{U})$ d'objets de E. Notons que ce complexe est canoniquement augmenté vers X. Tout foncteur de E dans une catégorie C transforme $S.(\mathscr{U})$ en un objet simplicial de C. En particulier si A est un Anneau de E, le foncteur « A-Module libre engendré » transforme $S.(\mathscr{U})$ en un complexe simplicial de A-biModules augmenté vers A_X et noté $A_\bullet(\mathscr{U})$. On a

(1.10.2) $$A_n(\mathscr{U}) = \bigoplus_{f:\Delta_n\to I} A_{U_{f(1)}\times_X\dots\times_X U_{f(n)}}.$$

Ce complexe sera souvent noté

$$\cdots \overset{s_0}{\underset{s_2}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{s_1}}}}} \bigoplus_{i,j} A_{U_i\times_X U_j} \overset{s_0}{\underset{s_1}{\rightrightarrows}} \bigoplus_i A_{U_i} \longrightarrow A_X \tag{1.10.3}$$

où les flèches de (1.10.3) (sauf la dernière qui est l'augmentation) représentent les opérateurs faces du complexe simplicial $A_\bullet(\mathscr{U})$, c'est-à-dire les morphismes correspondant aux applications injectives croissantes de Δ_n dans Δ_{n+1} (s_i évite l'entier i). Au complexe $A_\bullet(\mathscr{U})$, on associe un complexe différentiel augmenté vers A_X :

$$\cdots \xrightarrow{d} \bigoplus_{i,j} A_{U_i\times_X U_j} \xrightarrow{d} \bigoplus_i A_{U_i} \longrightarrow A_X, \tag{1.10.4}$$

17 en posant

$$d = \sum (-1)^i s_i. \tag{1.10.5}$$

Proposition 1.11. Lorsque la famille $\mathscr{U} = (U_i \to X)_{i\in I}$ est épimorphique, le complexe différentiel (1.10.4) est acyclique et fournit une résolution de A_X.

Notons $\mathbf{Z}$ le faisceau constant de valeurs $\mathbf{Z}$. Par définition du foncteur « A-Module libre engendré », on a, pour tout objet H de E,

$$A_H \simeq \mathbf{Z}_H \otimes_{\mathbf{Z}} A,$$

d'où

$$A_\bullet(\mathscr{U}) \simeq \mathbf{Z}_\bullet(\mathscr{U}) \otimes_{\mathbf{Z}} A.$$

Comme les composantes de $\mathbf{Z}_\bullet(\mathscr{U})$ sont des $\mathbf{Z}$-Module plats (1.3.1), il suffit de montrer la proposition lorsque $A = \mathbf{Z}$.

Supposons tout d'abord que E soit le topos des ensembles. Alors le complexe augmenté $S_\bullet(\mathscr{U})$ est somme directe de complexes augmentés du type

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; S\times S\times S \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; S\times S \rightrightarrows S \longrightarrow \{e\} \qquad (\{e\}\text{ ensemble à un élément}).$$

Chacun de ces complexes augmentés est homotopiquement trivial. Donc $S_\bullet(\mathscr{U})$ est un complexe augmenté homotopiquement trivial et par suite son homologie est triviale d'où la proposition dans ce cas.

Soit maintenant p : Ens $\to E$ un point de E. Comme la formation du complexe $\mathbf{Z}_\bullet(\mathscr{U})$ commute aux foncteurs image inverse par les morphismes de topos, $p^*(\mathbf{Z}_\bullet(\mathscr{U})) \simeq \mathbf{Z}_\bullet(p^*(\mathscr{U}))$ est une résolution de $\mathbf{Z}_{p^*X} \simeq p^*(\mathbf{Z}_X)$; d'où la proposition lorsque E possède suffisamment de foncteurs fibres (IV 4.6). Ceci est le cas en particulier lorsque E est un topos de préfaisceaux $C^\wedge$ car pour tout objet X de C, $\Gamma(X,-)$ est un foncteur fibre. Dans le cas général, E est équivalent à un topos de faisceaux sur un petit site C (IV 1) et la famille épimorphique $\mathscr{U} = (U_i \to X)_{i\in I}$ est image, par le foncteur « faisceau associé »,
18 d'une famille épimorphique $\mathscr{U} = (U'_i \to X')_{i\in I}$. Par suite $\mathbf{Z}.(\mathscr{U}) \simeq \underline{a}\mathbf{Z}.(\mathscr{U}')$ est une résolution de $\underline{a}\mathbf{Z}_{X'} \simeq \mathbf{Z}_X$.

2. Cohomologie de Čech. Notation cohomologique

2.1. Notation générale.

2.1.1. Soient (E, A) un topos annelé, M, N deux A-Modules (à gauche pour fixer les idées). On note $\mathrm{Ext}^q_A(E\,; M, N)$ la valeur en N du q-ième foncteur dérivé droit du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, \cdot)$ [11]. Les foncteurs $\mathrm{Ext}^q_A(E\,; M, N)$ $q \in \mathbf{N}$, forment un δ-foncteur en la variable N. C'est aussi un δ-foncteur contravariant en la variable M. On a, par définition, $\mathrm{Ext}^0_A(E\,; M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

2.1.2. Soit X un objet de E. Lorsque $M = A_X$, le A-Module libre engendré par X (IV 12), on pose $\mathrm{Ext}^q_A(E\,; A_X, N) = H^q(X, N)$. On remarquera que dans cette nouvelle notation, l'anneau A ne figure plus. Ceci ne peut prêter à confusion car nous montrerons (3.5) que la formation des $H^q(X, \cdot)$ commute à la restriction des scalaires. Le foncteur $H^q(X, \cdot)$ est le q-ième foncteur dérivé droit du foncteur $\mathrm{Hom}_A(A_X, \cdot) = \mathrm{Hom}_E(X, \cdot)$ encore noté $\varGamma(X, \cdot)$. Lorsque $M = A$, on pose $\mathrm{Ext}^q_A(E\,; A, N) = H^q(E, N)$.

2.2. Localisation. Soient X un objet de E, $j : E_{/X} \to E$ le morphisme de localisation (IV 8). Le foncteur j^*_X pour les Modules est exact (4.11) et admet un foncteur adjoint à gauche $j_{X!}$ exact (4.11). Par suite il transforme les Modules injectifs en Modules injectifs. On a donc, pour un A-Module variable N de E et un $A|X$-Module M variable de $E_{/X}$, des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Ext}^q_{A|X}(E_{/X}; M, j^*_X N) \simeq \mathrm{Ext}^q_A(E; j_{X!}M, N). \tag{2.2.1}$$

En particulier, on a des isomorphismes canoniques

$$H^q(E_{/X}, j^*_X N) \simeq H^q(X, N).$$

Pour tout objet X de E et tout couple M et N de A-Modules, on pose :

$$\mathrm{Ext}^q_A(X; M, N) \simeq \mathrm{Ext}^q_{A|X}(E_{/X}; M|X, N|X). \tag{2.2.2}$$

D'aprés ce qui précède, les foncteurs $\mathrm{Ext}^q_A(X\,; M, .)$ sont les foncteurs dérivés des fonc- 19
teurs $N \mapsto \mathrm{Hom}_{A|X}(M|X, N|X)$. Les foncteurs $(M, N) \mapsto \mathrm{Ext}^q_A(X\,; M, N)$, $q > 0$, forment un δ-foncteur par rapport à chacune des variables.

2.3. Cas des topos de préfaisceaux. Cohomologie d'un recouvrement.

2.3.1. Soient C une petite catégorie munie d'un préfaisceau d'anneaux A, $C^\wedge$ le topos des préfaisceaux sur C, X un objet représentable sur $C^\wedge$. Le foncteur qui associe à un A-Module M le groupe $\varGamma(X, M) = M(X)$ est exact (I 3). Par suite $H^q(X, M) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout A-Module M ou encore que A_X est un A-Module projectif.

2.3.2. Soit S un préfaisceau sur C. On a un isomorphisme canonique pour tout A-Module M (I 2) :

$$\varGamma(S, M) \simeq \varprojlim_{C/S} M|S$$

De plus, pour tout A-Module injectif M, le $A|S$-Module $M|S$ est injectif (2.2). Par suite, les groupes $H^q(S, M)$ sont les valeurs en $M|S$ des foncteurs dérivés à droite du foncteur $\varprojlim_{C/S}$. En notant $\varprojlim^q_{C/S}$ ces foncteurs dérivés, on a des isomorphismes canoniques :

$$H^q(S, M) \simeq \varprojlim_{C/S}{}^q M|S.$$

En particulier, on a des isomorphismes canoniques

$$H^q(C^\wedge, M) \simeq \varprojlim_{C/S}{}^q M.$$

2.3.3. Soient X un objet de C et $\mathscr{U} = (U_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes de C telle que pour tout $i \in I$, $U_i \to X$ soit quarrable (I 10). Notons $A_{\bullet}$ le complexe simplicial étudié en 1.10 :

$$A_{\bullet} = \cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \coprod_{(i,j)\in I\times I} A_{U_i \times_X U_j} \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \coprod_{i\in I} A_{U_i}.$$

Pour tout A-Module M, on pose $C^{\bullet}(\mathscr{U}, M) = \operatorname{Hom}_A(A_{\bullet}, M)$:

$$C^{\bullet}(\mathscr{U}, M) : \prod_{i\in I} M(U_i) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \prod_{(i,j)\in I\times I} M(U_i \times_X U_j) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \cdots . \tag{2.3.3.1}$$

On pose $H^q(\mathscr{U}, M) = H^q(C^{\bullet}(\mathscr{U}, M))$.

Proposition 2.3.4.

20 1) Avec les notations de 2.3.3, soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par la famille $(U_i \to X)$, $i \in I$. On a un isomorphisme canonique
$$H^q(\mathscr{U}, M) \simeq H^q(R, M).$$

2) Les foncteurs $H^q(\mathscr{U}, \cdot)$ commutent aux restrictions des scalaires.

Comme R est un sous-objet de X dans $C^{\wedge}$, les produits fibrés $U_{i_1} \times_R U_{i_2} \times_R \cdots \times_R U_{i_n}$ et $U_{i_1} \times_X U_{i_2} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}$ sont canoniquement isomorphes. Il résulte de 1.11 que le complexe $A_{\mathscr{U}}.$ est une résolution de A_R et de 2.3.1 que les composants de $A_{\mathscr{U}}.$ sont des Modules projectifs. Les groupes de cohomologie de $C^{\bullet}(\mathscr{U}, M)$ sont donc canoniquement isomorphes à $\operatorname{Ext}^q_A(C^{\wedge}; A_R, M)$, d'où l'isomorphisme. L'assertion 2) résulte immédiatement de la description de $C^{\bullet}(\mathscr{U}, M)$ (2.3.3.1).

Corollaire 2.3.5. Soient $\mathscr{U} = (U_i \to X, i \in I)$ et $\mathscr{U}' = (U'_j \to X, j \in J)$ deux familles de morphismes de but X ; Soient $\phi = (\phi : I \to J, m_i : U_i \to U'_{\phi(i)})$ et $\phi' = (\phi' : I \to J, m'_i : U_i \to H'_{\phi(i)})$ deux morphismes (au-dessus de X) de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{U}'$. Les morphismes ϕ et ϕ' induisent les morphismes ϕ^q et $\phi'^q : \phi'^q : H^q(\mathscr{U}, M) \to H^q(\mathscr{U}', M)$. Les morphismes ϕ^q et ϕ'^q sont égaux. En particulier si les familles $\mathscr{U}$ est $\mathscr{U}'$ sont équivalentes (i.e. s'il existe un morphisme de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{U}'$ et un morphisme de $\mathscr{U}'$ dans $\mathscr{U}$) les A-Modules $H^q(\mathscr{U}, M)$ et $H^q(\mathscr{U}', M)$ sont canoniquement isomorphes.

Preuve. En effet, soient R et R' les cribles de X engendrés par les familles $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$. Les morphismes ϕ et ϕ' définissent un même morphisme de R dans R' et induisent donc deux morphismes homotopes entre les résolutions projectives $A_{\mathscr{U}_{\bullet}}.$ et $A_{\mathscr{U}'_{\bullet}}.$

Exercice 2.3.6. (Résolution standard)

a) Soit C une petite catégorie. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathrm{Fl}^n(C)$ l'ensemble des suites de morphismes de C : $(u_1, \ldots, u_n)$ telles que pour tout i, $0 < 1 < n$, le
21 but de u_i soit égal à la source de u_{i+1} de sorte que les morphismes u_i et u_{i+1} sont composables. Définir un ensemble semi-simplicial

$$ES(C) = \mathrm{ob}\ C \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \mathrm{Fl}^1(C) \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \mathrm{Fl}^2(C) \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \mathrm{Fl}^3(C) \quad \cdots ,$$

dont les opérateurs faces $s_i : \mathrm{Fl}^n(C) \to \mathrm{Fl}^{n-1}(C)$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} &s_0(u_1, \ldots, u_n) = (u_2, \ldots, u_n), \\ &s_i(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_{i+1}u_i, \ldots, u_n), \quad 0 < i < n, \\ &s_n(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_{n-1}). \end{aligned}$$

b) Montrer que lorsque C possède un objet initial ou un objet final, le complexe $ES(C)$ est homotopiquement trivial.

c) Pour tout objet X de C, on note ${}_{X\backslash}C$ la catégorie des flèches de source X. Définir un préfaisceau semi-simplicial $ES(C)$ dont la valeurs en tout objet X de C soit $ES({}_{X\backslash}C)$. On note $Z_{ES(C)}$ le préfaisceau semi-simplicial abélien libre engendré par $ES(C)$. Il est muni d'une augmentation canonique $\mathbf{Z}_{ES(C)} \to Z$ dans le préfaisceau constant de valeur $\mathbf{Z}$. Montrer que, en passant au complexe différentiel associé, le complexe $\mathbf{Z}_{ES(C)}$ est une résolution de $\mathbf{Z}$ et que les composants de ce complexe sont des préfaisceaux abéliens projectifs.

d) Pour tout préfaisceau abélien M, on pose $ST^{\bullet}(M) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_{ES(C)}, M)$. Expliciter les composants de $ST^{\bullet}(M)$. Montrer que pour tout entier $q \geq 0$, $H^q(ST^{\bullet}(M)) = H^q(C\hat{}, M)$.

e) Montrer que pour tout faisceau S sur C les foncteurs $H^q(S, \cdot)$ commutent aux restrictions des scalaires.

f) Remarquer que lorsque C est un groupe, $\mathbf{Z}_{ES(C)}$ est la résolution standard du module trivial Z, [3].

g) Montrer que pour tout préfaisceau abélien M sur C, $\mathbf{Z}_{ES(C)} \otimes M$ est une résolution (à gauche) de M. Définir le foncteur $\varprojlim_C$ sur les préfaisceaux. Montrer qu'il est exact à droite. Noter $H_q(C, M)$ ses foncteurs dérivés à gauche. Montrer que les composants du complexe $\mathbf{Z}_{ES(C)} \otimes M$ sont acycliques pour $\varprojlim_C$. En déduire, en notant $ST_{\bullet}(M)$ le complexe $\varprojlim_C(\mathbf{Z}_{ES(C)} \otimes M)$, des isomorphismes $H_q(ST_{\bullet}(M) \sim H_q(C, M))$.

h) Soit $u : C\hat{} \to \mathrm{Ens}$ l'unique morphisme du topos $C\hat{}$ dans le topos ponctuel. On 22
note $U_! : C\hat{}_{\mathbf{Z}} \to \mathrm{Ab}$ l'adjointe à gauche du foncteur $u^* : \mathrm{Ab} \to C\hat{}_{\mathbf{Z}}$. Montrer que pour tout préfaisceau abélien M, $u_! M = \varinjlim_C M$.

i) On note dorénavant $ST^{\bullet}(C, M)$ et $ST_{\bullet}(C, M)$ les complexes notés $ST^{\bullet}(M)$ et $ST_{\bullet}(M)$. Un préfaisceau M sur C est dit localement constant s'il transforme tous les morphismes de C en isomorphismes. Associer à tout préfaisceau localement constant M un préfaisceau localement constant M sur la catégorie C° (catégorie opposés à C) tel que pour tout morphisme u de C, $\check{M}(u) = M(u)^{-1}$. Trouver un isomorphisme canonique entre les complexes $ST^{\bullet}(C, M)$ et $ST^{\bullet}(C^{\circ}, \check{M})$ (resp. $ST_{\bullet}(C, M)$ et $ST.(C^{\circ}, \check{M})$)

j) Soit C une petite catégorie possédant un objet initial (resp. une petite catégorie filtrante). Montrer que pour tout préfaisceau constant M, $H^q(C\hat{}, M) = 0$ pour $q > 0$ (resp. $H_q(C, M) = 0$ pour $q > 0$).

2.4. Cas des petits sites, Cohomologie de Čech.

2.4.1. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé, $C\hat{}$ le topos des faisceaux sur C, $\epsilon : C \to C\hat{}$ le foncteur canonique qui associe à un objet de C le faisceau associé au préfaisceau représenté par cet objet. Par abus de notation, pour tout objet X de C et tout faisceau de A-modules M nous poserons $H^q(X, M) = H^q(X, M)$ (cf. 2.3.1). Rappelons que lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, ce qui est toujours le cas dans la pratique, le foncteur ϵ est pleinement fidèle et permet d'identifier C avec son image par ϵ.

2.4.2. On note $\mathscr{H}^{\circ} : C^{\sim}_A \to C\hat{}_A$ le foncteur d'inclusion des faisceaux de A-modules dans la catégorie des préfaisceaux de A-modules. Pour tout faisceau de A-modules M on a donc par définition :

$$\mathscr{H}^{\circ}(M)(X) = H^{\circ}(X, M) = M(X), \tag{2.4.2.1}$$

pour tout objet X de C. Le foncteur $\mathscr{H}^\circ$ est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés à droite sont notés $\mathscr{H}^q$. Comme pour tout objet X de C, le foncteur « section sur X »est exact dans la catégorie des préfaisceaux, on a

$$\mathscr{H}^q(M)(X) = H^q(X, M), \tag{2.4.2.2}$$

23 pour tout objet X de C et tout faisceau de A-modules M, de sorte que le préfaisceau $\mathscr{H}^q(M)$ n'est autre que le préfaisceau $X \mapsto H^q(X, M)$.

2.4.3. On suppose que (C, A) est un petit site annelé de sorte que $C^\wedge$ est un topos auquel on peut appliquer les résultats de 2.3. Soit X un objet de C et $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant. Pour tout préfaisceau de A-modules G, les groupes $H^q(R, G)$ (qui sont donc calculés dans le topos $C^\wedge$) sont appelés les groupes de cohomologie de Čech du préfaisceau G relatifs au crible couvrant R. Lorsque $R \hookrightarrow X$ est le crible engendré par une famille couvrante $\mathscr{U} = (\mathscr{U}_i \to X)_{i\in I}$ de morphismes quarrables ces groupes peuvent de calculer à l'aide du complexe $C^\bullet(\mathscr{U}, G)$ (2.3.3) appelé complexe de Čech de G relatifs à la famille couvrante $\mathscr{U}$. (ou du recouvrement $\mathscr{U}$). Les groupes $H^q(\mathscr{U}, G) = H^q(R, G)$ (2.3.4) sont alors appelés groupes de cohomologie de Čech de G relatifs à la famille couvrante $\mathscr{U}$.

2.4.4. Soit M un faisceau de A-modules sur C. Le groupes $H^q(\mathscr{U}, \mathscr{H}^\circ(M))$ sont le plus souvent notés, abusivement, $H^q(\mathscr{U}, M)$ et appelés groupes de cohomologie de Čech du faisceau M relatifs à la famille couvrante $\mathscr{U}$.

2.4.5. On note $\check{\mathscr{H}}^\circ : C^\wedge_A \to C^\wedge_A$ l'extension naturelle aux préfaisceaux de A-modules, du foncteur L décrit en II. On a donc, par définition, pour un préfaisceau G et un objet X de C :

$$\check{\mathscr{H}}^\circ(G)(X) = \varinjlim_{R\hookrightarrow X} G(R), \tag{2.4.5.1}$$

la limite inductive étant prise suivant les cribles couvrant X. Il résulte de (2.4.5.1) que le foncteur $\check{\mathscr{H}}^\circ$ est exact à gauche. Les foncteurs dérivés à droite de $\check{\mathscr{H}}^\circ$ sont notés $\check{\mathscr{H}}^q$. Comme les foncteurs « section sur X » et « limite inductive filtrante »sont exacts, il résulte de (2.4.5.1) qu'on a

$$\check{\mathscr{H}}^q(G)(X) = \varinjlim_{R\hookrightarrow X} H^q(R, G), \tag{2.4.5.2}$$

la limite étant prise suivant les cribles couvrant X.

24 Les préfaisceaux $\check{\mathscr{H}}^q$ sont appelés les préfaisceaux de cohomologie de Čech. Pour tout objet X de C, on pose

$$\check{H}^q(X, G) = \check{\mathscr{H}}^q(G)(X). \tag{2.4.5.3}$$

Les groupes $\check{H}^q(X, G)$ sont appelés les groupes de cohomologie de Čech. Lorsque la topologie de C est définie par une prétopologie, ce qui est le plus souvent le cas dans la pratique, on a, compte tenu de 2.3.4,

$$\check{H}^q(X, G) \simeq \varinjlim_{\mathscr{U}} H^q(\mathscr{U}, G), \tag{2.4.5.4}$$

la limite inductive étant prise suivant les familles couvrantes quarrables préordonnées par la relation d'ordre naturelle sur les cribles qui leur correspondent (2.3.5).

2.4.6. Soit M un faisceau de A-modules. On pose, abusivement

$$\check{H}^q(X, M) = \check{H}^q(X, \mathscr{H}^\circ(M)), \check{\mathscr{H}}^q(M)) = \check{\mathscr{H}}^q(\mathscr{H}^\circ(M)), \tag{2.4.6.1}$$

et les groupes $\check{H}^q(X, M)$ sont appelés groupes de cohomologie de Čech du faisceau M. Signalons que si les foncteurs $\check{H}^q$ sont des foncteurs dérivés sur la catégorie des préfaisceaux, ils ne forment pas, en général, un δ-foncteur sur la catégorie des faisceaux.

2.4.7. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé et $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$. Le site (C, A) est alors un $\mathscr{V}$-site et on a un $\mathscr{U}$-topos $C^{\sim}_{\mathscr{U}}$, un V-topos $C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ et un foncteur canonique d'inclusion $\epsilon : C^{\sim}_{\mathscr{U}} \hookrightarrow C^{\sim}_{\mathscr{V}}$. Le foncteur ϵ est exact et pleinement fidèle sur les catégories de Modules et transforme les Modules injectifs en Modules injectifs (1.9). Pour tout couple de U-faisceaux de A-modules on a donc des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^q_A(C^{\sim}_{\mathscr{U}}; M, N) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\epsilon A}(C^{\sim}_{\mathscr{V}}; \epsilon M, \epsilon N), \quad q \geq 0. \tag{2.5.1.1}$$

En particulier, pour tout $\mathscr{U}$-faisceau d'ensembles R sur C, on a des isomorphismes canoniques (2.1.1)

$$H^q(R, M) \simeq H^q(\epsilon R, \epsilon M), \quad q \geq 0, \tag{2.5.1.2}$$

et plus particulièrement encore, pour tout objet X de C, on a des isomorphismes cano- **25**
niques (2.4.1)

$$H^q(X, M) \simeq H^q(X, \epsilon M). \tag{2.5.1.3}$$

En termes vagues, on peut donc dire que la cohomologie des faisceaux ne dépend pas du choix des univers et on peut toujours, pour la nécessité d'une démonstration où d'une construction, augmenter l'univers pour calculer la cohomologie d'un faisceau.

2.4.8. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé et $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$. Notons $C^{\sim}_A$ la catégorie des $\mathscr{U}$-faisceaux $\hat{\epsilon} : C^{\wedge}_{A,\mathscr{U}} \to C^{\wedge}_{A,\mathscr{V}}$ le foncteur d'inclusion des U-préfaisceaux dans les $\mathscr{V}$-préfaisceaux de A-modules. Le foncteur $\hat{\epsilon}$ est exact et par suite les foncteurs dérivés du foncteur $\hat{\epsilon}\mathscr{H}^{\bullet} : C^{\sim}_A \to C^{\wedge}_{A,\mathscr{V}}($ $)$ sont les foncteurs $\hat{\epsilon}\mathscr{H}^q$, $q \geq 0$. Par abus de notation, nous noterons encore $\mathscr{H}^q : C^{\sim}_A \to C^{\wedge}_{A,\mathscr{V}}$, $q \geq 0$, les foncteurs $\hat{\epsilon}\mathscr{H}^q$. Cet agrandissement de l'univers présente lorsque C est $\mathscr{V}$-petit l'avantage suivant : La catégorie $C^{\wedge}_{\mathscr{U}}$ n'est pas en général un $\mathscr{U}$-topos et les $\mathscr{U}$-préfaisceaux de A-modules ne sont pas nécessairement des sous-modules de $\mathscr{U}$-préfaisceaux injectifs, alors que la catégorie des $\mathscr{V}$-préfaisceaux est un topos (un $\mathscr{V}$-topos) et que par suite tout $\mathscr{V}$-préfaisceau de A-modules est un sous-objet d'un $\mathscr{V}$-préfaisceau injectif (0.1.1). Ainsi pour tout $\mathscr{V}$-préfaisceau d'ensembles R (et en particulier lorsque R est un $\mathscr{U}$-préfaisceau) et pour tout $\mathscr{U}$-faisceau de A-modules M, les groupes $H^q(R, \mathscr{H}^q(M))$ sont définis par 2.1.1 et il résulte de (2.5.1.2) que ces groupes ne dépendent pas de l'univers $\mathscr{V}$ considéré. De même, pour tout couple d'entiers ≥ 0 p et q, les préfaisceaux $\check{\mathscr{H}}^p(\mathscr{H}^q(M))$ sont définis par 2.4.5 et il résulte de (2.5.1.2)) et de ((2.4.5.4) que ces préfaisceaux ne dépendent pas de l'univers $\mathscr{V}$ utilisé pour les définir.

3. La suite spectrale de Cartan-Leray relative à un recouvrement

26

Proposition 3.1. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé, $\mathscr{V}$ univers contenant $\mathscr{U}$. Le foncteur $\mathscr{H}^{\bullet} : C^{\sim}_A \to C^{\wedge}_{A,\mathscr{V}}$ (2.5.2) transforme les A-Modules injectifs en préfaisceaux injectifs. Pour tout entier $q > 0$, et tout A-Module M, le faisceau associé au préfaisceau $\mathscr{H}^q(M)$ est nul.

Notons $\underline{a}_{\mathscr{V}}$ le foncteur « faisceau associé »pour les $\mathscr{V}$-préfaisceaux et $\epsilon : C^{\sim}_A \hookrightarrow C^{\sim}_{A,\mathscr{V}}$ le foncteur d'inclusion des $\mathscr{U}$-faisceaux dans les $\mathscr{V}$-faisceaux. On a $\underline{a}_{\mathscr{V}}\mathscr{H}^{\bullet} = \epsilon$ (II 3.6) et comme les foncteurs $\underline{a}_{\mathscr{V}}$ et ϵ sont exacts, on a $\underline{a}_{\mathscr{V}}\mathscr{H}^q = 0$ pour tout entier $q > 0$. Pour tout $\mathscr{U}$-faisceau M et tout $\mathscr{V}$-préfaisceau N on a un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_{C^{\wedge}_{A,\mathscr{V}}}(N, \mathscr{H}^{\bullet}(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{C^{\sim}_{A,\mathscr{V}}}(\underline{a}_{\mathscr{V}} N, \epsilon M)$. Lorsque M est injectif, ϵM est injectif

(1.9) et comme le foncteur $\underline{a}_{\mathscr{V}}$ est exact, le foncteur $N \mapsto \mathrm{Hom}_{C_{A,\mathscr{V}}}(N, \mathscr{H}^{\cdot}(M))$ est exact. Par suite $\mathscr{H}^{\cdot}(M)$ est injectif.

Théorème 3.2. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé, R un $\mathscr{U}$-préfaisceau d'ensembles sur C, M un faisceau de A-Modules. Il existe une suite spectrale, fonctorielle en R et en M :

$$H^{p+q}(\underline{a}R, M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(R, \mathscr{H}^q(M)). \tag{3.2.1}$$

(Lorsque C n'est pas $\mathscr{U}$-petit, le terme $H^p(R, \mathscr{H}^q(M)))$ doit être interprété comme la cohomologie du préfaisceau $\mathscr{H}^q(M)$ dans le topos $\hat{C_V}$ où V est un univers contenant $\mathscr{U}$ tel que C soit $\mathscr{V}$-petit (2.5.2)).

Par définition du foncteur « faisceau associe »(cf. II) on a un isomorphisme de foncteur $H^{\cdot}(\underline{a}R, M) \simeq H^0(R, \mathscr{H}^{\cdot}(M))$. Le foncteur $\mathscr{H}^{\cdot}$ transforme les objets injectifs en objets injectifs. La suite spectrale des foncteurs composés (0.3) est la suite spectrale cherchée.

Corollaire 3.3. Soient X un objet de C et $\mathscr{U} = (U_i \to X)$, $i \in I$, une famille couvrante telle que pour tout $i \in I$, le morphisme $U_i \to X$ soit quarrable. On a alors une suite spectrale (dite de Cartan-Leray) :

$$H^{p+q}(X, M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(\mathscr{U}, \mathscr{H}^q(M)). \tag{3.3.1}$$

27 Soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par $\mathscr{U}$. Comme ce crible est couvrant, le faisceau associé à R est le faisceau associé à X (II 5.2). Compte tenu de 2.4.1, on a $H^{p+q}(\underline{a}R, M) = H^{p+q}(X, M)$. Le corollaire résulte alors de 2.3.4.

Corollaire 3.4. Il existe une suite spectrale fonctorielle en le faisceau M et l'objet X de C

$$H^{p+q}(X, M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = \check{H}^p(X, \mathscr{H}^q(M)). \tag{3.4.1}$$

Cette suite spectrale fournit, lorsque X varie dans C, la suite spectrale de préfaisceaux :

$$\mathscr{H}^{p+q}(M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = \check{\mathscr{H}}^p(\mathscr{H}^q(M)). \tag{3.4.2}$$

Ces suites spectrales fournissent des morphismes fonctoriels (morphismes de coin) :

$$\Phi^q(M) : \check{\mathscr{H}}^q(M) \longrightarrow \mathscr{H}^q(M), \tag{3.4.3}$$

$$\Phi_X^q(M) : \check{H}^q(X, M) \longrightarrow H^q(X, M). \tag{3.4.4}$$

Les morphismes Φ^q et Φ_X^q sont des isomorphismes lorsque q égale 0 où 1. Les morphismes Φ^2 et Φ_X^2 sont des monomorphismes. Plus généralement, lorsque les préfaisceaux $\mathscr{H}^i(M)$ sont nuls pour $0 < i < n$, les morphismes $\Phi^q(M)$ et $\Phi_X^q(M)$ sont des isomorphismes pour $0 \leq q \leq n$ et des monomorphismes pour $q = n + 1$.

La première suite spectrale s'obtient en passant à la limite inductive dans la suite spectrale (3.2.1) sur les cribles $R \hookrightarrow X$ couvrant X (2.4.5.2). La deuxième suite spectrale s'en déduit aussitôt (2.4.5.3). Les faisceaux associés aux préfaisceaux $\mathscr{H}^q(M)$ sont nuls lorsque $q > 0$ (3.1). On a donc $\check{\mathscr{H}}^{\cdot}\check{\mathscr{H}}^{\cdot}\check{\mathscr{H}}^q(M) = 0$ pour tout $q > 0$ (II.3.4). Par suite $\check{\mathscr{H}}^{\cdot}\check{\mathscr{H}}^q(M) = 0$ pour $q > 0$ (II 3.2). Les assertions sur les morphismes Φ^q et Φ_X^q s'en déduisent aussitôt.

Corollaire 3.5. Soient (E, A) un topos annelé et M un A-module (à gauche pour fixer les idées). Notons $\mathscr{M}$ le Groupe abélien sous-jacent à M. Le foncteur $M \mapsto \mathscr{M}$ est exact et par suite, pour tout objet X de E, l'isomorphisme canonique

$$H^{\cdot}(X, M) \xrightarrow{\sim} H^{\cdot}(X, \mathscr{M})$$

se prolonge en des morphismes **28**

$$H^q(X, M) \longrightarrow H^q(X, M) \qquad q \geq 0.$$

Ces morphismes sont des isomorphismes.

Pour tout objet Y de E, on a (2.4.5.4) :

$$H^p(Y, M) = \varinjlim_{\mathscr{U}} H^p(\mathscr{U}, M) \quad , \quad H^p(Y, \mathscr{M}) = \varinjlim_{\mathscr{U}} H^p(\mathscr{U}, \mathscr{M})$$

la limite inductive étant prise sur les familles épimorphiques $\mathscr{U} = (Y_i \to Y)$, $i \in I$.

Par suite, l'homomorphisme canonique $\check{H}^p(Y, M) \to \check{H}^p(Y, \mathscr{M})$ est un isomorphisme (2.3.4). Donc (2.4.5.3), l'homomorphisme canonique $\check{\mathscr{H}}^p(M) \to \check{\mathscr{H}}^p(\mathscr{M})$ est un isomorphisme. Si M est un A-Module injectif, on a $\check{\mathscr{H}}^p(\mathscr{M}) = 0$ pour $p > 0$; d'où $\mathscr{H}^1(\mathscr{M}) = 0$ et par récurrence sur p, $\mathscr{H}^p(\mathscr{M}) = 0$, $p > 0$ (3.4). Donc $H^p(X, \mathscr{M}) = 0$ pour $p > 0$ (2.4.2.2)) et (2.5. Par suite, le foncteur $M \mapsto \mathscr{M}$ transforme les objets injectifs en objets acycliques pour le foncteur $H^\circ(X, .)$, d'où l'isomorphisme annoncé.

Exercice 3.6. Soient G un groupe topologique et B_G son topos classifiant (IV 2.5). Notons E_G l'objet de B_G constitué par l'espace topologique sous-jacent à G muni de l'opération de translation à gauche par les éléments de G. Le morphisme canonique de E_G dans l'objet final e_G de B_G est un épimorphisme ; d'où un recouvrement $\mathscr{U} = (E_G \to e_G)$ et, pour tout faisceau abélien F de B_G, une suite spectrale

(3.6.1) $$E_2^{p,q} = H^p(\mathscr{U}, \mathscr{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(B_G, F),$$

qu'on se propose d'étudier.

1) Montrer que pour tout entier n, le topos

$$B_{G/E_G \times E_G \times \ldots \times E_G} \quad (n \quad \text{facteurs})$$

est canoniquement équivalent su topos (IV 2.5)

$$\mathrm{TOP}(G \times G \times G \times \ldots \times G) \quad (n-1 \quad \text{facteurs})$$

Pour tout entier n, notons F_n le faisceau sur l'espace topologique $G \times \ldots \times G$ (n facteurs) induit par F. **29**

2) En déduire que le terme $E_2^{p,q}$ de (3.6.1) est canoniquement isomorphe au p-ème groupe de cohomologie d'un complexe du type

$$H^q(e, F_\circ) \longrightarrow H^q(G, F_1) \longrightarrow H^q(G \times G, F_2) \longrightarrow \cdots,$$

qu'on explicitera (e désigne l'espace topologique réduit à un point).

3) En déduire que la cohomologie du topos classifiant B_G à valeur dans les faisceaux localement constants est isomorphe à la cohomologie singulière correspondante des type $G \times G \times \ldots \times G$, la cohomologie des faisceaux localement constants coïncide avec la cohomologie singulière correspondante (Ce qui est le cas lorsque, par exemple, G est localement contractile) ; (Pour les espaces classifiants, on pourra consulter [15]).

4. Faisceaux acycliques

Définition 4.1. Soient (E, A) un topos annelé, F un A-Module, S une famille topologiquement génératrice de E. On dit que F est S-acyclique si pour tout objet X de S, et tout entier $q > 0$, on a $H^q(X, F) = 0$. Lorsque S est égal à ob E, les faisceaux S-acycliques sont appelés les faisceaux flasques.

4.2. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé, F un faisceau de A-modules sur C. On dit que F est $\mathscr{C}$-acyclique si F est S-acyclique où S est la famille des faisceaux associés aux objets de C.

Proposition 4.3. Soient (C, A) un $\mathscr{U}$-site annelé, F un faisceau de A-modules. Notons $\mathscr{H}^\circ : C_A^{\sim} \to C_A^{\wedge}$ le foncteur d'inclusion des A-Modules dans la catégorie des préfaisceaux de A-modules (il s'agit ici des $\mathscr{V}$-préfaisceaux où $\mathscr{V}$ est un univers tel que C soit $\mathscr{V}$-petit). Les conditions suivantes sont équivalentes :

30 i) F est C-acyclique.

ii) Pour tout objet X de C et tout crible couvrant $R \hookrightarrow X$, on a :

$$H^q(R, \mathscr{H}^\circ(F)) = 0 \text{ pour tout } q > 0.$$

iii) Pour tout objet X de C, on a :

$$\check{H}^q(X, F) = 0 \text{ pour tout } q > 0;$$

i $\Rightarrow$ ii) : Comme F est C-acyclique, les préfaisceaux $\mathscr{H}^q(F)$ sont nuls pour $q > 0$. La suite spectrale (3.2.1) fournit alors un isomorphisme $H^q(R, \mathscr{H}^\circ(F)) \simeq H^q(X, F)$ pour tout q. Par suite $H^q(R, \mathscr{H}^\circ(F)) = 0$ pour $q > 0$.

ii $\Rightarrow$ iii) : clair par passage à la limite inductive.

iii $\Rightarrow$ i) : on démontre par récurrence sur q que les préfaisceaux $\mathscr{H}^q(F)$ sont nuls pour $q > 0$. Pour cela, on utilise (3.4.2).

4.4. Il résulte du critère 4.3 ii) et de 3.5 que la propriété de S-acyclicité ne dépend que du faisceau abélien sous-jacent. En particulier, un faisceau de A-modules est flasque si et seulement si le faisceau abélien sous-jacent est flasque.

Corollaire 4.5. Soient (E, A) un topos annelé et F un A-Module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) F est flasque ;

ii) Pour toute famille épimorphique $\mathfrak{X} = (X_i \to X)_{i \in I}$,

$$H^q(\mathfrak{X}, F) = 0 \text{ pour tout } q > 0.$$

Dans 4.2, on prend pour C le topos E lui-même. Le corollaire résulte alors de l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) de 4.2.

4.6. Les faisceaux injectifs sont flasques. Les faisceaux flasques sont S-acycliques pour tout famille topologiquement génératrice S. Les faisceaux flasques ne sont pas nécessairement injectifs (prendre pour topos E le topos des ensembles). Les faisceaux S-acycliques ne sont pas nécessairement flasques (exercice 4.1.3).

Proposition 4.7. Soient (E, A) un topos, F un A-Module flasque, X un objet de E.
31 Pour tout sous-objet Y de X l'homomorphisme canonique $H^\circ(X, F) \to H^\circ(Y, F)$ est surjectif.

Soit Y un sous-objet de X tel que le morphisme $H^\circ(X, F) \to H^\circ(Y, F)$ ne soit pas surjectif. Soit Z l'objet obtenu en recollant deux copies X_1 et X_2 de X le long de Y. L'objet Z est recouvert par les deux sous-objets X_1 et X_2 on a $X_1 \times_Z X_2 = Y$. Notons $\mathfrak{X} = (X_1, X_2)$ le recouvrement ainsi obtenu. On constate aussitôt que $H^1(\mathfrak{X}, F) \neq 0$. Contradiction.

4.8. La propriété décrite dans 4.7 ne caractérise pas, dans le cas des topos généraux, les faisceaux flasques (exer. 4.15). Elle la caractérise cependant dans le cas des topos engendrés par leurs ouverts et en particulier dans le cas des topos associés aux espaces topologiques (exer. 4.16). La terminologie de flasque adoptée ici coïncide dans le cas des espaces topologiques avec la terminologie de [15] (exer. 4.16).

Proposition 4.9. *Soient $u : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de topos annelés.*

1) *Le foncteur u_* transforme les A-Modules flasques en A'-Modules flasques.*
2) *Soient S et S' des familles topologiquement génératrices de E et E' respectivement telles que $u^*(S') \subset S$. Le foncteur u_* transforme les A-Modules S-acycliques en A'-Modules S'-acycliques.*
3) *Lorsque u est un morphisme plat (1.8) le foncteur u_* transforme les A-Modules injectifs en A'-Modules injectifs.*

Soient X un objet de E', $\mathfrak{X} = (X_i \to X)_{i\in I}$ une famille épimorphique, F un A-Modules flasque, $C^\bullet(\mathfrak{X}, u_*F)$ le complexe de Čech du recouvrement $\mathfrak{X}$. On a un isomorphisme canonique $C^\bullet(\mathfrak{X}, u_*F) \simeq C^\bullet(u^*(\mathfrak{X}), F)$ en utilisant l'adjonction de u_* et de u^* et le fait que u^* commute aux produits fibrés. De plus u^* commute aux limites inductives et par suite $u^*(\mathfrak{X}) = (u^*X_i \to u^*X)_{i\in I}$ est une famille épimorphique. Comme F est flasque, on a $H^q(u^*(\mathfrak{X}), F)$ pour $q > 0$ et par suite $H^q(\mathfrak{X}, u_*F) = H^q(C^\bullet(\mathfrak{X}, u_*F)) = H^q(C^\bullet(u^*(\mathfrak{X}, F)) = H^q(u^*(\mathfrak{X}), F)) = 0$ pour $q > 0$. Donc u_*F est flasque.

Démontrons 2). Lorsque S' est stable par produits fibrés une démonstration analogue à celle qui précède permet de démontrer 2). Dans le cas général, nous utiliserons la suite spectrale du morphisme u (5.3.2)). L'assertion 2 ne sera pas utilisée avant (5.3.2). Soit F un 32
faisceau S-acyclique. Les faisceaux R^qu_*F sont les faisceaux associés aux préfaisceaux $X \mapsto H^q(u^*X, F)$. Comme S' est une famille topologiquement génératrice et comme F est S-acyclique, on a $R^qu_*F = 0$ pour tout $q > 0$. La suite spectrale (5.3.2) fournit alors un isomorphisme, pour tout objet X de E' : $H^q(X, u_*F) \simeq H^q(u^*X, F)$ et par suite, pour tout X dans S', $H^q(X, u_*F) = 0$.

Démontrons 3). Lorsque le morphisme u est plat, le foncteur u^* pour les Modules est exact (1.8). Par suite le foncteur u_* adjoint à droite de u^* transforme les objets injectifs en objets injectifs (0.2).

Proposition 4.10. *Soient F un A-Modules du topos annelé (E, A), G un A-Modules injectif.*

1) *Le foncteur $F \mapsto \mathscr{H}om_A(F, G)$ est exact.*
2) *Le groupe abélien $\mathscr{H}om_A(F, G)$ est flasque.*

Preuve. Montrons

1) Soit :
$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$
une suite exacte, Il nous faut montrer que la suite :
$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_A(F'', G) \longrightarrow \mathscr{H}om_A(F, G) \longrightarrow \mathscr{H}om_A(F', G) \longrightarrow 0$$
est exact et pour cela il suffit de montrer que pour tout objet H de E, la suite :
$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, \mathscr{H}om_A(F'', G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, \mathscr{H}om_A(F, G))&\\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, \mathscr{H}om_A(F', G)) \longrightarrow 0&\end{aligned}$$
est exacte. Or (IV 6.12) cette dernière suite est isomorphe à la suite
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_H \otimes_A F'', G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_H \otimes_A F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_H \otimes_A F', G) \longrightarrow 0$$

et le A-Module A_H est plat (1.3.1).

2) Montrons que $\mathscr{H}om_A(F, G)$ est flasque. Soit :

$$\mathfrak{X} = (X_i \longrightarrow X), i \in I,$$

une famille épimorphique de E, et

$$C.(\mathfrak{X}) : \cdots \rightrightarrows \coprod_{i,j} \mathbf{Z}_{X_i \times X_j} \rightrightarrows \coprod_i \mathbf{Z}_{X_i}$$

33 le complexe défini en 1.5. Ce complexe est une résolution plate de l'objet $\mathbf{Z}_X$ qui est lui-même plat (1.4 et 1.3).

Calculons alors les groupes :

$$H^q(\mathfrak{X}, \mathscr{H}om_A(F, G)) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathbf{Z}}(C.(\mathfrak{X}), \mathscr{H}om_A(F, G)) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathrm{Hom}_A(C.(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} F, G)).$$

Le complexe

$$C.(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} F$$

est acyclique en degré $\neq 0$, car $C.(\mathfrak{X})$ est une résolution plate d'un module plat. Par suite $\mathrm{Hom}(C.(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} F, G)$ est acyclique en degré $\neq 0$.

Proposition 4.11. Soient (E, A) un topos annelé, F un faisceau flasque (resp. injectif) de A-modules.

1) Pour tout objet X de E le $A|X$-Module $j_X^* F$ est flasque (resp. injectif)
2) Pour tout fermé Z de E, le faisceau des sections de F à supports dans Z (IV 14) est flasque (resp. injectif).

L'assertion 1) résulte de 4.5 lorsque F est flasque. Le foncteur j_X^* admet un adjoint à gauche exact $j_{X!}$ (IV 11). Par suite, lorsque F est injectif, $j_X^* F$ est injectif (0.2). Démontrons 2). Notons $i : Z \to E$ le morphisme d'inclusion. Le faisceau des sections de F à support dans Z est alors le morphisme d'inclusion. Le faisceau des section de F à support dans Z est alors le faisceau $i_* i^! F$ (IV 14). Le foncteur $i_* i^!$ est adjoint à droite au foncteur $i_* i^*$ qui est exact (IV 14). Par suite il transforme faisceau injectif en faisceau injectif. Soient U l'ouvert complémentaire de Z, $j : U \to E$ le morphisme d'inclusion et F un faisceau flasque. On a une suite exacte (IV 14) :

$$0 \longrightarrow i_* i^! F \longrightarrow F \longrightarrow j_* j^* F. \tag{4.11.1}$$

Pour tout objet X de E, on a $j_* j^* F(X) = F(X \times U)$ et le morphisme $F(X) \to j_* j^* F(X)$ induit par la dernière flèche de (4.11.1) provient de l'injection canonique $X \times U \hookrightarrow X$. Comme F est flasque, ce morphisme est surjectif (4.7) et par suite, la dernière flèche de (4.11.1) est un épimorphisme de préfaisceaux. Pour tout objet X de E, la suite exacte de cohomologie déduite de (4.11.1) fournit $H^q(X, i_* i^! F) = 0$ pour $q > 0$ et par suite $i_* i^! F$ est flasque.

34 4.12. La propriété pour un faisceau d'être flasque (resp. injectif) se localise (4.11.1). Mais ce n'est pas, en général, une propriété de caractère local (exer. 4.15). Cependant, c'est une propriété de caractère local dans le cas des topos engendrés par leurs ouverts et en particulier dans le cas des topos associés aux espaces topologiques (exer. 4.16).

Exercice 4.13. Soient X un espace localement compact et F un faisceau c-mou [15]. En utilisant le caractère local de la mollesse (loc. cit.), montrer que la restriction de F à tout ouvert paracompact de X est un faisceau mou. Montrer que les ouverts paracompacts forment une base de la topologie de X. En déduire que, en notant S la famille des ouverts paracompacts de X, le faisceau F est S-acyclique. Montrer que le faisceau des fonctions continues sur X est S-acyclique mais n'est pas flasque lorsque X n'est pas discret.

Problème 4.14. Étudier les topos totalement acycliques, i.e. les topos tels que $H^q(X,F) = 0$ pour tout $q > 0$, tout objet X, tout faisceau abélien F.

Exercice 4.15. Soient G un groupe discret, B_G son topos classifiant (IV 2.4). Montrer que pour tout faisceau abélien F et tout monomorphisme $X \hookrightarrow Y$, l'homomorphisme $F(Y) \to F(X)$ est surjectif. Soit $E(G)$ le groupe G considéré comme espace homogène sous lui-même. C'est un objet de B_G. Le topos $B_{G/E(G)}$ est équivalent au topos ponctuel (IV 8). Le morphisme $E(G) \to e$ (e objet final de B_G) est un épimorphisme. Pour tout faisceau abélien F de B_G, le faisceau $F|E(G)$ est flasque. En déduire que la propriété d'être flasque ou injectif n'est pas de caractère local.

Exercice 4.16. On dit qu'un topos E est engendré par ses ouverts si les ouverts de E (i.e. les sous-objets de l'objet final e de E) forment une famille génératrice (I 7). Un tel topos possède la propriété suivante :
(P) Toute famille épimorphique $X_i \to X$, $i \in I$, est majorée par une famille épimorphique $U_j \to X$, $j \in J$, où les $U_j \to X$ sont des monomorphismes.

a) Existe-t-il des topos qui possèdent la propriété (P) et qui ne sont pas engendrés par leurs ouverts ? Les topos associés aux espaces topologiques sont engendrés par leurs ouverts. Si E est engendré par ses ouverts (resp. jouit de (P)), pour tout objet X de E, $E_{/X}$ est engendré par ses ouverts (resp. jouit de (P)). Tout sous topos d'un topos engendré par ses ouverts est engendré par ses ouverts. La propriété (P) n'est pas une propriété de caractère local 35
b) Soient E en topos, $\mathrm{Ouv}(E)$ la catégorie des ouverts de E munie de la topologie induite. Le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ouv}(E) \to E$ est un morphisme de sites, d'où un morphisme de topos $\Pi : E \to \mathrm{Ouv}(E)^{\sim}$. Le foncteur Π^* est pleinement fidèle. Le morphisme Π possède vis à vis de la 2-catégorie des topos engendrés par leurs ouverts une propriété universelle que le lecteur explicitera.
c) Soient E un topos engendré par ses ouverts et $\mathrm{Point}(E)$ l'ensemble des points à isomorphismes près de E. Montrer que $\mathrm{Point}(E)$ est petit. Mettre une topologie sur $\mathrm{Point}(E)$ et définir un morphisme $\mathrm{Top}(\mathrm{Point}(E)) \to \mathrm{Ouv}(E)^{\sim}$ faisant de $\mathrm{Top}(\mathrm{Point}(E))$ un sous-topos de $\mathrm{Ouv}(E)^{\sim}$. Pour tout espace topologique X, montrer que tout morphisme de $\mathrm{Top}(X)$ dans E fournit un morphisme de $\mathrm{Top}(X)$ dans $\mathrm{Top}(\mathrm{Point}(E))$. Montrer qu'un topos engendré par ses ouverts est équivalent à un topos $\mathrm{Top}(X)$ (X espace topologique) si et seulement s'il possède suffisamment de points. Montrer qu'il existe des topos engendrés par leurs ouverts qui ne sont pas équivalents à des topos $\mathrm{Top}(X)$ où X est un espace topologique.
d) Soit E un topos possédant la propriété (P). Pour qu'un faisceau abélien F sur E soit flasque, il faut et il suffit que pour tout monomorphisme $X \hookrightarrow Y$, l'homomorphisme $F(Y) \to F(X)$ soit surjectif.
e) Soit E un topos possédant la propriété (P). Montrer que la propriété pour un faisceau F d'être flasque est une propriété de nature locale.
f) Soient E un topos engendré par ses ouverts, e l'objet final de E. Pour qu'un faisceau abélien F soit flasque il faut et il suffit que pour tout ouvert U de e, le morphisme canonique $F(e) \to F(U)$ soit surjectif.

Exercice 4.17. (Faisceaux flasques et changement d'univers) 36

Soient C un $\mathscr{U}$-site (par exemple un $\mathscr{U}$-topos) et $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$. Notons $\epsilon : C^{\sim}_{\mathscr{U}} \to C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ les catégories de faisceaux correspondantes et l'injection canonique. Soit F un $\mathscr{U}$-faisceau abélien flasque sur C. On se propose de montrer que ϵF est flasque. On remarque tout d'abord que pour tout objet X de $C^{\sim}_{\mathscr{U}}$ on a $H^q(\epsilon X, \epsilon F) = 0$ pour $q > 0$. Tout objet Y de $C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ admet une famille épimorphique $\epsilon X_i \to Y$, $i \in I$ où les $\epsilon X_i \to Y$ sont des monomorphismes. On en conclut que $H^q(Y, \epsilon F) = \varinjlim^q_{\epsilon X \hookrightarrow Y} F(X)$. Pour montrer que ces $\varprojlim^q$ sont nuls pour $q \neq 0$, on peut s ramener au topos $\mathrm{Ouv}(C_{\mathscr{V}/Y})^{\sim}$ et utiliser le fait que pour ce topos, un faisceau es flasque s'il l'est localement.

5. Les $R^q u_*$ et la suite spectrale de Cartan-Leray relative à un morphisme de topos

5.0. Soient $u : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de topos annelés, $u_* = E \to E$ le foncteur image directe. La notation u_* désignera encore l'extension aux Modules du foncteur image directe. Le foncteur u_* pour les Modules (à gauche pour fixer le idées) est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés droits sont notés $R^q u_*$, $q \geq 0$.

Proposition 5.1. 1) Pour tout A-Module M, le faisceau $R^q u_* M$ est le faisceau associé au préfaisceau $X' \mapsto H^q(u^* X', M)$ $(X' \in \mathrm{ob}\, E')$.

2) La formation des foncteurs $R^q u_*$ commute aux restrictions des scalaires.

3) La formation des foncteurs $R^q u_*$ commute aux localisations. De manière précise, pour tout objet X' de E', si on désigne par $u_{/X} : E/_{u^*X'} \to E'_{/X'}$ le morphisme déduit de u par localisation (IV 8), on a, pour tout A-Module M, un isomorphisme canonique

(5.1.1) $$R^q(u_{/X'})_*(M|u^*X') \simeq R^q u_*(M)|X' \qquad q \geq 0.$$

Désignons par $u_*^{\hat{}} : E^{\hat{}} \to E'^{\hat{}}$ le foncteur image directe pour les $\mathscr{U}$-préfaisceaux ($u_*^{\hat{}} M = M \circ u^*$). Comme u^* et u_* sont adjoints, on a un isomorphisme

$$u_* \simeq \underline{a} u_*^{\hat{}\circ},$$

37 où $\underline{a}$ est le foncteur faisceau associé pour E'. Comme les foncteurs $\underline{a}$ et $u_x^{\hat{}}$ sont exacts, on a

$$R^{q_{u_*}} \simeq \underline{a} u_*^{\hat{}} \mathscr{H}^q,$$

ce qui est une autre manière d'énoncer 1). L'assertion 2) résulte alors de 1) et de 3.5. Par définition du morphisme $u_{/X'}$ on a isomorphisme canonique (5.1.1) pour $q = 0$. Le cas général s'en déduit en remarquant que les foncteurs de localisation (IV 8) sont exacts et transforment les objets injectifs en objets injectifs (4.11).

Proposition 5.2. Soient $u : E \to E'$ un morphisme de topos et S' une famille génératrice de E'. Les faisceaux M acycliques pour les foncteurs $H^{\circ}(u^* X', .)$, $X' \in S'$, sont acycliques pour le foncteur u_*. En particulier, les faisceaux flasques sont acycliques pour u_*.

Résulte de 5.1. 1).

Proposition 5.3. Soient $u : E \to E'$ un morphisme de topos et M un Groupe abélien de E. On a une suite spectrale :

(5.3.1) $$E_2^{p,q} = H^p(E', R^q u_* M) \Longrightarrow H^{p+q}(E, M).$$

Plus généralement, pour tout objet X' de E', on a une suite spectrale :

(5.3.2) $$E_2^{p,q} = H^p(X', R^q u_* M) \Rightarrow H^{p+q}(u^* X', M).$$

Par définition des foncteurs images directe et réciproque, on a un isomorphisme $H^{\circ}(X', u_* M) \simeq H^{\circ}(u^* X', M)$. Le foncteur u_* transforme les objets injectifs en faisceaux flasques (4.6 et 4.9). Les suites spectrales proposées sont donc des suites spectrales de foncteurs composés (0.3).

Proposition 5.4. Soient $u : E \to E'$ et $v : E' \to E''$ deux morphismes de topos. On a une suite spectrale

$$R^p v_* R^q u_* \Longrightarrow R^{p+q}(v \circ u)_*.$$

On a $v_* u_* \simeq (vu)_*$ et le foncteur u_* transforme les objets injectifs en faisceaux flasques 38
(4.9) donc acycliques pour v_* (5.2). On a donc une suite spectrale des foncteurs composés (0.3).

6. Ext locaux et cohomologie à supports

6.0. Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module, à gauche pour fixer les idées. Le foncteur $N \mapsto \mathscr{H}om_A(M, N)$, sur la catégorie des A-Modules à gauches et à valeurs dans la catégorie des Groupes abéliens est exact à gauche (IV 12). Ses foncteurs dérivés droits sont notés :

$$\mathscr{E}xt^q_A(M, N). \tag{6.0.1}$$

En particulier, on a

$$\mathscr{E}xt^{\circ}_A(M, N) = \mathscr{H}om_A(M, N). \tag{6.0.2}$$

Par définition, on a des isomorphismes canoniques (2.1 et IV 12).

$$H^{\circ}(E, \mathscr{E}xt^{\circ}_A(M, N)) = \mathrm{Ext}^{\circ}_A(E; M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N). \tag{6.0.3}$$

Plus généralement, pour tout objet X de E, on a (2.2)

$$H^{\circ}(X, \mathscr{E}xt^{\circ}_A(M, N)) = \mathrm{Ext}^{\circ}_A(X; M, N) = \mathrm{Hom}_{A|X}(M|X, N|X). \tag{6.0.4}$$

Proposition 6.1. 1) La formation des foncteurs $\mathscr{E}xt^q_A$ commute aux localisations. De manière précise, pour tout objet X de E, on a des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathscr{E}xt^q_A(M, N)|X \simeq \mathscr{E}xt^q_{A|X}(M|X, N|X). \tag{6.1.1}$$

2) Le faisceau $\mathscr{E}xt^q_A(M, N)$ est isomorphe au faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Ext}^q_A(X\,; M, N)$.
3) Il existe une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^{p+q}_A(E; M, N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(E, \mathscr{E}xt^q_A(F, G)). \tag{6.1.2}$$

Plus généralement, pour tout objet X de E, on a une suite spectrale fonctorielle en 39
X et en les arguments M et N

$$\mathrm{Ext}^{p+q}_A(X; M, N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{E}xt^q_A(M, N)). \tag{6.1.3}$$

Par définition, on a un isomorphisme (6.1.1) lorsque $q = 0$ (IV 12). Le cas général s'en déduit compte tenu de fait que les foncteurs de localisation sont exacts et transforment les Modules injectifs en Modules injectifs (2.2). Le foncteur $N \mapsto \mathscr{H}om_A(M, N) = \mathscr{E}xt^{\circ}_A(M, N)$ transforme les Modules injectifs en faisceaux flasques donc en faisceaux acycliques pour $H^{\circ}(X, .)$ (4.10). Les suites spectrales (6.1.2)) et ((6.1.3) sont des suites spectrales de foncteurs composés compte tenu de (6.0.3)) et ((6.0.4). Lorsque X varie dans E, la suite spectrale (6.1.3) fournit une suite spectrale de préfaisceaux, d'où en passant aux faisceaux associés, une suite spectrale de faisceaux. Comme les faisceaux associés aux préfaisceaux $X \mapsto H^p(X, .)$ sont nuls lorsque $p \neq 0$ (3.1), cette suite spectrale dégénère et fournit l'isomorphisme annoncé dans 2).

Proposition 6.2. Les foncteurs $(M, N) \mapsto \mathscr{E}xt^q_A(M, N)$, $q \geq 0$, forment un δ-foncteur en la variable M et la variable N. De manière explicite, pour toute suite exacte $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ (resp. $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$) on a des longues suites exactes :

(6.2.1)
$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M, N') \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M, N) \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M, N'') \xrightarrow{\delta} \mathscr{E}xt^{q+1}_A(M, N') \longrightarrow \cdots$$

(resp.

(6.2.2)
$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M'', N) \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M, N) \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M', N) \xrightarrow{\delta} \mathscr{E}xt^{q+1}_A(M'', N) \longrightarrow \cdots).$$

Il résulte des propriétés générales des foncteurs Ext^q que pour tout objet X de E, les foncteurs $(M, N) \mapsto \mathrm{Ext}^q_A(X ; M, N)$, $q \geq 0$, forment un δ-foncteur en chacun des arguments, d'où l'assertion, en faisant varier X et en prenant le faisceau associé (6.1).

6.3. Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module, Z un fermé de E (IV 9), U l'ouvert complémentaire. On note $H^{\circ}_Z(E, M)$ le groupe des sections de M dont le sup-
40 port est contenu dans Z (IV 14) et $\mathscr{H}_Z(M)$ le sous-faisceau de M défini par les sections de M « à supports dans Z »(IV 14). Les foncteurs $H^{\circ}_Z(E, .)$ et $\mathscr{H}^{\circ}_Z(.)$ sont exacts à gauche (IV 14). Les foncteurs dérivés sont notés $H^q_Z(E, .)$ et $H^q_Z(.)$ respectivement et appelés les groupes (resp. faisceaux) de cohomologie de M à supports dans Z[13].

On a des isomorphismes canoniques (IV 14)

(6.3.1)
$$H^{\circ}_Z(E, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(A_Z, M) \simeq \mathrm{Ext}^{\circ}_A(E; A_Z, M),$$

(6.3.2)
$$\mathscr{H}^{\circ}_Z(M) \simeq \mathscr{H}om_A(A_Z, M) \simeq \mathscr{E}xt^{\circ}_A(A_Z, M),$$

d'où des isomorphismes pour tout $q \geq 0$

(6.3.3)
$$H^q_Z(E, M) \simeq \mathrm{Ext}^q_A(E; A_Z, M),$$

(6.3.4)
$$\mathscr{H}^q_Z(M) \simeq \mathscr{E}xt^q_A(A_Z, M).$$

On remarquera que A_Z étant un biModule, les faisceaux $\mathscr{E}xt^q_A(A_Z, M) \simeq \mathscr{H}^q_Z(M)$ sont munis canoniquement de structures de A-Module.

Pour tout objet X de E, notons $Z_{/X}$ le sous-topos fermé de $E_{/X}$ déduit de Z par localisation (c'est le complémentaire de $U \times X$). Par définition, on a des isomorphismes canoniques

(6.3.5)
$$H^{\circ}(X, \mathscr{H}_Z(M)) \simeq \mathscr{H}_{Z_{/X}}(E_{/X}, M|X).$$

[13]Comparer avec SGA 2 I pour le cas des espaces topologiques ordinaires, ainsi que l'exposé de Hartshorne cité p-80 plus bas.

On pose

$$H^q_Z(X,M) \simeq H^q_{Z_{/X}}(E_{/X}, M|X). \tag{6.3.6}$$

Compte-tenu de (6.3.2), on a des isomorphismes canoniques

$$H^q_Z(X,M) \simeq \mathrm{Ext}^q_A(X; A_Z, M). \tag{6.3.7}$$

Proposition 6.4. 1) La formation des foncteurs $\mathscr{H}^q_Z$ commute à la localisation. De manière précise, pour tout objet X de E, et tout A-Module M, on a des isomorphismes canoniques 41

$$\mathscr{H}^{\circ}_Z(M)|X \simeq \mathscr{H}^q_{Z_{/X}}(M|X). \tag{6.4.1}$$

2) Le faisceau $\mathscr{H}^q_Z(M)$ est le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto H^q_Z(X,M)$.

3) Il existe une suite spectrale :

$$H^{p+q}_Z(E,M) \Longleftarrow H^p(E, \mathscr{H}^q_Z(M)). \tag{6.4.2}$$

Plus généralement, pour tout objet X de E, il existe une suite spectrale

$$H^{p+q}_Z(X,M) \Longleftarrow H^p(X, \mathscr{H}^q_Z(M)). \tag{6.4.3}$$

On ne fait que traduire la proposition 6.1 à l'aide du dictionnaire 6.3.

Proposition 6.5. Avec les notations de 6.3, notons $j : U \to E$ le morphisme canonique. Pour tout A-Module M, il existe une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}^{\circ}_Z(M) \longrightarrow M \longrightarrow j_*(M|U) \longrightarrow \mathscr{H}^1_Z(M) \longrightarrow 0, \tag{6.5.1}$$

et des isomorphismes pour $q \geq 2$:

$$\mathscr{H}^q_Z(M) \simeq \mathscr{E}xt^{q-1}_A(A_U, M) \simeq R^{q-1}j_x(M|U). \tag{6.5.2}$$

On a de plus, une longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^q_Z(E,M) \longrightarrow H^q(E,M) \longrightarrow H^q(U,M) \longrightarrow H^{q+1}_Z(E,M) \longrightarrow \cdots \tag{6.5.3}$$ [13]

et plus généralement, pour tout objet X de E, on a une longue suite exacte

(6.5.4)

$$\cdots \longrightarrow H^q_Z(X,M) \longrightarrow H^q(X,M) \longrightarrow H^q(X \times U, M) \longrightarrow H^{q+1}_Z(X,M) \longrightarrow \cdots .$$

Par définition de A_Z, on a une suite exacte (IV 14)

$$0 \longrightarrow A_U \longrightarrow A \longrightarrow A_Z \longrightarrow 0. \tag{6.5.5}$$

Les foncteurs $\mathscr{E}xt^q_A(A,.)$ sont nuls pour $q > 0$. On a $\mathscr{H}om_A(A_U, M) \simeq j_*(M|U)$ (IV 14) 42
et par suite (2.2) $\mathscr{E}xt^q_A(A_U, M) \simeq R^q j_*(M|U)$. Enfin $\mathscr{E}xt^q_A(A_Z, M) \simeq \mathscr{H}^q_Z(M)$ (6.3.4). La longue suite exacte (6.2.2) fournit dans ce cas (6.5.1) et (6.5.2). Les suites exactes (6.5.3) et (6.5.4) résultent du dictionnaire 6.3 et de la longue suite exacte du δ-foncteur $\mathrm{Ext}^q_A(X; \cdot, M), q \geq 0$, associée à (6.5.5).

Proposition 6.6. 1) Les faisceaux flasques sont acycliques pour les foncteurs $\mathscr{H}^{\circ}_Z$ et $H^{\circ}_Z(X,.)$.

[13]cette suite exacte précise le rôle des invariants cohomologiques globaux $H^q_Z(E,N)$ comme des « groupes de cohomologie de E *modulo* l'ouvert U, à coefficient dans M ».

2) Les foncteurs $\mathscr{H}^{\circ}_{Z}$ et $H^{\circ}_{Z}(X, .)$ commutent aux restrictions des scalaires.

Soit M un faisceau flasque. La suite exacte (6.5.4) fournit des égalités $H^{q}_{Z}(X, M) = 0$ pour tout X et tout $q \geq 2$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{\circ}_{Z}(X, M) \longrightarrow H^{\circ}(X, M) \longrightarrow H^{\circ}(X \times U, M) \longrightarrow H^{1}_{Z}(X, M) \longrightarrow 0.$$

Mais le faisceau M étant flasque, le morphisme $H^{\circ}(X, M) \to H^{\circ}(X \times U, M)$ est surjectif 4. Par suite $H^{1}_{Z}(X, M) = 0$ et M est acyclique pour $H^{\circ}_{Z}(X\,; M)$. En passant aux faisceaux associés, on en déduit que M est acyclique pour le foncteur $\mathscr{H}^{\circ}_{Z}$ (6.4). Il est clair que les foncteurs $\mathscr{H}^{\circ}_{Z}$ et $H^{\circ}_{Z}(X, .)$ commutent aux restrictions des scalaires et comme les faisceaux flasques sont acycliques pour ces deux foncteurs, la propriété 2) en résulte.

Proposition 6.7. *Soient (E, A) un topos annelé, Z un fermé de E, U l'ouvert complémentaire, M et N deux A-Modules. Il existe des isomorphismes fonctoriels en M et N compatibles avec les changements de fermés :*

$$H^{\circ}_{Z}(\mathscr{H}om_{A}(M, N)) \simeq \mathscr{H}om_{A}(M, \mathscr{H}^{\circ}_{Z}(N)) \simeq \mathscr{H}om_{A}(M \otimes_{A} A_{Z}, N).$$

Résulte de (IV 14) compte-tenu de (6.3.2).

6.8. On pose

$$\mathscr{H}om_{A,Z}(M, N) = \mathscr{H}^{\circ}_{Z}(\mathscr{H}om_{A}(M, N)). \tag{6.8.1}$$

Le foncteur $N \mapsto \mathscr{H}om_{A,Z}(M, N)$ est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés sont notés $\mathscr{E}xt^{q}_{A,Z}(M, N)$: ce sont les faisceaux $\mathscr{E}xt$ à supports dans Z. On a donc

$$\mathscr{E}xt^{\circ}_{A,Z}(M, N) = \mathscr{H}om_{A,Z}(M, N). \tag{6.8.2}$$

43 Posons $M_{Z} = M \otimes_{A} A_{Z}$. Il résulte de IV 14 que M_{Z} est l'image directe sur E de l'image réciproque sur Z de M. On a donc, compte tenu de 6.7 des isomorphismes

$$\mathscr{E}xt^{q}_{A,Z}(M, N) \simeq \mathscr{E}xt^{q}_{A}(M_{Z}, N). \tag{6.8.3}$$

Passons maintenant aux invariants globaux. On pose

$$\mathrm{Hom}_{A,Z}(M, N) = \mathrm{Ext}^{\circ}_{A,Z}(E; M, N) = H^{\circ}_{Z}(E, \mathscr{H}om_{A}(M, N)). \tag{6.8.4}$$

Le groupe $\mathrm{Hom}_{A,Z}(M, N)$ est le sous-groupe du groupe des morphismes de M dans N dont le support est dans Z (IV 14) i.e. qui sont nuls sur U. Plus généralement, pour tout objet X de E, on pose

$$\mathrm{Ext}^{\circ}_{A,Z}(X; M, N) = H^{\circ}_{Z}(X, \mathscr{H}om_{A}(M, N)). \tag{6.8.5}$$

Les foncteurs $N \mapsto \mathrm{Ext}^{\circ}_{A,Z}(X\,; M, N)$ sont exacts à gauche. Les foncteurs dérivés sont notés $\mathrm{Ext}^{q}_{A,Z}(X, M, N)$. Ce sont les groupes Ext à supports dans Z. Les définitions (6.3.6), (6.8.1) et (6.8.5) et les isomorphismes 6.7 fournissant des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^{\circ}_{A,Z}(X; M, N) \simeq \begin{cases} H^{\circ}(X, \mathscr{H}om_{A,Z}(M, N)), \\ \mathrm{Ext}^{\circ}(X; M, \mathscr{N}^{\circ}_{Z}(N)), \\ \mathrm{Ext}^{\circ}(X; M_{Z}, N). \end{cases} \tag{6.8.6}$$

Le dernier isomorphisme de (6.8.6) fournit des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^{q}_{A,Z}(X; M, N) \simeq \mathrm{Ext}^{q}_{A}(X; M_{Z}, N). \tag{6.8.7}$$

Proposition 6.9. 1) Il existe deux suites spectrales fonctorielles en M et N compatibles avec les changements de fermés

(6.9.1)
$$\mathscr{E}xt^{p+q}_{A,Z}(M,N) \Longleftarrow \begin{cases} E_2^{p,q} = \mathscr{H}^p_Z(\mathscr{E}xt^q_A(M,N)), \\ {}'E_2^{p,q} = \mathscr{E}xt^p_A(M,\mathscr{H}^q_Z(N)). \end{cases}$$

2) Il existe trois suites spectrales fonctorielles en X, M et N compatibles avec les changements de fermés 44

(6.9.2)
$$\mathrm{Ext}^{p+q}_{A,Z}(M,N) \Longleftarrow \begin{cases} E_2^{p,q} = H^p_Z(X,\mathscr{E}xt^q_A(M,N)), \\ {}'E_Z^{p,q} = H^p(X,\mathscr{E}xt^q_{AZ}(M,N)), \\ {}''E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_A(X;M,\mathscr{H}^q_Z(N)). \end{cases}$$

3) Les faisceaux $\mathscr{E}xt^q_{A,Z}(M,N)$ sont canoniquement isomorphes aux faisceaux associés aux préfaisceaux $X \mapsto \mathrm{Ext}^q_{A,Z}(X;M,N)$.

Lorsque N est injectif, le faisceau $\mathscr{H}om_A(M,N)$ est flasque 4.10 donc acyclique pour $\mathscr{H}_Z$ (6.6). La première suite spectrale de (6.9.1) est une suite spectrale de foncteurs composés (6.8.1). De même, lorsque N est injectif, $\mathscr{H}_Z(N)$ est injectif (4.11) et la deuxième suite spectrale de (6.9.1) est une suite spectrale de foncteurs composés déduite de 6.7. Les suites spectrales de (6.9.2) sont des suites spectrales de foncteurs composés déduites de la définition (6.8.5) et les deux premiers isomorphismes de (6.8.6). Enfin, en faisant varier X dans la deuxième suite spectrale de (6.9.2) et un prenant les faisceaux associés, on obtient une suite spectrale de faisceaux qui dégénère grâce à 3.1 et qui fournit les isomorphismes de 3).

Proposition 6.10. Les foncteurs $(M,N) \mapsto \mathscr{E}xt^q_{A,Z}(M,N)$, $q \geq 0$, et $(M,N) \mapsto \mathrm{Ext}^q_{A,Z}(X;M,N)$, $q \geq 0$, sont des δ-foncteurs en chacune des variables M et N. En notant M_U le faisceau $M \otimes_A A_U$ (cf. IV 11), on a une longue suite exacte

(6.10.1)
$$\dots \xrightarrow{\delta} \mathscr{E}xt^q_{A,Z}(M,N) \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M,N) \longrightarrow \mathscr{E}xt^q_A(M_U,N) \xrightarrow{\delta} \mathscr{E}xt^{q+1}_{A,Z}(M,N) \longrightarrow \dots$$

et une suite exacte analogue par les groupes Ext.

Les foncteurs $\mathscr{E}xt^q_A(.,.)$ et $\mathrm{Ext}^q_A(X;.,.)$ forment des δ-foncteurs par rapport à chacune des variables (6.2) et le foncteur $M \mapsto M_Z$ est exact car A_Z est plat (1.3.3). La première assertion résulte donc des isomorphismes (6.8.3) et (6.8.7). La suite exacte (6.10.1) et la suite exacte analogue pour les groupes Ext est la longue suite exacte du δ-foncteur

$$\mathscr{E}xt^q_A(.,N), q \geq 0 (\mathit{resp.}\ \mathrm{Ext}^Q_A(X;.,N), q \geq 0)$$

relative à la suite exacte $0 \to M_U \to M \to M_Z \to 0$, compte tenu de (6.8.3) et (6.8.7). 45

6.11. Indiquons brièvement comment on peut étendre ces résultats au cas des familles de supports. Soit E un topos. Pour tout objet X de E désignons par $\mathrm{Fer}(X)$ l'ensemble des fermés du topos $E_{/X}$. Cet ensemble est en correspondance biunivoque, par passage au complémentaire, avec l'ensemble des ouverts du topos $E_{/X}$, i.e. avec l'ensemble des sous-objets de X (IV 8). Le préfaisceau $\mathrm{Fer} : X \to \mathrm{Fer}(X)$ est en fait un $\mathscr{U}$-faisceau ainsi qu'on le vérifie immédiatement, il est donc représentable. En d'autres termes, il existe un objet de E noté encore Fer et un fermé Z_{Fer} de $E_{/\,\mathrm{Fer}}$ tel que pour tout X, tout élément de $\mathrm{Fer}(X)$ se déduise de Z_{Fer} par un changement de base par un morphisme $u_Z : X \to \mathrm{Fer}$ uniquement déterminé par Z.

DÉFINITION 6.12. On appelle famille de supports de E un sous-ensemble Φ de l'ensemble des fermés de E qui possède les propriétés suivantes :

(S1) La réunion d'une famille finie d'éléments de Φ appartient à Φ
(S2) Tout fermé de E contenu dans un élément de Φ est un élément de Φ.

6.12.1. Soient E un topos, Φ une famille de supports de E, X un objet de E. On désigne par $\Phi(X)$ la plus petite famille de supports de $E_{/X}$ qui contient les fermés de $E_{/X}$ déduits de fermés de Φ par le changement de base $X \to e$ (e objet final de E). Le foncteur $X \to \Phi(X)$ est un sous-préfaisceau du faisceau Fer. Il est donc séparé.

6.12.2. On dit qu'une famille Φ de supports de E est de caractère local si elle possède la propriété suivante :
(CL) Pour toute famille épimorphique $(X_i \to e)$, $i \in I$ (où e est l'objet final de E) la suite d'ensembles

$$\Phi \longrightarrow \prod_i \Phi(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \Phi(X_i \times X_j)$$

est exacte.

Soit $a\Phi$ le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto \Phi(X)$ (6.12.1). La condition (CL) est
46 équivalente à la condition que le morphisme canonique $\Phi \to a\Phi(e)$ soit une bijection. (cf. la construction du faisceau associé dans II dans le cas d'un préfaisceau séparé). Pour vérifier (CL) on peut donc se limiter à une famille finale de familles épimorphiques $(X_i \to e)$, $i \in I$.

EXEMPLE 6.12.3. 1) Soit Z un fermé de E. L'ensemble des fermés de E contenus dans Z est une famille de supports de E. Elle est de caractère local.

2) Soit T un espace topologique et Φ une famille de supports paracompactifiants de T [15]. La famille Φ n'est pas, en général, de caractère local.
3) Soient T un espace topologique et p un entier. La famille de Φ_p des fermés de T de codimension de Krull $\geq p$, est une famille de supports de T. Elle est de caractère local.
4) Soit E un topos possédant la propriété suivante : toute famille épimorphique $(X_i \to e)$, $i \in I$, est majorée par une famille épimorphique finie. Alors toute famille de supports de E est de caractère local. En effet, en utilisant l'exemple 1), il suffit de montrer qu'une limite inductive filtrante Φ_λ de familles de caractère local est une famille de caractère local, ce qui résulte immédiatement du passage à la limite inductive sur la suite d'ensembles

$$\Phi_\lambda \longrightarrow \prod_i \Phi_\lambda(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \Phi_\lambda(X_i \times X_j),$$

où $(X_i \to e)$, $i \in I$, est une famille épimorphique finie. En effet d'après 6.12.2 et l'hypothèse sur E, on peut se limiter à des familles épimorphiques finies pour vérifier les conditions (CL) et comme les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies (I 2), l'exactitude de ces suites d'ensembles est conservée par passage à la limite inductive.
5) Soit E un topos cohérent (VI 2.3). Alors d'après ce qui précède toute famille de support de E est de caractère local.

6.13. Soient (E, A) un topos annelé, Φ une famille de supports de E, N un A-Module (à gauche pour fixer les idées), X un objet de E. On pose

$$\mathscr{H}^{\circ}_{\Phi}(N) = \varinjlim_{Z\in\Phi} \mathscr{H}^{\circ}_{Z}(N), \tag{6.13.1}$$

$$H^{\circ}_{\Phi}(E, N) = \varinjlim_{Z\in\Phi} H^{\circ}_{Z}(E, N). \tag{6.13.2}$$

Soit M un A-Modules à gauche, on pose : **47**

$$\mathscr{E}xt^{\circ}_{A,\Phi}(M, N) = \mathscr{H}om_{A,\Phi}(M, N) = \varinjlim_{Z\in\Phi} \mathscr{E}xt^{\circ}_{A,Z}(M, N), \tag{6.13.3}$$

$$\operatorname{Ext}^{\circ}_{A,\Phi}(X; M, N) = \operatorname{Hom}_{A|X,\Phi(X)}(M|X, N|X) = \varinjlim_{Z\in\Phi} \operatorname{Ext}^{\circ}_{A,Z}(X; M, N). \tag{6.13.4}$$

On a des isomorphismes canoniques :

$$\mathscr{E}xt^{\circ}_{A,\Phi}(M, N) \simeq \mathscr{H}^{\circ}_{\Phi}(\mathscr{E}xt^{\circ}_{A}(M, N)), \tag{6.13.5}$$

$$\operatorname{Ext}^{\circ}_{A,\Phi}(X; M, N) \simeq H^{\circ}((X, \mathscr{E}xt^{\circ}_{A}(M, N)). \tag{6.13.6}$$

Lorsque Φ est la famille des fermés contenus dans un fermé Z, on a des isomorphismes :

$$\begin{cases} H^{\circ}_{\Phi} \simeq \mathscr{H}^{\circ}_{Z} \\ H^{\circ}_{\Phi} \simeq H^{\circ}_{Z} \\ \mathscr{E}xt^{\circ}_{A,\Phi}(.,.) \simeq \mathscr{E}xt^{\circ}_{A,Z}(.,.) \\ \operatorname{Ext}^{\circ}_{A,\Phi}(X;.,.) \simeq \operatorname{Ext}^{\circ}_{A,Z}(X;.,.). \end{cases} \tag{6.13.7}$$

Les limites inductives qui définissent les foncteurs précédents sont filtrantes. Par suite ces foncteurs sont exacts à gauche. Leurs foncteurs dérivés droites sont notés :

$$\mathscr{H}^{q}_{\Phi},\ H^{q}_{\Phi},\ \mathscr{E}xt^{q}_{A,\phi}(.,.), \operatorname{Ext}^{q}_{A,\Phi}(X;.,.). \tag{6.13.8}$$

Ils se calculent eux aussi par limites inductives des foncteurs $\mathscr{H}^{q}_{Z}$, H^{q}_{Z}, etc. pour Z parcourant Φ.

Des isomorphismes (6.13.5) et (6.13.6), on tire deux suites spectrales par passage à la limite inductive sur la première suite spectrale de (6.9.1) et la première suite spectrale de (6.9.2) :

$$\mathscr{E}xt^{p+q}_{A,\Phi}(M, N) \Leftarrow E_2^{p,q} = \mathscr{H}^{p}_{\Phi}(\mathscr{E}xt^{q}_{A}(M, N)), \tag{6.13.9}$$

$$\operatorname{Ext}^{p+q}_{A,\Phi}(X; M, N) \Leftarrow E_2^{p,q} = H^{p}_{\Phi}(X, \mathscr{E}xt^{q}_{A}(M, N)). \tag{6.13.10}$$

48

6.14. Avec les notations de 6.13, on a, sans hypothèse sur Φ, un morphisme fonctoriel

$$\theta\ :\ H^{\circ}_{\Phi}(N) \longrightarrow H^{\circ}(E, \mathscr{H}^{\circ}_{\Phi}(N)). \tag{6.14.1}$$

Ce morphisme est toujours injectif mais n'est pas en général un isomorphisme. Cependant, si Φ est de caractère local, le morphisme θ est un isomorphisme ainsi qu'on le vérifie immédiatement. De même si Φ est de caractère local, on a un isomorphisme

$$\theta'\ :\ \operatorname{Ext}^{\circ}_{A,\Phi}(E; M, N) \simeq H^{\circ}(E, \mathscr{E}xt^{\circ}_{A,\Phi}(M, N)). \tag{6.14.2}$$

Proposition 6.15. Soient (E, A) un topos annelé, tel que E soit cohérent (VI) Φ une famille de supports de E, M et N deux A-Modules. Il existe deux suites spectrales :

$$H^{p+q}_{\Phi}(E, N) \Leftarrow E_2^{p,q} = H^p_{\Phi}(E, \mathscr{H}^q_{\Phi}(N)), \tag{6.15.1}$$

$$\mathrm{Exp}^{p+q}_{A,\Phi}(E; M, N) \Leftarrow E_2^{p,q} = H^p(E, \mathscr{E}xt^q_{A,\Phi}(M, N)). \tag{6.15.2}$$

Ces suites spectrales se déduisent de la suite spectrale (6.4.2) et de la deuxième suite spectrale (6.9.2) par passage à la limite inductive sur les fermés Z de Φ, compte tenu de ce que la cohomologie d'un topos cohérent commute aux limites inductives de faisceaux (IV 5).

6.16. Signalons, sans démonstration, qu'on peut étendre au cas des famille de supports la deuxième suite spectrale de (6.9.1) et la troisième suite spectrale de (6.9.2) (avec X= objet final de E) en supposant que le topos E est cohérent et que le Module M est parfait [13].

Enfin on peut aussi généraliser la notion de familles de supports en introduisant les préfaisceaux de familles de supports, les faisceaux de familles de supports et les groupes
49 et faisceaux de cohomologie correspondants[13].

7. Appendice : Cohomologie de Čech

En développant une idée due à P. Cartier, on montre dans ce paragraphe comment on peut dans un topos quelconque, calculer la cohomologie d'un faisceau à l'aide de recouvrements. Pour la théorie classique des espaces paracompacts, on renvoie à [15] ; pour une autre méthode qui s'applique à certains topos, et en particulier au topos étale, voir [14].

7.1. Squelette et cosquelette.

7.1.0. Soit $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes types (les objets de $\mathbf{\Delta}$ sont les ensembles ordonnés $\Delta_n = [0, \dots, n]$, les morphismes sont les applications croissantes). Soient E un $\mathscr{U}$-topos et $\mathbf{\Delta}(E)$ de catégorie des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$ à valeurs dans E, autrement dit la catégorie des objets semi-simpliciaux de E. Désignons par $\mathbf{\Delta}[n]$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Delta}$ définie par les objets Δ_p, $p \leq n$, par $i_n : \mathbf{\Delta}[n] \to \Delta$ le foncteur d'inclusion et par $\mathbf{\Delta}E[n]$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}[n]$ à valeurs dans E, autrement dit, la catégorie des objets semi-simpliciaux tronqués à l'ordre n de E. D'après I 5.1, on a une suite de trois foncteurs adjoints (I 5.3)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}E[n] \arrow[r, shift left=3, "i_{n!}"] \arrow[r, shift right=3, "i_{n*}"'] & \mathbf{\Delta}E \arrow[l, "i_n^*"'] \end{tikzcd}$$

où le foncteur i_n^* est le foncteur restriction à la catégorie $\mathbf{\Delta}[n]$, et où les foncteurs i_{n*} et $i_{n!}$ sont respectivement ses adjoints à droite et à gauche. On notera que $\mathbf{\Delta}E$ et $\mathbf{\Delta}E[n]$ sont des $\mathscr{U}$-topos (IV 1.2) et que (i_n^*, i_{n*}) est un morphisme de topos (IV 3.1) qui est un plongement de $\mathbf{\Delta}E[n]$ dans $\mathbf{\Delta}E$ (I 5.6. et IV 9.1.1).

50 Définition 7.1.1. On note sk_n (resp. cosk_n) et on appelle foncteur squelette d'ordre n (resp. foncteur cosquelette d'ordre n) le foncteur $i_{n!}i_n^*$ (resp. $i_{n*}i_n^*$) de $\mathbf{\Delta}_E$ dans $\mathbf{\Delta}_E$.

Les foncteurs squelette et cosquelette sont d'un usage constant en théorie des ensembles semi-simpliciaux [3].

[13] cf. [12] chap.IV, § 1 (Lecture Notes 20, Springer) pour le développement de ces notions sous forme de fugue avec variations.

Proposition 7.1.2. 1) Le morphisme d'adjonction $\mathrm{sk}_n \to \mathrm{id}$ est en monomorphisme. Les morphismes canoniques $\mathrm{sk}_n \mathrm{sk}_m \to \mathrm{sk}_n$ (resp. $\mathrm{cosk}_n \to \mathrm{cosk}_n \mathrm{cosk}_m$) sont des isomorphismes lorsque $n \leq m$ (resp. $n \geq m$).

2) Soit $u : E \to E'$ un morphisme de topos. Le foncteur u^*, prolongé aux objets semi-simpliciaux et semi-simpliciaux tronqués, commute aux foncteurs $i_{n!}$, i_n^*, sk_n, cosk_n.

La première assertion résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer 2), il suffit de constater que, d'après I 5.1, les foncteurs $i_{n!} \dots, \mathrm{cosk}_n$ se calculent à l'aide de limites inductives et de limites projectives finies.

7.2. Un lemme d'acyclicité.

7.2.0. Soit M un groupe abélien de E. L'homologie d'un objet semi-simplicial K de k, à coefficients dans M, se définit de la manière usuelle : On considère d'abord $A(K)$, le groupe semi-simplicial abélien libre engendré par K, puis on forme le produit tensoriel $M \otimes_Z A(K)$; on obtient ainsi un groupe semi-simplicial abélien de E. On considère alors le complexe de groupes abéliens associé (en formant le somme alternée des opérateurs bord) et on en prend l'homologie. Les objets d'homologie sont notés $H_i(K, M)$. Ce sont des groupes abéliens de E. Lorsque M est le groupe $\mathbb{Z}_E$ (groupe abélien libre engendré par l'objet final de E), on note plus simplement $H_i(K)$. Les groupes $H_i(K)$ sont appelés les groupes d'homologie de K. On dit qu'un objet semi-simplicial K est acyclique si pour tout groupe abélien M de E, les groupes $H_i(K, M)$ sont nuls ($i > 0$) ou, ce qui est équivalent, si les groupes $H_i(K, M)$ sont nuls ($i > 0$).

La formation de l'homologie commute aux images réciproques par les morphismes de topos. 51

Le but de ce numéro est de prouver le lemme suivant :

Lemme 7.2.1. Soient E un topos, $K_\bullet$ et $L_\bullet$ deux objets semi-simpliciaux de E, $v_\bullet : K_\bullet \to L_\bullet$ un morphisme d'objets semi-simpliciaux, n un entier ≥ 0. On suppose que le morphisme v possède les propriétés :

1) Pour tout entier $p < n$ ($p \geq 0$) le morphisme $v_p : K_p \to L_p$ est un isomorphisme.
2) Le morphisme $K_n \xrightarrow{v_n} L_n$ est un épimorphisme.
3) Les morphismes canoniques $K_\bullet \to \mathrm{cosk}_n(K_\bullet)$, $L_\bullet \to \mathrm{cosk}_n(L_\bullet)$ sont des isomorphismes.

Alors, pour tout entier p, le morphisme v_p est un épimorphisme et le morphisme $v_\bullet$ induit un isomorphisme sur les objets d'homologie.

Remarque. La démonstration montre en fait, qu'en adoptant une définition convenable de l'homotopie dans les topos, le morphisme $v_\bullet$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve. On peut supposer que E est le topos des faisceaux sur un petit site C (IV 1) et que par suite E est un sous-topos d'un topos E' ayant suffisamment de foncteurs fibres (par exemple le topos $C^\wedge$). Notons $a^* : E' \to E$ le foncteur image inverse par le morphisme de plongement $E \hookrightarrow E'$. Soit

$$v_\bullet[n] : K_\bullet[n] \longrightarrow L_\bullet[n]$$

le morphisme d'objets semi-simpliciaux tronqués obtenu en tronquant $v_\bullet$ à l'ordre n. Notons $L_\bullet[n]'$ l'image (dans E') de $K_\bullet n$ par $v_\bullet[n]$, $v_\bullet[n]' : K_\bullet[n] \to L_\bullet[n]'$ le morphisme induit par $v_\bullet[n]$. Posons $L\,! = i_{n*} L_\bullet[n]'$, $K\,! = i_{n*} K_\bullet[n]$, $v\,! = i_{n*} v_\bullet[n]'$ (le foncteur i_{n*} est ici relatif à E'). D'après 1), le morphisme $v\,! : K\,! \to L\,!$ possède les propriétés 1), 2), 3) du lemme. De plus, d'après 2), 3) et 7.1.2, le morphisme $a^* v\,!$ n'est autre que $v_\bullet$. Il suffit donc de démontrer le lemme pour v ! et par suite on peut supposer que E possède suffisamment de foncteurs fibres ; donc, en utilisant ces foncteurs fibres, on peut se ramener au cas où E est la catégorie des ensembles.

52 On constate tout d'abord que les hypothèse du lemme sur le morphisme $v_\bullet$ sont stables par tout changement de bases $M_\bullet \to L_\bullet$ où $M_\bullet$ est un cosquelette d'ordre n. Par suite la fibre $P_\bullet$ de $v_\bullet$ en un point base quelconque de $L_\bullet$ est du type $i_{n*}P_\bullet[n]$ où $P_\bullet[n]$ est un complexe non vide tronqué à l'ordre n de la forme

$$P_n \longrightarrow e \longrightarrow e \longrightarrow e \longrightarrow \cdots \longrightarrow e. \tag{7.2.2}$$

Notons, pour tout entier i, $\delta\Delta_i$ l'ensemble semi-simplicial bord du simplexe Δ_i. Tout morphisme de $\delta\Delta_i$ dans P. se prolonge en un morphisme de Δ_i dans $P_\bullet$. En effet, la propriété est évidente si $i \geq n$ car $P_\bullet$ est un cosquelette d'ordre n et elle est claire pour $i < n$ d'après la description (7.2.2). Comme $P_\bullet$ est un complexe de Kan, $P_\bullet$ est homotopiquement trivial [6]. Notons que le morphisme $v_\bullet$ est une fibration au sens de Kan [6]. Comme les fibres de cette fibration sont homotopiquement triviales, $v_\bullet$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie de $K_\bullet$ et $L_\bullet$ en tous les points bases de $K_\bullet$. D'après le théorème d'Hurwitz, ceci implique que $v_\bullet$ induit un isomorphisme sur l'homologie [6]. Ceci démontre la deuxième assertion de lemme. Pour démontrer la première assertion, on remarque que tout morphisme d'un complexe tronqué à l'ordre n dans $L_\bullet[n]$ se relève en un morphisme dans $K_\bullet[n]$. Par suite, d'après 3), tout morphisme d'un complexe dans $L_\bullet$ se relève en un morphisme dans $L_\bullet$. Donc $v_\bullet$ est surjectif.

7.3. Hyper-recouvrements.

7.3.0. Soit C un site, appartenant à l'univers U, où les produits fibrés et les produits de deux objets soient représentables. Désignons par $C^\wedge$ le topos des U-préfaisceaux sur C et par $C^\sim$ le topos des U-faisceaux sur C. Un objet K de $C^\wedge$ est dit semi-représentable s'il est isomorphe à une somme directe de préfaisceaux représentables.

Soit $SR(C)$ la sous-catégorie pleine de $C^\wedge$ définie par les objets semi-représentables. Dans la catégorie $SR(C)$ les limites projectives pour des catégories d'indices finies non vides sont représentables, et le foncteur d'inclusion $SR(C) \hookrightarrow C^\wedge$ commute à ces limites projectives finies. D'après une remarque déjà faite, on en déduit que si $K_\bullet$ est un objet
53 semi-simplicial tronqué à l'ordre n de $C^\wedge$ dont tous les objets sont semi-représentables, le prolongement $i_n^+(K_\bullet)$ possède la même propriété. Donc si $K_\bullet$ est un objet semi-simplicial de $C^\wedge$ dont tout objets sont semi-représentables, alors pour tout n, l'objet $\operatorname{cosk}_n(K_\bullet)$ possède la même propriété.

7.3.1. Définitions et notation.

. Soit $p > 0$ un entier. Un objet semi-simplicial $K_\bullet$ de $C^\wedge$ est appelé un hyper-recouvrement de type p de C, ou lorsqu'aucune confusion n'en résulte, un hyper-recouvrement de type p, s'il possède les propriétés suivantes :

- HR1) Pour tout entier $n \geq 0$, K_n est semi-représentable.
- HR2) Le morphisme canonique $K_\bullet \to \operatorname{cosk}_p(K_\bullet)$ est un isomorphisme.
- HR3) Pour tout entier $n \geq 0$ le morphisme canonique de préfaisceaux : $K_{n+1} \to (\operatorname{cosk}_n(K_\bullet))_{n+1}$ est un isomorphisme couvrant de préfaisceaux (II 6.2). Le morphisme canonique de préfaisceaux $K_\circ \to e$, où e est l'objet final de $C^\wedge$, est un morphisme couvrant de préfaisceaux.

. Un hyper-recouvrement de type p est un hyper-recouvrement de type q pour tout $q \geq p$. Un objet semi-simplicial $K_\bullet$ sera appelé un hyper-recouvrement (de C) s'il possède les propriétés HR 1) et HR 3).

. On désignera par HR_p (resp. HR) et on appellera catégorie des hyperrecouvrements de type p (resp. catégorie des hyper-recouvrements) la catégorie suivante :

a) Les objets de HR_p (resp. HR) sont les hyper-recouvrements de type p (resp. les hyper-recouvrements).
b) Soient $K_\bullet$ et $L_\bullet$ deux objets de HR_p (resp. HR). Un morphisme de HR_p (resp. HR) de source $K_\bullet$ et de but $L_\bullet$ est un morphisme $v. : K_\bullet \to L_\bullet$ d'objets semi-simpliciaux de $C\hat{}$.

. Soient C un site où les produits fibrés soient représentables et X un objet de C. Un hyper-recouvrement de X (resp. un hyper-recouvrement de type p de X) sera un hyper-recouvrement du site C/X (resp. un hyper-recouvrement de type p de C/X). On définit de même la catégorie des hyper-recouvrements de X (resp. du hyper-recouvrement de 54
type p de X). On a une suite de foncteurs d'inclusion :

$$\cdots HR_p \hookrightarrow HR_{p+1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow HR.$$

Ces foncteurs sont pleinement fidèles. Nous noterons HR_∞ la limite inductive des catégories HR_p.

. Désignons, pour tout entier $n \geq 0$, par Δ_n^c l'objet semi-simplicial type de dimension n à valeur dans la catégorie des ensembles, i.e. le foncteur sur $\mathbf{\Delta}$ représenté par l'ensemble ordonné $[0, n]$. On désigne par $\underline{\Delta}_n^c$ le préfaisceau sur C (à valeur dans la catégorie des ensembles semi-simpliciaux constant de valeur Δ_n. Le préfaisceau $\underline{\Delta}_n^c$ est donc un préfaisceau d'ensemble semi-simplicial. Les deux injection canoniques de Δ_0 dans Δ_1 définissent deux morphismes de préfaisceaux semi-simpliciaux :

$$\underline{\Delta}_0^\circ \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} \underline{\Delta}_1^c,$$

et définissent, par suite, pour tout préfaisceau semi-simplicial $K_\bullet$, deux injections canoniques :

$$K_\bullet \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} K_\bullet \times \underline{\Delta}_1^c.$$

Deux morphismes $K_\bullet \underset{u_1}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} L_\bullet$ de préfaisceaux semi-simpliciaux sont dits morphismes homotopes s'il existe un morphisme

$$v : K_\bullet \times \Delta_1^c \longrightarrow L_\bullet$$

tel que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} K_\bullet \arrow[rr, "e_i"] \arrow[dr, "u_i"'] & & K_\bullet \times \Delta_1^c \arrow[dl, "v"] \\ & L_\bullet & \end{tikzcd} \qquad \text{i = 0,1}$$

soient commutatifs. Le morphisme v est appelé une homotopie reliant u_0 à u_1. La rela- 55
tion : u_0 et u_1 sont deux morphismes homotopes de $K_\bullet$ dans $L_\bullet$, n'est pas, en général, une relation d'équivalence. Cependant la relation d'équivalence engendrée par cette relation est compatible avec la composition des morphismes. Cela nous permet donc de définir la catégorie des préfaisceaux semi-simpliciaux à homotopie près, en passant au quotient par la relation d'équivalence engendrée par la relation d'homotopie.

. On définit ainsi les catégories $\mathscr{HR}_p$, $\mathscr{HR}_\infty$, $\mathscr{HR}$, catégories des hyper recouvrements à homotopie près.

Théorème 7.3.2. Soit C un site satisfaisant aux conditions 7.3.0.

1) La catégorie $\mathscr{HR}_p^\circ$ (resp. $\mathscr{HR}^\circ$) est filtrante (I 2.7).
2) Soient $K_\bullet$ un objet de HR_p (resp. de HR), n un entier tel que $0 \leq n \leq p$ (resp. $0 \leq n$), et
$$u : X \longrightarrow K_n$$
un morphisme couvrant de préfaisceaux. Il existe un objet $L_\bullet$ de HR_p (resp. de HR) et un morphisme $f : L_\bullet \to K_\bullet$, tels que le morphisme
$$f_n : L_n \longrightarrow K_n$$
se factorise par u.
3) Les faisceaux semi-simpliciaux associés (II 3.5) aux hyper-recouvrements sont acycliques (7.2.0) en degrés strictement positifs. Le 0-ème faisceau d'homologie est isomorphe au faisceau associé au faisceau constant $\mathscr{Z}$.

Preuve. Démontrons 3). Soit $K_\bullet^\sim$ le faisceau semi-simplicial associé à $K_\bullet$. Le foncteur « faisceau associé »commute au foncteur cosk_n (7.1.2. 2)). Par suite le faisceau semi-simplicial $K_\bullet^\sim$ possède les propriétés suivantes :

a) Le morphisme canonique $K_0 \to e$ est un épimorphisme de faisceaux.
b) Pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme canonique $K_{n+1} \to (\mathrm{cosk}_n(K_\bullet))_{n+1}$ est un épimorphisme de faisceaux.

Posons alors, pour $n \geq 0$, $L_{\bullet_n} = \mathrm{cosk}_n K_\bullet^\sim$. On a alors, pour tout n, une suite de morphismes de faisceaux semi-simpliciaux :
$$K_\bullet^\sim \xrightarrow{u_n} L_{\bullet_n} \xrightarrow{v_n} L_{\bullet_{n-1}} \cdots \longrightarrow L_{\bullet_0} \xrightarrow{v_0} e\cdot,$$
56 et pour tout j, $0 \leq j \leq n$, v_j possède les propriétés de 7.2.1. De plus, le morphisme u_n induit un isomorphisme sur les composants de degré $\leq n$. On déduit alors de 2.1 par récurrence sur n, que $K\cdot$ est acyclique.

Pour démontrer 1) et 2) nous introduirons une terminologie.

Définition 7.3.3. Soit $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de préfaisceaux semi-simpliciaux. On dit que f est spécial de type p (resp. spécial) si :

1) Les objets $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont canoniquement isomorphes à leurs cosquelettes d'ordre p et $\mathrm{cosk}_p(f) = f$ (resp. pas de conditions sur f, $X_\bullet$ et $Y_\bullet$).
2) Pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq p$ (resp. $0 \leq n$), le morphisme Φ_{n+1} figurant dans le diagramme ci-après est couvrant :

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[rr, "f_{n+1}"] \arrow[dr, "\Phi_{n+1}"] \arrow[dd] & & Y_{n+1} \arrow[dd] \\
& P_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
(\mathrm{cosk}_n X_\bullet)_{n+1} \arrow[rr, "(\mathrm{cosk}_n f)_{n+1}"'] & & (\mathrm{cosk}_n Y_\bullet)_{n+1}.
\end{tikzcd}$$

(Les flèches verticales sont définies par les morphismes canoniques $X_\bullet \to \operatorname{cosk}_n X_\bullet$ et $Y_\bullet \to \operatorname{cosk}_n Y_\bullet$. L'objet P_{n+1} est le produit fibré et Φ_{n+1} est l'unique flèche rendant le diagramme commutatif).

3) Le morphisme $f_0 : X_0 \to Y_0$ est couvrant.

Un préfaisceau semi-simplicial $K_\bullet$ est dit spécial de type p (resp. spécial) si le morphisme canonique :

$$K_\bullet \longrightarrow e_\bullet \quad (e_\bullet \quad \text{est l'objet semi-simplicial final})$$

est spécial de type p (resp. spécial) i.e. si $K_\bullet$ satisfait les conditions HR 2) et HR 3) (resp. HR 3)) de 7.3.1.1.

Lemme 7.3.4. 1) Le composé de deux morphismes spéciaux (resp. spéciaux de type p) est un morphisme spécial (resp. spécial de type p). 57

2) Soient $K_\bullet$ un préfaisceau semi-simplicial spécial (resp. spécial de type p), $X_\bullet \xrightarrow{f} Y_\bullet$ un morphisme spécial (resp. spécial de type p) et $u : K_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le produit fibré $P_\bullet = K_\bullet \times_{Y_\bullet} X_\bullet$ est spécial (resp. spécial de type p).

La preuve de ce lemme est laissée au lecteur.

7.3.5. Démonstration de l'assertion 2) de 7.3.2. : On peut tout d'abord supposer que X est semi-représentable. Pour tout objet semi-simplicial $L_\bullet$, désignons par $\operatorname{Hom}_{(X)}(L_\bullet, K_\bullet)$ l'ensemble des morphismes d'objets semi-simpliciaux munis d'une factorisation $L_n \to X \xrightarrow{u} K_n$. Le foncteur $\operatorname{Hom}_{(X)}(., K_\bullet)$ est représentable. En effet ce foncteur transforme les limites inductives en limites projectives, et la catégorie $\boldsymbol{\Delta}(C^\wedge)$ est un topos. On désignera par P un objet qui représenta ce foncteur. Pour un objet Z de $C^\wedge$, dédaignons de même par $j_n^+(Z)$ l'objet qui représente le foncteur. $L_\bullet \mapsto \operatorname{Hom}(L_n, Z)$ sur $\boldsymbol{\Delta}C^\wedge$, dont la construction par $\varprojlim$ est explicitée dans III 1.1. On constate ici que cette construction ne fait intervenir que des $\varprojlim$ finies, d'où on conclut aussitôt que j_n^+ transforme préfaisceaux semi-représentables en préfaisceaux semi-simpliciaux à composantes semi-représentables, et morphismes couvrants $Z' \to Z$ en morphismes spéciaux (7.3.3).

Par définition de $P_\bullet$, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & j_n^+(X) \arrow[d, "j_n^+(u)"] \\
K_\bullet \arrow[r] & j_n^+(K_n)
\end{tikzcd} .$$

D'après ce qu'on vient de signaler, les objets semi-simpliciaux $j_n^+(X)$ et $j_n^+(K_n)$ sont semi-représentables et le morphisme $j_n^+(u)$ est un morphisme spécial de type n. Il suffit alors pour conclure d'appliquer 3.4. et le sorite 7.3.0.

. Soient $M_\bullet$ et $N_\bullet$ deux préfaisceaux semi-simpliciaux. Le foncteur : 58

$$L_\bullet \mapsto \operatorname{Hom}(L_\bullet \times M_\bullet, N_\bullet)$$

est représentable. Le préfaisceau semi-simplicial qui le représente sera noté

$$\mathscr{H}\!om\,.(M_\bullet, N_\bullet).$$

Le préfaisceau composant de degré n de cet objet sera noté $\mathscr{H}\!om_n(M_\bullet, N_\bullet)$. On a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}\!om_n(M_\bullet, N_\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}\!om_0(M_\bullet \times \Delta_n^c, N).$$

Lemme 7.3.6. Soit

$$\begin{tikzcd} M_\bullet \arrow[r, hook] & N_\bullet \\ \mathrm{sk}_n\, \Delta^c_{n+1} \arrow[u] \arrow[r, hook, "u"] & \Delta^c_{n+1} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (u \text{ l'injection canonique})$$

un diagramme co-cartésien de préfaisceaux semi-simpliciaux.

Pour tout hyper-recouvrement $L_\bullet$, le morphisme :

$$\mathscr{H}\!om_\circ(N_\bullet, L_\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}\!om_\circ(M_\bullet, L_\bullet)$$

est couvrant.

Preuve. On a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}\!om_o(N_\bullet, L_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}\!om_o(M_\bullet, L_\bullet) \arrow[d] \\ \mathscr{H}\!om_o(\Delta^c_{n+1}, L_\bullet) \arrow[r, "(x)"] & \mathscr{H}\!om_o(\mathrm{sk}_n(\Delta^c_{n+1}, L_\bullet). \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme $(*)$ est couvrant. Or le morphisme $(*)$ est isomorphe au morphisme :

$$L_{n+1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_n\, L_\bullet)_{n+1}$$

qui est couvrant par hypothèse, C.Q.F.D.

7.3.7. Démonstration de l'assertion 1) de 7.3.2. : Le produit de deux objets HR_P (resp. de HR) est encore un objet de HR_p (resp. de HR) (7.3.4). Pour démontrer que
59 la catégorie $\mathscr{HR}^\circ_p$ (resp. $\mathscr{HR}^\circ$) est filtrante, il suffit de montrer qu'étant donnés deux morphismes de HR_p (resp. HR)

$$K_\bullet \overset{u_0}{\underset{u_1}{\rightrightarrows}} L_\bullet$$

il existe un morphisme $v : M_\bullet \to K_\bullet$ de HR_p (resp. de HR) tel que les morphismes :

$$M_\bullet \overset{u_0 v}{\underset{u_1 v}{\rightrightarrows}} L_\bullet$$

soient homotopes, i.e. tel qu'il existe $w : M_\bullet \times \Delta^c_1 \to L_\bullet$ rendant commutatifs les diagrammes

$$(x) \qquad \begin{tikzcd} M_\bullet \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "v"'] & M_\bullet \times \underline{\Delta}^c_1 \arrow[d, "w"] \\ K_\bullet \arrow[r, "u_i"] & L_\bullet \end{tikzcd} \qquad i = 0, 1\ .$$

Soit alors, pour tout objet semi-simplicial $M_\bullet$ de $C^\wedge$ (non nécessairement un hyper-recouvrement), $F(M_\bullet)$ l'ensemble des couples (v, w) : $v : M_\bullet \to K_\bullet$, $w : M_\bullet \times \Delta^c_1 \to L_\bullet$ tels que les diagrammes (x) soient commutatifs. Le foncteur $M_\bullet \mapsto F(M_\bullet)$ est un foncteur contra cariant en $M_\bullet$ qui transforme les limites inductives en limites projectives, et qui par suite est représentable par un objet semi-simplicial $F_\bullet$. L'objet $F_\bullet$ est évidemment le sommet d'un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
F_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}om_\bullet(\Delta_1^c, L_\bullet) \arrow[d, "\pi"] \\
K_\bullet \arrow[r, "u_0, u_1"'] & L_\bullet \times L_\bullet,
\end{tikzcd}$$

où π est défini par les deux inclusions de $\Delta_\circ^c$ dans Δ_1^c. Il suffit donc, pour démontrer l'assertion, de montrer que $F.$ est un objet de HR_p (resp. de HR) et pour cela, d'après 7.3.4 2) et le sorite 7.3.0, il suffit de montrer que

a) $\mathscr{H}om\,.(\Delta_1^c, L_\bullet)$ est semi-représentable, **60**

b) le morphisme π est spécial de type p (resp. spécial).

On vérifie tout d'abord immédiatement que $\mathscr{H}om\,.(\Delta_1^c, L_\bullet)$ est un objet semi-simplicial semi-représentable. En effet les composantes de cet objet se calculent par limites projectives finies à partir des L_n, et par suite sont semi-représentables. Vérifions maintenant b). Tout d'abord on montre que, lorsque $L_\bullet$ est spécial de type p, le morphisme

$$\mathscr{H}om\,.(\Delta_1^c, L_\bullet) \longrightarrow \operatorname{cosk}_p \mathscr{H}om\,.(\Delta_1^c, L_\bullet)$$

est un isomorphisme ; ce qui permet de vérifier la propriété 1) de 7.3.3. Ensuite, le morphisme :

$$\pi_\circ\ :\ \mathscr{H}om_\circ(\Delta_1^c, L_\bullet) \longrightarrow L_\circ \times L_\circ$$

est isomorphe au morphisme canonique :

$$L_1 \xrightarrow{(d_\circ, d_1)} L_\circ \times L_\circ$$

qui est couvrant par hypothèse ($L_\bullet$ est hyper-recouvrement).

Il reste donc à vérifier la propriété 2) de 7.3.3, i.e. à vérifier que $\forall n$, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}om\,._{n+1}(\Delta_1^c, L_\bullet) \arrow[rr, "\pi_{n+1}"] \arrow[dd] \arrow[dr, "\Phi_{n+1}"'] & & L_{n+1} \times L_{n+1} \arrow[dd] \\
& P_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
(\operatorname{cosk}_n \mathscr{H}om\,.(\Delta_1^c, L_\bullet))_{n+1} \arrow[rr, "(\operatorname{cosk}_n \pi)_{n+1}"] & & (\operatorname{cosk}_n L_\bullet)_{n+1} \times (\operatorname{cosk}_n L_\bullet)_{n+1}
\end{tikzcd}$$

(P_{n+1} est le produit fibré), le morphisme Φ_{n+1} est couvrant. Or un « adjoint foncteurs chasing »simple montre que :

$$P_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_\circ(\operatorname{sk}_{n+1}(\Delta_{n+1}^c \times \Delta_1^c), L_\bullet),$$
$$\mathscr{H}om_{n+1}(\Delta_1^c, L_\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_\circ(\Delta_{n+1}^c \times \Delta_1^c, L_\bullet),$$

et que le morphisme Φ_{n+1} est isomorphe au morphisme **61**

$$\mathscr{H}om_\circ(\Delta_{n+1}^c \times \Delta_1^c, L_\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}om_\circ(\operatorname{sk}_{n+1}(\Delta_{n+1}^c \times \Delta_1^c), L_\bullet)$$

provenant de l'injection

$$\operatorname{sk}_{n+1}(\Delta_{n+1}^c \times \Delta_1^c) \hookrightarrow \Delta_{n+1}^c \times \Delta_1^c.$$

Or il existe une suite de sous-objets de $\Delta^c_{n+1} \times \Delta^c_1$:

$$\mathrm{sk}_{n+1}(\Delta^c_{n+1} \times \Delta^c_1) = M_\circ \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow M_k = \Delta^c_{n+1} \times \Delta^c_1,$$

telle que pour tout $0 \leq i \leq k$, le morphisme

$$M_i \hookrightarrow M_{i+1}$$

s'insère dans un diagramme cocartésien :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, hook] & M_{i+1} \\ \mathrm{sk}_{n+1}\, \underline{\Delta}^c_{n+2} \arrow[u] \arrow[r, hook] & \underline{\Delta}^c_{n+2} \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

(On ajoute l'un après l'autre les simplexes non dégénérés de dimension $n+2$ de $\Delta_{n+1} \times \Delta_1$). D'après 7.3.6 le morphisme Φ_{n+1} est un composé de morphismes couvrants et par suite est lui-même couvrant, ce qui achève la démonstration de 7.3.2.

7.4. Le théorème d'isomorphisme.

7.4.0. Soit F un préfaisceau en groupes abéliens sur un site C satisfaisant à la condition 7.3.0. Pour tout hyper-recouvrement $K_\bullet$, on posera :

$$H^q(K_\bullet, F) = H^q(\mathrm{Hom}_{C^\frown}(K_\bullet, F)).$$

Les $H^q(K_\bullet, F)$ forment un δ-foncteur sur la catégorie des préfaisceaux abéliens sur C, mais ils ne sont pas, en général, les foncteurs dérivés du foncteur $H^\circ(K_\bullet, F)$.

62 Posons alors :

$$\overset{r}{\check{H}}{}^q\ (C, F) = \varinjlim_{HR_r} H^q(., F)(r \text{ peut être infini}), \tag{7.4.0.1}$$

et

$$\check{\check{H}}{}^q\ (C, F) = \varinjlim_{HR} H^q(., F). \tag{7.4.0.2}$$

Les $\overset{r}{\check{H}}{}^q\ (C, F)$ (resp. $\check{\check{H}}{}^q\ (C, F)$) forment encore un δ-foncteur car la catégorie $\mathscr{HR}^\circ_p$ (resp. $\mathscr{HR}^\circ$) est filtrante (7.3.2). Comme les catégories $\mathscr{HR}_p$ ne sont par nécessairement des U-catégories, ces δ-foncteurs sont à valeurs dans la catégorie des V-groupes abéliens, pour un univers V convenable.

Supposons maintenant que le préfaisceau F soit un faisceau, Comme le faisceau semi-simplicial associé à un hyper-recouvrement est acyclique (7.3.2), on a une suite spectrale fonctorielle en F et en $K_\bullet$:

$$H^p(K_\bullet, \mathscr{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(C^\sim, F). \tag{7.4.0.3}$$

D'où, en passant à la limite, des suites spectrales :

$$\begin{aligned} &\overset{r}{\check{H}}{}^p\ (C, \mathscr{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(C^\sim, F), \\ &\check{\check{H}}{}^p\ (C, \mathscr{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(C^\sim, F). \end{aligned} \tag{7.4.0.4}$$

Théorème 7.4.1. Soient C un site satisfaisant la condition 7.3.0, F un faisceau abélien sur C.

1) Les suites spectrales (7.4.0.4) définissent des isomorphismes
$$\overset{r}{\check{H}}{}^q\ (C,F) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F), \quad q \leq r+1$$
et un monomorphisme
$$\overset{r}{\check{H}}{}^{r+2}\ (C,F) \longrightarrow H^{r+2}(C^\sim,F).$$
2) On a un isomorphisme de δ-foncteurs : 63
$$\overset{\infty}{\check{H}}{}^q\ (C,F) \xrightarrow{\sim} \check{\check{H}}{}^q\ (C,F) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F) \quad \text{(pour tout } q).$$
3) Soient G un préfaisceau de groupes abéliens et F le faisceau associé. Il existe des isomorphismes de foncteurs :
$$\overset{r}{\check{H}}{}^q\ (C,G) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F), \quad q \leq r-1,$$
et un monomorphisme
$$\overset{r}{\check{H}}{}^r\ (C,G) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F).$$
Lorsque G est un préfaisceau séparé, ce dernier morphisme est un isomorphisme et il existe un monomorphisme :
$$\overset{r}{\check{H}}{}^{r+1}\ (C,G) \longrightarrow H^{r+1}(C^\sim,F).$$
4) On a des isomorphismes :
$$\overset{\infty}{\check{H}}{}^q\ (C,G) \xrightarrow{\sim} \check{\check{H}}{}^q\ (G,G) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F) \quad \text{(tout } q).$$

Preuve. Il suffit de montrer que si N est un préfaisceau abélien dont le faisceau associé est nul, on a $\overset{r}{\check{H}}{}^q\ (C,N) = 0$ pour $q \leq r$ (resp. $\check{\check{H}}{}^q\ (C,N) = 0$ pour tout q) ; ce qui se fait immédiatement en utilisant 3.2.

Remarque 7.4.2. 1) On notera que pour les sites satisfaisants à la condition de 7.3.0, les hyperrecouvrements de type 0 sont les recouvrements ordinaires et les foncteurs $\overset{\infty}{\check{H}}{}^q$ ne sont autres que les foncteurs $\check{H}^q$ introduits en (2.4.5.1).

2) Soit C un site à limites projectives finies représentables tel que pour tout objet X de C et tout famille couvrante $(X_i \to X)$, $i \in I$, il existe un $i_\circ \in I$ tel que $X_{i_\circ} \to X$ soit couvrant. On peut montrer alors que les hyper-recouvrements de type p dont les composants sont représentables sont cofinaux dans $\mathscr{HR}_p$. De même, les hyper-recouvrements $K_\bullet$ tels qu'il existe un entier p tel que $K_\bullet$ soit de type p et tels que les composants de $K_\bullet$ soient représentables, sont cofinaux dans $\mathscr{HR}$. (On peut le démontrer en s'inspirant de 3.5). Ces hyper-recouvrements à 64
composants représentables suffisent donc, dans le cas envisagé, pour calculer la cohomologie des faisceaux associés aux préfaisceaux.

8. Appendice. Limites inductives locales (par P. Deligne)

Le rédacteur recommande au lecteur d'éviter, en principe, de lire cet appendice. Il expose une technique qui permet parfois d'étendre à des topos n'ayant pas assez de points des assertions que l'existence de points rend triviales. Cette technique permet d'obtenir une variante faisceautique de théorème de D. Lazard affirmant que les modules plats sur un anneau sont les limites inductives de modules libres de type fini.

8.1. Catégories localement filtrantes.

8.1.0. Si $\mathscr{B}$ est une catégorie et si $p : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une catégorie sur $\mathscr{B}$, on utilisera les notations suivantes

- Pour $U \in \mathrm{Ob}$, $\mathscr{A}_U$ est la catégorie fibre $p^{-1}(U)$
- Pour $f : U \to V$ dans $\mathscr{B}$ et $\lambda, \mu \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ tels que $p(\lambda) = U$ et $p(\mu) = V$, on pose

$$\mathrm{Hom}_f(\lambda, \mu) = p^{-1}(f), \text{ où } p : \mathrm{Hom}(\lambda, \mu) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, V).$$

Définition 8.1.1. Soit $\mathcal{S}$ un site. On appelle catégorie localement co-filtrante (ou localement filtrante à gauche) sur $\mathcal{S}$ une catégorie $p : \mathscr{L} \to \mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

($\mathscr{L}$0) Quels que soient $f : U \to V$ dans $\mathcal{S}$ et $\mu \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}_V$, il existe $\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}_V$ tel que $\mathrm{Hom}_f(\lambda, \mu) \neq \varnothing$,

($\mathscr{L}$1) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ et la famille finie $(\mathcal{S}_i)$ d'objets de $\mathscr{L}_U$, il existe un recouvrement $f_j : U_j \to U$ de U et des objets $\mu_j \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}_{U_j}$ tels que pour tout i et j, on ait $\mathrm{Hom}_{f_j}(\mu_j, \lambda_i) \neq \varnothing$,

65 ($\mathscr{L}$2) Quelles que soient $f : U \to V$ dans $\mathcal{S}$ et la double flèche $(\phi_0, \phi_1) : \mathcal{S} \rightrightarrows \mu$ au-dessus de f, il existes un recouvrement $f_j : V_j \to V$ de V et des flèches ψ_j de but λ telles que $p(\psi_j) \neq f_j$ et que $\phi_0\psi_j = \phi_1, \psi_j$,

. Cette définition se simplifie lorsque $\mathscr{L}$ est fibrée sur $\mathcal{S}^*$: l'axiome

($\mathscr{L}_*0$) est alors satisfait, et ($\mathscr{L}_1$), ($\mathscr{L}_2$), peuvent s'énoncer :

($\mathscr{L}'1$) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\,S$ et la famille finie λ_i d'objets de $\mathscr{L}_U$, localement sur U, il existe μ s'envoyant dans tous les λ_i.

($\mathscr{L}'2$) Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\,S$, toute double flèche $(\phi_0, \phi_1) : \lambda \rightrightarrows \mu$ dans $\mathscr{L}_U$ peut, localement sur U, être égalisée par une flèche de but λ.

8.1.2. Soient $\mathcal{S}$ un site, $\mathscr{L}$ une catégorie sur $\mathcal{S}$ et e un champ sur $\mathcal{S}$. On désigne par Γe la catégorie des sections globales $\mathscr{H}om^{\mathrm{cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, C)$ de e. Si $\mathcal{S}$ a un objet final S, Γe « n'est autre »que e_S.

Définition 8.1.2.1. La catégorie dans systèmes projectifs locaux d'objets de C, indexés par $\mathscr{L}$ est la catégorie $\mathscr{H}om_{\mathcal{S}}(\mathscr{L}, e)$.

Désignons par c (« système projectif local constant associé ») le foncteur composé

$$\Gamma C = \mathscr{H}om^{\mathrm{cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, C) \hookrightarrow \mathscr{H}om_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, C) \xrightarrow{u \mapsto u \circ p} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathscr{L}, C)$$

Lorsqu'on devra expliciter la dépendance en $\mathscr{L}$, on écrira plutôt $c_{\mathscr{L}}$.

Définition 8.1.3. Le foncteur limite projective locale, noté $\varprojlim_{\lambda \in \mathscr{L}}$, est le foncteur partiellement défini adjoint à droite au foncteur c.

Le foncteur

$$\varprojlim : \mathscr{H}om_{\mathcal{S}}(\mathscr{L}, C) \longrightarrow \Gamma e$$

vérifie donc

$$\operatorname{Hom}(X, \varprojlim_{\lambda\in\mathscr{L}} X_\lambda) \simeq \operatorname{Hom}(c(X), (X_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{L}}).$$

Définition 8.1.4. Un $\mathscr{S}$-foncteur $F : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ entre catégories localement cofiltrantes sur $\mathscr{S}$ est dit cofinal s'il vérifie les deux conditions suivantes :

($C\mathfrak{F}1$) Quels que soient $U \in \operatorname{Ob}\mathscr{S}$ et $\mu \in \operatorname{Ob}\mathscr{M}_U$, il existe un recouvrement $f_j :$ **66**
$U_j \to U$ de U et des objets $\lambda_j \in \operatorname{Ob}\mathscr{L}_{U_j}$ tels que $\operatorname{Hom}_{f_j}(F(\lambda_j), \mu) \neq \varnothing$.

($C\mathfrak{F}2$) Quels que soient $f : U \to V$ dans $\mathscr{S}$ et la double flèche $(\phi_0, \phi_1) : f(\lambda) \rightrightarrows \mu$ au-dessus de f, il existe un recouvrement $f_j : U_j \rightrightarrows U$ de U et des flèches ψ_j de but λ dans $\mathscr{L}$ telles que $p(\psi_j) = f_j$ et que $\phi_0 F(\psi_j) = \phi_1 F(\psi_j)$.

Le composé de deux foncteurs cofinaux est un foncteur cofinal ; les équivalences de catégories localement filtrantes sont cofinales (la démonstration est laissée au lecteur).

Proposition 8.1.5. Soient $F : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ un foncteur cofinal de catégories localement cofiltrantes sur $\mathscr{S}$, e un champ sur $\mathscr{S}$ et $(X_\mu)_{\mu\in\mathscr{M}}$ un système projectif local indexé par $\mathscr{M}$. Alors, le morphisme de foncteurs en X de ΓC dans (ens) :

$$F^* : \operatorname{Hom}(c_{\mathscr{M}}(_X), (X_\mu)_{\mu\in\mathscr{M}}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(c_{\mathscr{L}}(_X), X_{F(\lambda)})_{\lambda\in\mathscr{L}})$$

est un isomorphisme, de sorte que

$$F^* : \varprojlim_{\mathscr{M}} X_\mu \longrightarrow \varprojlim_{\mathscr{L}} X_{F(\lambda)}$$

est un isomorphisme, les deux membres étant simultanément définis ou non définis.

La démonstration utilise le lemme suivant, laissé au lecteur :

Lemme 8.1.6. Si $F : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ est cofinal, alors, quels que soient $f : U \to V$ dans $\mathscr{S}$ et les flèches au-dessus de f $\phi_i : F(\lambda_i') \to \mu$ $(i = 1, 2)$ il existe un recouvrement $f_j : U_j \to U$ de U, des objets $\lambda_j' \in \operatorname{Ob}\mathscr{L}_{U_j}$ est des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & F(\lambda_1) \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
F(\lambda_j') \arrow[ur, dashed, no head] \arrow[dr, dashed, no head] & & \mu \\
 & F(\lambda_2) \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$U_j \xrightarrow{f_j} U \longrightarrow V$$

de projection (f_j, f) dans $\mathscr{S}$. **67**

Quels que soient $U \in \operatorname{Ob}\mathscr{S}$ et $\mu \in \mathscr{M}_U$, il existe par ($C\mathfrak{F}1$) un recouvrement $f_j :$ $U_j \to U$ de U et des flèches $\phi_j : F(\lambda_j) \to \mu$ au-dessus des f_j. Si

$$\psi = (\psi_\lambda) \in \operatorname{Hom}(c_{\mathscr{L}}X, (X_{F(\lambda)})_{\lambda\in\mathscr{L}}) : \psi_\lambda : X|p(\lambda) \longrightarrow X_{F(\lambda)}$$

est image de

$$\phi = (\phi_\mu) \in \operatorname{Hom}(c_{\mathscr{M}}X, (X_\mu)_{\mu\in\mathscr{L}}) : \phi_\mu : X|p(\mu) \longrightarrow X_{F(\mu)},$$

les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & X_{F(\lambda_j)} \arrow[dl, "\psi_{\lambda_j}"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\
X|U_j \arrow[rr, "\phi_\mu|U_j"'] & & X_\mu|U_j
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs, de sorte que les ϕ_μ sont déterminés, localement, par ψ ; puisque e est un champ, on conclut que F^* est injectif. Pour prouver F^* surjectif, partons de ψ et construisons ϕ tel que $\psi = F^*\phi$. La construction précédente fournit les flèches composées :

$$\phi_{\mu,j} : \phi_j \circ \psi_{\lambda j} : X|U_j \longrightarrow X_\mu|U_j.$$

Vérifions que ces flèches se recollent, de sorte qu'il existe $\phi_\mu : X|U \to X_\mu$ tel que $\phi_\mu|U_j = \phi_{\mu,j}$. Soit un diagramme commutatif dans

$$\begin{tikzcd}
 & U_{ij} \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\
U_i \arrow[dr, "f_i"'] & & U_j \arrow[dl, "f_j"] \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

68 Pour vérifier que $\phi_{\mu,n}|U_{ij} = \phi_{\mu,i}|U_{ij}$, il suffit de le faire localement sur U_{ij}, ce qui permet, d'après 8.1.6 et ($\mathscr{L}0$), de se limiter au cas où il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & F(\lambda_{ij}) \arrow[dl, "F(a_{ij})"'] \arrow[dr, "F(a_{ji})"] & \\
F(\lambda_i) \arrow[dr, "\phi_i"'] & & F(\lambda_j) \arrow[dl, "\phi_j"] \\
 & \mu &
\end{tikzcd}$$

au-dessus du précédent. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X_{F(\lambda_{ij})} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right] & \\
X_{F(\lambda_i)} \arrow[dr] & X|U_{ij} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & X_{F(\lambda_j)} \arrow[dl] \\
 & X_\mu &
\end{tikzcd}$$

est alors commutatif, et il existe (ϕ_μ) tel que, quel que soit $\phi : F(\lambda) \to \mu$ au-dessus de $f : V \to U$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_{F(\lambda)} \arrow[dr, "\phi"] & \\ X|V \arrow[ur, "\psi_\lambda"] \arrow[rr, "\phi_\mu|V"'] & & X_\mu|V \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si $\sigma : \mu \to \mu'$ est une flèche de $\mathscr{M}$, on aura $(\sigma|V)(\phi_\mu|V) = (\sigma|V)\phi \cdot \psi_\lambda = (\sigma\phi|V) \cdot \psi_\lambda = \phi_{\mu'}|V$ et dès lors, $\phi = (\phi_\mu)$ est un morphisme de foncteur tel que $\psi = F^*$ comme requis.

Si E est un ensemble ordonné, on désignera encore par E la catégorie, ayant E pour **69**
ensemble d'objets, telle que $\mathrm{Hom}(i, j)$ est réduit à 1 élément ou vide selon que $i \le j$ ou non.

Proposition 8.1.7. Soit $\mathscr{L}$ une catégorie localement cofiltrante sur un site $\mathscr{S}$. Il existe un ensemble ordonné E et un foncteur F de E dans $\mathscr{L}$ tel que

(i) E, regardé comme catégorie sur $\mathscr{S}$ à l'aide de $p^F : E \to \mathscr{S}$, est localement cofiltrante.
(ii) Le foncteur F est cofinal.

Soit $\mathscr{L}'$ la catégorie localement cofiltrante produit de $\mathscr{L}$ est de la catégorie définie par l'ensemble ordonné $\mathbf{Z}$. La projection de $\mathscr{L}'$ dans $\mathscr{L}$ est cofinale, de sorte qu'il suffit de prouver (8.1.7) pour $\mathscr{L}'$

Si X est un ensemble fini de flèches dans $\mathscr{L}'$, on désignera par X° l'ensemble des extrémités des flèches dans X. Soit E l'ensemble des parties finies non vides de $\mathrm{Fl}(\mathscr{L}')$, telles qu'il existe $\mathscr{S}_X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}'$ vérifiant

a) aucune flèche de X, sauf 1_{λ_X}, n'aboutit à λ_X,
b) si $\mu \in X^\circ$, alors $1_\mu \in X$ et $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}_X, \mu) \cap X \neq \varnothing$,
c) Tout diagramme du type

$$\begin{tikzcd} \lambda_X \arrow[r] \arrow[dr] & \mu \arrow[d] \\ & \mu' \end{tikzcd}$$

de flèches de X est commutatif.

On ordonne E par la relation opposée à la relation d'inclusion. Si $X \in E$, et si $\mu \in X^\circ$, il existe une et une seule flèche de λ_X dans μ qui se trouve dans X. Si $X, Y \in E$ et $X \supset Y$, soit $\lambda_{X,Y}$ l'unique flèche dans X de λ_X vers λ_Y. Les fonctions $X \mapsto \lambda_X$ et $(X \supset Y) \mapsto \lambda_{X,Y}$ forment un foncteur de E dans $\mathscr{L}'$.

Lemme 8.1.8. La catégorie E est localement cofiltrante sur $\mathscr{S}$ et le foncteur $\lambda : E \to$ **70**
$\mathscr{L}'$ est cofinal.

Il faut vérifier successivement les axiomes :

(i) axiome ($\mathscr{L}0$) Soit $f : V \to U$ et $X \in E_U$. Il existe $\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}'_V$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_f(\lambda, \lambda_X)$. De plus, on peut choisir λ tel que $\lambda \notin X^\circ$ (ici sert $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \times \mathbf{Z}$). Soit $X' = X \cup \{1_\lambda\} \cup Y$ où

Y est l'ensemble des flèches composées $\lambda \xrightarrow{\phi} \lambda_X \xrightarrow{\psi} \mu$ $(\psi \in X)$. Alors, $X' \in E$, $\lambda_{X'} = \lambda$ et $\mathrm{Hom}(X', X) \neq \varnothing$.

(ii) axiome ($\mathscr{L}1$) Soit X_i une famille finie d'objets de E_U. Il existe un recouvrement $f_j : U_j \to U$, des objets $\lambda_j \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}_{U_j}$ et des flèches $\phi_{ji} \in \mathrm{Hom}_{f_j}(\lambda_j, \lambda_{X_i})$. Si $x \in X_a^\circ \cap X_b^\circ$, il existe pour chaque j un recouvrement $g_{jk} : U_{jk} \to U_j$ et des flèches $\psi_{jk} : \lambda_{jk} \to \lambda_j$ telles que $p(\psi_{jk}) = g_{jk}$ et qui égalisent la double flèche $\lambda_j \rightrightarrows x$, où une flèche appartient à X_a, l'autre à X_b. On peut s'arranger pour que les λ_{jk} n'appartiennent à aucun des X_i°. Remplaçons les $(f_j, \lambda_j, \phi_{ji})$ par les $(f_j g_{jk}, \lambda_{jk}, \phi_{ji}\psi_{jk})$, et répétons cette construction pour tous les x dans une intersection de X_i. On obtient un nouveau système $(f_j, \lambda_j, \phi_{ji})$; posons

$$X_j = \cap_i X_i \cup \{1_{\lambda_j}\} \cup Y_j$$

où Y_j est l'ensemble des flèches composées

$$\lambda_j \xrightarrow{\phi_{ji}} \lambda_{X_i} \xrightarrow{\psi} x \quad (\psi \in X_i).$$

Alors, $X_j \in E_{V_j}$, et ces X_j vérifient ($\mathscr{L}1$).

(iii) axiome ($\mathscr{L}3$) Trivial, faute de doubles flèches non triviales !

(iv) axiome ($C\mathfrak{F}1$) Trivial, car le foncteur λ est surjectif.

((v) axiome ($C\mathfrak{F}2$) Soient $f : U \to V$ et une double flèche $(\phi_0, \phi_1) : \lambda_X \rightrightarrows \lambda$ au-dessus de f. Il existe un recouvrement $f_j : U_j \to U$ de U et des flèches $\psi_j : \lambda_j \to \lambda_X$ telles que $p(\psi_j) = f_j$, $\phi_0, \psi_j = \phi_1\psi_j$ et $\lambda_j \notin X^\circ$. Soit $X_j = X \cup \{1_{\lambda_j}\} \cup Y_j$, où Y_j est l'ensemble des flèches composées

$$\lambda_j \xrightarrow{\psi_j} \lambda_X \xrightarrow{\psi} \mu \quad (\psi \in X).$$

71 Alors, $X_j \in E_{V_j}$, et $F(\lambda_{X_j,X}) = \psi_j$ égalise (ϕ_0, ϕ_1).

. Supposons que $\mathscr{S}$ soit (le site des ouverts non vides de) l'espace topologique réduit à un point. Une catégorie localement cofiltrante sur $\mathscr{S}$ n'est alors autre qu'une catégorie filtrante à gauche (i.e. telle que $\mathscr{S}^\circ$ soit filtrante au sens de I 2.7), les foncteurs cofinaux correspondant aux foncteurs cofinaux de catégories filtrantes à gauche (I 8). La proposition 8.1.7 se reformule

Proposition 8.1.9. Pour toute catégorie cofiltrante $\mathscr{L}$ il existe un ensemble ordonné cofiltrant E et un foncteur cofinal de E dans $\mathscr{L}$.

Dans ce cas particulier, la démonstration de 8.1.7 se réduit essentiellement à la démonstration de (8.1.9) donnée dans I 8.

8.1.10. Soient $\mathscr{T} \to \mathscr{S}$ un morphisme de sites et $p : \mathscr{L} \to \mathscr{S}$ une catégorie localement cofiltrante sur $\mathscr{S}$. Désignons par $\mathscr{L}^*$ la catégorie suivante :

(i) un objet de $\mathscr{L}^*$ est un quadruple (V, U, ϕ, λ) tel qu $V \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{T}$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, q^*U)$ et $\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}_U$.

(ii) une flèche $f : (V, U, \phi, \lambda) \to (V', \phi', U', \lambda')$ est un triple (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $f_2 \in \mathrm{Hom}(U, U')$, $f_3 \in \mathrm{Hom}(\lambda, \lambda')$ et $q^* f_2 \circ \phi = \phi' \circ f_1$, $p(f_3) = f_2$.

Le foncteur $f \mapsto f_1$ fait de $\mathscr{L}^*$ une catégorie sur $\mathscr{T}$.

Lemme 8.1.11. La catégorie $\mathscr{L}^*$ est localement cofiltrante sur $\mathscr{T}$.

L'axiome ($\mathscr{L}0$) est trivial. Vérifions ($\mathscr{L}1$) :

Soit une famille finie $L_i = (V, U_i, \phi_i, \lambda_i)$. Les ϕ_i définissent un morphisme de V dans le faisceau $q^* a \prod U_i = a \prod q^* U_i$, de sorte qu'il existe des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\psi_j"'] & V \arrow[d, "\phi_i"] \\ q^* U_j \arrow[r, "q^*(P_{ij})"'] & q^* U_i \end{tikzcd}$$

tels que les f_j recouvrent V. **72**

Soit λ_{ji} vérifiant $\operatorname{Hom} p_{ij}(\lambda_{ji}, \lambda_i) \neq \varnothing$. D'après ($\mathscr{L}1$), quitte à raffiner U_j (et V_j), on peut prendre $\lambda_{ji} = \lambda_j$ indépendant de i, et les $L_j = (V_j, U_j, \psi_j, \lambda_j)$ vérifient ($\mathscr{L}1$).

Vérifions ($\mathscr{L}2$). Soit $(f_1, f_2) : L^1 \rightrightarrows L^2$, avec $L^i = (V^i, U^i, \phi^i, \lambda^i)$ et $f = (f, g_i, h_i)$. Les ϕ_i définissent un morphisme de V dans le faisceau $q^* a \operatorname{Ker}(U^1 \rightrightarrows U^2) = a \operatorname{Ker}(q^* U1 \rightrightarrows q^* U_2)$, de sorte qu'il existe des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, dash, "\psi_j"'] & V^1 \arrow[r] \arrow[d, dash, "\phi^1"] & V^2 \arrow[d, dash, "\phi^2"] \\ q^* U_j \arrow[r, "p_j"'] & q^* U^1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U^2 \end{tikzcd} \qquad (g_1 p_j = g_2 p_j),$$

tels que les f_j recouvrent V. Soit $\chi_j : \lambda_j \to \lambda^1$ tel que $p(\chi_j) = p_j$. D'après ($\mathscr{L}2$) appliquée aux $(\lambda_1 \chi_j, h_2 \chi_j)$, quitte à raffiner U_j (et V_j), on peut se débrouiller pour que $h, \chi_j = h_2 \chi_j$, et les $L_j = (V_j, U_j, \psi_j, \lambda_j)$ vérifient ($\mathscr{L}_2$).

Proposition 8.1.12. Soit $t^* : \mathscr{S}^* \to \mathscr{S}$ une catégorie localement cofiltrante sur $\mathscr{S}$, et munissons $\mathscr{S}^*$ de la topologie induite par celle de $\mathscr{S}$ à l'aide de t^*. Alors, t^* est une équivalence de sites $t : \mathscr{S} \to \mathscr{S}^*$.

Par construction, $t_x : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \circ t^*$ transforme faisceaux sur $\mathscr{S}$ en faisceaux sur $\mathscr{S}^*$. D'après $\mathscr{L}0$, et $\mathscr{L}1$ appliqué à la famille vide, tout objet « assez petit » de $\mathscr{S}$ est dans l'image de t^* (i.e. l'image de t^* est un crible couvrant dans $\mathscr{S}$). donc par le « lemme de comparaison » (III 4) l'inclusion dans $\mathscr{S}$ de sa sous-catégorie pleine définie par $t^*(\operatorname{Ob} \mathscr{S}^*)$ est une équivalence de sites, ce qui permet de supposer t^* surjectif sur les objets.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur $\mathscr{S}^*$.

(i) Soient $f_j : U_j \to U$ un recouvrement dans $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}^1$ et $\mathscr{S}^2$ dans $\mathscr{S}^* U$ et $f_j^i \in \operatorname{Hom}_{f_j}(\mu_j, \lambda^i)$ pour $i = 1, 2$. Alors, $\mathscr{F}(\mathscr{S}^1)$ et $\mathscr{F}(\mathscr{S}^2)$ ont même image dans $\prod_j \mathscr{F}(\mu_j)$.

Soit en effet $x = (x_j)$ dans l'image de $\mathscr{F}(\mathscr{S}^1)$. Pour que x soit dans celle de $\mathscr{F}(\lambda^2)$, il suffit que pour tout diagramme commutatif **73**

$$\begin{tikzcd} \mu \arrow[r] \arrow[d] & \mu_j \arrow[d] \\ \mu_k \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

x_j et x_k aient même image dans $\mathscr{F}(\mu)$. Puisque $\mathscr{F}$ est un faisceau, il suffit de vérifier cela après avoir remplacé μ par les différents objets d'un de ses recouvrements ; d'après ($\mathscr{L}2$), ceci permet de supposer les diagrammes analogues au précédent, avec $\mathcal{S}^2$ remplacé par $\mathcal{S}^1$, également commutatifs, auquel cas l'assertion est évidente.

(ii) Soient $f : U \to V$ dans $\mathcal{S}^*$, $\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}^*_U$ et $\mu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}^*_V$. Il existe alors un recouvrement $f_j : U_j \to U$, un objet $\mu' \in \mathrm{Ob}\ ^*_U$ et des flèches

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{S} & \\
\lambda_j \arrow[ur, "\phi_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & \mu \\
& \mu \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

sur

$$U_j \xrightarrow{f_j} U \xrightarrow{f} V.$$

D'après (i), il existe une et une seule flèche $\overline{f}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(\mu) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathscr{F}(\lambda) \arrow[d, "\phi_j"] \\
\mathscr{F}(\mu') \arrow[r, "\psi_j"'] & \mathscr{F}(\mathcal{S}_j)
\end{tikzcd}$$

Le flèche $\overline{f}$ ne change pas quand on remplace (f_j) par un recouvrement plus fin donné par $f_k : U_k \to U_{j(k)}$, qu'on remplace λ_j par $\mathcal{S}_k$, muni de $\phi_k \in$
74 $\mathrm{Hom}_{f_k}(\lambda_k, \lambda_{j(k)})$, et qu'on remplace $\phi_j(\psi_j)$ par $\phi_{j(k)} \circ \phi_k(\psi_{j(k)} \circ \phi_k)$.

On laisse qu lecteur le soin d'en déduire que $\overline{f}$ ne dépend que de f.

(iii) Prouvons que $\overline{f}$ est fonctoriel en f. Soient donc

$$W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{g} U$$

dans $\mathcal{S}$ et λ°, μ°, ν° dans $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_U$, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_V$ et $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_W$ respectivement. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\nu^0 & & & \mu^0 & & \lambda^0 \\
& \nu^1 \arrow[urr] & & & \mu^1 \arrow[ur] & \\
& & \nu^2 \arrow[urr] & & & \\
\nu_{jk} \arrow[uuu, "e^0_{jk}"] \arrow[uur, "e^1_{jk}"] \arrow[urr, "e^2_{jk}"'] \arrow[rrr] & & & \mu_j \arrow[uuu, "f^0_j"] \arrow[uur, "f^1_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

tel que

a) $t^*(\nu^i)$, $t^*(\mu^i)$, $t^*(e^i_{jk})$, $t^*(f^i_j)$ ne dépendent pas de i,

b) i étant fixé, les e^i_{jk} recouvrent W et les f^i_j recouvrent V.

On construit tout d'abord μ^1, ν^1 et ν^2 par ($\mathscr{L}0$), et les μ_j comme en (ii). Soit W'_{jk} un recouvrement de W s'envoyant dans le recouvrement $V_j = t^*(\mu_j)$ comme requis par le diagramme. Raffinant W'_{jk} et appliquant ($\mathscr{L}0$) et ($\mathscr{L}1$), on obtient un diagramme non nécessairement commutatif, du type requis, vérifiant a) et b).

Raffinant encore et appliquant ($\mathscr{L}2$), on le rend commutatif.

Reste alors à contempler le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(\lambda^0) \arrow[r, "\overline{g}"] & \mathscr{F}(\mu^0) \arrow[rr, "\overline{h}"] \arrow[dr] & & \mathscr{F}(\nu^0) \arrow[ddd] \\
& & \mathscr{F}(\nu^1) \arrow[ddr] & \\
\mathscr{F}(\mu^1) \arrow[r] & \prod \mathscr{F}(\mu_j) \arrow[drr] & & \\
\mathscr{F}(\nu^2) \arrow[rrr] & & & \prod \mathscr{F}(\nu_{jk})
\end{tikzcd}$$

(iv) Il est clair que $\overline{g}$ est fonctoriel en $\mathscr{F}$: tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{S}^*$ est donc image 75
directe par t d'un préfaisceau $\mathscr{F}_\circ$ (uniquement déterminé) sur $\mathscr{S}$, et tout morphisme de faisceau $f : \mathscr{F} \to \mathfrak{g}$ est image d'un et d'un seul morphisme de préfaisceau $f_\circ : \mathscr{F}_\circ \to \mathfrak{g}_\circ$.

Il en résulte déjà que t_* est pleinement fidèle ; il reste à prouver que $\mathscr{F}_\circ$ est un faisceau. Si $f_j : U_j \to U$ est un recouvrement, ce recouvrement est image d'un recouvrement dans $\mathscr{S}^*$, de sorte que $\mathscr{F}_\circ(U)$ s'injecte dans $\prod_j \mathscr{F}_\circ(U_j)$. Si des $x_j \in \mathscr{F}_\circ(U_j)$ se recollent, alors, à fortiori, ils se recollent dans $\mathscr{S}^*$ donc proviennent d'un élément de $\mathscr{F}_\circ(U)$. Ceci achève la démonstration de (8.1.12).

. Soient $q : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$, $p : \mathscr{L} \to \mathscr{S}$ et $\mathscr{L}^*$ comme en (8.1.10) et e un champ sur $\mathscr{T}$. Le champ q_*e sur $\mathscr{S}$ est le champ « défini »par $(q_*e)_U = e_q x_U$.

Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{L}}$ est un système projectif local indexé par $\mathscr{L}$ et à valeur dans e : $(X_L)_{L\in L^x}$ par la formule

$$X_L = \phi^* X_\lambda \text{ pour } L = (V, U, \phi, \lambda).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que :

Proposition 8.1.13.1. Avec les notations précédentes, on a

$$\varprojlim_{\lambda\in\mathscr{L}} X_\lambda \ \varprojlim_{L\in\mathscr{L}^*} X_L,$$

les deux membres étant simultanément définis ou non.

Soient $\mathscr{S}$ un site et $p^* : \mathscr{S}^* \to \mathscr{S}$ une catégorie localement filtrante sur $\mathscr{S}$. Si e est un champ sur $\mathscr{S}$, alors p_*e est un champ sur $\mathscr{S}^*$ (8.1.13.0) ; de plus, le foncteur identique : $\mathscr{S}^* \to \mathscr{S}^*$ est une catégorie localement filtrante sur $\mathscr{S}^*$, muni de la topologie induite, et tout système inductif local (X_λ) indexé par λ^* définit un système inductif local, indexé par $\mathscr{S}^*$, sur $\mathscr{S}^*$.

On vérifie aisément :

Proposition 8.1.14. Avec les notation précédentes, on a 76

$$\varprojlim_{\lambda\in\mathscr{S}^*/\mathscr{S}} X_\lambda = \varprojlim_{\lambda\in\mathscr{S}^*/\mathscr{S}^*} X_\lambda,$$

les deux membres étant simultanément définis ou non..

8.2. Limites inductives locales dans les catégories de faisceaux.

8.2.0. Soit $p : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ un morphisme de sites. Soit e le champ sur $\mathcal{S}$ suivant

(i) Un objet de e est un couple $(U, \mathcal{F})$ d'un objet de $\mathcal{S}$ et d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur p^*U.

(ii) Une flèche $f : (U, \mathcal{F}) \to (V, g)$ est un couple formé d'une flèche $f_\circ : U \to V$ et d'un morphisme de $\mathcal{F}/U$-faisceaux :

$$f_1 : p^*(f_0)^*g \longrightarrow \mathcal{F}$$

(iii) Le foncteur de e dans $\mathcal{S}$ est donné par $f \mapsto f_0$.

On prendra garde que e_U est la catégorie opposée de la catégorie des faisceaux sur p^*U.

Soit $\mathcal{L}$ une catégorie localement cofiltrante (à gauche) sur s.

Définition 8.2.1. Avec les notations précédentes, la catégorie des systèmes inductifs locaux, indexés par $\mathcal{L}$, de faisceaux sur $\mathcal{T}$, est la catégorie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L}, e)^\circ$.

Le foncteur « limite projective » de 8.1.3 s'appelle ici foncteur « limite inductive locale ». C'est un foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L}, e)^\circ$ dans $(\Gamma e)^\circ = (\mathcal{T})^\sim$.

Théorème 8.2.2. Le foncteur « limite inductive locale » de la catégorie des systèmes inductifs de faisceaux sur $\mathcal{T}$, indexés par $\mathcal{L}$, dans la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{T}$, est partout défini, commute aux limites projectives finies et commute aux limites inductives quelconques.

77 Les propositions 8.1.13, 8.1.14 et 8.1.12 permettent de se ramener au cas où $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{L}$. Un système inductif local est alors la donnée, pour chaque $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, d'un faisceau $\mathcal{F}_U$ sur s/U et, pour chaque flèche $f : V \to U$ dans $\mathcal{S}$ d'une flèche, fonctorielle en f, de $f^*\mathcal{F}_U$ dans $\mathcal{F}_V$.

Pour de tels systèmes inductifs, les $\varinjlim$ se calculent comme suit :

Lemme 8.2.3. Soit $U \to \mathcal{F}_U$ une section de la catégorie des préfaisceaux sur les objets de $\mathcal{S}$. On a

$$a(U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F}_U)) \simeq \varprojlim_U a\mathcal{F}_U.$$

Par définition, le second membre représente le foncteur qui, à chaque faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$, associe l'ensemble des systèmes cohérents de flèches $\phi_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{F}|U$. À son tour, une flèche ϕ_U est un système cohérent de flèches ϕ_g, une pour chaque $g : V \to U$, $\phi_g : \mathcal{F}_U(V) \to \mathcal{F}(V)$. Appliquons 8.1.11 au foncteur identique de $\mathcal{S}$, obtenant ainsi $\mathcal{S}^*$ localement filtrante sur $\mathcal{S}$. On a vu que

$$\varinjlim_{g \in \mathcal{S}^*} \mathcal{F}_U(V_g)^\sim \simeq \varinjlim_U a\mathcal{F}_U,$$

où V_g est la source de g et $^\sim$ le foncteur « faisceau constant engendré ». Le foncteur $U \mapsto 1_U$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}^*$ est cofinal, d'où encore par 8.1.5

$$\varinjlim_U \mathcal{F}_U(U)^\sim \simeq \varinjlim_U a\mathcal{F}_U.$$

Revenant aux définitions, on trouve enfin

$$\varinjlim_U \mathcal{F}_U(U)^\sim = a(U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F}_U)).$$

Ceci montre que dans le cas auquel on s'est réduit, le foncteur $\varinjlim$ est partout défini, et qu'il se calcule comme composé du foncteur « faisceau engendré par un préfaisceau » et du foncteur $(\mathcal{F}_U) \mapsto (U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F}_U))$. Ces deux foncteurs commutent aux limites projectives finies, et le foncteur $\varinjlim$ commute de plus aux limites inductives quelconques de par sa définition comme foncteur adjoint.

Le lemme 8.2.3 fournit un procédé systématique pour démontrer des propriétés du foncteur limite inductive locale à partir des propriétés analogues du foncteur « faisceau associé à un préfaisceau ». On trouve ainsi : 78

Proposition 8.2.4. Soit $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{L}$ comme précédemment, $\mathscr{A}_\lambda$ un système inductif local de faisceaux d'anneaux sur $\mathscr{T}$, $\mathscr{L}_\lambda$ (resp. $\mathscr{M}_\lambda$) un système inductif local de faisceaux de modules à droite (resp. à gauche) sur $\mathscr{A}_\lambda$, tous trois indexés par $\mathscr{L}$.

On a

$$\varinjlim(\mathscr{L}_\lambda \otimes_{\mathscr{A}_\lambda} \mathscr{M}_\lambda) = \varinjlim \mathscr{L}_\lambda \underset{\varinjlim \mathscr{A}_\lambda}{\otimes} \varinjlim \mathscr{M}_\lambda.$$

(Se ramener au cas $\mathscr{T} = \mathscr{S} = \mathscr{L}$, et noter que les deux membres coïncident avec le faisceau engendré par le préfaisceau de

$$\mathscr{L}_U(U) \underset{\mathscr{A}_U(U)}{\otimes} \mathscr{M}_U(U)).$$

Proposition 8.2.5. Soit $\mathscr{T}_1 \xrightarrow{q} \mathscr{T}_2 \to \mathscr{S}$ deux morphismes de sites, et (F_λ) un système inductif local de faisceau sur $\mathscr{T}_2$ indexé par une catégorie localement cofiltrante $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{S}$. On a

$$q^* \varinjlim_{\lambda\in\mathscr{L}} F_\lambda \simeq \varinjlim_{\lambda\in\mathscr{L}} q^* F_\lambda.$$

Ceci résulte aussitôt de ce que q^* admet un adjoint à droite q_*.

Soient $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ deux sites dans lesquels les $\varprojlim$ finies sont représentables, soit $p : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ un morphisme de sites tel que $p^* : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ commute aux $\varprojlim$ finies, et $\mathscr{L}$ la catégorie localement cofiltrante sur $\mathscr{T}$ ayant pour objets les triples (V, U, ϕ) où $V \in \operatorname{Ob}\mathscr{T}$, $U \in \operatorname{Ob}\mathscr{S}$ et $\phi \in \operatorname{Hom}(V, p^*U)$. On l'obtient en appliquant 8.1.11 à $1_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

Proposition 8.2.6. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{T}$, on a

$$\mathscr{F} = \varinjlim_{\lambda\in\mathscr{L}} \phi^*\phi_*\mathscr{F}$$

où, par abus de notation, ϕ désigne le morphisme induit par p de $\mathscr{T}/V$ dans s/V.

Soit ϕ' le foncteur image réciproque au sens des préfaisceaux ; de 8.2.3, on tire 79

$$\varinjlim_{\lambda\in\mathscr{L}} \phi'^*\phi_*\mathscr{F} = \varinjlim_{\lambda\in\mathscr{L}} a\phi'\phi_*\mathscr{F} = \varinjlim_{\lambda\in\mathscr{L}} \mathscr{F}(V)^\sim = \varinjlim_{V} \mathscr{F}(V)^\sim = \mathscr{F}.$$

Proposition 8.2.7. Soient $p : T \to S$ un morphisme de topos, $\mathscr{O}_S$ un faisceau d'anneaux sur S et $\mathscr{O}_T$ son image réciproque sur T. Pour qu'un $\mathscr{O}_T$-Modules à droite $\mathscr{M}$ soit plat sur $\mathscr{O}_T$, il faut et il suffit que le foncteur

$$\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{M} \underset{\mathscr{O}_T}{\otimes} p^*\mathscr{N} \tag{8.2.7.1}$$

de la catégorie des $\mathscr{O}_S$-Modules à gauche dans celle des faisceaux abéliens sur T soit exact.

L'assertion « il faut »est triviale ; supposons donc le foncteur (8.2.7.1) exact, et prouvons que $\mathscr{M}$ est plat.

On peut supposer p défini par un morphisme de sites $p : \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ vérifiant les hypothèses faites en 2.6. Soit $V \in \operatorname{Ob}\mathscr{T}$, $U \in \operatorname{Ob}\mathscr{S}$ et $\phi : V \to p^*U$. On désigne encore par ϕ le morphisme de sites induit : $\phi : \mathscr{T}/V \to \mathscr{S}/U$.

Lemme 8.2.8. *Le foncteur* $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{M}|V \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \phi^*\mathcal{N}$, *de la catégorie des* $\mathcal{O}_S|U$*-Modules sur* s/U *dans celle des* $\mathcal{O}_T|V$*-Modules sur* $\mathcal{T}/V$, *est exact.*

On se ramène à prendre $V = p^*U$. Soient j et j' les « morphismes d'inclusion » : $j : \mathcal{S}/U \to \mathcal{S}$ et $j' : \mathcal{T}/p^*U \to \mathcal{T}$. On a :

$$j'_!(\mathcal{M}|V \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \phi^*\mathcal{N}) = \mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} p^* j_!\mathcal{N},$$

d'où 8.2.8 puisque $j_!$ et $j'_!$ sont exacts et fidèles.

Soit alors Q un $\mathcal{O}_T$-Modules. On a (8.2.6)

$$Q = \varinjlim_{\phi : V \to P^*U} \phi^*\phi_* Q|V$$

de sorte que (8.2.4)

$$\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} Q = \varinjlim_{\phi : V \to p^*U} \mathcal{M}|V \underset{\mathcal{O}_{S_V}}{\otimes} \phi^*\phi_* Q|V.$$

80 D'après 8.2.8, les foncteurs $Q \mapsto \mathcal{M}|V \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \phi^*\phi_* Q|V$ sont exacts à gauche, de sorte que $\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} Q$ est exact à gauche en Q, donc exact.

Corollaire 8.2.9. *Soit* $f : (T, \mathcal{O}_T) \to (S, \mathcal{O}_S)$ *un morphisme de topos annelés. Alors, l'image réciproque par* f *d'un faisceau de modules (à droite) plats est un faisceau de modules plats.*

Factorisant f par $(T, f^*\mathcal{O}_S)$, on se ramène au cas $\mathcal{O}_T = f^*\mathcal{O}_S$. Soit alors $\mathcal{M}$ un faisceau de modules plats sur S. D'après 8.2.7, pour vérifier que $f^*\mathcal{M}$ est plat, il suffit de vérifier l'exactitude du foncteur

$$\mathcal{N} \mapsto f^*\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} f^*\mathcal{N} = f^*(\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{N})$$

d'où l'assertion, puisque f^* est exact.

Lemme 8.2.10. *Soit* $(S, \mathcal{O}_S)$ *un topos annelé,* $\mathcal{F}$ *un faisceau de modules à gauche localement de présentation finis,* $\mathcal{G}$ *un faisceau de bimodules et* $\mathcal{H}$ *un faisceau plat de modules à gauche. Alors, la flèche canonique*

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{H})$$

est un isomorphisme.

La question est locale sur S, ce qui permet de supposer que $\mathcal{F}$ admet une présentation finie

$$\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

La première ligne du diagramme suivant est exacte, cas $\mathcal{H}$ est plat :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "s"] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \arrow[d, "s"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}_2, \mathcal{G} \otimes \mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

d'où l'assertion. Faisant $\mathcal{G} = \mathcal{A}$, on déduit de 8.2.10 :

81 Lemme 8.2.11. *Tout morphisme d'un faisceau de modules localement de présentation finie dans un faisceau de modules plat se factorise, localement sur* S, *par un faisceau libre* $\mathcal{O}_S^n (n \in \mathbf{N})$.

Théorème 8.2.12. (D. Lazard). Pour qu'un faisceau de modules $\mathscr{M}$ sur un site annelé $(S, \mathscr{O}_S)$ soit plat, il faut et il suffit qu'il soit limite inductive locale de modules libres de type fini.

Le « il suffit »résulte de 8.2.2, 8.2.4.

Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, soit $\mathscr{L}_0(U)$ (resp. $\mathscr{L}_1(U)$) la catégorie des faisceaux de modules libres de type fini (resp. de présentation finie) sur U, munis d'une application linéaire dans $\mathscr{M}|U$. Pour toute flèche $f : V \to U$ dans $\mathscr{S}$, soit f^* le foncteur de restriction de $\mathscr{L}_i(U)$ dans $\mathscr{L}_i(V)$. Les foncteurs définissent une catégorie $\mathscr{L}_i$, fibrée sur $\mathscr{S}$, dont les fibres sont les catégories opposées des catégories $\mathscr{L}_i(U)$.

Le lecteur vérifiera que la catégorie $\mathscr{L}_1$ est localement filtrante sur $\mathscr{S}$ et que

$$\mathscr{M} = \varinjlim_{(M,f)\in\mathscr{L}_1} M$$

Si $\mathscr{M}$ est plat, l'inclusion de $\mathscr{L}0$ dans $\mathscr{L}1$ est pleinement fidèle et, d'après 8.2.11, vérifie $(C\mathfrak{F}1)$ de 8.1.4. Elle vérifie dès lors automatiquement $(e\mathfrak{F}2)$, et $\mathscr{L}0$ est localement filtrante. D'après 8.1.5, on a

$$\mathscr{M} = \varinjlim_{(M,f)\in\mathscr{L}_2} M,$$

d'où l'assertion 8.2.12.

Bibliographie

82

[1] M. Artin et B. Mazur : Etale Homotopy , Lecture Notes *n*°100, Springer Verlag.
[2] Blum et Herrera : Article à paraître aux Inventiones.
[3] H. Cartan et S. Eilenberg : Homological Algebra.
[4] P. Deligne : Théorie de Hodge (Publication de 1'I.H.E.S).
[5] P. Gabriel et N. Popescu : CRAS.
[6] P. Gabriel et M. Zisman : Homotopie Theory and Calculus of Fraction, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.
[7] R. Godement : Théorie des faisceaux. Herman.
[8] J. Giraud : Méthode de la descente. Mémoire de la S.M.F.
[9] J. Giraud : Algèbre homologique non commutative (à paraître).
[10] A. Grothendieck : On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties, I. H. E. S *n*° 29.
[11] A. Grothendieck : Sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku, Math. Journal.
[12] R. Hartshorne : Residues and Duality. Lecture notes *n*° 20, Springer Verlag.
[13] L. Illusie : SGA 6 I.
[14] S. Lubkin : On a Conjecture of A. Weil. Am. J. of Math. p.456, 1967.
[15] G. Segal : Classifying spaces and Spectral Sequences, I.H.E.S. *n*° 34.
[16] Séminaire Cartan 1957-1957.
[17] D.Sullivan : Geometric Topology, part I, Notes miméographiées. M.I.T. 1970.

EXPOSÉ Vbis

Techniques de descente cohomologique

B. Saint-Donat

Introduction

1. Soit X un espace topologique et $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X, que l'on suppose soit ouvert, soit fermé et localement fini. Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau abélien sur X, la suite spectrale de Leray : **84**

(1.1)
$$\check{H}^p\ (\mathscr{U}, \mathscr{H}^q(\mathfrak{F})) \Rightarrow H^*(X, \mathfrak{F})$$

définie par $\mathscr{U}$ [[5] II (5.2.4) et (5.4.1)] peut se décrire de la façon suivante :

Le recouvrement $\mathscr{U}$ définit une résolution « Cěchiste » $\mathscr{C}^*(\mathscr{U}, \mathfrak{F})$, fonctorielle en $\mathfrak{F}$ (ibid (5.2.1)). D'autre part, on dispose, pour tout $\mathfrak{F}$ d'une résolution « flasque canonique », $C^*(\mathfrak{F})$, fonctorielle en $\mathfrak{F}$ (ibid (4.3)). Avec ces notations, la suite spectrale (1.1) s'obtient, dans le cas où $\mathscr{U}$ est ouvert, à partir du complexe double

(1.2)
$$\Gamma(X, \mathscr{C}^*(\mathscr{U}, C^*(\mathfrak{F}))).$$

Dans le cas où $\mathscr{U}$ est fermé et localement fini, on considère le complexe double

(1.3)
$$\Gamma(X, C^*(\mathscr{C}^*(\mathscr{U}, \mathfrak{F}))).$$

2. Cherchons une description unifiée de ces doubles complexes. Désignons par X_0 l' espace topologique somme disjointe des U_i et par X_n $(n \geq 0)$ le produit fibré itéré $(n+1)^{\text{ième}}$ de X_0 avec lui-même au-dessus de X

(2.1)
$$X_n = \coprod_{i_0\ldots i_n\in I} U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n} = \coprod_{\sigma\in\mathrm{Hom}([n],I)} \bigcap_0^n U_{\sigma(i)}.$$

Les X_n forment un système simplicial d'espaces topologiques, et si j_n désigne la projection de X_n sur X, on a

(2.2)
$$\mathscr{C}^n(\mathscr{U}, \mathfrak{F}) = j_{n*}j_n^*(\mathfrak{F}).$$

Notons que la formation des résolutions flasques canoniques commute à la restriction à un ouvert et à l'image directe par une immersion fermée. Dès lors : **85**

(a) si $\mathscr{U}$ est ouvert

(2.3)
$$\mathscr{C}^q(\mathscr{U}, C^n(\mathfrak{F})) = j_{q*}j_q^*C^p(\mathfrak{F}) = j_{q*}C^p(j_q^*\mathfrak{F})$$

(b) si $\mathscr{U}$ est fermé et localement fini

(2.4)
$$C^p(\mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathfrak{F})) = C^p(j_{q*}j_q^*\mathfrak{F}) = j_{q*}C^p(j_q^*\mathfrak{F}).$$

Ainsi, pour obtenir une description unifiée de (1.2) et (1.3), on voit qu'il suffit de prendre la résolution « flasque canonique » de $j_q^*(\mathfrak{F})$ sur X_q pour tout q, puis d'appliquer le foncteur j_{q*} à cette résolution.

3. La description précédente garde un sens pour tout système simplicial d'espaces topologiques au-dessus de X :

$$\begin{aligned} \Delta^0 &\longrightarrow \mathrm{Top}/X \\ [n] &\longrightarrow X_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

non nécessairement de la forme (2.1). Toutefois le double complexe, coaugmenté par $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} \longrightarrow (j_{q*}C^p(j_q^*(\mathfrak{F})))_{p,q} \tag{3.2}$$

ne définira pas en général une résolution de $\mathfrak{F}$.

Ce travail est consacré à la recherche de conditions suffisantes pour que (3.2) définisse une résolution de $\mathfrak{F}$. Dans ce cas, la suite spectrale (1.1) se généralise en une suite spectrale

$$\check{H}^p\ (H^q(X_p, j_p^*(\mathfrak{F}))) \longrightarrow H^{p+q}(X, \mathfrak{F}) \tag{3.3}$$

dite « suite spectrale de descente ».

86 Dans le cas de « coefficients constant », des suites spectrales analogues ont été obtenues par Segal (cf. [16]), par d'autres méthodes et pour d'autres « théories cohomologiques », telles que la K-théorie. Segal se place dans la catégorie des CW-complexes : il utilise un foncteur « réalisation géométrique » qui, à un complexe semi-simplicial d'espaces topologiques, associe un nouvel espace topologique ; ce nouvel espace doit se comparer au topos associé à un topos simplicial [cf. (1.2.12)].

4. Au paragraphe 5, nous illustrons les critères obtenus en construisant pour tout espace analytique X sur $\mathbf{C}$, via la résolution des singularités, un système simplicial d'espaces analytiques non singuliers au-dessus de X,

$$[n] \longrightarrow X_n$$

tel que (3.2) définisse une résolution de $\mathfrak{F}$. Si l'on prend pour $\mathfrak{F}$ le faisceau constant $\mathbf{C}$, on obtient en particulier une suite spectrale

$$H^q(X_p, \mathbf{C}) \longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{C}) \tag{4.1}$$

qui exprime la cohomologie complexe de X en terme de la cohomologie complexe d'espaces analytiques non singuliers. De plus, si X est projectif, on peut supposer que tous les X_p sont projectifs : c'est là l'ingrédient essentiel qui permet d'obtenir une espèce de « théorie de Hodge » pour X (cf. [2]).

5. Les constructions qui précédent s'étendent telles quelles lorsqu'on remplace le faisceau $\mathfrak{F}$ par un complexe borné inférieurement de faisceaux. Elles conduisent à des techniques de « localisation » dans les catégories dérivées :

On sait que pour X_0 donné par (2.1), la flèche

$$j_0^* : D^b(X) \longrightarrow D^b(X_0)$$

n'est pas fidèle en général ; on montrera qu'une donnée plus précise que celle
87 de $j_0^*(K^\cdot)$ (pour $K^\cdot \in D^+(X)$), faisant intervenir les X_n, permet parfois de reconstituer le complexe $K^\cdot$.

Les énoncés obtenus seront utilisés dans l'appendice de l'exposé XVII pour étendre la définition du foncteur $Rf_!$ (f morphisme séparé de type fini entre schémas) au cas où f n'est pas supposé compactifiable.

Dans cette application, il n'est pas possible de ne considérer que des espaces topologiques remplacés ici par des sites étales de schémas. D'autre part, pour mener à bien les démonstrations, il sera nécessaire de considérer aussi bien des systèmes simpliciaux d'espaces que des systèmes multi-simpliciaux. Ceci explique, justifie ou excuse le degré d'hypergénéralité dont on partira.

1. Préliminaires

1.1. Notations.

1.1.1. Dans tout ce qui suit, $\mathscr{U}$ est univers tel que $\mathbf{Z} \in \mathscr{U}$: tous les topos considérés seront des *$\mathscr{U}$-topos*.

Soient T et T' deux topos : un morphisme $\varphi : T \to T'$ consiste en la donnée d'un couple de foncteurs $\varphi_* : T \to T'$ et $\varphi^* : T' \to T$, muni d'une adjonction

$$\mathrm{Hom}_{T'}(., \varphi_* .) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(\varphi^* ., .),$$

tel que φ^* soit exact à gauche (i.e. préserve les limites projectives finies).

Soient $(T, \mathscr{O}_T)$ et $(T', \mathscr{O}_{T'})$ deux topos annelés : un morphisme de $(T, \mathscr{O}_T)$ dans $(T', \mathscr{O}_{T'})$ est un couple (φ, θ) où $\varphi : T \to T'$ est un morphisme de topos et $\theta : \mathscr{O}_{T'} \to \varphi_*(\mathscr{O}_T)$ est un morphisme d'anneaux.

1.1.2. Nous ferons un usage constant du langage des catégories fibrées tel qu'il est exposé dans [SGA 1 VI] ; le lecteur pourra aussi se reporter à [4]. Fixons simplement quelques notations : si $E \to B$ est un foncteur fibrant (resp. cofibrant), pour un morphisme $m : i \to j$ dans B, nous noterons $m^* : E_j \to E_i$ (resp. $m_* : E_i \to E_j$) le foncteur « image réciproque » (resp. « image directe ») qui lui est associé ; chacun de **88**
ces foncteurs est défini à un unique isomorphisme fonctoriel près. Si $\varphi : E \to E'$ est un B-foncteur, pour tout objet i de B, nous noterons $\varphi_i : E_i \to E'_i$ le foncteur restriction de φ à E_i.

1.1.3. Enfin, nous désignerons par Δ la catégorie suivante : les objets de Δ sont les ensembles ordonnés $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ et les morphismes de Δ sont toutes les applications croissantes (au sens large). Δ^+ (resp. Δ^-) désignera la catégorie dont les objets sont ceux de Δ et dont les flèches sont les monomorphismes (resp. les épimorphismes) de Δ. Nous utiliserons librement et au fur et à mesure des besoins les notations classiques introduites à propos de Δ [cf. [3] II 2].

1.2. D-topos.

Définition 1.2.1. Soient D une catégorie et $E \to D$ un foncteur fibrant et cofibrant. Nous dirons que E est bifibrée en topos au-dessus de D ou que E est un D-topos si les conditions suivantes sont réalisées :

(a) Pour tout objet i de D la catégorie fibre E_i est un topos.
(b) Pour tout morphisme $m : i \to j$ dans D, il existe un morphisme de topos $f : E_j \to E_i$ tel que $f_* = m^*$ et $f^* = m_*$.

Remarque. La condition (b) peut encore s'exprimer, compte tenu de (a), en disant que le foncteur m_* est exact à gauche[14].

[14] N.D.E. : Il faut prendre garde que dans une catégorie fibrée, $m_\star$ est adjoint à gauche de $m^\star$ et donc est exact à droite tautologiquement, cf. [SGA 1 VI.10], ce qui explique les formules $f_* = m^*$ et $f^* = m_*$.

Lorsque $D = \Delta$ (resp. $\Delta \times \Delta$) on parlera de topos simplicial (resp. simplicial double) pour désigner un Δ-topos (resp. un $\Delta \times \Delta$-topos).

Dans la pratique, nous rencontrerons des D-topos grâce aux considérations suivantes :

89 Définition 1.2.2. Soit $\mathscr{E}$ une catégorie fibrée et cofibrée au-dessus de D. Nous dirons que $\mathscr{E}$ est bifibrée en duaux de topos au-dessus de D si $\mathscr{E}^\circ$ est un D°-topos.

Remarque 1.2.3. Explicitement, $\mathscr{E}$ est bifibrée en duaux de topos au-dessus de D si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

(a) Pour tout objet i de D, la catégorie duale $\mathscr{E}_i{}^\circ$ de la catégorie fibre $\mathscr{E}_i$ est un topos.
(b) Pour tout morphisme $m : i \to j$ dans D, le foncteur m^* est exact à gauche[15]

1.2.4. Le lecteur trouvera au paragraphe 4 des exemples de catégories bifibrées en duaux de topos.

1.2.5. Soient $\mathscr{E} \to B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de B et $X : D^\circ \to B$ un foncteur. Alors on laisse au lecteur le soin de vérifier que $(D^\circ \times_B \mathscr{E})^\circ$ est un D-topos que nous noterons $\overline{X}$.

1.2.6. Nous dirons souvent qu'un foncteur $X : D^\circ \to B$ est un D-objet de B et nous désignerons par X_i l'image par ce foncteur d'un objet i de D ; les D-objets de B forment une catégorie notée $D^\circ B$. Si S est un objet de B, un D-objet de B/S s'appellera un D-objet de B augmenté vers S. La donnée d'un D-objet de B augmenté vers S est trivialement équivalente à la donnée d'un morphisme fonctoriel $X \to C_S^D$ où X est un D-objet de B et C_S^D le D-objet de B constant de valeur S.

Lorsque $D = \Delta$, on parlera d'objet simplicial (resp. objet simplicial augmenté).

Nous utiliserons aussi des objets simpliciaux doubles (en faisant $D = \Delta \times \Delta$).

90 1.2.7. Supposons maintenant que la catégorie B possède des produits fibrés finis.

Soit $f : R \to S$ une flèche dans B : le bifoncteur

$$([n], X) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}([n], \mathrm{Hom}_S(X, R))$$

de $\Delta^\circ \times (B/S)^\circ$ dans Ens définit un foncteur :

$$[n] \rightsquigarrow X_{[n]} = X_n$$

en prenant pour X_n un représentant du foncteur

$$Z \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}([n], \mathrm{Hom}_S(Z, R))$$

$(X_n \simeq \overbrace{R \times_S \times R \times \ldots \times_S R}^{n+1 \text{ fois}})$

Nous désignerons par $[R|_f S]$ ou $[R|S]$ l'objet semi-simplicial augmenté vers S ainsi construit.

Enfin, si X et X' sont deux objets semi-simpliciaux de B (ou de B/S) et

$$u : X \longrightarrow X'$$

un morphisme fonctoriel nous introduirons pour des raisons techniques l'objet

$$[X|_u X']$$

[15]N.D.E. : Cf. note précédente. Autrement dit, la famille de foncteurs $((m_*)^\circ, (m^*)^\circ)$ définit un système compatible de morphismes de topos $\mathscr{E}_i^\circ \to \mathscr{E}_j^\circ$.

calculé dans la catégorie $\Delta^\circ B$. Celui-là s'interprète comme un objet simplicial double[16] de B que nous noterons alors $[[X|_u X']]$: On dispose en effet d'un isomorphisme canonique de catégories :

$$\Delta^\circ(\Delta^\circ B) \xrightarrow{\sim} (\Delta \times \Delta)^\circ B.$$

Nous allons revenir maintenant à la notion générale de D-topos.

1.2.8. Soient E un D-topos : nous désignerons par $\Gamma(E)$ la catégorie $\mathrm{Hom}_D(D, E)$. Soit $f : D' \to D$ un foncteur : la catégorie $D' \times_D E$ est un D'-topos et, par composition avec f, on obtient un foncteur

$$f^* : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(D' \times_D E).$$

Dans le cas où D' est réduite à un objet i de D (avec pour seul morphisme l'identité **91**
de i) et pour f l'inclusion canonique notée e_i, on peut prendre pour $D' \times_D E$ la catégorie fibre E_i et e_i^* s'identifie alors au foncteur « évaluation en i ».

Proposition 1.2.9. Si D' est une $\mathscr{U}$-petite catégorie, le foncteur f^* possède un adjoint à droite et à gauche (notés respectivement f_* et $f_!$).

Cela résulte d'une légère généralisation du lemme de Kan [III 1.1], dont nous ferons un usage constant.

Lemme 1.2.10. Soient I, J et A trois catégories au-dessus d'une même catégorie B : on suppose que I est $\mathscr{U}$-petite et que A est fibrée et cofibrée au-dessus de B. On se donne un B-foncteur $f : I \to J$ et l'on désigne par f^* le foncteur

$$\mathrm{Hom}_B(J, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(I, A)$$

défini par composition avec f. Alors si dans chaque fibre de A au-dessus de B, les $\mathscr{U}$-limites inductives (resp. projectives) existent, f^* possède un adjoint à gauche (resp. à droite).

Preuve. Nous n'indiquerons que la démonstration de l'existence du foncteur adjoint à gauche, la partie resp. du lemme s'en déduisant par dualité. Nous utiliserons le fait suivant, dont la vérification est laissée au lecteur :

Lemme 1.2.10.1. Soient A une catégorie bifibrée au-dessus d'une catégorie B, b un objet de B et $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un foncteur d'une catégorie Λ dans la fibre A_b ; quels que soient G dans $A_{b'}$, et $u : b' \to b$ (resp. $u : b \to b'$) dans B, on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_u(G, \varprojlim F_\lambda) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_u(G, F_\lambda)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_u(\varinjlim F_\lambda, G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_u(F_\lambda, G)$)
chaque fois que le premier membre est défini.

Ceci étant, soit $I \amalg_f J$ la catégorie sur B définie par : **92**

$$\mathrm{ob}(I \amalg_f J) = \mathrm{ob}(I) \amalg \mathrm{ob}(J)$$

$$\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_I(x, y) & \text{si } x, y, \in \mathrm{ob}(I) \\ \mathrm{Hom}_J(x, y) & \text{si } x, y, \in \mathrm{ob}(J) \\ \mathrm{Hom}_J(f(x), y) & \text{si } x \in \mathrm{ob}(I) \text{ et } y \in \mathrm{ob}(J) \\ \varnothing & \text{si } x \in \mathrm{ob}(J) \text{ et } y \in \mathrm{ob}(I). \end{cases}$$

[16] N.D.E. : En clair, avec l'ordre habituel sur les indices, on a

$$[[X|_u X']]_{(n,m)} = \overbrace{X_m \times_{X'_m} X_m \times \ldots \times_{X'_m} X_m}^{n+1 \text{ fois}}$$

avec les fonctorialités déduites de celles sur les facteurs.

La catégorie $\mathrm{Hom}_B(I \amalg_f J, A)$ est équivalente à la catégorie des triples formés d'un B-foncteur F de I dans A, d'une B-foncteur G de J dans A et d'un morphisme φ de B-foncteur de F dans $G \circ f = f(G)$.

Pour tout objet j de J, on désigne par I/j la catégorie des objets de I « placés par f au-dessus de j » : les objets de I/j sont les couples (i, α) où i est un objet de I et $\alpha : i \to j$ une flèche dans $I \amalg_f J/j$, les morphismes de I/j étant ceux de $I \amalg_f J/j$. Si p_I et p_J sont les projections de I et J sur B, et si (i, α) est un objet de I/j, on désignera par $\alpha_* : A_{p_I(i)} \to A_{p_J(j)}$ le foncteur $p_J(\alpha)_*$.

Se donner un B-foncteur de $I \amalg_f J$ dans A revient encore à se donner $F \in \mathrm{Hom}_B(I, A)$, $G \in \mathrm{Hom}_B(J, A)$ et un morphisme fonctoriel en j

$$\psi_j : \varinjlim_{(i,\alpha)\in I/j} \alpha_*(F(i)) \longrightarrow G(j).$$

(La fonctorialité en j du membre de gauche résulte de (1.2.10.1)). L'adjoint à gauche de f^* est donc donné par la formule :

$$f_!(F)(j) = \varinjlim_{(i,\alpha)\in I/j} \alpha_*(F(i)).$$

93 Corollaire 1.2.11. Soient E un D-topos et i un objet de D ; le foncteur e_i^* admet un adjoint à gauche (resp. à droite défini par) :

$$e_{i!}(a)(j) = \coprod_{\alpha\in\mathrm{Hom}(i,j)} \alpha_*(a) \left(\text{resp. } e_{i*}(a)(j) = \prod_{\alpha\in\mathrm{Hom}(j,i)} \alpha^*(a)\right)$$

où a est un objet de E au-dessus de i.

Proposition 1.2.12. Soient D une $\mathscr{U}$-petite catégorie et E un D-topos : alors la catégorie $\Gamma(E)$ est un $\mathscr{U}$-topos.

On vérifie « fibre par fibre », à l'aide de (1.2.10.1), que la catégorie $\Gamma(E)$ possède les propriétés suivantes :

a) Les limites projectives finies sont représentables.
b) Les sommes directes indexées par un élément de $\mathscr{U}$ sont représentables. Elles sont disjointes et universelles.
c) Les relations d'équivalence sont effectives universelles.

Il reste à montrer que $\Gamma(E)$ possède un système de générateurs indexé par un élément de $\mathscr{U}$: or, si pour tout objet i de D, $(G_{i\lambda})_{\lambda\in\wedge_i}$ est un système de générateurs de E_i (où $\wedge_i$ est un ensemble $\mathscr{U}$-petit), la famille $(e_{i!}(G_{i\lambda}))_{i,\lambda}$ est un système de générateurs de $\Gamma(E)$.

1.2.13. Nous allons introduire maintenant la notion de morphisme entre D-topos. Précisons tout d'abord que si F et F' sont deux catégories au-dessus d'une même catégorie B et si $T : F \to F'$ est un B-foncteur, un B-adjoint à gauche à T sera un foncteur $S : F' \to F$ adjoint à gauche à T tel que les morphismes canoniques $1 \to T^\circ S$ et $S \circ T \to 1$ soient des B-morphismes de foncteurs. Sous ces conditions, on vérifie trivialement que T est cartésien et que S est cocartésien.

94 Définition 1.2.14. Soient E et E' deux D-topos : un morphisme de E dans E' est un couple de D-foncteurs $\Phi_* : E \to E'$ et $\Phi^* : E' \to E$, muni d'une D-adjonction $\mathrm{Hom}(\Phi^*.,.) \overset{\xi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} (.,\Phi_*{}^\cdot)$, tel que pour tout objet i de D, le couple (Φ_{*_i}, Φ_i^*), muni de l'adjonction induite par ξ, soit un morphisme de topos de E_i dans E_i'.

Proposition 1.2.15. Soient E et E' deux D-topos et $(\Phi_*, \Phi^*) : E \to E'$ un morphisme. On suppose que D est une $\mathscr{U}$-petite catégorie, alors le couple $(\Gamma(\Phi_*), \Gamma(\Phi^*)) : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ est un morphisme de topos.

Découle trivialement de la définition précédente.

Le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur, permet de construire des morphismes de D-topos.

Lemme 1.2.16. Soient E et E' deux catégories bifibrées au-dessus d'une même catégorie D, et Φ un D-foncteur cartésien de E dans E' tel que, pour tout objet i de D, $\Phi_i : E_i \to E'_i$ possède un adjoint à gauche. Alors, le choix pour tout i, d'une adjoint à gauche à ϕ_i détermine canoniquement un D-foncteur $\Psi : E' \to E$, D-adjoint à gauche à Φ.

Scholie 1.2.17. Sous les conditions de (1.2.16), supposons que E et E' soient deux D-topos et que pour tout i objet de D, tout adjoint à gauche du foncteur Φ_i soit exact à gauche : alors, si $\psi : E' \to E$ est un D-adjoint à gauche à Φ, le couple $(\Phi, \psi) : E \to E'$ est un morphisme de D-topos.

Soient maintenant $\mathscr{E} \to B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de B, X et X' deux D-objet de B et $\alpha : X \to X'$ un morphisme fonctoriel. Alors le choix de clivages normalisés pour $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^\circ$ détermine canoniquement un morphisme $(\alpha_*, \alpha^*) : \overline{X} \to \overline{X}'$ de D-topos tel que, pour tout objet i de $D(\alpha_{*_i}, \alpha_i^*) : \overline{X}_i \to \overline{X}'_i$ soit égal à 95
$(\alpha_{i*}^\circ, \alpha_i^{*^\circ})$, où $\alpha_i : X_i \to X'_i$ est la flèche de B donnée par α. Pour deux choix différents de clivages pour $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^\circ$, il existe un unique D-isomorphisme entre les morphismes ainsi obtenus. (Pour la vérification de ces faits, le lecteur pourra se reporter à ([4] - (1.17)).

1.3. D-topos annelé.

Définition 1.3.1. Un D-topos annelé est un couple (E, A) où E est un D-topos et A un anneau de $\Gamma(E)$.

On vérifie alors que pour tout objet i de D, A_i est un anneau du topos E_i et que pour tout morphisme $m : i \to j$ la flèche canonique $A_i \to m^*(A_j)$ est un homomorphisme d'anneaux.

Définition 1.3.2. Soient (E, A) et (E', A') deux D-topos annelés : un morphisme de (E, A) dans (E', A') est un couple (Φ, θ) où $\Phi : E \to E'$ est un morphisme de D-topos et $\theta : A' \to \Gamma(\Phi_*)(A)$ est un homomorphisme d'anneaux.

Remarque 1.3.3. Un morphisme $\Phi : (E, A) \to (E', A')$ de D-topos annelés induit un morphisme $(\Gamma(\Phi), \theta) : (\Gamma(E), A) \to (\Gamma(E), A')$ de $\mathscr{U}$-topos annelés lorsque D est une $\mathscr{U}$-petite catégorie (cf. 1.2.15).

1.3.4. Soit $\mathscr{E} \to B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de B et $\mathscr{O}$ un anneau de $\Gamma(\mathscr{E}^\circ) = \mathrm{Hom}_{B^\circ}(B^\circ, \mathscr{E}^\circ)$. Si $X : D^\circ \to B$ est un D-objet de B, le D-topos $\overline{X}$ (cf. (1.2.5)) est naturellement annelé par $(\mathscr{O}.X^\circ) : D \to \mathscr{E}$ et l'on désignera par $(\overline{X}, \mathscr{O})$ le D-topos annelé ainsi construit. Si $\alpha : X \to X'$ est un morphisme fonctoriel, le morphisme $(\alpha_*, \alpha^*) : \overline{X} \to \overline{X}'$ (cf. 1.2.17) induit canoniquement un morphisme $(\overline{X}, \mathscr{O}) \to (\overline{X}', \mathscr{O})$ de D-topos annelés encore noté α.

1.3.5. Un D-topos annelé (E, A) définit canoniquement une catégorie $\mathrm{Mod}(E, A)$ bifibrée en catégorie abéliennes au-dessus de D dont la fibre en un objet i de D est 96
la catégorie $\mathrm{Mod}(E_i, A_i)$ des modules sur le topos annelé (E_i, A_i). Avec ces notations, la catégorie des modules de $\Gamma(E)$ sur A, notée $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$ s'identifie à la catégorie $\mathrm{Hom}_D(D, \mathrm{Mod}(E, A))$.

1.3.6. Soit $\varphi = (\Phi, \theta) : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de D-topos annelés. Il définit deux foncteurs $\varphi_* : \underline{\mathrm{Mod}}(E, A) \to \underline{\mathrm{Mod}}(E', A')$ et $\varphi^* : \underline{\mathrm{Mod}}(E', A') \to \mathrm{Mod}(E, A)$ entre les catégories de modules correspondantes :

- Soit M un objet de $\mathrm{Mod}(E, A)$ au-dessus d'un objet i de D : $\Phi_*(M)$ est un module sur $\Phi_*(A_i)$ et, grâce au morphisme $\theta_i : A'_i \to \Phi_*(A_i)$, on en déduit un module sur A'_i noté $\varphi_*(M)$. Ce foncteur φ_* sera appelé le foncteur image directe par le morphisme φ.
- Soit M' un objet de $\mathrm{Mod}(E', A')$ au-dessus d'un objet i de D : $\Phi^*(M')$ est un module sur $\Phi^*(A'_i)$ et $\varphi^*(M') = \Phi^*(M') \otimes_{\Phi^*(A'_i)} A_i$ est canoniquement muni d'une structure de module sur A_i. Au moyen de (1.2.16), on définit ainsi un foncteur φ^*, adjoint à gauche à φ_*, et appelé foncteur image réciproque par le morphisme φ.

. Nous dirons que φ est plat si le foncteur $\Gamma(\varphi^*)$ est exact.

Proposition 1.3.7. Soient $f : D' \to D$ un foncteur et (E, A) un D-topos annelé. Alors le foncteur canonique

$$f^* : \mathrm{Mod}(\Gamma(E), A) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Gamma(E \times_D D'), A \circ f)$$

possède un adjoint à droite et à gauche si D' est une $\mathscr{U}$-petite catégorie. En particulier, il est exact.

Cela résulte immédiatement de (1.2.10) et de l'identification $\mathrm{Hom}_D(D, \mathrm{Mod}(E, A)) \simeq \mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$.

97 Conformément aux notations générales, nous noterons $f_!$ (resp. f_*) l'adjoint à gauche (resp. à droite) de f^*.

1.3.8. Les considérations qui suivent nous fournissent un procédé de calcul commode pour les foncteurs dérivés du type

$$R\Gamma(\varphi_*) : D^+(\Gamma(E), A) \longrightarrow D^+(\Gamma(E'), A'),$$

où $\varphi : (E, A) \to (E', A')$ est un morphisme de D-topos annelé (cf. (1.3.6)). [Si $(S, \mathscr{O}_S)$ est un topos annelé, nous notons $D^+(S, \mathscr{O}_S)$ la catégorie dérivée bornée inférieurement[17] de la catégorie des $\mathscr{O}_S$-modules de S].

1.3.9. Ce calcul formel pourra d'ailleurs s'appliquer à d'autres contextes tels que la « descente en cohomologie ℓ-adique » (cf. SGA 5).

Proposition 1.3.10. Soit D une $\mathscr{U}$-petite catégorie. Si (E, A) est un D-topos annelé, on désigne par $I_{(E,A)}$ l'ensemble des objets de $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$ isomorphe à un objet de la forme $\prod_{i \in \mathrm{ob}(D)} e_{i*}(Q_i)$, où, pour tout objet i de D, Q_i est totalement acyclique (cf. V 4.1)[17] ; $I_{(E,A)}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout objet F de $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$ et tout objet i de D, $e_i^*(F)$ est totalement acyclique.

(ii) Tout objet de $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$ s'injecte dans un objet de $I_{(E,A)}$.

(iii) $I_{(E,A)}$ est stable par sommes directes finies.

[17] N.D.E. : Si $f : (S, \mathscr{O}_S) \to (T, \mathscr{O}_T)$ est un morphisme plat de topos annelés, on note simplement f^* (et non $L^+(f^*)$) le foncteur dérivé

$$f^* : D^+(S, \mathscr{O}_S) \to D^+(T, \mathscr{O}_T)$$

comme dans la version initiale.

[17] « Flasque » dans la terminologie de V.

(iv) Pour tout morphisme $\varphi : (E, A) \to (E', A')$ de D-topos annelés, le foncteur $\Gamma(\varphi_*)$ transforme tout complexe acyclique de $C^+(\Gamma(E), A)$, formé d'objets de $I_{(E,A)}$, en un complexe acyclique formé d'objets de $I_{(E',A')}$.

Démonstration

(i) Compte tenu de l'expression explicite de e_{i^*} (cf. (1.2.1.1)), il suffit de montrer lemme suivant :

LEMME 1.3.10.1. Soient $(S, \mathscr{O}_S)$ un topos annelé et $(F_t)_{t\in T}$ une famille de $\mathscr{O}_S$-modules totalement acycliques indexée par un ensemble T $\mathscr{U}$-petit. Alors $\prod_{t\in T} F_t$ est totalement acyclique. 98

Soit X un objet de S : il existe une suite spectrale

$$H^p(X, \prod_{t\in T}^{(q)} F_t) \longrightarrow \prod_{t\in T} H^{p+q}(X, F_t) \tag{1.3.10.2}$$

où $\prod_{t\in T}^{(q)}$ désigne le q-ième dérivé du foncteur « produit indexé par T ». Comme $\prod_{t\in T}^{(q)} F_t$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \to \prod_{t\in T} H^q(U, F_t)$, (1.3.10.2) dégénère et on obtient des isomorphismes

$$H^n(X, \prod_{t\in T} F_t) \xrightarrow{\sim} \prod_{t\in T} H^n(X, F_t) \tag{1.3.10.3}$$

d'où finalement $H^n(X, \prod_{t\in T} F_t) = 0$ pour tout $n > 0$.

(ii) Soit F un objet de $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$; on choisit pour tout i un monomorphisme $F_i \to Q_i$, où Q_i est totalement acyclique dans $\mathrm{Mod}(E_i, A_i)$: $e_{i*}(F_i) \to e_{i*}(Q_i)$ est alors un monomorphisme (puisque e_{i*} possède un adjoint à gauche), et la flèche canonique :

$$F \longrightarrow \prod_{i\in \mathrm{Ob}(D)} e_{i*}(F_i) \longrightarrow \prod_{i\in \mathrm{Ob}(D)} e_{i*}(Q_i) \tag{1.3.10.4}$$

est encore un monomorphisme, comme on le vérifie trivialement.

(iii) Démonstration laissée au lecteur.

(iv) On laisse aussi au lecteur le soin de vérifier que $\Gamma(\varphi_*)$ transforme un objet de $I_{(E,A)}$ en un objet de $I_{(E',A')}$. Ce point établi, il suffit, compte tenu de (i), de vérifier le lemme suivant :

LEMME 1.3.10.5. Si $0 \to F \to G \to H \to 0$ est une suite exacte courte dans $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$, avec $F \in I_{(E,A)}$ et $G \in I_{(E,A)}$, la suite 99

$$0 \longrightarrow \Gamma(\varphi_*)(F)) \longrightarrow \Gamma((\varphi_*)(G)) \longrightarrow \Gamma(\varphi_*)(H)) \longrightarrow 0$$

est exacte dans $\mathrm{Mod}(\Gamma(E'), A')$.

Il suffit de remarquer que $e_i^*(H)$ est acyclique pour tout objet i de D et que le calcul de $\Gamma(\varphi_*)$ se fait fibre par fibre, ce qui achève la démonstration de (1.3.10).

COROLLAIRE 1.3.11. Soit $\varphi : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de D-topos annelés. On peut calculer le foncteur $R\Gamma(\varphi_*)$ au moyen de résolutions formées d'objets de $I_{(E,A)}$.

Soit $L \subset K^+(\Gamma(E), A)$ la sous-catégorie pleine des complexes fermés d'objets de $I_{(E,A)}$: L est une sous-catégorie triangulée en vertu de ((1.3.10), (ii)) et on peut lui appliquer le théorème (5.1) de [[15] - Chap.1].

Corollaire 1.3.12. Soit $\varphi : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de D-topos annelés ; pour tout objet i de D on désigne par $\varphi_i : (E_i, A_i) \to (E'_i, A'_i)$ le morphisme de D-topos annelé induit par φ au-dessus de i. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} D^+(\Gamma(E), A) \arrow[r, "e_i^*"] \arrow[d, "R\Gamma(\varphi_*)"'] & D^+(E_i, A_i) \arrow[d, "R\varphi_{i*}"] \\ D^+(\Gamma(E'), A') \arrow[r, "e_i^*"'] & D^+(E'_i, A'_i) \end{tikzcd}$$

est essentiellement commutatif.

On dispose d'un morphisme

$$e_i^* \circ R\Gamma(\varphi_*) \longrightarrow R\varphi_{i*} \circ e_i^*$$

dont on vérifie que i est un isomorphisme, grâce à (1.3.10).

100 Remarque 1.3.13. Désignons par $\mathscr{A}_{(E,A)}$ l'ensemble des objets F de $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$ tels que $e_i^*(F)$ soit totalement acyclique pour tout objet i de D. Il résulte de la démonstration de (1.3.10) que l'on peut calculer $R\Gamma(\varphi_*)$ au moyen de résolutions formés d'objets de $\mathscr{A}_{(E,A)}$; i est ce que l'on fait en particulier dans l'introduction en utilisant la « résolution flasque canonique »[17]. D'après [(1.3.10)(i)], on a $I_{(E,A)} \subset \mathscr{A}_{(E,A)}$, mais nous utiliserons explicitement $I_{(E,A)}$ dans le paragraphe 2.

2. La méthode de la descente cohomologique

Dans ce numéro, D est une catégorie $\mathscr{U}$-petite.

2.1. Généralités. Notations.

2.1.1. Soit $(S, \mathscr{O}_S)$ un topos annelé. La catégorie $S \times D$, muni de la projection canonique $S \times D \to D$, est un D-topos ; de plus la section de valeur constante $\mathscr{O}_S$ définit un D-topos annelé $(S \times D, \mathscr{O}_S)$ appelé D-topos annelé constant de valeur $(S, \mathscr{O}_S)$. Avec ces notations, la catégorie $\mathrm{Mod}(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S)$ s'identifie à la catégorie des foncteurs covariants de D dans $\mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S)$.

On définit un foncteur exact :

$$\epsilon^* : \mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S)$$

en associant à tout module F sur S le foncteur constant de valeur F. Le foncteur ϵ^* possède un adjoint à droite ϵ_* qui associe à tout foncteur $H : D \to \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_S)$ sa limite projective, le morphisme d'adjonction $F \to \epsilon_* \epsilon^*(F)$ étant celui qui envoie F dans la limite projective du foncteur constant de valeur F ; ainsi ϵ^* est pleinement fidèle si et seulement si D est connexe.

101 Définition 2.1.2. Soit (E, A) un D-topos annelé ; une augmentation de (E, A) est un morphisme (de D-topos annelés) de (E, A) dans un D-topos annelé constant. Un D-topos annelé muni d'une augmentation sera appelé un D-topos annelé augmenté.

[17] cf. exposé XVII pour la généralisation de cette notion.

2.1.3. Soit $\mathscr{E} \to B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos et $\mathscr{O}$ un anneau de $\Gamma(\mathscr{E}) = \mathrm{Hom}_{B^\circ}(B^\circ, \mathscr{E}^\circ)$. Soit S un objet de B ; un foncteur $D^\circ \to B/S$, c'est-à-dire un morphisme fonctoriel $X \xrightarrow{\theta} C_S^D$, où X est un foncteur $D^\circ \to B$ (cf. (1.2.6)), induit une augmentation :

$$\theta : (\overline{X}, \mathscr{O}) \longrightarrow (\mathscr{E}_S^\circ \times D, \mathscr{O}_S) \qquad \text{(cf. (1.3.4)).}$$

désignerons par la même lettre que le morphisme fonctoriel qui lui donne naissance.

2.2. La descente cohomologique.

2.2.1. Soit $\theta : (E, A) \to (S \times D, \mathscr{O}_S)$ un D-topos annelé augmenté, on pose, avec les notations de (1.3.6) et (2.1.1),

$$\overline{\theta}^* = \Gamma(\theta^*) \circ \epsilon^* : \mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$$

et $\overline{\theta}_* = \epsilon_* \circ \Gamma(\theta_*) : \mathrm{Mod}(\Gamma(E), A) \to \mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S)$.

L'image de $\overline{\theta}^*$ se trouve dans la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\Gamma(E), A)$ formée des sections cocartésiennes de $\Gamma(D, \mathrm{Mod}(E, A))$: nous noterons $\Gamma^{\mathrm{cocart}}(D, \mathrm{Mod}(E, A))$ cette dernière catégorie[18]

Définition 2.2.2. On dit que θ est une augmentation de descente effective si

$$\overline{\theta}^* = \Gamma(\theta^*) \circ \epsilon^* : \mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{cocart}}(D, \mathrm{Mod}(E, A))$$

est une équivalence de catégories.

2.2.3. Avec les notations de (2.2.1), supposons que θ soit plat, de sorte que $\overline{\theta}^*$ est exact et passe trivialement aux catégories dérivées : on note encore $\overline{\theta}^*$ le foncteur ainsi obtenu. Avec ces notations : **102**

Lemme 2.2.3.1. Il existe deux morphismes fonctoriels

$$\alpha : \mathrm{id}_{D^+(S,\mathscr{O}_S)} \longrightarrow R\overline{\theta}_* \circ \overline{\theta}^* \text{ et } \beta : \overline{\theta}^* \circ R\overline{\theta}_* \longrightarrow \mathrm{id}_{D^+(\Gamma(E),A)}$$

mettant ces deux foncteurs en adjonction.

(cf. [17] (3.3)).

Définition 2.2.4. On dit que θ est une augmentation de 1-descente cohomologique si

1°) θ est plat
2°) $\overline{\theta}^* : D^+(S, \mathscr{O}_S) \to D^+(\Gamma(E), A)$ est pleinement fidèle.

Remarque 2.2.5. La condition 2°) la définition précédente peut aussi s'exprimer en disant que le morphisme $\alpha : \mathrm{id}_{D^+(S,\mathscr{O}_S)} \to R\overline{\theta}_* \circ \overline{\theta}^*$ dans (2.2.3.1) est un isomorphisme. C'est en pratique ce que l'on démontre et ce qui est utile.

[18]N.D.E. : Traduisons : un D-topos annelé augmenté est la donnée d'un système compatible de morphismes de S-topos

$$(m^*, m_*) : E_j \to E_i$$

où $m \in \mathrm{Hom}_D(i, j)$. La catégorie des sections cocartésiennes est la catégorie des données de descente dont les objets sont les familles $F_i \in \mathrm{Ob}(E_i)$ munis de cocycles d'isomorphismes

$$F_j \xrightarrow{\sim} m^* F_i.$$

Le foncteur qui à tout objet F sur S associe le foncteur constant de valeur F est l'image inverse d'un morphisme de topos

$$\epsilon : \Gamma(S \times D) \to S$$

induisant le morphisme de topos annelé de 2.1.3. Le couple $(\overline{\theta}_*, \overline{\theta}^*)$ est alors simplement induit par la composition de morphismes de topos $\overline{\theta} = \epsilon \circ \Gamma(\theta) : \Gamma(E) \to S$ (cf. 1.2.15).

Définition 2.2.6. On dit que θ est une augmentation de 2-descente cohomologique (ou de descente cohomologique effective) si θ est à la fois une augmentation de descente effective et une augmentation de 1-descente cohomologique.

La terminologie précédente est justifiée par le résultat suivant :

Proposition 2.2.7. Soit θ une augmentation de descente cohomologique effective. Alors, l'image essentielle de $\overline{\theta}^*$ est la sous-catégorie pleine de $D^+(\Gamma(E), A)$ formée des complexes $F^\bullet$ tels que pour tout i, $H^i(F^\bullet)$ soit une section cocartésienne de $\mathrm{Mod}(E, A)$.

Nous dirons, pour abréger, qu'un complexe $F^\bullet$ vérifiant les conditions précédentes est une donnée de descente cohomologique.

Démonstration. Il est clair que si $K^\bullet \in D^+(S, \mathcal{O}_S)$, alors $\overline{\theta}^*(K^\bullet)$ est une donnée de descente cohomologique : il suffit donc de montrer que pour toute donnée de descente cohomologique $F^\bullet$, le morphisme canonique

$$\beta(F^\bullet) : \overline{\theta}^* \circ R\overline{\theta}_*(F^\bullet) \longrightarrow F^\bullet$$

103 est un isomorphisme dans $D^+(\Gamma(E), A)$.

a) Cas où $F^\bullet$ est borné : on raisonne par récurrence sur la longueur ℓ de l'intervalle des entiers i où $H^i(F^\bullet) \neq 0$:
   - pour $\ell \leq 1$ l'assertion est vraie parce que θ est de descente effective.
   - supposons $\ell > 1$ et soit n le plus grand entier tel que $H^n(F^\bullet) \neq 0$: on dispose d'un triangle distingué[18]

$$\begin{tikzcd} & H^n(F^\bullet)[-n] \arrow[dl] & \\ F'^\bullet \arrow[rr] & & F^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

   tel que l'hypothèse de récurrence s'applique à $F'^\bullet$; $\beta(H^n(F^\bullet)[-n])$ et $\beta(F'^\bullet)$ étant des isomorphismes, il en est de même de $\beta(F^\bullet)$.

b) Cas général : désignons par $\tau_{\leq}(F^\bullet)$ le complexe

$$\ldots F^{n-1} \longrightarrow F^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots,$$

(cf. [15] (7.1)), de sorte que l'on dispose pour tout n d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overline{\theta}^* \circ R\overline{\theta}_*(\tau_{\leq n}(F^\bullet)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \tau_{\leq n}(F^\bullet) \arrow[d] \\ \overline{\theta}^* \circ R\overline{\theta}_*(F^\bullet) \arrow[r] & F^\bullet \end{tikzcd}$$

et il suffit de voir que le morphisme

$$R\overline{\theta}_*(\tau_{\leq n}(F^\bullet)) \longrightarrow R\overline{\theta}_*(F^\bullet)$$

104 induit un isomorphisme sur les H^i pour $i \leq n$. Or, on dispose d'un triangle :

[18] pour tout complexe $K^\bullet$, $K^\bullet[-n]$ désigne le complexe $T^{-n}(K^\bullet)$, où T est le foncteur translation.

$$\begin{tikzcd}
& F''^{\bullet} \arrow[dl] & \\
\tau_{\leq n}(F^{\bullet}) \arrow[rr] & & F^{\bullet} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

avec $H^i(F''^{\bullet}) = 0$ pour $i \leq n$. On en déduit alors que $H^i(R\overline{\theta}_*(F''^{\bullet})) = 0$ pour $i \leq n$, puis que $H^i(R\overline{\theta}_*(\tau_{\leq n}(F^{\bullet}))) \to H^i(R\overline{\theta}_*(F^{\bullet}))$ est un isomorphisme pour $i \leq n$, ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant exposer une méthode de calcul explicite de

$$R\overline{\theta}_* = R\epsilon_* \circ R\Gamma(\theta)_*$$

fort utile dans la démonstration de certains critères de descente cohomologique, ainsi que dans l'exploitation de la dite notion.

2.3. Un procédé de calcul pour $R\epsilon_*$. Nous commencerons par deux sorites.

2.3.1. Soient D une $\mathscr{U}$-petite catégorie et Ab la catégorie des groupes abéliens appartenant à $\mathscr{U}$. On désigne par r_D le foncteur $D \to (\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab}))^{\circ}$ défini par la relation

$$r_D(i)(j) = \mathbf{Z}^{\mathrm{Hom}(i,j)}$$

pour tout couple (i, j) d'objets de D. On construit alors, pour tout couple (i, X) formé d'un objet de D et d'un objet de $\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab})$ un isomorphisme canonique et fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}(r_D(i), X) \xrightarrow{\sim} X(i)$$

. Soient A une catégorie additive (cf. Tôhoku) et F un foncteur $D \to A$; on définit un foncteur $\overline{F} : (\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab}))^{\circ} \to \mathrm{Hom}(A^{\circ}, \mathrm{Ens})$ par la relation

$$\overline{F}(X)(a) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(D,\mathrm{Ab})}(X, \mathrm{Hom}_A(a, F(.)))$$

de sorte que le diagramme suivant, où h_A désigne le foncteur canonique : 105

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "r_D"] \arrow[d, "F"'] & (\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab}))^{\circ} \arrow[d, "\overline{F}"] \\
A \arrow[r, "h_A"'] & \mathrm{Hom}(A^{\circ}, \mathrm{Ens})
\end{tikzcd}$$

soit essentiellement commutatif.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\overline{F}$ transforme les sommes directes finies de $\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab})$ en produits et que, si l'on désigne par $\mathbf{Z}$ le foncteur constant $D \to \mathrm{Ab}$ de valeur $\mathbf{Z}$, on a $\overline{F}(\mathbf{Z}) = \varprojlim F$.

Enfin la correspondance $F \rightsquigarrow \overline{F}$ définit un foncteur covariant

$$\mathrm{Hom}(D, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}((\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab}))^{\circ}, \mathrm{Hom}(A^{\circ}, \mathrm{Ens})).$$

. On désigne par $\mathrm{Add}(D)$ la sous-catégorie pleine de $(\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab}))^{\circ}$ définie par les objets de la forme $r_D(i)$, où i est un objet de D, et leurs sommes directes finies. La catégorie $\mathrm{Add}(D)$ est additive et le foncteur $r_D : D \to \mathrm{Add}(D)$ vérifie la propriété universelle suivante :

. Pour tout catégorie additive A, le foncteur $G \to G \circ r_D$ induit une équivalence de la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Add}(D), A)$ formée par les foncteurs additifs sur la catégorie $\mathrm{Hom}(D, A)$.

La catégorie $\mathrm{Add}(D)$, définie à équivalence près par (2.3.1.3) s'appellera la catégorie additive engendrée par D.

2.3.2. Soient A une catégorie abélienne et $k^{\cdot\cdot}$ un complexe double que nous consi-
106 dérons comme un objet de $C^+(C^+(A))$, le premier indice correspondant au premier signe C^+ : on désigne par $(K^{\cdot\cdot})_s$ le complexe simples associé (cf. Tôhoku (2.4), dont nous conserverons les notations). On définit ainsi un foncteur

$$(\quad)_s : C^+(C^+(A)) \longrightarrow C^+(A) \tag{2.3.2.1}$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier le lemme suivant :

Lemme 2.3.2.2. Le foncteur $(\quad)_s$ définit un foncteur triangulé :

$$K^+(C^+(A)) \longrightarrow K^+(A)$$

qui préserve les quasi-isomorphismes ; il définit donc un foncteur triangulé :

$$D^+(C^+(A)) \longrightarrow D^+(A),$$

encore noté $(\quad)_s$.

Remarque. On a le même résultat pour le foncteur $(\quad)_s : C(C^b(A)) \to C(A)$ car la suite spectrale que l'on envisage est birégulière par (EGA III (11.3.3)).

2.3.3. Ceci étant, soient $(S, \mathscr{O}_S)$ un topos annelé et D une $\mathscr{U}$-petite catégorie. Soit $Z^\cdot \in C^+(\mathrm{Add}(D))$ un complexe de cochaînes tel que $Z^n = 0$ pour $n < 0$.

Tout objet F de $\mathrm{Mod}(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S)$ (qui s'identifie à un foncteur $D \to \mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S)$ d'après (2.1.1)) définit, par la propriété universelle de $\mathrm{Add}(D)$ (2.3.1.3) un foncteur additif

$$\widetilde{F} : \ \mathrm{Add}(D) \to \mathrm{Mod}(S, \mathscr{O}_S).$$

Le complexe image

$$\varepsilon_{Z^\cdot *}(F) := \widetilde{F}(Z^\cdot)$$

est un objet de $C^+(S, \mathscr{O}_S)$ qui varie fonctoriellement avec F. On a ainsi défini un foncteur additif

$$\varepsilon_{Z^\cdot *} : \ \mathrm{Mod}(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S) \to C^+(S, \mathscr{O}_S),$$

qui est visiblement exact.

On définit ainsi un foncteur triangulé[19] :

$$K^+(\varepsilon_{Z^\cdot *}) : K^+(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S) \longrightarrow K^+(C^+(S, \mathscr{O}_S)). \tag{2.3.3.1}$$

qui préserve les quasi-isomorphismes. De plus, il résulte de (2.3.2.2) que le foncteur composé :

$$(\quad)_s \circ K^+(\varepsilon_{Z^\cdot *}) : K^+(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S) \longrightarrow K^+(S, \mathscr{O}_S)$$

107 transforme les objets acycliques en objets acycliques. Il définit donc un foncteur triangulé :

$$R\varepsilon_{Z^\cdot *} : D^+(\Gamma(S \times D), \mathscr{O}_S) \longrightarrow D^+(S, \mathscr{O}_S) \tag{2.3.3.2}$$

vérifiant la relation[20] $Q \circ (\quad)_s \circ K^+(\varepsilon_{Z^\cdot *}) = R\varepsilon_{Z^\cdot *} \circ Q$ [20]

[19]N.D.E. : K^+ désigne la catégorie des complexes bornés inférieurement à homotopie près.

[20]N.D.E. : Autrement dit, $\varepsilon_{Z^\cdot *}$ se dérive trivialement en $F^\cdot \rightsquigarrow \varepsilon_{Z^\cdot *}(F^\cdot)$.

[20]Pour toute catégorie abélienne A, la lettre Q désigne le foncteur canonique $K^+(A) \to D^+(A)$.

2.3.4. Les données précédentes sont conservées et posons $A = C^+(S, \mathscr{O}_S)$. Tout d'abord, $\widetilde{F}$ et $\overline{F}$ sont compatibles au sens de la commutativité du diagramme de type Yoneda :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "h"] & \mathrm{Hom}(A^\circ, \mathrm{Ens}) \\ D \arrow[ur, "F"] \arrow[r] \arrow[dr, "r_D"'] & \mathrm{Add}(D) \arrow[u, "\widetilde{F}"'] \arrow[d, "\widetilde{r_D}"'] & \\ & \mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab}) \arrow[uur, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd}$$

où h, r_D sont respectivement les flèche type Yoneda définies par

$$h(a) = (\alpha \mapsto \mathrm{Hom}_A(\alpha, a) \text{ et } r_D(d) \overset{2.3.1}{=} (\delta \mapsto \mathrm{Hom}_D(d, \delta)),$$

c'est-à-dire $h \circ \widetilde{F} = \overline{F} \circ \widetilde{r_D}$. On en déduit la formule

$$h(\varepsilon_{Z^{\cdot}*}(F) = \overline{F}(\widetilde{r_D}(Z)).$$

Par définition d'une limite projective, on a $h(\epsilon_* F) = \varprojlim F$ et, comme on l'a déjà remarqué, on a tautologiquement $\overline{F}(\mathbf{Z}) = \varprojlim F$ de sorte qu'on a

$$\overline{F}(\mathbf{Z}) = h(\epsilon_*(F)).$$

On considère $Z^{\cdot}$ comme un complexe de chaînes dans $\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab})$, c'est-à-dire un complexe de la catégorie abélienne $\mathrm{Hom}(D, \mathrm{Ab})^\circ$ grâce au foncteur $\tilde{r}_D$. On peut donc parler de notion de suite exacte, de résolution. Explicitement, une suite de $\mathrm{Add}(D)$

$$Z \to Z' \to Z"$$

est exacte si pour tout objet j de D, la suite

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z", [j]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z', [j]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z, [j])$$

est exacte dans Ab. Soit $t : Z^\circ \to \mathbf{Z}$ un morphisme de Z° dans le foncteur constant de valeur $\mathbf{Z}$ tel que le morphisme composé

(2.3.4.1) $$Z^1 \longrightarrow Z^0 \xrightarrow{t} \mathbf{Z}$$

soit nul.

Par fonctorialité (cf. (2.3.1.1)), on en déduit un morphisme $\varepsilon_*(F) \to \varepsilon_{Z^{\cdot}*}(F)^\circ$ tel que le morphisme composé

(2.3.4.2) $$\varepsilon_*(F) \longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}*}(F)^\circ \longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}*}(F)^1$$

soit nul.

Il existe alors un morphisme canonique de foncteurs triangulés :

(2.3.4.3) $$Q \circ K^+(\varepsilon_*) \xrightarrow{j} Q \circ (\quad)_s \circ K^+(\varepsilon_{Z^{\cdot}*}) = R\varepsilon_{Z^{\cdot}*} \circ Q$$

Proposition 2.3.5. Les conditions et notations de (2.3.3) et (2.3.4) sont conservées ; on suppose en outre que le complexe augmenté

$$\dots Z^n \longrightarrow Z^{n-1} \longrightarrow \dots Z^1 \longrightarrow Z^0 \xrightarrow{t} \mathbf{Z}$$

définit une résolution de $\mathbf{Z}$.

Alors, pour tout complexe $F^{\cdot}$ formé d'objets de $I_{(S\times D,\mathcal{O}_S)}$ (cf. 1.3.10),

$$j(F^{\cdot}) : G\circ K^{+}(\varepsilon_{*})(F^{\cdot}) \longrightarrow (R\varepsilon_{Z^{\cdot}*}\circ Q)(F^{\cdot})$$

108 est un isomorphisme.

Soit i un objet de D et Q_i un module sur $(S,\mathcal{O}_S)$: montrons que $j(e_{i*}(Q_i))$ est un isomorphisme. Il s'agit de voir que la suite :

(2.3.5.1) $$0\longrightarrow Q_i\longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}*}(e_{i*}(Q_i))^{\circ}\longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}*}(e_{i*}(Q_i))^{1}\longrightarrow \dots$$

est exacte.

Pour cela il suffit de montrer que, pour tout objet X de $\mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S)$, la suite :

(2.3.5.2)
$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Q_i)\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\varepsilon_{Z^{\cdot}*}(e_{i*}(Q_i))^{\circ})\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\varepsilon_{Z^{\cdot}*}(e_{i*}(Q_i))^{1})\longrightarrow \dots$$

est exacte. Or un calcul immédiat montre que (2.3.5.2) se réduit à :

(2.3.5.3) $$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z},\mathrm{Hom}(X,Q_i))\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z^{\circ},[i]),\mathrm{Hom}(X,Q_i))\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z^{1},[i]),\mathrm{Hom}(X,Q_i))\longrightarrow \dots .$$

Par hypothèse, la suite

$$0\leftarrow \mathbf{Z}\leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z^{\circ},[i])\leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z^{1},[i])\leftarrow \dots$$

est une suite exacte de modules libres, donc est homotope à zéro. On déduit que (2.3.5.3) est exacte.

Si pour tout objet i de D, Q_i est un module totalement acyclique, on voit, en appliquant le foncteur $\prod_{i\in\mathrm{Ob}(D)}$ aux complexes (2.3.5.1), que l'on obtient encore un complexe acyclique d'après (1.3.10.1). Ainsi $j(\prod_{i\in\mathrm{Ob}(D)}(e_{i*}(Q_i)))$ est un isomorphisme.

On laisse au lecteur le soin de déduire de ceci que $j(F^{\cdot})$ est un isomorphisme lorsque $F^n\in I_{(S\times D,\mathcal{O}_S)}$ pour tout n (par suites spectrales, par exemple).

109 Corollaire 2.3.6. Sous les conditions de (2.3.5), le morphisme j définit $R\varepsilon_{Z^{\cdot}*}$ comme le foncteur dérivé de ε_{*}.

La sous-catégorie de $K^{+}(\Gamma(S\times D),\mathcal{O}_S)$ définie par les complexes formés d'objets de $I_{(S\times D,\mathcal{O}_S)}$ vérifie les conditions du théorème (5.1) de [[15], I], pour le foncteur $K^{+}(\varepsilon_{*})$, en vertu de (1.3.10) et (2.3.5) : le corollaire résulte immédiatement de cette remarque.

Corollaire 2.3.7. Sous les conditions de (2.3.5), soient (E,A) un D-topos annelé et $\theta : (E,A)\to(S\times D,\mathcal{O}_S)$ une augmentation ; il existe un isomorphisme canonique

$$R\overline{\theta}_{*}\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\theta_{*})\circ R\varepsilon_{Z^{\cdot}*}.$$

Cela résulte de [[15] - I - 5.4].

Remarque 2.3.8. On savait a priori que $R\varepsilon_{*}$ existe et que l'on a un isomorphisme $R\overline{\theta}_{*}\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\theta_{*})\circ R\varepsilon_{*}$, vu que $\Gamma(\theta_{*})$ et ε_{*} sont induits par des morphismes de topos annelés (cf. (1.3.6) et (2.1.1)). Cependant le calcul précédent s'avérera fort utile et applicable à d'autres contextes, car, dans la pratique, les conditions de (2.3.5) seront toujours vérifiées.

Nous allons maintenant donner les exemples fondamentaux où l'on pourra appliquer (2.3.5).

2.3.9. Dans $\mathrm{Add}(\varDelta)$, on pose $Z^n = [n]$ et on définit $d^n : Z^n \to Z^{n+1}$ par la formule

(2.3.9.1)
$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i$$

où $\partial^i : [n] \to [n+1]$ est la i-ème face [cf. [3] II 2]. On prend pour $t : Z^\circ \to \mathbf{Z}$ l'augmentation naturelle évidente[21].

La condition de (2.3.4) est trivialement vérifiée. La condition de (2.3.5) résulte de ([5] I (3.7.4)).

2.3.10. Dans $\mathrm{Add}(\varDelta \times \varDelta)$, on considère le complexe simple associé au complexe double : 110

(2.3.10.1)
$$\begin{tikzcd}
([n],[m+1]) \arrow[r, "s_1^{n,m+1}"] & ([n+1],[m+1]) \\
([n],[m]) \arrow[u, "s_2^{n,m}"] \arrow[r, "s_1^{n,m}"] & ([n+1],[m]) \arrow[u, "s_2^{n+1,m}"']
\end{tikzcd}$$

avec

(2.3.10.2)
$$\begin{cases} S_1^{n,m} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (\partial^i, \mathrm{id}_{[m]}) \\ S_2^{n,m} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^j (\mathrm{id}_{[n]}, \partial^j). \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier (en utilisant (2.3.9)) que le complexe ainsi défini, muni de l'augmentation naturelle évidente, vérifie les conditions de (2.3.5).

2.3.11. On traite de manière analogue le cas multi-simplicial (avec $\underbrace{\varDelta \times \varDelta \times \ldots \times \varDelta}_{p\text{-fois}}$).

111

2.4. La descente cohomologique relative.

2.4.0. Soient $\mathscr{E} \to \boldsymbol{B}$ une catégorie bifibrée en duaux de topos et $\mathscr{O}$ un anneau de $\varGamma(\mathscr{E}^\circ)$.

Ces données définissent canoniquement une catégorie fibrée et cofibrée en catégories abéliennes, notée $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^\circ, \mathscr{O})$, au-dessus de $\boldsymbol{B}^\circ$ (cf. (1.3.3) et (1.3.4)) : dans tout ce qui suit, les foncteurs « images directes » et « image réciproques » seront toujours pris par rapport au foncteur fibrant et cofibrant : $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^\circ, \mathscr{O}) \to \boldsymbol{B}^\circ$.

Définition 2.4.0.1. Nous dirons qu'un morphisme $f : T \to S$ dans $\boldsymbol{B}$ est plat (relativement à $(\mathscr{E}, \mathscr{O})$) si $f_* : \mathrm{Mod}(\mathscr{E}^\circ_S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{Mod}(\mathscr{E}^\circ_T, \mathscr{O}_T)$ est un foncteur exact[22].

[21] N.D.E. : De façon explicite, si F est un complexe simplicial de différentielle d_F, $\varepsilon_{Z^\bullet *}(F)$ est le complexe simple associé au complexe double $F^j(i)$ de différentielle horizontale simpliciale d^i et verticale d^j_F.

[22] N.D.E. : Cette notation peut prêter à confusion : on devrait sans doute écrire $(f^\circ)_\star$ qui coïncide formellement avec $(f^\star)^\circ$ où $f^\star$ est le foncteur fibrant associé à $\mathscr{E} \to \boldsymbol{B}$. Par exemple, dans le cas de la catégorie des faisceaux sur les espaces topologiques fibrée sur la catégorie des espaces topologiques (cf. 4.1), on a $(f^\circ)_\star(S, F) = (T, f^{-1}F) = (f^\star)^\circ(S, F)$ où $f : T \to S$ est une application continue d'espaces topologiques, F un faisceau sur S et f^{-1} est l'image inverse usuelle. On reconnaît alors les conditions usuelles de platitude.

2.4.1. Soit G une sous-catégorie fibrée et cofibrée de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^{\circ}, \mathscr{O})$ telle que, pour tout objet S de B, G_S soit une sous-catégorie épaisse (cf. Tôhoku (1.11)) de $(\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^{\circ}, \mathscr{O}))_S$ - Le lecteur trouvera au paragraphe 4 des exemples de telles situations.

Si S est un objet de B, nous désignerons par $D^+(S)$, la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^{\circ}_S, \mathscr{O}_S)$: on introduit, suivant [[15] (I § 4)], la catégorie $D^+_{G_S}(S)$, qui s'identifie à la sous-catégorie pleine de $D^+(S)$ formée par les objets $X^{\boldsymbol{\cdot}}$ tels que $H^n(X^{\boldsymbol{\cdot}}) \in G_S$ pour tout n.

Nous supposerons que la condition suivante est toujours vérifiée.

. Pour tout morphisme $h : T \to S$ dans B, le foncteur $Rh^* : D^+(T) \to D^+(S)$ est tel que $Rh^*(F) \in D^+_{G_S}(S)$ si $F \in G_T$[23].

D'après [[15] (I. (7.3). (ii))], cette condition entraîne que $Rh^*(D^+_{G_T}(T)) \subset D^+_{G_S}(S)$.

112 2.4.2. Soit D une $\mathscr{U}$-petite catégorie : nous supposerons dans tout ce qui suit que l'on s'est donné un complexe $Z^{\boldsymbol{\cdot}}$ de $\mathrm{Add}(D)$ vérifiant les conditions de (2.3.5) (dans les applications, on aura en fait $D = \Delta$ ou $D = \Delta \times \Delta$).

Si $X : D^{\circ} \to B$ est un D-objet de B, on désigne par $\mathrm{Mod}_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ formée par les objets F tels que $e_i^*(F) \in G_i$ $(= G_{X_i})$ pour tout objet i de D : $\mathrm{Mod}_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathrm{Mod}(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$. Nous désignerons par $K^+_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ (resp. $D^+_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$) la sous-catégorie pleine de $K^+(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ (resp. $D^+(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$) formée des objets $X^{\boldsymbol{\cdot}}$ tels que $H^n(X^{\boldsymbol{\cdot}}) \in \mathrm{Mod}_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ pour tout n.

2.4.3. Soient X et X' deux D-objets de B et $\alpha : X \to X'$ un morphisme fonctoriel. Rappelons (cf. (1.3.4)) que nous notons encore $\alpha : (\overline{X}, \mathscr{O}) \to (\overline{X}', \mathscr{O})$ le morphisme de D-topos annelés correspondant.

Définition 2.4.3.1. Nous dirons que $\alpha : X \to X'$ est plat si le morphisme de D-topos annelés correspondant est plat au sens de (1.3.6.1).

On a alors le lemme évident :

Lemme 2.4.3.2. Pour que $\alpha : X \to X'$ soit plat, il faut et il suffit que, pour tout objet i de D, $\alpha_i : X_i \to X'_i$ soit un morphisme plat (cf. (2.4.0.1)).

2.4.4. Soit $\alpha : X \to X'$ un morphisme, il définit un foncteur

$$K^+(\Gamma(\alpha_*)) : K^+(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O}) \longrightarrow K^+(\Gamma(\overline{X}'), \mathscr{O}). \tag{2.4.4.1}$$

Lemme 2.4.4.2. Le foncteur

$$K^+(\Gamma(\alpha_*))|_{K^+_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})} : K^+_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O}) \longrightarrow K^+(\Gamma(\overline{X}'), \mathscr{O})$$

possède un foncteur dérivé à droite, noté $R_G\Gamma(\alpha_*)$, et le morphisme canonique

$$R_G\Gamma(\alpha_*) \longrightarrow R\Gamma(\alpha_*)|_{D^+_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})}$$

113 est un morphisme.

De plus $R_G(D^+_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})) \subset (D^+_G(\Gamma(\overline{X}'), \mathscr{O}))$.

La première partie résulte de (1.3.10) et de [[15] - (I.(5.2))]. Pour vérifier la dernière assertion, il suffit de montrer, en vertu de [[15] -(I. (7.3). (ii))], que $R\Gamma(\alpha_*)(F) \in D^+_G(\Gamma(\overline{X}'), \mathscr{O})$, lorsque $F \in \mathrm{Mod}_G(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ ce qui résulte du calcul explicite de $R\Gamma(\alpha_*)$ donné par (1.3.1.1) et de l'hypothèse (2.4.1.1).

[23] N.D.E. : Comme précédemment, il serait plus correct de noter $R(h^{\circ})^* = R(h_*)^{\circ}$ plutÃ´t que Rh^*, ce qui rendrait les notations plus conformes à l'intuition géométrique usuelle. On aurait aussi pu bien prendre les foncteurs fibrants et cofibrants par rapport à $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}, \mathscr{O}) \to B$ et non aux catégories opposées. Mais les fibres auraient été seulement des duaux de topos.

2.4.5. Soit S un objet de B : le D-topos annelé $(\overline{C_S^D}, \mathscr{O})$ (cf. (1.2.6)) s'identifie au D-topos annelé constant $(\mathscr{E}_S \times D, \mathscr{O}_S)$ et on a le lemme suivant qui résulte de [[15] (I. (7.3). (ii))] :

Lemme 2.4.5.1. Le foncteur $R\varepsilon_{Z^\bullet *}|_{D_G^+(\Gamma(\overline{C_S^D}),\mathscr{O})}$, noté $R_G\varepsilon_{Z^\bullet *}$, est à valeurs dans $D^+_{G_S}(S)$ et s'identifie un foncteur dérivé à droite du foncteur

$$K^+(\varepsilon_*)|_{K_G^+(\Gamma(\overline{C_S^D}),\mathscr{O})} : K_G^+(\Gamma(\overline{C_S^D}), \mathscr{O}) \longrightarrow K^+(S).$$

Proposition 2.4.6. Soit $\theta : X \to C_S^D$ un D-objet de B augmenté : le foncteur $K^+(\overline{\theta}_*)|_{K_G^+(\Gamma)(\overline{X}),\mathscr{O}}$, possède un foncteur dérivé à droite, noté $R_G\overline{\theta}_*$, qui prend ses valeurs dans $D^+_{G_S}(S)$. De plus, il existe un isomorphisme canonique

$$R_G\overline{\theta}_* \xrightarrow{\sim} R_G\varepsilon_{Z^\bullet *} \circ R_G\Gamma(\theta_*).$$

Démonstration laissée au lecteur à partir de ce qui précède.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les définitions relatives à la descente cohomologique.

2.4.7. Soit $\theta : X \to C_S^D$ un D-objet de B augmenté. Supposons que θ soit plat, de sorte que la restriction à $D^+_{G_S}(S)$ du foncteur $\overline{\theta}^*$ prend ses valeurs dans $D_G^+(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$: nous noterons $\overline{\theta}^*_G$ cette restriction. Avec ces notations : **114**

Lemme 2.4.7.1. Il existe deux morphismes fonctoriels $\alpha : \mathrm{id}_{D^+_{G_S}(S)} \to R_G\overline{\theta}_* \circ \overline{\theta}^*_G$ et $\beta : \overline{\theta}^*_G \circ R_G\overline{\theta}_* \to \mathrm{id}_{D_G^+(\Gamma(\overline{X}),\mathscr{O})}$ mettant ces deux foncteurs en adjonction.

Cela résulte immédiatement de (2.2.3.1) et (2.4.6).

Définition 2.4.8. On dit que θ est une augmentation de 1-descente cohomologique relativement à G si

1°) θ est plat.

2°) Le foncteur $\overline{\theta}^\star_G$ pleinement fidèle.

Remarque 2.4.9. La condition 2°) de la définition précédente peut encore s'exprimer en disant que le morphisme α dans (2.4.7.1) est un isomorphisme.

Définition 2.4.10. Soit $\theta : X \to C_S^D$ un D-objet de B augmenté. On dit que θ est une augmentation de descente effective relativement à G si le foncteur

$$\Gamma(\theta^*) \circ \varepsilon^* : G_S \longrightarrow \Gamma^{\mathrm{Cocart}}(D, G)$$

est une équivalence de catégories.

Définition 2.4.11. On dit que θ est une augmentation de 2-descente cohomologique (ou de descente cohomologique effective) relativement à G si θ est à la fois une augmentation de 1-descente cohomologique et de descente effective relativement à G.

On déduit alors de la démonstration de (2.2.7) le résultat suivant :

Théorème 2.4.12. Soit $\theta : X \to C_S^D$ une augmentation de 2-descente cohomologique relativement à G. Alors l'image essentielle de $\overline{\theta}^*_G$ est la sous-catégorie pleine de $D_G^+(\Gamma(\overline{X}), \mathscr{O})$ formée des complexes $F^\bullet$ tels que pour tout n, $H^n(F^\bullet)$ soit une section cocartésienne de G. **115**

La proposition suivante, dont la vérification est laissée au lecteur, permet de transcrire la définition (2.4.10) dans le langage de ([4]. 6) :

Proposition 2.4.13. Pour que $\theta : X \to C_S^D$ soit une augmentation de descente effective relativement à G, il faut et il suffit que le foncteur $D^\circ \to B/S$ au-dessus de B, défini par θ, induise une équivalence entre la catégorie des sections cartésiennes de G° au-dessus de B/S et la catégorie des sections cartésiennes de G° au-dessus de D°.

Corollaire 2.4.14. Supposons que les produits fibrés finis soient représentables dans B et soit $f : R \to S$ un morphisme : pour que l'objet semi-simplicial augmenté $[R|_f S]$ (cf. (1.2.7)) soit de descente effective relativement à G, il faut et il suffit que f soit un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée G° au-dessus de B.

Cela résulte de (2.4.13) et de ([4]-9).

Définition 2.4.15. Supposons que les produits fibrés finis soient représentables dans B et soit $f : R \to S$ un morphisme. Nous dirons que f est un morphisme de i-descente cohomologique relativement à G ($i = 1, 2$) si l'objet semi-simplicial augmenté $[R|_f S]$ est de i-descente cohomologique relativement à G.

Définition 2.4.16. Supposons que les produits fibrés finis soient représentables dans B et soit $\theta : X \to C_S^D$ une augmentation : nous dirons que θ est une augmentation de i-descente cohomologique universelle ($i = 1, 2$) relativement à G si, pour tout mor-
116 phisme $T \to S$, l'augmentation $X_T \xrightarrow{\theta_T} C_T^D$ obtenue par changement de base est une augmentation de i-descente cohomologique relativement à G.

La notion de morphisme de i-descente cohomologique universelle relativement à G se déduit immédiatement des deux définitions précédentes.

Nous emploierons souvent la terminologie « augmentation de G-i-descente cohomologique » à la place de « augmentation de i-descente cohomologique relativement à G ».

2.5. La suite spectrale de descente.

2.5.1. Soit A une catégorie abélienne. On désigne par $F(A)$ la catégorie dont les objets sont les objets de A, munis d'une filtration discrète et codiscrète, et dont les morphismes sont les morphismes filtrés de A : la catégorie $F(A)$ est une catégorie additive (mais non abélienne).

La catégorie $K(F(A))$ des complexes filtrés de A, de filtration discrète et codiscrète degré par degré, est une catégorie triangulée et les foncteurs canoniques

$$\mathrm{Gr}_n : K(F(A)) \longrightarrow K(A) \tag{2.5.1.1}$$

sont triangulés. L'ensemble Σ des morphismes f de $K(F(A))$ tels que $\mathrm{Gr}_n(f)$ soit un quasi-isomorphisme pour tout n est donc un système multiplicatif saturé [cf. [17]. § 2. n° 1].

En inversant les flèches de ce système, on obtient une nouvelle catégorie triangulée notée $DF(A)$ et les foncteur Gr_n se prolongent en des foncteurs

$$\mathrm{Gr}_n : DF(A) \longrightarrow D(A). \tag{2.5.1.2}$$

Nous ne considérerons, par la suite, que des complexes bornés inférieurement : on introduit naturellement les notations $K^+(F(A))$ et $D^+F(A)$.

117 2.5.2. Soit B une sous-catégorie épaisse de A et désignons par $K_B^+(F(A))$ la sous-catégorie pleine de $K^+(F(A))$ dont les objets sont les complexe $X^\cdot$ tels que $H^i(\mathrm{Gr}_j(X^\cdot)) \in B$ pour tout couple d'entiers (i, j) : $K_B^+(F(A))$ est une sous-catégorie triangulée localisante de $K(F(A))$ [cf. [15]. (I. § 5)]. Nous désignerons par $D_B^+F(A)$ la sous-catégorie

pleine de $DF(A)$ dont les objets sont les complexes bornés inférieurement $X^{\bullet}$ tels que $H^j(\mathrm{Gr}_j(X^{\bullet})) \in B$ pour tout couple (i, j) : d'après (loc. cit.), $D^+_B F(A)$ s'identifie à la catégorie de fractions $K^+_B(F(A))_{\Sigma \cap K^+_B(F(A))}$.

Le foncteur « oubli des filtrations » :

$$\imath \,:\, K^+(F(A)) \longrightarrow K^+(A)$$

est triangulé. De plus, il résulte de [[5]. I. (4.7)] que $\imath(f)$ est un quasi-isomorphisme si $f \in \Sigma$ et que $\imath(K^+_B(F(A)) \subset K^+_B(A)$. Le foncteur $\imath$ s'étend ainsi en un foncteur triangulé

$$\imath \,:\, D^+F(A) \longrightarrow D^+(A) \tag{2.5.2.1}$$

tel que $\imath(D^+_B F(A)) \subset D^+_B(A)$.

Notons enfin qu'il existe un foncteur spectral canonique $D^+_B F(A) \to B$, aboutissant à $H^n \circ \imath$, et dont le terme E_1 est donné par $H^{p+q} \circ \mathrm{Gr}_p$ [cf. [5] I. (4.2)].

Nous revenons maintenant aux notations de (2.3) en supposant $D = \Delta$: $Z^{\bullet}$ désignera le complexe de $\mathrm{Add}(\Delta)$ défini par (2.3.9.1).

Proposition 2.5.3. Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un topos annelé. Le foncteur

$$R\varepsilon_{Z^{\bullet}*} \,:\, D^+(\Gamma(S \times D), \mathcal{O}_S) \longrightarrow D^+(S, \mathcal{O}_S)$$

possède une factorisation canonique

$$D^+(\Gamma(S \times D), \mathcal{O}_S) \xrightarrow{F^{R\varepsilon}Z^{\bullet}*} D^+F(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\imath} D^+(S, \mathcal{O}_S).$$

De plus, pour tout entier i, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D^+(\Gamma(S \times D), \mathcal{O}_S) \arrow[r, "Re_i^*"] \arrow[d, "F^{R\varepsilon_{Z^{\bullet}*}}"'] & D^+(S, \mathcal{O}_S) \\
D^+F(S, \mathcal{O}_S) \arrow[ur, "\mathrm{Gr}_i"'] &
\end{tikzcd}.$$

Considérons le foncteur $C^+(C^+(S, \mathcal{O}_S)) \xrightarrow{(\quad)_s} C^+(S, \mathcal{O}_S)$: si $X^{\bullet\bullet}$ est un objet de **118**
$C^+(C^+(S, \mathcal{O}_S))$, on muni $(X^{\bullet\bullet})_s$ de sa deuxième filtration canonique [cf. [5]. I.4.8] ; on obtient ainsi une factorisation :

$$(\quad)_s \,:\, C^+(C^+(S, \mathcal{O}_S)) \longrightarrow C^+(F(S, \mathcal{O}_S)) \xrightarrow{\imath} C^+(S, \mathcal{O}_S) \tag{2.5.3.1}$$

qui passe aux catégories K^+ :

$$(\quad)_s \,:\, K^+(C^+(S, \mathcal{O}_S)) \longrightarrow K^+(F(S, \mathcal{O}_S)) \xrightarrow{\imath} K^+(S, \mathcal{O}_S) \tag{2.5.3.2}$$

car une homotopie de $C^+(C^+(S, \mathcal{O}_S))$ induit une homotopie filtrée.

On a alors un diagramme :

(2.5.3.3)
$$
\begin{tikzcd}
D^+(\Gamma(S\times\Delta),\mathcal{O}_S) \arrow[rr, "R\epsilon_{Z^\bullet *}"] \arrow[dr, dashed] & & D^+(S,\mathcal{O}_S) \\
& D^+F(S,\mathcal{O}_S) \arrow[ur, "\iota"'] & \\
& K^+(F(S,\mathcal{O}_S)) \arrow[u] \arrow[dr, "\iota"] & \\
K^+(\Gamma(S\times\Delta),\mathcal{O}_S) \arrow[uuu] \arrow[ur] \arrow[rr, "(\ )_S\circ K^+(\epsilon_{Z^\bullet *})"'] & & K^+(S,\mathcal{O}_S) \arrow[uuu]
\end{tikzcd}
$$

et on vérifie qu'il existe un foncteur

$$ {}_F R\epsilon_{Z^\bullet *} : D^+(\Gamma(S\times\Delta),\mathcal{O}_S) \longrightarrow D^+F(S,\mathcal{O}_S) $$

119 et un seul rendant commutatif (2.5.3.3).

Le reste de la proposition est évident.

Proposition 2.5.4. Soient (E,A) un topos semi-simplicial annelé et

$$ \theta : (E,A) \longrightarrow (S\times\Delta,\mathcal{O}_S) $$

une augmentation : pour tout entier i, on désigne par

$$ \theta_i : (E_i,A_i) \longrightarrow (S,\mathcal{O}_S) $$

le morphisme de topos annelé induit par θ au-dessus de i.

Le foncteur $R\overline{\theta}_* : D^+(\Gamma(E),A) \to D^+(S,\mathcal{O}_S)$ possède une factorisation canonique

$$ D^+(\Gamma(E),A) \xrightarrow{{}_F R\overline{\theta}_*} D^+F(S,\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\iota} D^+(S,\mathcal{O}_S) $$

telle que pour tout entier i, le diagramme canonique

$$
\begin{tikzcd}
D^+(\Gamma(E),A) \arrow[r, "Re_i^*"] \arrow[d, "{}_F R\overline{\theta}_*"'] & D^+(E_i,A_i) \arrow[d, "R\theta_{i*}"] \\
D^+F(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{Gr}_i"'] & D^+(S,\mathcal{O}_S)
\end{tikzcd}
$$

soit essentiellement commutatif.

Résulte de ce qui précède et de (1.3.1.2).

Proposition 2.5.5. Soient (E,A) un topos semi-simplicial annelé et

$$ \theta : (E,A) \longrightarrow (S\times\Delta,\mathcal{O}_S) $$

une augmentation de 1-descente cohomologique. Soit

$$ H : (S,\mathcal{O}_S) \longrightarrow (R,\mathcal{O}_R) $$

un morphisme de topos annelés. Alors il existe un foncteur spectral de $D^+(S,\mathcal{O}_S)$ dans $\mathrm{Mod}(R,\mathcal{O}_R)$:

$$ E_1^{pq} = R^q(H\circ\theta_p)_*\circ\theta_p^* \longrightarrow R^{p+q}H_* $$

120 appelé foncteur spectral de descente.

Soit $H \circ \theta : (E, A) \to (R \times \Delta, \mathscr{O}_R)$ l'augmentation déduite canoniquement de θ par composition avec H ; on a

$$\overline{(H \circ \theta)}_* = H_* \circ \overline{\theta}_* \tag{2.5.5.1}$$

de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D^+(S, \mathscr{O}_S) \arrow[r, "\overline{\theta}^*"] \arrow[dr, "RH_*"'] & D^+(\Gamma(E), A) \arrow[d, "R\overline{(H\circ\theta)}_*"] \\ & D^+(R, \mathscr{O}_R) \end{tikzcd} \tag{2.5.5.2}$$

est essentiellement commutatif car

$$R\overline{(H \circ \theta)}_* \xrightarrow{\sim} RH_* \circ R\overline{\theta}_* \text{ et } \mathrm{id}_{D^+(S,\mathscr{O}_S)} \xrightarrow{\sim} R\overline{\theta}_* \circ \overline{\theta}_*.$$

Grâce à (2.5.4), on dispose pour tout i, d'un diagramme essentiellement commutatif :

$$\begin{tikzcd} D^+(S, \mathscr{O}_S) \arrow[r, "\overline{\theta}^*"] \arrow[ddr, "RH_*"'] & D^+(\Gamma(E), A) \arrow[r, "Re_i^*"] \arrow[d, "{}_F R\overline{(H\circ\theta)}_*"'] & D^+(E_i, A_i) \arrow[d, "R(H\circ\theta_i)_*"] \\ & D^+F(R, \mathscr{O}_R) \arrow[r, "\mathrm{Gr}_i"'] \arrow[d, "\iota"'] & D^+F(R, \mathscr{O}_R) \\ & D^+(R, \mathscr{O}_R) & \end{tikzcd} \tag{2.5.5.3}$$

Le foncteur spectral annoncé, s'obtient en considérant le foncteur spectral canonique **121**
sur $D^+F(R, \mathscr{O}_R)$ que l'on compose avec ${}_F R\overline{(H \circ \theta)}_* \circ \overline{\theta}^*$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier la proposition suivante :

Proposition 2.5.6. Avec les notations précédentes, le terme E_2^{pq} du foncteur spectral précédant s'écrit :

$$\check{H}^p \circ R^q\Gamma((H \circ \theta)_*) \circ \overline{\theta}^*$$

où $\check{H}^p : \mathrm{Mod}(\Gamma(R \times \Delta), \mathscr{O}_R) \to \mathrm{Mod}(R, \mathscr{O}_R)$ est le foncteur qui associe à tout foncteur $\Delta \xrightarrow{F} \mathrm{Mod}(R, \mathscr{O}_R)$ l'objet d'homologie en degré p du complexe associé (noté $\varepsilon_{Z^\bullet *}(F)^\bullet$ dans (2.3.3)).

Nous revenons maintenant à la terminologie introduite dans (2.4) : grâce au sorite (2.5.2), toutes les considérations précédentes vont se transcrire mot pour mot en plaçant la lettre G en indice partant ou cela a un sens. Les détails sont laissés au soin du lecteur ; on obtient en particulier :

Proposition 2.5.7. Soient $\mathscr{O} : X \to C_S^D$ une augmentation de 1-descente cohomo- **122**
logique relativement à G et soit $h : S \to R$ un morphisme de B ; il existe un foncteur spectral de $D^+_{G_S}(S)$ dans G_R :

$$E_1^{pq} = R^q_G(h \circ \theta)_* \circ \theta^*_{p,G} \longrightarrow R^{p+q}_G h_*$$

avec $E_2^{pq} = \check{H}^p \circ R^q_G \Gamma((h \circ \theta)_*) \circ \overline{\theta}^{\star}_G$.

3. Critères de descente

3.0. Notations. Dans tout ce qui suit, nous conserverons les notations de (2.4). Nous supposerons toujours que les produits fibrés finis sont représentables dans $\boldsymbol{B}$.

Nous supposerons de plus que $\boldsymbol{B}$ vérifie la condition suivante

3.0.0. Les sommes directes existent dans $\boldsymbol{B}$, sont disjointes, universelles et sont des familles de $\mathscr{E}$-descente effective et $\boldsymbol{G}^{\circ}$-descente effective [cf. [4] (9.23) (9.25) et (9.27)].

3.0.1. Rappelons maintenant quelques notations classiques sur les objets semi-simpliciaux d'une catégorie [cf. ([3] Chap II) et (V. appendice)].

Soit E une catégorie possédant des limites projectives finies $\Delta^{\circ} E$ désigne la catégorie des objets semi-simpliciaux de E (cf. (1.2.6)).

Soit n un entier : on désigne par $\underset{n}{\Delta}$ (resp. $\underset{n}{\Delta^+}$, $\underset{n}{\Delta^-}$) la sous-catégorie pleine de Δ (resp. Δ^+, Δ^-) formés par les objets $[p]$ tels que $p \leq n$.

Le fonceur restriction

$$i_n^* : \Delta^{\circ} E \longrightarrow \underset{n}{\Delta^{\circ}} E \tag{3.0.1.1}$$

123 possède un adjoint à droite i_{n*}, puisque les limites projectives finies existent dans E (cf. (1.2.10)). On note cosq_n et on appelle foncteur cosquelette d'ordre n le foncteur $i_{n*} \circ i_n^*$; par abus de notations, nous utiliserons aussi la notation cosq_n pour le foncteur i_{n_*}.

Pour tout entier p, désignons par $\underset{n[p]}{\Delta}$ (resp. $\underset{n[p]}{\Delta^+}$) la sous-catégorie pleine $\Delta_{[p]}$ (resp. $\Delta^+_{[p]}$) des objets de Δ (resp. Δ^+) au-dessus de $[p]$, définie par les objets $[q]$ au-dessus de $[p]$ tels que $q \leq n$; on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a :

$$(\operatorname{cosq}_n(X))_p = \varprojlim_{\Delta_{n[p]}} X_q \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\Delta^+_{n[p]}} X_q. \tag{3.0.1.2}$$

3.0.2. Soient X et X' deux objets de $\Delta^{\circ} E$ et $f, g : X \rightrightarrows X'$ deux morphismes. Une homotopie de f vers g consiste en la donnée pour tout n d'une application h_n : $\operatorname{Hom}_{\Delta}([n],[1]) \to \operatorname{Hom}_E(X_n, X'_n)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$h_n(\partial^1) = f_n \text{ et } h_n(\partial^{\circ}) = g_n \text{ pour tout } n. \tag{3.0.2.1}$$

. pour toute flèche $[n] \to [p]$ dans Δ, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\Delta}\big([p],[1]\big) \arrow[r] \arrow[dd] & \operatorname{Hom}_E(X_p, X'_p) \arrow[dr] & \\
& & \operatorname{Hom}_E(X_p, X'_p) \\
\operatorname{Hom}_{\Delta}\big([n],[1]\big) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_E(X_n, X'_n) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} .$$

N.B. : La relation ainsi introduite sur l'ensemble des morphismes de X dans X' n'est pas une relation d'équivalence ; on peut palier à cet inconvénient en introduisant la notion d'homotopie composée [cf. [3] chap III] : nous n'utiliserons pas cette dernière notion.

124 Lemme 3.0.2.3. Soient X et X' deux objets de $\Delta^{\circ} E$, $f, g : X \rightrightarrows X'$ deux morphismes

et $F : E \to C$ un foncteur où C est une catégorie abélienne. Une homotopie simpliciale de f vers g induit une homotopie sur les morphismes de complexes de cochaînes canoniquement associés à $F(f)$ et $F(g)$.

On est ramené au cas où C est la catégorie des modules sur un anneau et on applique [[5] I. (3.7.1)].

Lemme 3.0.2.4. Soient n un entier, X et X' deux objets de $\Delta^\circ E$. Soient f et g deux morphismes de X dans X' tels que $f_p = g_p$ pour $p < n$: alors il existe une homotopie simpliciale de $\mathrm{cosq}_n(f)$ vers $\mathrm{cosq}_n(g)$.

On définit

$$h_p : \mathrm{Hom}_\Delta([p],[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_p, {X'}_p)$$

par l'application constante de valeur $f_p = g_p$ pour $p < n$, puis $h_n : \mathrm{Hom}_\Delta([n],[1]) \to \mathrm{Hom}(X_n, X'_n)$ en envoyant tous les éléments de $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[1])$, sauf ∂°, sur f_n, et ∂° sur g_n. On remarque ensuite que

$$\mathrm{Hom}_\Delta([k],[1]) = \varprojlim_{\substack{[q]\to[k]\\ q\geq n}} \mathrm{Hom}([q],[1])$$

pour $k > n$, ce qui permet de définir canoniquement h_k.

3.1. Comparaison de deux augmentations du point de vue de la 1-descente cohomologique. Soit S un objet de B : on désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}(D^\circ, B/S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(D^\circ, B/S)$ dont les objets sont les augmentations plates [cf. (1.2.6) et (2.4.3.1)].

Proposition 3.1.1. Soient $X \xrightarrow{u} C^D_S$ et $X' \xrightarrow{u'} C^D_S$ deux objets de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}(D^\circ, B/S)$. Soit $f : X \to X'$ un morphisme au-dessus de S (i.e. un morphisme de $\mathrm{Hom}(D^\circ, B/S)$) ; il lui correspond de façon naturelle un morphisme fonctoriel

$$\eta^f_G : R_G\bar{u}'_* \circ \bar{u}'^*_G \longrightarrow R_G\bar{u}_* \circ \bar{u}^*_G$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & R_G\bar{u}'_* \circ \bar{u}'^*_G \arrow[dd, "\eta^f_G"] \\
\mathrm{id} *_{D^+_{G_S}(S)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & R_G\bar{u}_* \circ \bar{u}^*_G .
\end{tikzcd}$$

De plus, si $D = \Delta$, η^f_G ne dépend que de la classe d'homotopie (cf. (3.0.2)) de f dans 125
$\mathrm{Hom}(\Delta^\circ, B/S)$.

Il est clair que nous pouvons supposer que $G = \mathrm{Mod}(\mathscr{E}^\circ, \mathscr{O})$ pour la construction de η^f_G.

Soit I la catégorie définie par le graphe

(3.1.1.1) $$0 \longrightarrow 1.$$

On désigne par $r_0 : D \to I \times D$ (resp. r_1) le foncteur pleinement fidèle défini par $r_0(i) = (0, i)$ (resp. $r_1(i) = (1, i)$).

En vertu de l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}((I \times D)^{\circ}, B/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(I^0, \mathrm{Hom}(D^0, B/S)) \tag{3.1.1.2}$$

les données de (3.1.1) définissent une augmentation plate[24]

$$XfX' \xrightarrow{ufu'} C_S^{I\times D}. \tag{3.1.1.3}$$

Soit F un objet de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}_S, \mathscr{O}_S)$, le morphisme canonique

$$\mathscr{E}^*_{I\times D}(F) \longrightarrow \Gamma((ufu')_*) \circ \Gamma((ufu')^*)(\mathscr{E}^*_{I\times D}(F)). \tag{3.1.1.4}$$

peut s'interpréter comme un triangle commutatif dans $\mathrm{Mod}(\Gamma(\overline{C_S^D}), \mathscr{O})$:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(u'_*) \circ \Gamma(u'^*)(\mathscr{E}^*_D(F)) \arrow[d] \\ \mathscr{E}^*_D(F) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \Gamma(u_*) \circ \Gamma(u^*)(\mathscr{E}^*_D(F)) \end{tikzcd} \tag{3.1.1.5}$$

126 d'où un morphisme fonctoriel $\overline{u}'_* \circ \overline{u}'^* \xrightarrow{\alpha_f} \overline{u}_* \circ \overline{u}^*$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \overline{u}'_* \circ \overline{u}'^* \arrow[d, "\alpha_f"] \\ \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}(\mathscr{E}_S, \mathscr{O}_S)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \overline{u}_* \circ \overline{u}^* \end{tikzcd} \tag{3.1.1.6}$$

soit commutatif.

[24]N.D.E. : Explicitement, on a $(XfX')_{(0,i)} = X_0$, $(XfX')_{(1,j)} = X'_j$ et à $\alpha \in \mathrm{Hom}_D(i,j) = \mathrm{Hom}((0,i),(0,j))$ est associée $\alpha \circ f_i : (XfX')_{(0,i)} \to (XfX')_{(1,j)}$, les endomorphismes de (ε, i), $\varepsilon = 0, 1$ agissant de façon évidente.

On obtient par suite un morphisme fonctoriel tel que le diagramme

(3.1.1.7)
$$
\begin{tikzcd}
 & K^+(\overline{u}'_*) \circ K^+(\overline{u}'^*) \arrow[dd, "K^+(\alpha_f)"] \\
\mathrm{id}_{K^+(\mathscr{E}_S, \mathscr{O}_S)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & K^+(\overline{u}_*) \circ K^+(\overline{u}^*)
\end{tikzcd}
$$

soit commutatif.
(Remarquons que $K^+(\alpha_f)$ peut aussi s'obtenir formellement par adjonction en utilisant l'isomorphisme $K^+(\Gamma(f^*)) \circ K^+(\overline{u}'^*) \xrightarrow{\sim} K^+(\overline{u}^*)$).

Soient $F^\cdot$ un complexe de $K^+(S)$ et $\xi : K^+(\overline{ufu'^*})(F^\cdot) \to J^\cdot$ un quasi-isomorphisme tel que, pour tout entier n, J^n soit totalement acyclique objet par objet (cf. (1.3.13)). D'après (loc. cit.) les flèches canoniques

$$K^+(\overline{u}^*)(F^\cdot) \longrightarrow r_1^*(J^\cdot) \text{ et } K^+(\overline{u}^*)(F^\cdot) \longrightarrow r_0^*(J^\cdot)$$

sont des quasi-isomorphismes (cf. (1.2.8) pour les notations). On obtient par suite un morphisme **127**

$$R\overline{u}'_* \circ \overline{u}'^*(F^\cdot) \xrightarrow{\eta^f(F^\cdot)} R\overline{u}_* \circ \overline{u}^*(F^\cdot)$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif dans $D^+(S)$:

(3.1.1.8)
$$
\begin{tikzcd}
 & Q\circ K^+(\overline{u}'_*)(r_0^*(J^\cdot)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & R\overline{u}'_*\circ Q(r_0^*(J^\cdot)) \arrow[dd] \\
Q\circ K^+(\overline{u}'_*)\circ K^+(\overline{u}'^*)(F^\cdot) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "Q(K^+(\alpha_f)(F^\cdot))"'] & & R\overline{u'}_*\circ\overline{u'}^*(F^\cdot) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dd, dashed, "\eta^f(F^\cdot)"] & \\
 & Q\circ K^+(\overline{u}_*)(r_1^*(J^\cdot)) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbf{R}\overline{u}_*\circ Q(r_1^*(J^\cdot)) \\
Q\circ K^+(\overline{u}_*)\circ K^+(\overline{u}^*)(F^\cdot) \arrow[ur] \arrow[rr] & & R\overline{u}_*\circ\overline{u}^*(F^\cdot) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Il est clair que $\eta^f(F^\cdot)$ ne dépend pas de la résolution choisie et on vérifie qu'il est fonctoriel en $F^\cdot$ variant dans $D^+(S)$.

Pour achever la démonstration de (3.11), il suffit de montrer le lemme suivant :

LEMME 3.1.1.9. Soient $X \xrightarrow{u} C_S^\Delta$ et $X' \xrightarrow{u'} C_S^\Delta$ deux objets de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}(\Delta^\circ, B/S)$. Soient $f, g : X \to X'$ deux morphismes dans $\mathrm{Hom}(\Delta^\circ, B/S)$: s'il existe une homotopie simpliciale de f vers g, on a $\eta^f = \eta^g$. **128**

Soit $h_n = \mathrm{Hom}_\Delta([n],[1]) \to \mathrm{Hom}_{B/S}(X_n, X'_n)$ une homotopie simpliciale de f vers g. Soit $\overline{I \times D}$ la catégorie obtenue à partir de $I \times D$ en ajoutant les flèches $(1,n) \to (0,n)$

correspondant bijectivement à $h_n(\mathrm{Hom}([n],[1]))$ et les relations imposées par la compatibilité des h_n pour n variable. Les données du lemme définissent une augmentation plate $\overline{XfX'} \xrightarrow{t} C_S^{\overline{\Gamma\times D}}$. Soit $F^{\cdot}$ un complexe de $C^+(S)$ et $J^{\cdot}$ une résolution de $C^+(t^*)(F^{\cdot})$ telle que pour tout entier n, J^n soit totalement acyclique objet par objet : il existe une homotopie simpliciale entre

$$C^+(\Gamma(u'_*))(r_0^*(J^{\cdot})) \rightrightarrows C^+(\Gamma(u_*))(r_1^+(J^{\cdot}))$$

d'où une homotopie lorsqu'on passe aux complexes « condensés ». (cf. (3.0.2.3)).

Définition 3.1.2. Avec les notations de (3.1.1), nous dirons que f est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique si η_G^f est un isomorphisme.

3.1.3. Nous noterons dans ce qui suit par $L_i : \Delta \to \Delta\times\Delta$ (resp. $C_i : \Delta \to \Delta\times\Delta$) le foncteur canonique défini par $[n] \to [n]\times[i]$ (resp. $[n] \to [i]\times[n]$).

Proposition 3.1.4. Soient $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta\times\Delta}$ et $X' \xrightarrow{u'} C_S^{\Delta\times\Delta}$ deux objets de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}((\Delta\times\Delta)^{\circ}, B/S)$. Soit $f : X \to X'$ un morphisme au-dessus de S : on suppose que $f_* \,\mathrm{id}_{L_i} : X\circ L_i \to X'\circ L_i$ (resp. $f_*\,\mathrm{id}_{C_i} : X\circ C_i \to X'\circ C_i$) est une équivalence pour de la G-1-descente cohomologique pour tout entier i. Alors f est une équivalence pour a G-1-descente cohomologique.

D'après la description de η^f (cf. démonstration de (3.1.1)) il s'agit de montrer qu'un certain morphisme de complexes triples induit un isomorphisme sur la cohomologie des complexes condensés : un raisonnement standard par suite spectrales permet alors de conclure.

129 Proposition 3.1.5. Soient X et X' deux objets de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}(\Delta^{\circ}, B/S)$. Soit

$$f : X \longrightarrow X'$$

un morphisme fonctoriel tel que $f_n : X_n \to X'_n$ soit un morphisme de G-1-descente cohomologique. Alors le morphisme canonique

$$[[X|_f X']] \longrightarrow [[X'|_{\mathrm{id}} X']]$$

(cf. (1.2.7) est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique.

Résulte de (3.1.4) et du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 3.1.5.1. Soient $f : R \to S$ un morphisme plat $Y \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ et $Y \xrightarrow{v} C_R^{\Delta}$ deux augmentations plates telles que le diagramme suivant soit commutatif dans $\mathrm{Hom}(\Delta^{\circ}, B)$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "u"'] & & C_R^{\Delta} \arrow[dl, "f"] \\ & C_S^{\Delta} & \end{tikzcd}$$

Si v est une augmentation de G-1-descente cohomologique, c'est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique.

Dans les applications, nous combinerons (3.1.4) et (3.1.5) avec le résultat suivant :

Proposition 3.1.6. Soit $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta\times\Delta}$ une augmentation plate. Pour que u soit une augmentation de G-1-descente cohomologique, il suffit que

$$X\circ L_i \xrightarrow{u*\mathrm{id}_{L_i}} C_S^{\Delta} \; (resp.\;\; X\circ C_i \xrightarrow{u*\mathrm{id}_{C_i}} C_S^{\Delta})$$

le soit pour tout entier i.

Cela résulte de la construction explicite de $R_G\bar{u}_*$ (cf. (2.3.10)).

Corollaire 3.1.7. Soit $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ une augmentation pour que u soit de G-1-descente cohomologique, il faut et il suffit que $[[X|_{\mathrm{id}}X]] \to C_S^{\Delta\times\Delta}$ le soit. 130

3.2. Critères de localisation.

Proposition 3.2.1. Soit $Y \xrightarrow{v} C_S^{\Delta}$ une augmentation de G-1-descente cohomologique. Pour qu'une augmentation plate $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ soit de G-1-descente cohomologique, il suffit qu'elle le devienne après tous les changements de base $Y_n \to S$.

Au moyen des changements de base $Y_n \to S$, on construit un objet semi-simplicial double $X \times_S Y$ augmenté vers S. D'après (3.1.4) et (3.1.5.1) le morphisme canonique

$$X \times_S Y \longrightarrow [[X|_{\mathrm{id}}X]]$$

est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique : en vertu de (3.1.7), il suffit de montrer que l'augmentation de $X \times_S Y$ vers S est de G-1-descente cohomologique. Or ceci résulte du fait que le morphisme canonique

$$X \times_S Y \longrightarrow [[Y|_{\mathrm{id}}Y]]$$

est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique : on utilise encore (3.1.4), (3.1.5.1) et (3.1.7).

3.2.2. Soit

(3.2.2.1)
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $\boldsymbol{B}$ et soit F un objet de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}_Y^0, \mathscr{O}_Y)$: il existe un morphisme et un seul

$$\varphi(F) : g_*(f^*(F)) \longrightarrow f'^*(g'_*(F))$$

tel que le diagramme suivant (dans $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^0, \mathscr{O})$), soit commutatif[25] :

(3.2.2.2)
$$\begin{tikzcd} & f^*(F) \arrow[r, "f^\circ"] \arrow[dl, "g^\circ"'] & F \arrow[d, "g'^\circ"] \\ g_*(f^*(F)) \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & & g'_*(F) \\ & f'*(g'_*(F)). \arrow[ur, "f'^\circ"'] & \end{tikzcd}$$

Si l'on suppose maintenant que toutes les flèches de (3.2.2.1) sont plates, on définit 131

[25]N.D.E. : Comme plus haut, il faut regarder le diagramme commutatif dans $\boldsymbol{B}^\circ$ et utiliser la structure fibrée et cofibrée de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^\circ, \mathscr{O}) \to \boldsymbol{B}^\circ$ ce qui explique l'allure inhabituelle du morphisme de changement de base. On a écrit sous les flèches (d'adjonction) du diagramme suivant leurs images dans $\boldsymbol{B}^\circ$

de la même manière un morphisme, dit de changement de base[26]

$$\xi_G : g_{G*} \circ R_G f^* \longrightarrow R_G f'^* \circ g'_{G*}. \tag{3.2.2.3}$$

Définition 3.2.2.4. On dit que le diagramme (3.2.2.1) vérifie le théorème du changement de base relativement à G si f, g, f', g' sont des morphismes plats et si ξ_G est un isomorphisme.

3.2.3. Soient $h : S \to S'$ un morphisme plat dans B, $X \xrightarrow{u} C^{\Delta}_S$ et $X' \xrightarrow{u'} C^{\Delta}_{S'}$ deux augmentations plates. Soit $f : X \to X'$ un morphisme fonctoriel tel que le diagramme (dans $\mathrm{Hom}(\Delta^0, B)$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & X' \arrow[d, "u'"] \\ C^{\Delta}_S \arrow[r, "h_c"] & C^{\Delta}_{S'} \end{tikzcd} \tag{3.2.3.1}$$

soit commutatif. (h_c désigne le morphisme fonctoriel constant défini par h).

Soit $K^\bullet$ un complexe de $D^+_G(S')$: le morphisme

$$\eta^f_G(K^\bullet) : R\overline{u}'_* \circ \overline{u}'^*(K^\bullet) \longrightarrow R(\overline{h_c \circ u})_* \circ (\overline{h_c \circ u})^*(K^\bullet)$$

induit, compte tenu des identités :

$$R(\overline{h_c \circ u})_* \simeq Rh^*_c \circ R\overline{u}_* \text{ et } (\overline{h_c \circ u})^* \simeq (\overline{u}^*) \circ h_{c*}$$

un morphisme $\mathrm{ch}^{f,h}_G(K^\bullet)$, fonctoriel en $K^\bullet$, tel que le diagramme suivant soit commutatif[27] :

$$\begin{tikzcd} h_{c*} \circ R\overline{u}'_* \circ \overline{u}'^*(K^\bullet) \arrow[rr, "\mathrm{ch}^{f,h}_G(K^\bullet)"] & & R\overline{u}_* \circ \overline{u}^* \circ h_{c*}(K^\bullet) \\ & h_{c*}(K^\bullet) \arrow[ul, "h_{c*}(\alpha(K^\bullet))"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{3.2.3.2}$$

132 Lemme 3.2.3.3. Supposons que, pour tout entier i, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i"'] & X'_i \arrow[d, "u'_i"] \\ S \arrow[r, "h"] & S' \end{tikzcd}$$

[26] N.D.E. : Là encore, il serait plus correct de noter f°, g°, f'°, g'° au lieu de f, g, f', g'. En regardant la structure fibrante de cofibrante non opposée, ξ_G devient

$$g^*_G \circ R_G f_* \longrightarrow R_G f'_* \circ g'^*_G.$$

[27] N.D.E. : On a supprimé dans les foncteurs dérivés la mention à la catégorie épaisse G pour des raisons de lisibilité. On retrouve les mêmes dérivations inhabituelles h_{c*} dues au choix de la structure cofibrée.

vérifie le théorème du changement de base relativement à G. Alors $\mathrm{ch}_G^{f,h}$ est un isomorphisme.

On peut calculer $\mathrm{ch}_G^{f,h}(K^\bullet)$ de la manière suivante : on considère l'augmentation $X f X' \xrightarrow{(h_c\circ u)fu'} C_S^{\Delta'}$ (cf. (3.1.1.2)) et l'on choisit une résolution $J^\bullet$ de $K^+(\overline{(h_c\circ u)fu'}^*)(K^\bullet)$ telle que, pour tout entier n, J^n soit totalement acyclique objet par objet.

On obtient un quasi-isomorphisme

$$\theta\ :\ K^+(\Gamma(f^*))(r_0^*J^\bullet) \longrightarrow r_1^*(J^\bullet)$$

et un morphisme

$$t\ :\ K^+(\Gamma(h_c^*))\circ K^+(\Gamma(u'_\alpha))(r_0^*(J^\bullet)) \longrightarrow K^+(\Gamma(u_*))(r_1^*(J^\bullet))$$

qui admet la factorisation :

$$K^+(\Gamma(h_c^*))\circ K^+(\Gamma(u'_*))(r_0^*(J^\bullet)) \xrightarrow{\varphi} K^+(\Gamma(u_*))\circ K^+(\Gamma(f^*))(r_0^*(J^\bullet)) \xrightarrow{K^+(\Gamma(u_*))(\theta)}$$
$$\longrightarrow K^+(\Gamma(u_*))(r_1^*(J^\bullet))$$

et $\mathrm{ch}^{f,h}(K^\bullet)$ s'obtient en prenant l'image de t par le foncteur $R\epsilon_{Z^\bullet_*}$. 133

Or, la factorisation précédente montre que, t s'identifie « objet par objet » aux morphismes de changement de base relatifs aux diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i"'] & X'_i \arrow[d, "u'_i"] \\ S \arrow[r, "h"] & S' \end{tikzcd}$$

on en déduit, par suites spectrales, que $\mathrm{ch}_G^{f,h}(K^\bullet)$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Ceci nous conduit à un second critère de localisation :

Proposition 3.2.4. Soit $X \xrightarrow{u} C_S^\Delta$ un objet de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}(\Delta^\circ, B/S)$. Pour que u soit une augmentation de G-1-descente cohomologique, il suffit qu'elle le devienne après « suffisamment pour G »[27] de changements de base plats $h\ :\ S'\to S$ tels que les diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd} X'_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\ S' \arrow[r, "h"] & S \end{tikzcd}$$

vérifient le théorème du changement de base relativement à G.

La proposition (3.2.4) est évidente à partir de (3.2.3.3), compte tenu du diagramme (3.2.3.2). 134

[27]L'expression « suffisamment pour G » signifie qu'il existe une famille $(S_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} S)_{\alpha\in A}$ de morphismes plats vérifiant les conditions précédentes et tels que la famille de foncteurs $(h_{\alpha *}\ :\ G_S \to G_{S_\alpha})_{\alpha\in A}$ soit *conservative*.

3.3. Propriétés des morphismes de descente cohomologique. Dans ce numéro, nous supposons que l'ensemble des morphismes plats dans B est stable par changement de base.

Proposition 3.3.1. $i = 1, 2$.

a) Tout morphisme plat qui possède une section est un morphisme de G-2-descente cohomologique universelle.
b) Soient $f : X \to S$ un morphisme plat, $g : S' \to S$ un morphisme de G-i-descente cohomologique, $X' = X \times_S S'$, $f' = f_{(S')} : X' \to S'$. Pour que f soit de G-i-descente cohomologique universelle, il faut et il suffit que f' le soit.
c) Si le composé de deux morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ est de G-i-descente cohomologique universelle, g est de G-i-descente cohomologique universelle.
d) Le composé de deux morphismes de G-i-descente cohomologique universelle est un morphisme de G-i-descente cohomologique universelle.
e) Si $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ sont deux S-morphismes de G-i-descente cohomologique universelle, $f \times_S g$ est de G-i-descente cohomologique universelle.
f) Soit $(u_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de morphismes de G-i-descente cohomologique. Alors $\amalg u_\alpha : \amalg_{\alpha\in A} X_\alpha \to \amalg_{\alpha \in A} Y_\alpha$ est un morphisme de G-i-descente cohomologique.

135 Démonstration. En ce qui concerne la descente effective relativement à G nous renvoyons à [4].

a) Au moyen d'une section s de f on compare les objets semi-simpliciaux augmentés vers S : $[X|_f S]$ et $[S|_{\mathrm{id}} S]$; grâce à (3.0.2.4) on obtient une équivalence pour la G-1-descente cohomologique[28]
b) Résulte de (3.2.1).
c) Résulte de a) et b).
d) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to S$ deux morphismes de G-1-descente cohomologique universelle. Posons $h = g \circ f$ et considérons le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] & R \arrow[l, "h'"'] \arrow[d, "g'"] \\ S & X \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

g' possède une section $s : X \to R$ tel que $h' \circ s = f$. D'après c) h' est de G-1-descente universelle et il en est de même de h d'après b).
e) Résulte formellement de b) et d).
f) Soit $(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'objets de B. Il résulte des hypothèses (3.0.0) que l'on dispose d'une équivalence canonique

$$\mathrm{Mod}\left(\mathscr{E}^0_{\amalg_\lambda Z_\lambda}, \mathscr{O}_{\amalg_\lambda Z_\lambda}\right) \xrightarrow{\sim} \prod_\lambda \mathrm{Mod}(\mathscr{E}_{Z_\lambda}, \mathscr{O}_{Z_\lambda})$$

induisant une équivalence

$$G_{\amalg_\lambda Z_\lambda} \xrightarrow{\sim} \prod_\lambda G_{Z_\lambda}.$$

[28]N.D.E. : On remarque pour cela que $[X|_f S]$ et $[S|_{\mathrm{id}} S]$ sont simplement les cosquelettes d'ordre 0 de f et id respectivement de sorte que s et f induisent des isomorphismes inverses en cohomologie grâce à 3.1.1.

De plus, si $(Q_\lambda)_\lambda \in \prod_\lambda \mathrm{Mod}(\mathscr{E}^0_{Z_\lambda}, \mathscr{O}_{Z_\lambda})$ est totalement acyclique, Q_λ est totalement acyclique pour tout λ.

Soit maintenant $(u_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de morphismes de G-1-descente cohomologique : puisque les sommes directes dans $\boldsymbol{B}$ sont disjointes et universelles, on **136**
a pour tout n, une identification

$$\left[\coprod_\lambda X_\lambda|_{\coprod u_\lambda} \coprod Y_\lambda\right]_n \simeq \coprod_\lambda [X_\lambda|_{u_\lambda} Y_\lambda]_n$$

qui est fonctorielle en n. On déduit alors des remarques précédentes et du calcul explicite de $R_G\theta_*$ (cf. (2.3)) que $\coprod_\lambda u_\lambda$ est un morphisme de G-1-descente cohomologique : les détails sont laissés au lecteur. On laisse aussi à ce dernier le soin de vérifier que $\coprod_\lambda u_\lambda$ reste de G-1-descente cohomologique après tout changement de base s'il en est de même de u_λ pour tout λ.

3.3.2. Si l'on associe à chaque objet X de $\boldsymbol{B}$ l'ensemble des familles de morphismes $(X_\alpha \to X)_{\alpha\in A}$ telles que $\coprod_\alpha X_\alpha \to X$ soit un morphisme de G-i-descente cohomologique universelle on définit, en vertu de (3.3.1), une prétopologie sur $\boldsymbol{B}$.

La topologie engendrée par cette prétopologie s'appelle la topologie de la G-i-descente cohomologique. Il résulte de [(3.3.1)-c)] que les morphismes couvrants pour cette topologie sont exactement les morphismes de G-i-descente cohomologique universelle. Notons enfin que la topologie de la G-2-descente cohomologique est moins fine que la topologie de la G°-descente [cf. [4] (6.23)].

Théorème 3.3.3. On suppose que toutes les flèches de $\boldsymbol{B}$ sont plates. Soit S un objet de $\boldsymbol{B}$; tout hyperrecouvrement de S, pour la topologie de la G-1-descente cohomologique, dont tous les objets sont représentables (cf. V appendice) définit une augmentation de G-1-descente cohomologique universelle.

La démonstration se fait en deux étapes : précisons que tous les cosquelettes seront calculés dans la catégorie $\boldsymbol{B}/S$.

Lemme 3.3.3.1. Soit X un objet de $\mathrm{Hom}(\Delta^\circ, \boldsymbol{B}/S)$ pour que X soit de 1-descente co- **137**
homologique (resp. universelle), il suffit que $\mathrm{cosq}_n(X)$ le soit pour tout n assez grand.

Soit en effet $\alpha_n : X \to \mathrm{cosq}_n(X)$ le morphisme canonique : on vérifie alors que si $K^\cdot$ est un complexe de $D^+_{G_S}(S)$ tel que $H^j(K^\cdot) = 0$ pour $j < N$, $H^i(\eta_G^{\alpha_n})$ est un isomorphisme pour $i < N + n$, d'où l'assertion.

Lemme 3.3.3.2. Soient n un entier ≥ 0, X et X' deux objets simpliciaux de $\boldsymbol{B}/S$. Soit $f : X \to X'$ un morphisme. On suppose que :

(i) $X \to \mathrm{cosq}_{n+1}(X)$ est un isomorphisme.
(ii) $X' \to \mathrm{cosq}_{n+1}(X')$ est un isomorphisme.
(iii) $f_i : X'_i \to X_i$ est un isomorphisme pour $i \leq n$.
(iv) f_{n+1} est un morphisme de G-1-descente cohomologique universelle.

Alors si X est de G-1-descente cohomologique universelle, il en est de même de X'.

Il est clair que (3.3.3.1) et (3.3.3.2) démontrent le théorème (3.3.3) par récurrence.

Lemme 3.3.3.3. Sous les hypothèses de (3.3.3.2), les morphismes f_p sont tous de G-1-descente cohomologique universelle.

C'est trivial pour $p \leq n + 1$. Pour $p > n + 1$, X_p (resp. X'_p) peut s'écrire comme $\varprojlim_{\Delta^+_{n+1[p]}} X_q$ (resp. $\varprojlim_{\Delta^+_{n+1[p]}} X'_q$).

On peut supposer $p > n+1$. On écrit alors

$$\mathrm{cosq}_{n+1}(X)_p = \varprojlim_{\substack{[q]\to[p]\\ q\le n+1}} X_q$$

comme le noyau de la double flèche

$$\varPi X = \prod_{\substack{[q]\to[p]\\ q\le n+1}} X_q \rightrightarrows \prod_{\substack{[i]\overset{\alpha}{\hookrightarrow}[j]\\ \searrow\ \swarrow\\ [p]\\ j\le n+1}} X_i$$

où la composante α_X d'indice $\alpha\in \mathrm{Hom}_{[p]}([i],[j])$ de la double flèche est la double flèche formée d'une part du morphisme

$$\varPi X \to X_i$$

de projection d'indice $[i]\to[p]$ et, d'autre part, du morphisme

$$\varPi X \to X_j \to X_i,$$

composé de la projection d'indice $[j]\to[p]$ et de $\alpha\in\mathrm{Hom}(X_j, X_i)$.

On observe alors que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{cosq}_{n+1}(X)_p \arrow[r] \arrow[d] & \varPi X \arrow[d] \\ \mathrm{cosq}_{n+1}(\widetilde{X})_p \arrow[r] & \varPi \widetilde{X} \end{tikzcd}$$

est cartésien.

En effet, d'après la description précédente, on doit prouver que pour toute injection croissante $\alpha\in\mathrm{Hom}_{[p]}([i],[j])$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\alpha_X : \varPi X \rightrightarrows X_i) \arrow[r] \arrow[d] & \varPi X \arrow[d] \\ \mathrm{Ker}(\alpha_{\widetilde{X}} : \varPi \widetilde{X} \rightrightarrows \widetilde{X}_i) \arrow[r] & \varPi \widetilde{X} \end{tikzcd}$$

est cartésien. Mais si $i = n+1$, alors $\alpha : [i]\hookrightarrow[j]$ est l'identité de $[n+1]$: les doubles flèches n'imposent alors pas de condition. Les noyaux respectifs sont $\varPi X$ et $\varPi\widetilde{X}$, ce qui traite ce cas. Sinon, on a $i < n+1$ et $X_i \to \widetilde{X}_i$ est un isomorphisme, de sorte que le diagramme est cartésien aussi dans ce cas (tester une égalité dans X_i ou $\widetilde{X}_i$ revient au même)[29] .

Utilisant alors (3.3.1) on voit que α_ι est un morphisme de G-1-descente cohomologique universelle.Soit $[X'/X]^p$ le produit fibré itéré $(p+1)$-uple de X' au-dessus de X. Grâce à (3.3.3.3), il suffit de vérifier (3.3.3.2) après un changement de base $[X'/X]^p \to X$. Après un tel changement de base, les hypothèses de (3.3.3.2) sont encore vérifiées, et de plus f_{n+1} admet une section. On peut alors appliquer (3.0.2.4) pour achever la démonstration.

En ce qui concerne la descente effective, on a :

Proposition 3.3.4. Soit $X : \varDelta^0 \to B/S$ un foncteur. On suppose que $X_0 \to S$ est un morphisme de G^0-2-descente universelle ainsi que les morphismes $X_{n+1} \to (\mathrm{cosq}_n(X))_{n+1}$ pour $n = 0, 1$. Alors le foncteur X est G^0-2-fidèle et le reste après tout changement de

[29]N.D.E. : La preuve du lemme 3.3.3.3 a été légèrement réécrite

base (autrement dit X définit une augmentation de descente effective universelle au sens de (2.4.11)).

D'après [4] (7.12), il suffit de voir que $i_2^*(X)$ est G^0-2-fidèle et on utilise pour ce faire les lemmes suivants :

Lemme 3.3.4.1. Soient X et X' deux foncteurs $\underset{2}{\Delta^0} \longrightarrow B/S$ et un diagramme com- 138
mutatif :

$$\begin{tikzcd}
X'_2 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] \arrow[d, "k"'] & X'_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, equal] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, equal] \\
X_2 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] & X_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & X_0 \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

tel que k soit un morphisme de G°-0-descente. Alors si X est G°-2-fidèle, il en est de même de X'.

Évident.

Lemme 3.3.4.2. Soient X et X' deux foncteurs $\underset{2}{\Delta^0} \longrightarrow B/S$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X'_2 \arrow[r, shift left=4, "\partial^0"] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4, "\partial^2"'] \arrow[d, "f_2"'] & X'_1 \arrow[r, shift left=2, "\partial^0"] \arrow[r, leftarrow, "\sigma^0"] \arrow[r, shift right=2, "\partial^1"'] \arrow[d, "f_1"] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, equal] \\
X_2 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] & X_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & X_0 \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

tel que f_1 soit de G^0-1-descente et f_2 de G°-0-descente. On suppose de plus que $X'_2 \xrightarrow{\sim} (\mathrm{cosq})_1(X')_2$. Alors si X est G°-2-fidèle, il en est de même de X'.

Soient $X''_1 = X'_1 \times_{X_1} X'_1$, $\partial_0 : X''_1 \to X'_1$ et $\partial_1 : X''_1 \to X'_1$ les deux projections. Grâce à la définition d'un cosquelette, on définit une flèche $\varphi : X''_1 \to X'_2$ telle que :

$$\begin{cases} \partial_0 \circ \varphi = \partial_0 \\ \partial_1 \circ \varphi = \partial_1 \\ \partial_2 \circ \varphi = \sigma_0 \partial_1 \partial_0 = \sigma_0 \partial_1 \partial_1 . \end{cases}$$

Soit maintenant une donnée de descente sur X' ; d'où un objet sur X_0, deux objets 139
sur X_1, un isomorphisme entre eux sur X'_1. Grâce à φ, on voit que les deux images réciproques de ces isomorphismes sur X''_1 sont égales. Puisque f est de 1-descente, on attrape un isomorphisme entre les deux objet sur X_1 ; cet isomorphisme est une donnée de descente (grâce au fait que $X'_2 \to X_2$ est de 0-descente), et on a gagné.

Corollaire 3.3.5. On suppose que toutes les flèches de B sont plates : tout hyperrecouvrement de S, pour la topologie de la G-2-descente cohomologique, dont les objets sont représentables, définit une augmentation de G-2-descente cohomologique universelle.

4. Exemples

4.1. Faisceaux de groupes abéliens sur les espaces topologiques.

4.1.0. Dans ce numéro Top désigne la catégorie des espaces topologiques [éléments de l'univers fixé $\mathscr{U}$] : on définit une catégorie $\mathscr{E}$ bifibrée en duaux de topos au-dessus de Top en prenant pour objets les couples (X, F), où X est un espace topologique et F un faisceau d'ensembles sur X, et pour morphismes les couples $(f, \varphi) : (X, F) \to (Y, H)$ où $f : X \to Y$ est une application continue et $\varphi : H \to f_*(F)$ un morphisme de faisceaux. On prend pour $\mathscr{O}$ la section de $\mathscr{E}^0$ au-dessus de Top^0 qui associe à chaque espace topologique le faisceau constant $\mathbf{Z}_X$: on posera $G = \mathrm{Mod}(\mathscr{E}^0, \mathscr{O})$ de sorte que, pour tout espace topologique X, G_X s'identifie à la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X.

Rappelons qu'un morphisme $f : X \to Y$ est séparé si la diagonale de $X \times_Y X$ est fermée. Un morphisme propre est un morphisme séparé et universellement fermé (prendre garde que cette définition est plus restrictive que celle de Bourbaki).

140 La démonstration du « théorème de changement de base » ci-dessous est inspirée de ([5] II(4.11.1)).

Théorème 4.1.1. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre, F un faisceau abélien sur X et un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y. \end{tikzcd}$$

Alors, l'application canonique (XII 4.2) ou (3.2.2.3)

$$g^* R^i f_* F \xrightarrow{\sim} R^i f'_* g'^* F$$

est un isomorphisme[30].

Ce théorème équivaut au corollaire suivant (le corollaire s'obtient en faisant $Y' =$ (Point) ; le théorème s'obtient en appliquant le corollaire à f et f').

Corollaire 4.1.2. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre, F un faisceau abélien sur X et $y \in Y$. L'application canonique

$$(R^i f_* F)_y \longrightarrow H^i(f^{-1}(y), F)$$

est bijective.

Par définition, pour U parcourant les voisinages de Y, on a

$$(R^i f_* F)_y = \varinjlim H^i(f^{-1}(U), F).$$

Puisque f est fermé, les $f^{-1}(U)$ forment un système fondamental de voisinages de $f^{-1}(y)$ et (4.1.3) résulte du lemme suivant.

141 Lemme 4.1.3. Soient X un espace topologique, $K \subset X$ et F un faisceau abélien sur X. On suppose que K est compact et que deux points distincts quelconques de K ont, dans X, des voisinages disjoints. Alors, pour U parcourant les voisinages de K, on a

$$\varinjlim H^i(U, F) \xrightarrow{\sim} H^i(K, F). \tag{4.1.3.1}$$

[30] N.D.E. : Contrairement à ce qui précède, il s'agit ici des dérivés des foncteurs usuels et non pas ceux de la structure de catégorie fibrée $G^\circ \to \mathrm{Top}^\circ$.

Nous traiterons d'abord le cas $i = 0$. Dans ce cas, il est clair que (4.1.3.1) est injectif. Pour la surjectivité, nous utiliserons

Lemme 4.1.4. *Sous les hypothèses de (4.1.3), si A et B sont deux fermés de K et W un voisinage de $A \cap B$ dans X, il existe des voisinages U et V de A et B dans X tels que $U \cap V \subset W$.*

Nous traiterons d'abord le cas où A est réduit à un point a. L'assertion est triviale si $a \in B$ (prendre $U = W$). Si $a \notin B$ il existe pour chaque $b \in B$ des voisinages ouverts disjoints U_b et V_b de a et b dans X. On prend pour V une réunion finie de V_b qui comme B, et pour U l'intersection des U_b correspondants.

Dans le cas général, pour chaque $a \in A$, il existe des voisinages ouverts U_a et V_a de a et B dans X avec $U_a \cap V_a \subset W$. On prend pour U une réunion finie des U_a, qui couvre A, et pour V l'intersection correspondante des V_a.

Revenons à (4.1.3). Si $s \in H^\circ(K, F)$, il existe un recouvrement ouvert U_i de K dans X et des $s_i \in H^\circ(U_i, F)$ tels que $s_i = s$ sur $U_i \cap K$. On peut supposer les U_i en nombre fini. Soit (K_i) un recouvrement fermé de K, avec $K_i \subset K \cap U_i$. Soit W_y l'ouvert de $U_i \cap U_j$ où $s_i = s_j$; on a $K_i \cap K_j \subset W_{ij}$. Appliquons (4.1.4) à tous les couples (K_i, K_j) et aux W_{ij} : on trouve des ouverts V_{ij} avec $K_i \subset V_{ij} \subset U_i$ et $V_{ij} \cap V_{ji} \subset W_{ij}$. Soit $U_i' = \bigcap_j V_{ij}$: on a $K_i \subset U_i' \subset U_i$, et $s_i = s_j$ sur $U_i' \cap U_j'$. Les s_i se recollent donc sur le voisinage de K 142
réunion des U_i', et (4.1.3.1) est surjectif (donc bijectif) pour $i = 0$[31].

Lemme 4.1.5. *Si F est flasque, le faisceau $F|K$ sur K est mou.*

Soit $A \subset K$ un fermé dans K. Toute section de F sur A se prolonge à un voisinage, d'après ce qui précède. Puisque F est flasque, elle se prolonge à X, et a fortiori à K.

Prouvons (4.1.3). Soit F^* une résolution flasque de F. On a

$$\begin{aligned} \varinjlim H^i(U, F) &\overset{32}{=} \varinjlim H^i(\Gamma(U, F^*)) = H^i \varinjlim \Gamma(U, F^*) \overset{33}{=} H^i\Gamma(K, F^*) \\ &\overset{(4.1.5)}{=} H^i(K, F). \end{aligned}$$

Corollaire 4.1.6. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et surjectif d'espaces topologiques. Alors, f est de G-1-descente cohomologique.*

Résulte de (4.1.2) et (3.2.4).

Corollaire 4.1.7. *Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé localement fini d'un espace topologique X. Alors le morphisme canonique $f : \coprod_{i \in I} U_i \to X$ est un morphisme de G-1-descente cohomologique.*

En effet f est propre et surjectif. En appliquant (2.5.6), on retrouve la suite spectrale de [[5]. II (5.2.4)] (cf. l'introduction).

Proposition 4.1.8. *Soit $f : X \to Y$ un homomorphisme local surjectif d'espace topologique. Alors f est un morphisme de G-1-descente cohomologique universelle.*

Par localisation sur Y (cf. (3.2.4)), on est ramené au cas où f possède une section.

Corollaire 4.1.9. *Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique* 143

[31]N.D.E. : On ne confondra pas les deux sens du symbole i.

[32]N.D.E. : $H^i(\Gamma(U, F^*))$ désigne ici le i-ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(U, F^*)$.

[33]N.D.E. : D'après (4.1.3) appliqué à $\Gamma = H^0$

X. Alors le morphisme canonique $f : \coprod_{i\in I} U_i \to X$ est un morphisme de G-1-descente cohomologique universelle.

La suite spectrale de descente donne alors [[5] II (5.4.1)] (cf. l'Introduction).

Remarque 4.1.10. Les démonstrations de (VIII 9) montrent que l'on peut remplacer « 1-descente cohomologique » par « 2-descente cohomologique » dans tous les énoncés qui précèdent.

4.2. Modules quasi-cohérents sur les schémas.

4.2.0. Soit $(\mathrm{Sch})_s$ la catégorie dont les objets sont les schémas éléments de $\mathscr{U}$ et les flèches les morphismes quasi-compacts et quasi-séparés : on définit une catégorie $\mathscr{E}$ bifibrée en duaux de topos au-dessus de $(\mathrm{Sch})_s$ en prenant pour objets les couples (X, F) où X est un schéma et F un faisceau sur X (pour la topologie de Zariski), et pour morphismes les couples $(f, \varphi) : (X, F) \to (Y, G)$, où $f : X \to Y$ est une application continue et $\varphi : G \to f_*(F)$ un morphisme de faisceaux. On prend pour $\mathscr{O}$ la section de $\mathscr{E}^0$ au-dessus de $(\mathrm{Sch})_s^0$ qui associe à tout schéma son faisceaux structural ; on prend pour G la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}^0, \mathscr{O})$ telle que pour tout schéma X, G_X soit la catégorie des modules quasi-cohérents sur X.

Proposition 4.2.1. Tout morphisme $f : X \to Y$ fidèlement plat quasi-compact et quasi-séparé est un morphisme de G-2-descente cohomologique universelle.

D'après [SGA I (VIII.5.2)], f est un morphisme de G^0-descente effective. En vertu de [EGA IV (1.7.21)], on peut appliquer (3.2.4) au carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

144 4.3. Faisceaux étales sur les schémas.

4.3.0. Soit (Sch) la catégorie de tous les schémas appartenant à $\mathscr{U}$: on définit donc une catégorie $\mathscr{E}$ bifibrée en duaux de topos au-dessus de (Sch) en prenant pour objets les couples $(X, \mathscr{F})$, où X est un schéma et $\mathscr{F}$ un faisceau étale sur X, et pour morphismes les couples $(f, \varphi) : (X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{G})$, où $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas et $\varphi : \mathscr{G} \to f_*(\mathscr{F})$ est un morphisme de faisceaux.

Soit n un entier ≥ 0 : on désigne par $\mathscr{O}_n$ la section de $\mathscr{E}^0$ au-dessus de $(\mathrm{Sch})^0$ qui associe à tout schéma X le faisceau constant $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_X$. On posera $F_n = \mathrm{Mod}(\mathscr{E}^0, \mathscr{O}_n)$ de sorte que, pour tout schéma X, F_{n_X} s'identifie à la catégorie des faisceaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur X.

4.3.1. Soit maintenant $(\mathrm{Sch})_s$ la sous-catégorie de (Sch) dont les objet sont les schémas éléments de $\mathscr{U}$ et dont les flèches sont les morphismes quasi-compacts et quasi-séparés. On désigne par $\mathscr{E}_s$ la catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de $(\mathrm{Sch})_s$ déduite de $\mathscr{E}$ par le changement de base $(\mathrm{Sch})_s \to (\mathrm{Sch})$; on désigne encore par $\mathscr{O}_0$ la restriction de $\mathscr{O}_0$ à $(\mathrm{Sch})_s$. Soit $G \subset \mathrm{Mod}(\mathscr{E}_s^0, \mathscr{O}_0)$ la sous-catégorie fibrée et cofibrée de $\mathrm{Mod}(\mathscr{E}_s^0, \mathscr{O}_0)$ telle que pour tout schéma X, G_X soit la catégorie des faisceaux abéliens de torsion sur X : le lecteur notera que la condition (2.4.1.1) est vérifiée.

Proposition 4.3.2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre surjectif. Alors f est un morphisme de F_n-2-descente cohomologique universelle pour $n \geq 1$. Considéré comme morphisme de $(\mathrm{Sch})_s$, f est un morphisme de G-2-descente cohomologique universelle.

D'après (VIII 9.4) f est un morphisme de F^0-descente effective et d'après (XII.(5.1)), on peut appliquer (3.2.4) au diagramme cartésien : 145

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Proposition 4.3.3. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de schémas. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

a) f est entier.
b) Y est localement noethérien, f est universellement ouvert et localement de présentation finie.
c) f est plat et localement de présentation finie.

Alors f est un morphisme de F_n-2-descente cohomologique, pour tout $n \geq 0$.

a) On recopie la démonstration de (4.3.2) en remplaçant (XII. (5.1)) par ((VIII 5.6)).
b) La question étant locale sur Y, on peut supposer que Y est noethérien. On applique (EGA IV (14.5.10)). Par (3.3.1) et a) on se ramène au cas où tout point y de Y possède un voisinage U tel que $f^{-1}(U) \to U$ possède une section et on gagne par (3.2.4).
c) Il s'agit de montrer que f est un morphisme de F-1-descente cohomologique (on sait par ((VIII 9.4)) que f est un morphisme de F^0-descente effective).

Par localisation sur Y (cf. (3.2.4)), on peut supposer que Y est affine d'anneau A. On peut alors écrire $\operatorname{Spec} A = \varprojlim_{i \in I} \operatorname{Spec} A_i$, où I est un ensemble ordonné filtrant et A_i un anneau noethérien pour tout i, avec $X = \varprojlim X_i$, où, pour tout i, X_i est un schéma plat et localement de présentation finie sur $\operatorname{Spec} A_i$ tel que $f_i : X_i \to \operatorname{Spec} A_i$ soit surjectif ; de plus, les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ Y \arrow[r, "u_i"] & \operatorname{Spec} A_i \end{tikzcd}$$

sont cartésiens. 146

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau abélien sur Y : on a $\mathfrak{F} = \varinjlim_i u_i^* u_{i*}(\mathfrak{F})$ de sorte que, par un passage à la limite standard, on est ramené au cas où $\mathfrak{F}$ provient d'un faisceau sur $\operatorname{Spec} A_i$ pour un certain i, et b) permet de conclure.

Remarque 4.3.4. Si $f : X \to Y$ est entier, on a $R^q f_* = 0$ pour $q > 0$. On en conclut facilement qu'il n'est pas nécessaire de se limiter aux complexes bornés inférieurement pour faire de la descente au moyen de f.

Corollaire 4.3.5. Soit $(X_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} X)_{\alpha \in A}$ une famille couvrante pour la topologie étale. Alors $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X$ est un morphisme F_n-2-descente cohomologique universelle pour tout $n \geq 0$.

En effet, il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{a\in A} X_\alpha \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "h"] & & X \end{tikzcd}$$

où h est un morphisme étale surjectif.

5. Applications

147 5.1. Construction d'objets simpliciaux.

5.1.0. Jusqu'au numéro (5.1.3) compris, H est une catégorie où les limites projectives finis non vides existent et où les sommes finies existent, sont disjointes et universelles. Si $X : \Delta^0 \to H$ est un objet simplicial de H, nous noterons $d_i^k : X_k \to X_{k-1}$ (resp. $s_i^k : X_k \to X_{k+1}$) pour $i \in [k]$ et $0 \leq k$ les flèches correspondantes aux opérateurs « faces » $\partial_k^i : [k-1] \to [k]$ (resp. aux opérateurs de dégénérescence $\sigma_k^i : [k] \to [k+1]$) (cf. [3] II 2).

Définition 5.1.1. Un objet simplicial $X : \Delta^0 \to H$ de H est σ-scindé s'il existe une famille de sous-objets NX_j des X_j ($j \geq 0$) telle que les morphismes

$$h_i : \coprod_{\substack{\mathrm{Hom}_{\Delta^-}([i],[j]) \\ j\leq i}} NX_j \longrightarrow X_i$$

soient des isomorphismes.

De même, un objet simplicial k-tronqué $X : \Delta_k^0 \to H$ est σ-scindé s'il existe des NX_j ($0 \leq j \leq k$) vérifiant la condition précédente pour $i \leq k$.

Les NX_j sont uniquement déterminés par X. En effet, si X est σ-scindé, les opérateurs de dégénérescence $s_\ell^{k-1} : X_{k-1} \to X_k$ sont des isomorphismes de X_{k-1} avec des facteurs directs de X_k, et

$$NX_k = \bigcap_\ell \quad (\text{complément de } s_\ell^k(X_{k-1})).$$

Pour $k = 0$, $NX_0 = X_0$.

5.1.2. Pour X un objet simplicial $(n+1)$-tronqué σ-scindé de H, nous désignerons par $\alpha_n(X)$ le triple consistant en

a) la restriction $i_n^*(X)$ de X à Δ_n^0.

148 b) NX_{n+1},

c) l'application évidente de NX_{n+1} dans $(\mathrm{cosq}_n(X))_{n+1}$

Ce triple (Y, N, β) vérifie la condition suivante

($*$) Y est un objet simplicial n-tronqué σ-scindé de H, et β est une application de N dans $(\mathrm{cosq}\, Y)_{n+1}$.

Proposition 5.1.3. Soit (Y, N, β) un triple vérifiant ($*$) ci-dessus.

(i) A isomorphisme unique près, il existe un et un seul $X : \Delta_{n+1}^0 \to H$ σ-scindé, avec $\alpha_n(X) \simeq (Y, N, \beta)$,

(ii) Il revient au même de se donner un morphisme f de X dans un objet simplicial tronqué $Z : \Delta_{n+1}^0 \to H$, ou de se donner

a) un morphisme $f' : Y \to i_n^*(Z)$;

b) un morphisme $f'' : N \to Z_{n+1}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr] \arrow[d, "f''"] & & (\mathrm{cosq}_n Y)_{n+1} \arrow[d, "f'"] \\
Z_{n+1} \arrow[rr] & & (\mathrm{cosq}_n Z)_{n+1}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Construisons X.

On pose : $Y'_n = (\mathrm{cosq}_n Y)_{n+1}$ et on note

$$d'^{n+1}_i : Y'_{n+1} \longrightarrow Y_n \text{ (resp. } s'^n_i : Y_n \longrightarrow Y'_{n+1})$$

les opérateurs de face (resp. de dégénérescence) obtenu par fonctorialité.

On pose $Y_{n+1} = N \coprod (\coprod_{\mathrm{Hom}_{\Delta^-_{\ell \leq n}}([n+1],[\ell])} NY_\ell)$ et soit $\alpha : Y_{n+1} \to Y'_{n+1}$ la flèche dont les composantes sont β et les flèches $NY_\ell \to Y_\ell \to Y'_{n+1}$ pour tout épimorphisme $[n+1] \to [\ell]$ avec $\ell \leq n$.

Soit $s^n_i : Y_n \simeq \coprod_{\mathrm{Hom}_{\Delta^-_{\ell' \leq n}}([n],[\ell'])} NY_{\ell'} \to X_{n+1}$ la flèche induite par σ^i_n, de sorte que **149**

(I) $\alpha \circ s^n_i = s'^n_i$.

On pose

(II) $d^{n+1}_i = d'^{n+1}_i \circ \alpha$.

Pour montrer que l'on définit ainsi un objet de $\mathrm{Hom}(\Delta^0_{n+1}, H)$, il suffit, d'après [[3]. II (2.4)] de vérifier les formules.

a) $d^n_i \cdot d^{n+1}_j = d^n_{j-1} \cdot d^{n+1}_i \qquad i < j$

b) $s^n_i \cdot s^{n-1}_j = s^n_{j+1} \cdot s^{n-1}_i \qquad i \leq j$

c) $d^{n+1}_i \cdot s^n_j = \begin{cases} s^{n-1}_{j-1} \cdot d^n_i & i < j \\ \mathrm{id} & i = j \text{ ou } i = j+1 \\ s^{n-1}_j \cdot d^n_{i-1} & i > j+1. \end{cases}$

Les formules a) et c) sont évidentes en vertu de (I) et (II), car on sait que a) et c) sont vérifiées si l'on remplace d^{n+1}_i par d'^{n+1}_i et s^n_i par s'^n_i.

La formule b) est vérifiée par construction.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'objet X obtenu vérifie 5.1.3.

On prendra garde que le foncteur construit dans la démonstration de 5.1.3, de la catégorie des triples vérifiant (5.1.2) $(*)$ dans les objets simpliciaux $n+1$-tronqués, est fidèle mais non pleinement fidèle.

La proposition 5.1.3 fournit un procédé très commode pour construire par induction des objets simpliciaux de H. Dans la fin de ce numéro, nous formalisons cette remarque sous la forme qui sera utilisée en 5.2 et 5.3.

5.1.4. Soient $E \xrightarrow{\pi} B$ un foncteur tel que pour tout objet b de B, la catégorie fibre E_b soit non vide et vérifie les conditions de (5.1.0). **150**

Soit Q une propriété d'un objet de E, stable par isomorphisme : on suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

a) Pour tout objet b de B il existe un objet x de E_b vérifiant Q.
b) Pour tout objet b de B et tout couple (x, y) d'objets de E_b vérifiant Q, il existe un objet z de E_b vérifiant Q et des morphismes $z \to x$, $z \to y$ dans E_b.

c) Pour tout morphisme $b' \xrightarrow{t} b$ de B et tout objet x de E_b vérifiant Q, il existe un objet x' de E_b, vérifiant Q et un morphisme $x' \to x$ au-dessus de t.

Soit d'autre part P une propriété d'une flèche de E au-dessus d'une identité stable par isomorphisme : on suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

d) Pour tout objet b de B et tout objet x de E_b il existe une flèche $y \to x$ dans E_b vérifiant P.

e) Pour tout objet G de B, tout diagramme dans E_b de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[rr, "f"] & & x \\ & z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ v \arrow[rr, "g"'] & & y \end{tikzcd}$$

où f et g vérifient P, peut se compléter en un diagramme commutatif dans E_b

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[r, "f"] & x \\ w \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, "h"] & z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & v \arrow[r, "g"'] & y \end{tikzcd}$$

151 où h vérifie P.

f) Pour tout morphisme $b' \xrightarrow{t} b$ de B et tout morphisme $x \xrightarrow{f} y$ de E_b vérifiant P, il existe un morphisme $x' \xrightarrow{f'} y'$ de $E_{b'}$ vérifiant P et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & x \arrow[d, "f"] \\ y' \arrow[r, "\beta"'] & y \end{tikzcd}$$

où α et β sont des morphismes au-dessus de t.

Définition 5.1.5. Avec les notations de (5.1.4), nous dirons qu'un objet X de $\mathrm{Hom}(\Delta^0, E)$ vérifie la condition (APQ) si les conditions suivantes sont remplies :

(i) L'image de $\pi \circ X$ est l'objet simplicial constant défini par un objet G de B.
(ii) En tant qu'objet de $\mathrm{Hom}(\Delta^0, E_b)$, X est σ-scindé.
(iii) X_0 vérifie la condition Q.
(iv) Pour tout entier n, la flèche $NX_{n+1} \to (\mathrm{cosq}_n X)_{n+1}$ vérifie la condition P.

5.1.6. On désigne par $E_{(APQ)}$ la sous-catégorie de $\mathrm{Hom}(\Delta^0, E)$ dont les objets sont les objets simpliciaux vérifiant (APQ) et dont les morphismes sont les morphismes $X \xrightarrow{\alpha} Y$ de $\mathrm{Hom}(\Delta^0, E)$ tels que $\pi(\alpha_n) : \pi(X_n) \to \pi(Y_n)$ soit le même morphisme de B pour tout n. Il existe alors un foncteur canonique $\overline{\pi} : E_{(APQ)} \to B$.

Proposition 5.1.7. Le foncteur $\overline{\pi}$ est surjectif. De plus, pour tout objet b de B et tout 152
couple (X, Y) d'objets de $E_{(APQ),b}$, il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

dans $E_{(APQ),b}$.

La démonstration est triviale à partir de (5.1.3), en vertu des hypothèses faites en (5.1.4).

Proposition 5.1.8. Soient C une catégorie et F un foncteur $E_{(APQ)} \to C$; on introduit les conditions suivantes pour F :

(i) Pour tout objet b de B, la restriction de F à $E_{(APQ),b}$ se factorise à travers la catégorie grossière [33] définie par les objets de $E_{(APQ),b}$.

(ii) Pour tout morphisme $t : b' \to b$ de B et tout couple $(X' \to X, Y' \to Y)$ de morphismes au-dessus de t, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(X') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha"] \\ F(Y') \arrow[r] & F(Y) \end{tikzcd}$$

où α et α' sont les flèches déterminées par la condition (i).

Alors, le foncteur $G \to G \circ \overline{\pi}$ induit une équivalence entre la catégorie $\mathrm{Hom}(B, C)$ et la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(E_{(APQ)}, C)$ définie par les foncteurs vérifiant les conditions (i) et (ii).

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. Indiquons simplement la ma- 153
nière dont on procède pour montrer que le foncteur précédent est essentiellement surjectif.

Soit $F : E_{(APQ)} \to C$ un foncteur vérifiant les conditions (i) et (ii) : pour tout objet b de B, on choisit un objet X de $E_{(APQ),b}$ et on pose $\overline{F}(b) = F(X)$; on vérifie alors que $\overline{F}(b)$ varie fonctoriellement avec b.

5.2. Cohomologie singulière d'un schéma de type fini sur un corps de caractéristique nulle. Dans ce numéro, k désignera un corps de caractéristique nulle.

5.2.0. Nous désignerons par Sch_f/k (resp. Ann) la catégorie des schémas localement de type fini sur k (resp. des espaces analytiques complexes). Tous les objets simpliciaux de Sch_f/k (resp. Ann) seront considérés comme objets simpliciaux de Top grâce au foncteur canonique $\mathrm{Sch}_f/k \to \mathrm{Top}$ (resp. $\mathrm{Ann} \to \mathrm{Top}$). Nous conservons les données de (4.1.0) relatives à la descente cohomologique.

Suivant les notations usuelles, nous noterons $S \to S^{\mathrm{an}}$ le foncteur canonique $\mathrm{Sch}_f/\mathbf{C} \to \mathrm{Ann}$ défini dans G.A.G.A.

[33] Une catégorie est dite *grossière* si pour tout couple (x, y) d'objets, $\mathrm{Hom}(x, y)$ est réduit à un élément et un seul.

5.2.1. Soit X un objet simplicial de Sch/k (resp. Ann) : les compatibilités usuelles pour la construction du complexe de De Rham d'un morphisme de schéma (resp. d'espaces analytiques) permettent de construire un complexe $\Omega^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{X/k}$ (resp. $\Omega^{\cdot}_{X/\mathbf{C}}$) de $D^{+}(\Gamma(\overline{X}, \mathbf{Z}))$ tel que pour tout entier i, $Re_i^{*}(\Omega^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{X/k})$ (resp. Re_i^{*} $(\Omega^{\cdot}_{X/\mathbf{C}})$) soit le complexe De Rham $\Omega^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{X/k}$ (resp. $\Omega^{\cdot}_{X_i/\mathbf{C}}$).

Soit $X \xrightarrow{u} C^{\Delta}_{S}$ un objet simplicial de Sch_f/k (resp. Ann) muni d'une augmentation. On définit $H^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{DR}(u)$ (resp. $H^{\cdot}_{DR}(u)$) et $H^{\cdot}(u, \mathbf{C})$) comme étant les groupes d'hypercohomologie du complexe $R\overline{u}_{+}(\Omega^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{X/k})$ (resp. $R\overline{u}_{*}(\Omega^{\cdot}_{X/\mathbf{C}})$ et $R\overline{u}(\mathbf{C})$).

154 5.2.2. Si $X \xrightarrow{u} C^{\Delta}_{S}$ est un objet semi simplicial de $\mathrm{Sch}_f/\mathbf{C}$, on dispose de trois morphismes canoniques :

$$
\begin{aligned}
H^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{DR}(u) &\xrightarrow{\alpha} H^{\cdot}_{DR}(u^{\mathrm{an}}) \\
H^{\cdot}(u^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) &\xrightarrow{\beta} H^{\cdot}_{DR}(u^{\mathrm{an}}) \\
H^{\cdot}(S^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) &\xrightarrow{\gamma} H^{\cdot}(u^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}).
\end{aligned}
$$

Proposition 5.2.3. Supposons, avec les notations de (5.2.2) que X_n soit lisse pour tout n : alors α et β sont des isomorphismes. Si de plus $X^{\mathrm{an}} \xrightarrow{u^{\mathrm{an}}} C^{\Delta}_{S^{\mathrm{an}}}$ est un hyperrecouvrement de S^{an} pour la topologie de la 1-descente cohomologique universelle, γ est un isomorphisme.

Le fait que α soit un isomorphisme résulte de [[6], Th, 1′]. Il résulte du lemme de Poincaré que β est un isomorphisme. La dernière partie de la proposition résulte de (3.3.3).

5.2.4. Nous allons maintenant appliquer (5.1.4) au cas où $B = \mathrm{Sch}_f/k$ et où E est la catégorie au-dessus de B telle que pour tout schéma S, la catégorie fibre E_S soit la catégorie des schémas de Sch_f/k au-dessus de S, les flèches au-dessus d'une flèche de B étant évidentes. Nous dirons qu'un morphisme $h : X \to Y$ au-dessus de S vérifie la propriété P si X est lisse sur k et si h est composé d'un nombre fini de morphismes vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) être somme d'une famille de morphismes étales et surjectifs
(ii) être somme d'une famille de morphismes propres et surjectifs.

Nous dirons qu'un schéma X de E_S vérifie la propriété Q si le morphisme structural $X \to S$ vérifie la propriété P.

On laisse au lecteur le soin de vérifier, via la résolution des singularités, que toutes les conditions de (5.1.4) sont vérifiées.

155 La donnée des groupes $H^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{DR}(u)$ définit un foncteur contravariant de la catégorie $E_{(APQ)}$ dans la catégorie des groupes abéliens gradués, noté $H^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{DR}$.

Proposition 5.2.5. Le foncteur $H^{\mathrm{Zar}\,\cdot}_{DR}$ vérifie les conditions de (5.1.8).

Par le principe de Lefschetz, on est ramené au cas ou $k = \mathbf{C}$. Dans ce cas, pour tout morphisme $S' \xrightarrow{t} S$ et tout couple $(u' \to u, v' \to v)$ de morphismes au-dessus de t, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{DR}^{\mathrm{Zar}\,\cdot}(u') \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"'] & H_{DR}^{\mathrm{Zar}\,\cdot}(u) \arrow[d, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"] \\
H^{\cdot}(S'^{\,\mathrm{an}}, \mathbf{C}) \arrow[r, "H^{\cdot}(t^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})"] & H^{\cdot}(S^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) \\
H_{DR}^{\mathrm{Zar}\,\cdot}(v') \arrow[r] \arrow[u, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"] & H_{DR}^{\mathrm{Zar}\,\cdot}(v) \arrow[u, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"']
\end{tikzcd}$$

ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION 5.2.6. Le foncteur contravariant défini par (5.1.8) à partir de $H_{DR}^{\mathrm{Zar}\,\cdot}$ sera noté $H^{\cdot}(*, k)$. Pour tout schéma S localement de type fini sur k, le groupe abélien gradué $H^{\cdot}(S, k)$ s'appellera la cohomologie singulière de S.

5.2.7. Nous allons terminer ce numéro par une illustration des principes généraux qui y ont été introduits. Rappelons tout d'abord que si S est un espace analytique complexe, la cohomologie de De Rham de S, notée $\mathbf{H}_{DR}^{\cdot}(S)$ est par définition l'hypercohomologie du complexe de De Rham $\Omega_{S/\mathbf{C}}^{\cdot}$.

PROPOSITION 5.2.8. (Blum-Herrera). Soit S un schéma localement de type fini sur $\mathbf{C}$, 156
la flèche canonique

$$H^{\cdot}(S^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{H}_{DR}^{\cdot}(S^{\mathrm{an}})$$

possède une rétraction (dans la catégorie des groupes abéliens gradués) fonctorielle en S.

En vertu de (5.1.8) il suffit de considérer le morphisme $H^{\cdot}(+, \mathbf{C}) \circ \overline{\pi} \to \mathbf{H}_{DR}^{\cdot} \circ \overline{\pi}$ obtenu à partir du précédent par composition avec $\overline{\pi}$.

En utilisant, pour toute augmentation $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$, le morphisme canonique $\mathbf{L}\overline{u}^{+}(\Omega_{S/C}^{\cdot}) \to \Omega_{X/C}^{\cdot}$, on définit un morphisme fonctoriel $\mathbf{H}_{DR}^{\cdot} \circ \overline{\pi} \to \mathbf{H}_{DR}^{\cdot}$, de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{DR}^{\cdot} & H_{DR}^{\cdot} \circ \overline{\pi} \arrow[l] \\
H^{\cdot}(*, \mathbf{C})_{\circ}\overline{\pi} \arrow[u, "\beta\circ\gamma", "\wr"'] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

ce qui fournit la rétraction cherchée.

REMARQUE 5.2.9. L'énoncé (5.2.8) reste valable pour tout espace analytique, dès que l'on dispose de la résolution des singularités dans le cadre analytique.

5.3. Théories de Hodge mixtes. Nous donnons ici un résultat de nature technique qui joue un rÃ´le clef dans [2].

k est un corps de caractéristique nulle.

5.3.1. Soit $\mathrm{Sch}_{\mathrm{fs}}/k$ la catégorie des schémas séparés et de type fini sur k ; on désigne par $E \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sch}_{\mathrm{fs}}/k$ la catégorie au-dessus de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{fs}}/k$ définie de la façon suivante :

157 Si S est un objet de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{fs}}/k$, un objet de E_S est un triple $(\overline{X}, X, i)$ où $\overline{X}$ est un schéma réduit projectif au-dessus de k, X un schéma propre au-dessus de S et $i : X \to \overline{X}$ une immersion ouverte au-dessus de k telle que $i(X)$ soit dense dans $\overline{X}$.

Si $t : S' \to S$ est un morphisme de schémas, $(\overline{X}, X, i)$ un objet au-dessus de S et $(\overline{X}', X', i')$ un objet au-dessus de S', un morphisme de $(\overline{X}, X, i)$ dans $(\overline{X}', X', i')$ au-dessus de t est un couple $(\overline{h}, h)$ où $h : \overline{X}' \to \overline{X}$ est un morphisme au-dessus de k, et $h : X' \to X$ un morphisme au-dessus de S, tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "h"'] & \overline{X}' \arrow[d, "\overline{h}"] \\
X \arrow[r, "i"] & \overline{X}.
\end{tikzcd}$$

N.B. : on remarque qu'il résulte des hypothèses de propreté que $\overline{h}^{-1}(i(X)) = i(X')$.

Lemme 5.3.2. *Pour tout objet S de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{fs}}/k$, la catégorie E_S est non vide, possède des limites projectives non vides et des sommes directes finies qui sont disjointes et universelles.*

Le fait que la catégorie E_S soit non vide résulte du lemme de Chow.

Nous n'indiquerons que la construction du produit direct de deux objets $(\overline{X}, X, i)$ et $(\overline{X}', X', i')$ de E_S.

La flèche canonique $j : X \times_S X' \to \overline{X} \times_k \overline{X}'$ est une immersion et on désigne par T le sous-schéma réduit de $\overline{X} \times_k \overline{X}'$ ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de l'image de j : $(T, X \times_S X'_{\mathrm{red}}, j_{\mathrm{red}})$ vérifie la propriété universelle voulue.

158 5.3.3. Soit S un objet de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{fs}}/k$: nous dirons qu'un objet $(\overline{X}, X, i)$ de E_S vérifie la propriété Q si $\overline{X}$ est lisse sur k et si $i(X)$ est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux. Nous dirons qu'un morphisme $(\overline{h}, h) : (\overline{X}', X', i') \to (\overline{X}, X, i)$ vérifie la propriété P si $\overline{h}$ est surjectif et si $(\overline{X}', X', i')$ vérifie la propriété Q.

Proposition 5.3.4. *Avec les notations de (5.3.3), toutes les conditions de (5.1.4) sont vérifiées.*

Les conditions a) b) d) et c) se vérifient facilement en utilisant la résolution des singularités. De plus c) est conséquence de f) : il reste donc à vérifier f).

Il s'agit de voir que tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, "i_Z"] \arrow[d, "h"'] & \overline{Z} \arrow[d, "\overline{h}"] \\
 & X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[d] \\
S' \arrow[r, "t"] & S \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

où $(\overline{X}, X, i_X)$ et $(\overline{Z}, Z, i_Z)$ sont des objets de E_S avec $\overline{h}$ surjectif, peut se compléter en un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[rr] \arrow[dr, "i_{Z'}"] \arrow[dd, "h'"'] & & Z \arrow[dr, "i_Z"] \arrow[dd, "h"'] & \\
& \overline{Z}' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{Z} \arrow[dd, "\overline{h}"] \\
X' \arrow[rr, "h'"] \arrow[dr, "i_{X'}"] \arrow[dd] & & X \arrow[dr, "i_X"] \arrow[dd] & \\
& \overline{X}' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{X} \arrow[dd] \\
S' \arrow[rr, "t"] \arrow[dr] & & S \arrow[dr] & \\
& k \arrow[rr, equal] & & k
\end{tikzcd}
$$

où $(\overline{X}', X', i_{X'})$ et $(\overline{Z}', Z', i_{Z'})$ sont des objets de $E_{S'}$ avec $\overline{h'}$ surjectif. **159**

On considère un diagramme

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i_T"'] & S' \arrow[r, "t"] & S \arrow[d] \\
\overline{T} \arrow[rr, "\psi"'] & & k
\end{tikzcd}
$$

où φ est propre et ψ projectif : par changements de base on en déduit un diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
Z \times_S T_{\mathrm{red}} \arrow[rr] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd] & & Z \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{Z} \times_k \overline{T}_{\mathrm{red}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{Z} \arrow[dd] \\
X \times_S T_{\mathrm{red}} \arrow[rr] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & & X \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{X} \times_k \overline{T}_{\mathrm{red}} \arrow[d] & & \overline{X} \arrow[dd] \\
T \arrow[r] \arrow[dr] & S' \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[dr] & \\
& \overline{T} \arrow[rr] & & k
\end{tikzcd}
$$

où p et q sont des immersions ; il suffit alors de remplacer $\overline{Z} \times_k \overline{T}_{\mathrm{red}}$ et $\overline{X} \times_k \overline{T}_{\mathrm{red}}$ pour les **160**
images fermées de p et q pour avoir le diagramme voulu, ce qui achève la démonstration de (5.3.4).

Bibliographie

161

[1] T. Blum – M. Herrera : De Rham Cohomology of an analytic Space. Inv. Math. vol 7. Fas 4-1969. p.275-296.

[2] P. Deligne : Théorie de Hodge III (I.H.E.S).

[3] P. Gabriel – M. Zisman : Homotopy theory and calculus of fractions Ergebnisse der Mathematik – Band 35 – Springer 1967.

[4] J. Giraud : Méthode de la descente : Mémoires de la S.M.F. 2. 1964.

[5] R. Godement : Théorie des faisceaux. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann 1964.

[6] A. Grothendieck : On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties, Publications de 1' I.H.E.S *n*° 29.

[7] R. Hartshorne : Residues and Duality. Springer Lecture Notes *n*° 20.

[8] G. Segal : Classifying spaces and Spectral sequences Publications de 1'I.H.E.S. *n*° 34.

[9] J.L.Verdier : Catégories dérivées - Etat 0 - (I.H.E.S)

EXPOSÉ VI

Conditions de finitude. Topos et sites fibrés. Applications aux questions de passage à la limite.

A. Grothendieck et J.-L. Verdier

0. Introduction

Dans le présent exposé, nous étudions deux genres de questions intimement liées. **165**

Tout d'abord, nous faisons une étude systématique des conditions de finitude pour les topos, en étudiant successivement la notion de quasi-compacité, de quasi-séparation et de cohérence (= quasi-compacité + quasi-séparation), inspirée des notions analogues bien connues en théorie des schémas, dans le cas d'un objet X d'un topos et celui d'une flèche $u : X \to Y$ d'un topos (§ 1), puis pour le topos E lui-même (§ 2), enfin pour un morphisme de topos $f : E \to E'$ (§ 3). Le § 4 étudie ces notions dans le cas particulier d'un topos obtenu par le procédé de recollement de deux topos (IV 9). Pour les paragraphes suivants, ce qu'il suffit essentiellement de retenir de ces développements un peu techniques, c'est la définition d'un topos cohérent comme un topos équivalent à un topos de la forme $C^{\sim}$, où C est un petit site dans lequel les limites projectives finies sont représentables et où toute famille couvrante admet une sous-famille couvrante finie ; et celle d'un morphisme cohérent $f : E \to E'$ de topos cohérents comme étant un morphisme qui peut se décrire (à équivalence près) comme un morphisme associé à un morphisme de sites $f : C \to C'$, où C et C' sont comme ci-dessus, et où le foncteur correspondant $f^* : C' \to C$ est exact à gauche.

Il est sans doute utile de noter qu'avec les notions de finitude utilisés ici, et notamment celle de topos cohérent, nous nous éloignons résolument (et pour la première fois) des espaces topologiques familiers aux analystes et aux « topologues » [33]. Ainsi le topos associé (IV 2.1) à un espace topologique séparé X n'est cohérent que si X est un ensemble fini ! C'est dire que le présent exposé est entièrement orienté vers les types de topos provenant de la géométrie algébrique et l'algèbre. En fait, tous les topos utilisés jusqu'à présent dans ces disciplines (sauf bien sûr pour la géométrie algébrique par voie transcendante sur le corps des complexes !) se trouvent être localement cohérents.

En deuxième lieu ; nous développons deux théorèmes de passage à la limite inductive pour la cohomologie des topos. L'un (5.2) nous dit que les foncteurs $H^i(E,-)$ sur un **166** topos cohérent commutent aux limites inductives de faisceaux abéliens. L'autre (8.7) dit essentiellement que si un topos X est représenté comme une limite projective filtrante de topos cohérents X_i, avec des morphismes de transition $f_{ij} : X_j \to X_i$ cohérents, alors la cohomologie de X (à coefficients dans un faisceau abélien quelconque) se calcule comme limite inductive des cohomologies des X_i. Pour donner un sens précis à cet énoncé, il convient surtout de préciser la notion de « limite projective de topos », ce qui est fait dans les § § 7.8. C'est là une notion géométrique fort utile, y compris sans doute dans d'autres contextes que celui des limites projectives de schémas (qui avait servi de modèle

[33] Les guillemets indiquent qu'il s'agit d'un « … » qui ignore la notion de topos (cf. IV 0.4 pour le sens du mot « topologie »).

à M.Artin dans sa définition initiale de cette notion). Nous montrons par exemple (8.4) comment on peut unifier les diverses notions de « localisé en un point » (d'un espace noethérien, d'un schéma pour sa topologie habituelle, voire pour sa topologie étale), en le définissant comme la limite projectives des « voisinages » de ce point, -en parfait accord avec l'idée intuitive de la notion de localisation en un point.

Les deux théorèmes de passage à la limite seront réexplicités dans l'exposé suivant dans le cadre particulier de la cohomologie étale des schémas (VII 3.3 et 5.7) ; dans ce cas, ils seront d'ailleurs constamment utilisés dans toute la suite de ce Séminaire, et pratiquement partout où on a travaillé jusqu'à présent avec la cohomologie étale. Le lecteur disposé à admettre ces deux théorèmes, dans le cas particulier où ils sont énoncés dans l'exposé VII, et intéressé exclusivement par les applications de la cohomologie étale, peut donc omettre la lecture du présent exposé. Il est vrai que la notion d'objet constructible d'un topos (i.e. dont le morphisme structural $X \to e$ dans l'objet final e est cohérent) jouera également un rôle important dans toute la suite du séminaire (alors qu'elle ne joue qu'un rôle très secondaire dans le présent exposé, ne serait-ce que parce que dans le cas d'un topos cohérent, elle coïncide avec la notion d'objet cohérent, qui a ici la vedette). Mais cette notion est développée dans l'exposé IX, dans le cas particulier des faisceaux étales sur les schémas, d'une façon indépendante de l'étude générale faite dans le présent exposé, et elle présente d'ailleurs dans ce des phénomènes spéciaux fort utiles, qui ont servi de base à l'exposé qui en est fait dans IX (à commencer par la définition
167 IX 2.3). La rédaction de IX étant antérieure de cinq années à la présente rédaction de l'exposé VI, et néanmoins fort utilisable pour l'usager, nous nous sommes bornés à la fin de l'exposé IX de prouver l'équivalence de la notion de constructibilité utilisée dans IX avec celle introduite ici.

1. Conditions de finitude pour les objets et flèches d'un topos

Définition 1.1. Soit C un site. Un objet X de C est dit quasi-compact si pour toute famille couvrante $(X_i \to X)_{i\in I}$, il existe une partie finie J de l'ensemble d'indices I telle que la sous-famille $(X_i \to X)_{i\in J}$ soit encore couvrante.

Comme un $\mathscr{U}$-topos E est toujours considéré comme un site (IV 1.1.1), la définition précédente s'applique en particulier à un objet de E. On se ramène d'ailleurs à ce cas, grâce à la

Proposition 1.2. Soient C un $\mathscr{U}$-site, $\epsilon : C \to C^{\sim}$ le foncteur canonique, X un objet de C. Alors X est un objet quasi-compact du site C si et seulement si $\epsilon(X)$ est un objet quasi-compact du topos $C^{\sim}$.

Supposons que X soit quasi-compact, prouvons que $\epsilon(X)$ l'est. Soit $(F_i \to \epsilon(X))_{i\in I}$ une famille épimorphique. Prenons pour tout $i \in I$ une famille épimorphique $\epsilon(X_{ij}) \to F_i$, $j \in J_i$. Le composé $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ s'identifie à un élément α_{ij} de $\epsilon(X)(X_{ij})$; on ne peut affirmer en général qu'il provient d'un morphisme $X_{ij} \to X$, mais par construction du faisceau associé $\epsilon(X)$, on sait que l'on peut trouver (pour i, j fixés) une famille couvrante $Y_k \to X_{ij}$ telle que les éléments images de α_{ij} dans les $\epsilon(X)(Y_k)$ proviennent d'éléments de $X(Y_k)$, i.e. de morphismes $Y_k \to X$. Donc quitte à raffiner la famille épimorphique $\epsilon(X_{ij}) \to F_i$, on peut supposer que les composés $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ proviennent
168 de morphismes $X_{ij} \to X$. Pour i, j variables, la famille des $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ est épimorphique, donc (II 4.4) la famille des $X_{ij} \to X$ est couvrante. Par hypothèse sur X, elle admet une sous-famille couvrante finie, et il résulte de nouveau une famille épimorphismes correspondants $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ forment une famille épimorphique. Comme

ceux-ci se factorisent par un nombre fini des morphismes $F_i \to \epsilon(X)$, cette famille finie est déjà épimorphique. Cela prouve que $\epsilon(X)$ est quasi-compact.

Le fait que $\epsilon(X)$ quasi-compact implique X quasi-compact est d'autre part trivial, grâce à loc. cit.

Le résultat précédent montre donc que la notion de quasi-compacité dans les sites de ramène à la notion en question dans les topos.

Proposition 1.3. Soient C un site, $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille couvrante finie, avec les X_i quasi-compacts. Alors X est quasi-compact.

Pour le voir, on peut supposer grâce à 1.2 que C est un topos. Soit $(X'_j \to X)$ une famille couvrante i.e. épimorphique dans C, alors pour tout $i \in I$ la famille déduite par le changement de base $X_i \to X$ est épimorphique, donc (puisque X_i est quasi-compact) admet une sous-famille épimorphique finie, correspondant à une partie finie $J_i \subset J$ de l'ensemble d'indices J. Posant $J' = \bigcup_{i\in I} J_i$, J' est une partie finie de J puisque I est fini, et la famille $(X'_j \to X)_{j\in J'}$ est déjà épimorphique puisqu'elle l'est localement, C.Q.F.D.

Corollaire 1.4. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets d'un topos E, et soit X la somme. 169
Pour que X soit quasi-compact, il faut et il suffit que tous les X_i soient quasi-compacts, et que tous les X_i sauf un nombre fini soient isomorphes à « l'objet vide » $\varnothing_E$ de E.

La suffisance résulte en effet aussitôt de 1.3 (car la somme ne change pas quand on laisse tomber les commandes vides). Pour la nécessité on note qu'une sous-famille finie $(X_i)_{i\in J}$ doit couvrir X, ce qui implique que pour $i \in I - J$ on a $X_i = X_i \times_X \amalg_{j=J} X_j = \amalg_{j=J} X_i \times_X X_j = \varnothing$ (II 4.5.1) ; d'autre part, pour montrer que tout X_i est quasi-compact, on note que $X \simeq X_i \amalg X'_i$, et que toute famille couvrante $Y_j \to X_i$ de X_i définit une famille couvrante $Y_j \amalg X'_i \to X_j \amalg X'_i = X$ de X, qui admet une sous-famille finie couvrante, ce qui implique évidemment que la famille finie correspondante des $Y_j \to X_i$ est aussi couvrante, ce qui montre que X_i est quasi-compact.

Remarque 1.5.1. Le fait pour un objet X d'un topos E d'être quasi-compact ne dépend que du topos induit $E_{/X'}$ et signifie que l'objet final de ce dernier est quasi-compact. De même, un objet X d'un site C est quasi-compact si et seulement si l'objet final du site induit $C_{/X}$(III 5.1) est quasi-compact.

1.5.2. Soit X un objet d'un topos E. Pour que X soit quasi-compact, il faut et il suffit que toute famille filtrante croissante $(X_i)_{i\in I}$ de sous-objet de X couvrant X contienne un
X_i égal à X. Cette condition ne dépend donc que de l'ensemble ordonné des sous-objets 170
de l'objet X (i.e. des ouverts du topos induit $E_{/X}$).

1.5.3. Considérons une famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ de E. Il résulte alors des définitions et de 1.3 que : pour qu'un objet X de E soit quasi-compact, il faut qu'il admette une famille couvrante par un nombre fini des X_i, i.e. que X soit isomorphe à un objet quotient d'une somme finie d'objets de E, et cette condition est suffisante si les X_i sont quasi-compacts. Notons d'autre part qu'avec l'hypothèse faite sur E, on peut évidemment, quitte à remplacer la famille génératrice envisagée par une sous-famille, supposer que $I \in \mathscr{U}$. Utilisant le fait que l'ensemble des quotients d'un objet de E est petit (I 7.5), on trouve alors que la sous-catégorie pleine E_{qc} de E formée des objets quasi-compacts de E est équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, i.e. que le cardinale de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de E_{qc} est $\in \mathscr{U}$.

Exemple 1.6.1. Soit X un espace topologique. Un ouvert U de X est un objet quasi-compact du site $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X si et seulement si U est un espace quasi-compact pour la topologie induite par X. Plus généralement, un faisceau F sur X est un objet quasi-compact du topos $\mathrm{Top}(X)$ si et seulement si l'espace étalé X' sur X associé à F est quasi-compact. (Cela résulte de l'assertion précédente, de 1.5 et du fait que $\mathrm{Top}(X)_{/F}$ est équivalent à $\mathrm{Top}(X')$ (IV 5.7)).

171 1.6.2. Considérons sur la catégorie (Sch) des schémas (éléments de $\mathscr{U}$) une des topologies T_i de [6] 6.3 (par exemple la topologie de Zariski, ou la topologie étale, ou la topologie fppf, ou la topologie fpqc). Pour qu'un schéma soit quasi-compact au sens de cette topologie, il faut et il suffit que ce soit un schéma quasi-compact au sens habituel. (Avec les notations de loc. cit., on utilise seulement le fait que toute famille $\in P'$ est finie.)

Définition 1.7. Soient E un topos, $f : X \to Y$ une flèche de E. On dit que f est un morphisme quasi-compact si pour toute flèche $Y' \to Y$, avec Y' quasi-compact, l'objet $X' = X \times_Y Y'$ est également quasi-compact. On dit que f est quasi-séparé si le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est quasi-compact. On dit que f est cohérent si f est quasi-compact et quasi-séparé.

1.7.1. Explicitant la définition d'un morphisme $f : X \to Y$ quasi-séparé on voit qu'elle signifie aussi que pour toute double flèche $g_1, g_2 : X' \rightrightarrows X$ « au-dessus de Y » i.e. telle que $fg_1 = fg_2$, X' quasi-compact implique $\mathrm{Ker}(g_1, g_2)$ quasi-compact.

Proposition 1.8. Soit E un topos.

(i) Tout isomorphisme dans E est un morphisme cohérent, i.e. est quasi-compact et quasi-séparé. Le composé de deux morphismes quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. cohérents) est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

172 (ii) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Y$ des morphismes dans E, et $f' : X' = X \times_Y Y' \to$ déduit de f par le changement de base g. Si f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent), il en est de même de f'.

(iii) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ et $Y \to Z$ des morphismes dans E. Si gf est quasi-séparé, f est quasi-séparé.

(iv) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes dans E, avec g quasi-séparé. Si gf est quasi-compact (resp. cohérent), alors f est quasi-compact (resp. cohérent).

Les démonstrations sont bien connues (Cf. EGA IV 1 ou EGA I 2ème édition). Les énoncés (i) et (ii) dans le cas « quasi-compact » résultent trivialement des définitions ; dans le cas « quasi-séparé », la stabilité par changement de base (ii) résulte aussitôt de la définition et du cas précédent, de même que le fait que tout isomorphisme soit quasi-séparé. La stabilité par composition $X \to Y \to Z$ se voit à l'aide du diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\Delta_{X/Z}"'] & \\ X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/Z}"] \\ X \times_Z X \arrow[r] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

173 à carré cartésien. Par hypothèse $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compact, donc aussi u qui s'en déduit par changement de base, et $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compact, donc aussi le composé $u\Delta_{X/Y} =$

$\mathit{\Delta}_{X/Z}$. Cela établit (i) et (ii), le cas « cohérent » résultant de la conjonction des deux cas précédents. Pour prouver le premier cas envisagé dans (iv), on considère le diagramme suivant à carrés cartésiens

(∗∗)
$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "gf"] & Z \\
X \arrow[r, "\mathit{\Gamma}_f=(\mathrm{id}_X,f)"] \arrow[d] \arrow[rr, bend right, "f"'] & X \times_Z Y \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "f\times_Z \mathrm{id}_Y"] & Y \arrow[u, "g"'] \\
Y \arrow[r, "\mathit{\Delta}_{Y/Z}"] & Y \times_Z Y &
\end{tikzcd}$$
.

Par l'hypothèse g est quasi-séparé, $\mathit{\Delta}_{Y/Z}$ est quasi-compact, donc $\mathit{\Gamma}_F$ est quasi-compact par changement de base ; de même par hypothèse gf est quasi-compact, donc pr_2 l'est aussi par changement de base ; par suite $f = \mathrm{pr}_2\, \mathit{\Gamma}_f$ est quasi-compact comme composé de deux morphismes quasi-compacts. Le cas respé de (iv) résulte aussitôt du cas précédent et de (iii), qu'il reste à prouver maintenant. Pour ceci on reprend le diagramme (∗), en notant que l'hypothèse gf quasi-séparé signifie que $\mathit{\Delta}_{X/Z} = u\mathit{\Delta}_{X/Y}$ est quasi-compact, et que la conclusion f quasi-séparé signifie que $\mathit{\Delta}_{X/Y}$ est quasi-compact, et que la conclusion f quasi-séparé signifie que $\mathit{\Delta}_{X/Y}$ est quasi-compact, ce qui résulte de (iv) une fois qu'on a prouvé que u est quasi-séparé. Or u est manifestement un monomorphisme, et **174**
on a en effet le résultat trivial :

Corollaire 1.8.1. Tout monomorphisme est quasi-séparé.

En effet, si $u : X \to Y$ est un monomorphisme, $\mathit{\Delta}_{X/Y}$ est un isomorphisme donc est quasi-compact, C.Q.F.D.

Corollaire 1.8.2. Soient $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ deux S-morphismes dans E. Si f, f' sont quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. cohérents), il en est de même de $f \times_S f' : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$.

Cela résulte de façon bien connue de la conjonction de (i) et (ii).

Remarque 1.9.1. Soient E une catégorie quelconque, Q une partie de ob stable par isomorphisme (la donnée de Q revient donc à celle d'une sous-catégorie strictement pleine de E), jouant les rôle d'objets « quasi-compacts ». Supposons que dans E les produits fibrés soient représentables. Alors on peut paraphraser la définition 1.7 pour définir la notion de morphismes Q-quasi-compacts, Q-quasi-séparés, et Q-cohérents. Alors 1.8 et 1.8.1. sont valables, et 1.8.2 également lorsque dans E les produits de deux objets sont représentables.

1.9.2. Soient S un objet de E, et $f : X \to Y$ un morphisme de $E_{/S}$. Il résulte aussitôt de la remarque 1.5 que pour que f soit quasi-compact (resp. quai-séparé, resp. cohérent) il faut et il suffit que le morphisme correspondant dans E (déduit de f **175**
par le foncteur « oubli de S ») le soit. En particulier, si $f : X \to Y$ est un morphisme dans E, prenant ci-dessus $S = Y$, on voit que f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le morphisme structural de l'objet (X, f) du topos

induit $E_{/Y}$, de but l'objet final dudit topos, est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent). On dit aussi que (moyennant le morphisme structural f) X est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au-dessus de Y, locution qu'on peut interpréter indifféremment comme se rapportant au topos E, ou au topos induit $E_{/Y}$ (dont Y est considéré comme un objet final).

1.9.3. Un objet X d'un topos ob E sera dit constructible s'il est cohérent au-dessus de l'objet final. Tout morphisme d'un objet constructible dans un autre est cohérent (1.8 (iv)). La sous-catégorie pleine E_{cons} de E formée des objets constructibles de E est stable par $\varprojlim$ finies, comme il résulte aussitôt de 1.8.2 et 1.8 (ii).

1.9.4. Les notions 1.7 n'ont guère d'intérêt que dans les topos E qui admettent une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts. Dans ce cas, ces notions sont « de nature locale en bas » (IV 8.5.4), comme on va voir maintenant.

176 Proposition 1.10. Supposons que le topos E admette une sous-catégorie génératrice C formée d'objets quasi-compacts, et soit $f : X \to Y$ un morphisme dans E.

(i) Pour que f soit quasi-compact, il faut et il suffit que pour tout morphisme $S \to Y$, avec $S \in \operatorname{Ob} C$, $X \times_Y S$ soit quasi-compact.

(ii) Soit $Y_i \to Y$, $i \in I$, une famille couvrante. Pour que f soit quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $f_i : X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ le soit.

Prouvons (i). La nécessité est triviale par définition. Pour la suffisance, il faut prouver que pour tout objet quasi-compact Y' et tout morphisme $Y' \to Y$, $X' = X \times_Y Y'$ est quasi-compact. Or il existe une famille couvrante $S_i \to Y'$, les S_i dans $\operatorname{Ob} C$, et comme Y' est quasi-compact, on peut prendre la famille couvrante en question finie. Alors par hypothèse les $X'_i = X \times_Y S_i \simeq X' \times_{Y'} S_i$ sont quasi-compacts, et comme ils couvrent X' (les S_i couvrant Y'), X' est quasi-compact en vertu de 1.3.

Prouvons (ii). Il suffit de traiter le cas « quasi-compact », car le cas « quasi-séparé » s'en déduit par la définition 1.7, et le cas « cohérent » également, par conjonction des deux cas précédents. Le « il faut » a déjà été vu dans 1.8 (ii), il reste à voir que si les f_i sont quasi-compacts, alors f l'est, i.e. que pour tout Y' quasi-compact et tout morphisme
177 $Y' \to Y$, l'objet $X' = X \times_Y Y'$ est quasi-compact. Or comme $(Y_i \to Y)$ est couvrante, il existe des S_α au-dessus de Y couvrant Y', tels que les morphismes composés $S_\alpha \to Y' \to Y$ se factorisent chacun par un Y_i. Comme C est génératrice, on peut prendre les S_α dans $\operatorname{Ob} C$, et comme Y' est quasi-compact, on peut prendre la famille couvrante finie. Alors les $X' \times_{Y'} S_\alpha$ forment une famille couvrante finie de X', et on est réduit par 1.3 à prouver que chaque $X' \times_{Y'} S_\alpha = X \times_Y S_\alpha$ est quasi compact. Or, choisissant une factorisation de $S_\alpha \to Y$ par un Y_i, l'objet envisagé est aussi isomorphe à $X_i \times_{Y_i} S$, qui est bien quasi-compact puisque X_i est quasi-compact sur Y_i et S_α est quasi-compact.

Corollaire 1.11. Soient $g : Y \to Z$ un morphisme dans le topos E, $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante de morphismes de but Y. Alors :

(i) Supposons I finie. Si les $g f_i$ sont quasi-compacts, il en est de même de g.

(ii) Supposons les f_i quasi-compacts. Si les $g f_i$ sont quasi-séparés, il en est de même de g. Si I est fini, et si les $g f_i$ sont cohérents, g est cohérent.

Le cas (i) résulte aussitôt des définitions et de 1.3, (sans hypothèse sur E). Pour prouver (ii), il suffit en vertu de (i) de traiter le cas non respé. Considérons le diagramme 1.8 $(*)$ avec X remplacé par un X_i. Comme la famille des f_i est couvrante, il en est de
178 même de la famille des $f_i \times_Z \mathrm{id}_Y$ qui s'en déduit par changement de base, donc en vertu de 1.10 (ii), pour prouver que $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compacte, il suffit de prouver que les Γ_{f_i} le

sont. Or gf_i étant quasi-séparé par hypothèse, il en est de même de $\mathrm{pr}_2 : X_i \times_Z Y \to Y$ qui s'en déduit par changement de base, d'autre part $\mathrm{pr}_2 \Gamma_{f_i} = f_i$ est quasi-compact par hypothèse. Il en est donc de même de Γ_{f_i} en vertu de 1.8 (iv) appliqué au morphisme composé de pr_2 et de Γ_{f_i}, C.Q.F.D.

Corollaire 1.12. Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie d'objets de E, X la somme des X_i, $f_i : X_i \to Y$ des morphismes dans E, et $f : X \to Y$ le morphisme correspondant. Pour que f soit quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) il faut et il suffit que les f_i le soient ; dans le cas « quasi-séparé », l'hypothèse « I finie » peut-être omise.

La suffisance de la condition est un cas particulier de 1.11, compte tenu que les morphismes canoniques $f_i : X_i \to X$ forment une famille couvrante finie, et que ce sont des morphismes quasi-compacts, comme il résulte aussitôt de la définition et de 1.4. La nécessité résulte de la transitivité 1.8 (i), compte tenu que les f_i sont même cohérents (car ils sont quasi-séparés en vertu de 1.8.1).

Définition 1.13. Soit X un objet d'un topos E. On dit que X est un objet quasi-séparé du topos E si pour tout objet S quasi-compact de E, tout morphisme de S dans X est quasi-compact, i.e. (1.7) si pour deux objets quasicompacts S, T de E et des morphismes $S \to X, T \to X$, le produit fibré $S \times_X T$ est toujours quasi-compact. On dit que X est un objet cohérent du topos E si X est quasi-compact et quasi-séparé.

Proposition 1.14. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans un topos E. **179**

(i) Si Y est quasi-compact, alors f quasi-compact implique X quasi-compact. Si Y est quasi-séparé, alors X quasi-compact implique f quasi-compact. Si Y est cohérent, f quasi-compact équivaut à X quasi-compact.
(ii) Si Y est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) et si f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) alors X est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

Les premières deux assertions de (i) sont contenues trivialement dans les définitions de morphisme quasi-compact (1.7) resp. d'objet quasi-séparé (1.13), la troisième résulte de la conjonction des deux premières. Le premier cas de (ii) n'est qu'une redite, le troisième résulte encore de la conjonction des deux premiers, reste à traiter le cas quasi-séparé. Soit donc S un objet quasi-compact de E et $g : S \to X$ un morphisme, prouvons que f est quasi-compact. Comme Y est quasi-séparé, fg est quasi-compact, et comme f est quasi-séparé, il en résulte (1.8 (iii)) que g est quasi-compact, C.Q.F.D.

Corollaire 1.15. Tout sous-objet d'un objet quasi-séparé de E est quasi-séparé. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de E, avec $I \in U$; alors $X = \amalg_i X_i$ est quasi-séparé (resp. cohérent) si et seulement si les X_i le sont.

La première assertion résulte de 1.14 (ii) et de 1.8.1, mais est également triviale sur la définition. Pour la deuxième non respée, comme les $X_i \to X$ sont des monomorphismes, il reste à prouver le « il suffit », qui résulte facilement des définitions et de 1.3 ; le cas respé résulte du cas traité et de 1.4. **180**

Corollaire 1.16. Sous les conditions de 1.10 (ii), si les Y_i sont cohérents, alors f est quasi-compact si et seulement si les $X_i = X \times_Y Y_i$ sont des objets quasi-compacts de E.

En effet, en vertu du critère 1.10 (ii), il faut exprimer que les $f_i : X_i \to Y_i$ sont quasi-compacts, ce qui équivaut à X_i quasi-compacts en vertu de 1.14 (i).

Corollaire 1.17. Soient E un topos admettant une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, et $(g_i : Y_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante (resp. couvrante finie) dans E, avec les Y_i cohérents. Pour que Y soit quasi-séparé (resp. cohérent), il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, g_i soit quasi-compact, ou encore que pour tout couple d'indices $i, j \in I$, $Y_i \times_Y Y_j$ soit un objet quasi-compact de E.

Le cas respé résulte aussitôt du cas non respé et de 1.3. La nécessité de la première condition est triviale par définition, prouvons qu'elle est suffisante. Soit donc $f : X \to Y$
181 un morphisme, avec X quasi-compact, prouvons que f est quasi-compact. Or comme les g_i sont quasi-compacts, il s'ensuit que les $X_i = X \times_Y Y_i$ sont quasi-compacts, ce qui implique que f l'est en vertu de 1.16. Exprimant enfin la quasi-compacité des g_i à l'aide du même critère 1.16, on trouve le deuxième critère de 1.17. En particulier :

Corollaire 1.17.1. Soient E comme dans 1.17, X un objet cohérent de E, $\mathscr{R} \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans X, $Y = X/\mathscr{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Y est cohérent,
(ii) $f : X \to Y$ est quasi-compact,
(iii) $\mathscr{R}$ est quasi-compact.

Corollaire 1.18. Soient E un topos admettant une sous-catégorie génératrice C formée d'objets quasi-compacts, Y un objet de E. Pour que Y soit quasi-séparé, il faut et il suffit que tout morphisme $X \to Y$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, soit quasi-compact.

La nécessité est triviale par définition, les $Y \in \operatorname{ob} C$ étant quasi-compacts par hypothèse. Pour prouver la suffisance, soit Z un objet quasi-compact de E, prouvons que tout morphisme $Z' \to Y$ est quasi-compact. Pour ceci, il suffit en vertu de 1.10 (i) de vérifier que pour tout $X \to Y$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, $Z \times_Y X$ est quasi-compact, ce qui résulte en effet du fait que les $X \to Y$ sont quasi-compacts par hypothèse, et que Z est quasi-compact.

182 Corollaire 1.19. Soient E un topos admettant une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts, $(g_i : Y_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante dans E, avec les Y_i quasi-séparés et les g_i quasi-compacts. Alors Y est quasi-séparé.

En effet, soit X un objet quasi-compact de E, montrons que tout morphisme $f : X \to Y$ est quasi-compact. En vertu de 1.10(ii) il suffit de prouver que les morphismes induits $f_i : X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ sont quasi-compacts. Or comme g_i est quasi-compact, X_i est quasi-compact (X l'étant), et comme Y_i est quasi-séparé, il s'ensuit bien que f_i est quasi-compact.

Remarque 1.20.1. Le lecteur habitué à l'usage des termes « quasi-compact » et « quasi-séparé » en géométrie algébrique s'attendra à certaines autres relations entre les notions « absolues »(concernant les objets du topos E) et les notions « relatives » (concernant des flèches de E) envisagées, par exemple : si $f : X \to Y$ est un morphisme dans E tel que X soit quasi-compact-séparé, alors f est quasi-séparé. De telles propriétés ne sont valables que moyennant des conditions de finitude restrictive sur le topos E, plus fortes que celles envisagées dans 1.10, conditions que nous étudierons au numéro suivant.

1.20.2. Il résulte encore de 1.5 que le fait que pour un objet X du topos E d'être quasi-séparé ne dépend que du topos induit $E_{/X}$, et signifie que l'objet final dudit topos est quasi-séparé, i.e. que dans $E_{/X}$, le produit de deux objets quasi-compacts est quasi-compact.

183

1.21. Cas des sites. Soient C un $\mathscr{U}$-site, E le topos des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C, f une flèche de C, X un objet de C. On dit que f est un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé) du site C si $\epsilon(f)$ est un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé) du topos E ; et de même que X est un objet quasi-séparé du site C si $\epsilon(X)$ est un objet quasi-séparé du topos E (comparer 1.2). Lorsque C est un $\mathscr{U}$-topos muni de sa topologie canonique, alors le foncteur canonique $\epsilon : C \to E$ est une équivalence de catégories, et par suite la définition précédente est compatible avec les définitions antérieures 1.7 et 1.13. Notons également que la définition envisagée ne change pas quand on remplace l'univers $\mathscr{U}$ par un autre univers $\mathscr{V}$ tel que C soit aussi un $\mathscr{V}$-site, du moins lorsque C admet une famille topologiquement génératrice formée d'objets quasi-compacts. Pour le voir, on est ramené aussitôt au cas où $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, donc E est une $\mathscr{V}$-site, et à prouver que pour toute flèche f du $\mathscr{U}$-topos E, f est quasi-compacte (resp. quasi-séparé) si et seulement si elle définit une flèche quasi-compacts dans le topos E' des $\mathscr{V}$-faisceaux sur E, et de même que pour tout objet X de E, X est quasi-séparé si et seulement si l'objet correspondant de E' est quasi-séparé. Notons que nous connaissons déjà (sans hypothèse sur E) l'énoncé analogue pour le cas d'un objet quasi-compact (1.2). Le cas « f quasi-compact » s'en déduit, grâce au critère 1.10 (i) appliqué successivement dans E et dans E', pour la même fa- **184**
mille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ de E formée d'objets quasi-compacts ; d'où également le cas « f quasi-séparé », qui signifie que le morphisme diagonal correspondant est quasi-compact. Enfin pour le cas « X quasi-séparé », on est encore ramené au cas « X quasi-compact », grâce au critère 1.18.

1.22. Exemples. Reprenons l'exemple 1.6.2 de la catégorie (Sch) avec une topologie T_i, qui est un $\mathscr{V}$-site pour $\mathscr{V}$ convenable, admettant la sous-catégorie des schémas affines comme catégorie génératrice topologique formée d'objets quasi-compacts. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'une flèche $f : X \to Y$ de ce site est quasi-compacte (resp. quasi-séparé) si et seulement si c'est un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé) de schémas au sens habituel ([3] ou [4]) ; de même un objet du site est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si et seulement si c'est un schéma quasi-compact (resp. quasi-séparé) au sens habituel de loc.cit. Il y a lieu de dire d'ailleurs, comme ici, morphisme cohérent de schémas, schémas cohérent, au lieu de « morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas », « schéma quasi-compact et quasi-séparé », comme on le fait d'ailleurs dans EGA I 2ème édition.

1.22.1. Pour un schéma donné $X \in \mathscr{U}$, on peut aussi regarder le topos $\mathrm{Top}(X)$ associé à l'espace topologique sous-jacent, ou le topos $\mathrm{Top}(X_{\mathrm{et}})$ (resp. $\mathrm{Top}(X_{\mathrm{fppf}})$), associé au site des X-schémas étales (resp. localement de présentation finie) éléments de $\mathscr{U}$, avec la **185**
topologie étale (resp. fppf). C'est un $\mathscr{U}$-topos qui admet une famille génératrice formée d'objets cohérents, correspondants aux objets affines du site de définition ;

Ceci dit, l'objet final de ce topos est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le schéma X est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent). De même, un morphisme du site des espaces étalés sur X (resp. du site X_{et} des schémas étales sur X, resp. du site X_{fppf} des schémas localement de présentation finie sur X) est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si c'est un morphisme de schémas qui est (au sens habituel de loc. cit.) quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

Théorème 1.23. Soient E un $\mathscr{U}$-topos, X un objet de E.

(i) Pour que X soit quasi-compact, il faut et il suffit que pour tout système inductif filtrant $(Y_i)_{i\in I}$ de E, avec $I \in \mathscr{U}$, l'application naturelle

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(X, Y_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X, \varinjlim Y_i) \tag{1.23.1}$$

soit injective.

(ii) Supposons que E admette une sous-catégorie génératrice C formée d'objets quasi-compacts. Pour que X soit cohérent, il faut que pour toute donnée comme dans (i), l'application (1.23.1) soit bijective.

186 (i) <u>Nécessité</u>. Supposons X quasi-compact, il faut prouver que si $i \in I$ et f_i, g_i : $X \rightrightarrows Y_i$ sont tels que les composés f, g de f_i, g_i avec $Y_i \to Y = \varinjlim Y_j$ sont égaux, alors il existe $j \geq i$ tel que les composés f_j, g_j avec $Y_i \to Y_j$ sont déjà égaux. Or comme dans E les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies, et en particulier aux noyaux, on a

$$\operatorname{Ker}(f, g) = \varinjlim_{j\geq I} \operatorname{Ker}(f_j, g_j).$$

Par hypothèse $\operatorname{Ker}(f, g) = X$, donc X est la limite de la famille filtrante croissante de ses sous-objets $\operatorname{Ker}(f_j, g_j)$, donc comme X est quasi-compact, il est égal à un de ces sous-objets, donc il existe $j \geq i$ tel que $f_j = g_j$.

<u>Suffisance</u>. Pour prouver que X est quasi-compact, il revient au même (1.5.2) de prouver que pour toute famille filtrante croissante $(X_i)_{i\in I}$ de sous-objets de X dont la $\varinjlim$ est X, il existe $i \in I$ tel que $X_i = X$. Or comme dans E tout monomorphisme est effectif (II 4.0), il s'ensuit que

$$X_i = \operatorname{Ker}(f_i, g_i : X \rightrightarrows X \amalg_{X_i} X).$$

Soit $Y_i = X \amalg_{X_i} X$, et considérons le système inductif formé par les Y_i. Si Y en est la limite inductive, on a $Y \simeq X \amalg_{\varinjlim X_i} X = X \amalg_X X = X$. Par suite, pour un $i \in I$ fixé, f_i, g_i donnent le même élément de $\operatorname{Hom}(X, Y)$, donc par hypothèse il existe $j \geq i$ tel que $f_j = g_j$ i.e. $X_j = X$, C.Q.F.D.

187 (ii) Il reste à prouver que sous les conditions indiquées, tout morphisme $X \to Y$ provient d'un morphisme $X \to Y_i$ pour un $i \in I$ convenable. Comme C engendre E et que les Y_i couvrent Y, nous pouvons couvrir X par des objets X_α de C, de telle façon que chacun des composés $X_\alpha \to X \to Y$ se factorise par un des Y_i. Comme X est quasi-compact, on peut supposer la famille des X_α finie, donc que les morphismes $X_\alpha \to Y$ se factorisent par un Y_i fixe en des $g_{\alpha i} : X_\alpha \to Y_i$. Comme X est quasi-séparé, les $X_\alpha \times_X X_\beta$ sont quasi-compacts. D'ailleurs pour tout (α, β), les composés de pr_1 et pr_2 sur $X_\alpha \times_X X_\beta$ avec X_α, $X_\beta \to Y_i$ sont

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \times_X X_\beta \arrow[dd] \arrow[dr] & & & \\
& X_\alpha \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_i \arrow[dl] \\
X \arrow[rr] & & Y &
\end{tikzcd}$$

tels que leurs composés avec $Y_i \to Y$ sont égaux. En vertu de(i), il existe donc un $j \geq i$ tel que les composés avec $Y_i \to Y_j$ soient déjà égaux. Comme l'ensemble des couples (α, β) est fini, on peut prendre j indépendant de ce couple. Par suite les morphismes $g_{\alpha j}$ proviennent par composition d'un morphisme $g_j : X \to Y_j$, dont le composé avec $Y_j \to Y$ est d'ailleurs le morphisme $X \to Y$ donné, puisqu'il en est ainsi après composition avec les $Y_j \to X$. Cela achève la démonstration.

REMARQUES 1.23.2. L'hypothèse sur E dans (ii) peut être remplacée par une hypothèse supplémentaire sur X, savoir que X admet un système fondamental de familles couvrantes par des objets quasi-compacts.

COROLLAIRE 1.24. Soient E un topos, et soit C une sous-catégorie strictement pleine **188**
de E formée d'objets cohérents. Utilisant le fait que dans E les $\mathscr{U}$-limites inductives sont représentables, on trouve (I 8.6.1) un foncteur canonique.

$$\mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E. \tag{1.24.1}$$

Ce foncteur est pleinement fidèle. Si E admet une sous-catégorie génératrice formée d'objets cohérents, et si C est stable par facteurs directs, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur (1.24.1) est essentiellement surjectif, i.e. c'est une équivalence de catégories.

(ii) C est une sous-catégorie génératrice de E, stable par limites inductives finies.

(iii) La catégorie C est égale à la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée de tous les objets cohérents de E, et la condition nécessaire 1.23 (ii) de cohérence pour un objet de E est aussi suffisante.

Soit E_{PF} la sous-catégorie pleine de E définie dans I 8.7.6. En vertu de I 8.7.5 a), l'énoncé 1.23 (ii) équivaut à la deuxième inclusion de

$$C \subset E_{\mathrm{coh}} \subset E_{PF},$$

et l'inclusion composée $C \supset E_{PF}$ signifie que (1.24.1) est pleinement fidèle. Comme par **189**
hypothèse la sous-catégorie E_{coh} de E est génératrice, il en est a fortiori de même de E_{PF} ; d'autre part dans E les limites projectives finies sont représentables, de sorte que nous pouvons appliquer I 8.7.7. La condition (iii) de 1.24 s'écrit aussi $C = E_{\mathrm{coh}} = E_{PF}$ et équivaut à la condition $C = E_{PF}$, qui n'est autre que la condition (ii bis) de loc. cit. (compte tenu que par hypothèse, E_{coh} donc E_{PF} est une sous-catégorie génératrice de E). De même la condition (ii) de 1.24 n'est autre que la condition (iii bis) de loc. cit.. Donc l'équivalence des conditions (i), (ii bis) et (iii bis) dans loc. cit. donne l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) de 1.24, C.Q.F.D.

La démonstration (ou plus précisément, l'invocation de I 8.7.7 (ii bis)) fournit également la partie a) du

COROLLAIRE 1.24.2. Soit E un topos admettant une sous-famille génératrice formée d'objets cohérents, et soit E_{PF} la sous-catégorie strictement pleine des objets X de E tels que le foncteur covariant $\mathrm{Hom}(X, -)$ qu'il représente commute aux limites inductives filtrantes. Alors :

a) Le foncteur naturel
$$\mathrm{Ind}(E_{PF}) \longrightarrow E$$
est une équivalence de catégories.

b) Pour qu'un objet X de E appartienne à E_{PF}, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un facteur direct (= image d'un projecteur (I, 10.6)) du conoyau d'une double **190**
flèche $X_1 \rightrightarrows X_0$, avec X_1 et X_0 cohérents.

c) La sous-catégorie E_{PF} de E est stable par limites inductives finies, et est équivalente à une petite catégorie.

Il reste à prouver b) et c). La première assertion de c) est triviale grâce à I 2.8, et implique le « il suffit » de b) grâce à 1.23 (ii). Pour le « il faut », on utilise 1.23 (i) qui montre que X est quasi-compact, d'où l'existence d'un épimorphisme $X_0 \to X$, avec X_0 cohérent, compte tenu du fait que E_{coh} engendre E et est stable par sommes finies. Soit $R = X_0 \times_X X_0$, de sorte que X s'identifie au conoyau de $R \rightrightarrows X_0$. En vertu de a), on a $R = \varinjlim R_i$, limite inductive filtrante des coker $(R_i \rightrightarrows X_0) = X_i$. D'après l'hypothèse $X \in \operatorname{Ob} E_{PF}$, pour i assez grand le morphisme $u_i : X_i' \to X$ admet une section $v : X \to X_i'$. Soit $w = vu_i : X_i' \to X_i'$, de sorte que $w^2 = w$ et $X \simeq \operatorname{Coker}(w, \mathrm{id}_{X_i'} : X_i' \rightrightarrows X_i')$. Comme R_i est à nouveau quasi-compact, on le couvre par $X_1 \to R_i$ avec X_i cohérent, d'où $X_i \simeq \operatorname{Coker}(X_1 \rightrightarrows X_0)$, ce qui prouve b).

Enfin, comme $E_{PF} \subset E_{\text{qu.cpct}}$, la dernière assertion de c) résulte de 1.5.3.

Corollaire 1.25. Soit E un topos tel que la sous-catégorie pleine C de E formée des objets cohérents soit génératrice. Considérons le foncteur canonique

$$\varphi : \operatorname{Ind}(c) \longrightarrow E.$$

191 Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur φ est essentiellement surjectif, i.e. tout objet de E est limite inductive filtrante d'objets cohérents.

(i bis) Le foncteur φ est une équivalence de catégories.

(ii) Toute limite inductive finie dans E d'objets cohérents est un objet cohérent.

(ii bis) Le conoyau dans E d'une double flèche d'objets cohérents est un objet cohérent.

(iii) La réciproque de 1.23 (ii) est valable.

C'est un cas particulier de 1.24, compte tenu que C est stable par sommes finies (1.4), ce qui implique l'équivalence de (ii) et de (ii bis), et compte tenu du

Lemme 1.25.1. Soit E un topos. Tout facteur direct X' d'un objet cohérent X de E est cohérent.

En effet, X' est quasi-compact comme quotient de X (1.3), et quasi-séparé comme sous-objet de X (1.15).

Corollaire 1.26. Soit E un topos satisfaisant aux conditions équivalentes 1.25. Alors, il en est de même de tout topos induit.

Cela résulte aussitôt du critère (ii), compte tenu de 1.20.2 et du fait que l'existence d'une sous-catégorie génératrice de E formée d'objets cohérents implique manifestement la même propriété pour un topos induit.

192 Remarque 1.27. Parmi les exemples importants de topos satisfaisant les conditions de 1.25, signalons les topos noethériens (2.14), et le topos zariskien ou étale (VII 1) d'un schéma X (cf. IX, note p.42). Mais même lorsque le topos E est cohérent(2.3) (i.e. la sous-catégorie pleine C des objet cohérents est génératrice et stable par limites projectives finies), il n'est par toujours vrai que C soit parfait (2.9.1) i.e. satisfasse aux conditions équivalentes de 1.25 ; cf. 1.28 ci-dessous.

Exercice 1.28. Soient E un topos, $p_1, p_2 : X_1 \rightrightarrows X_0$ une double flèche dans E. Définir une suite croissante de sous-objets R_n ($n \geq 0$) de $X_0 \times X_0$ par la condition $R_0 = \operatorname{Sup}(\operatorname{Im}(p_1, p_2), \operatorname{Im}(p_2, p_1))$, et $R_n = \mathrm{pr}_{13}(\mathrm{pr}_{12}^{-1}(R_{n-1}), \mathrm{pr}_{23}^{-1}(R_{n-1}))$ pour tout $n \geq 1$, où $\mathrm{pr}_{ij} (1 \leq i < j \leq 3)$ désignent les projections qu'on devine du produit triple de X_0 vers le produit double.

a) Montrer qu'on obtient ainsi une suite croissante de sous-objets de $X_0 \times X_0$, que $R = \varinjlim R_n$ est un graphe d'équivalence (I 10.4) dans X_0, et que le morphisme canonique

$$X = \mathrm{Coker}(p_1, p_2) \longrightarrow X_0/R$$

est un isomorphisme.

b) En conclure que si X_0 est quasi-compact et $X = \mathrm{Coker}(p_1, p_2)$ est quasi-séparé (donc cohérent), alors la suite des R_n est stationnaire. Inversement, si cette suite **193**
est stationnaire, et si on suppose X_0 cohérent et X_1 quasi-compact alors X est cohérent. (Pour ce dernier point, écrire $R_n \simeq (R_{n-1}, \mathrm{pr}_2) \times_{X_0} (R_{n-1}, \mathrm{pr}_1)$ et en conclure que R_n est quasi-compact sur X_0 pour tout n, puis utiliser 1.19.)

c) Construire un exemple de deux applications d'ensembles $p_1, p_2 : X_1 \rightrightarrows X_0$, telles que la suite des (R_n) ne soit pas stationnaire.

d) Soit C une petite catégorie où les limites inductives finies et les limites projectives finies sont représentables, et où tout morphisme se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme. Répéter pour une double flèche (p_1, p_2) de C la construction des R_n. Munissant C de la topologie canonique, montrer que le foncteur canonique $\epsilon : C \to C^{\sim}$ est exact, et commute par suite à la formation des R_n.

e) Prendre pour C une petite sous-catégorie pleine de (Ens), stable à isomorphisme près par limites projectives finies et limites inductives finies, et contenant les ensembles X_0, X_1 de c). En conclure que le topos $C^{\sim}$ (qui est un topos cohérent (2.3), i.e. engendré par la sous-catégorie de ses objets cohérents, laquelle est stable par limites projectives finies) ne satisfait pas aux conditions équivalentes de 1.25.

f) Soient k un corps, C le site fppf des schémas localement de présentation finie sur k (SGA 3 IV 6.3). Montrer qu'il existe un schéma affine réduit X sur k qui admit un automorphisme f qui n'est pas d'ordre fini (prendre par exemple l'espace affine E^2 muni de l'automorphisme $f(x) = x$, $f(y) = x + y$). Montrer que **194**
si $p_1, p_2 : X_1 \rightrightarrows X_0$ est une double flèche dans C, telle que la double flèche correspondant dans (Ens)$p_1(\bar{k}) : p_2(\bar{k}) : X_1(\bar{k}) \rightrightarrows X_0(\bar{k})$ donne une suite (R_n) non stationnaire, alors il en est de même de la double flèche de $C^{\sim}$ définie par p_1, p_2, donc, si X_0 est de type fini sur k, alors le conoyau dans $C^{\sim}$ de (p_1, p_2) n'est pas cohérent. En conclure que le conoyau dans $C^{\sim}$ du couple (f, id_X) n'est pas cohérent, donc que le topos $C^{\sim}$ ne satisfait par aux conditions équivalentes de 1.25. En conclure plus généralement que si S est un schéma non vide, C le site fppf des schémas localement de présentation finie sur S, alors le topos $C^{\sim}$ ne satisfait pas aux conditions de 1.25. (On fera attention que, contrairement à l'apparence, $C^{\sim}$ n'est donc noethérien (2.11) que si S est vide, comme il résulte de ce qui précède et de 2.14.

Définition 1.30. Soit E un topos. Un objet X de E est dit un objet prénoethérien[33] du topos E s'il satisfait aux deux conditions équivalentes suivantes :

(i) Tout sous-objet de X est quasi-compact.
(ii) Toute suite croissante de sous-objets de X est stationnaire.

1.30.1. L'équivalence des conditions (i) et (ii) est claire. On notera que ces conditions ne dépendent encore que du topos induit $E_{/X}$, et même seulement de l'ensemble ordonné

[33] Par la notion plus forte d'objet *noethérien*, cf. 2.11 ci-dessous.

des ouverts de $E_{/X}$, isomorphe à l'ensemble ordonné des sous-objets de X. Elles sont stables par passage à un sous-objet de X.

195 1.31. On prouve comme pour 1.3 et 1.4 les faits suivantes : si $(X_i \to X)$ est une famille couvrante finie, avec les X_i prénoethériens, alors X est prénoethérien ; en particulier un quotient d'un objet prénoethérien de E est prénoethérien. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de E, alors leur somme X est un objet prénoethérien de E si et seulement si tous les X_i sauf un nombre fini sont isomorphes à $\varnothing_E$, et tous les X_i sont prénoethériens.

1.32. Évidemment un objet prénoethérien d'un topos E est quasi-compact ; lorsque E admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens, la réciproque est vraie (comme il résulte aussitôt de 1.31) : les objets prénoethériens de E sont alors ses objets quasi-compacts.

Supposons que E admette une famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ formée d'objets quasi-compacts, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les X_i sont prénoethériens.
(ii) Tout objet quasi-compact de E est prénoethérien.
(iii) Tout monomorphisme dans E est quasi-compact.

(On vient de voir l'équivalence de (i) et (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial à partir des définitions, et (iii) $\Rightarrow$ (ii) sur la définition 1.30 (i).)

196 On notera que (iii) a comme conséquence que tout morphisme de E est quasi-séparé ; donc (1.14 (ii)) tout objet X de E au-dessus d'un objet quasi-séparé X de E est lui-même quasi-séparé.

Exemple 1.33. (Topos classifiant d'un groupe). Soient G un groupe $\in \mathscr{U}$, B_G son topos classifiant (IV 2.4) i.e. la catégorie des ensemble $\in \mathscr{U}$ où G opère à gauche. Les objets connexes-non vides de B_G (IV 4.3.5) sont les ensembles à opérateurs qui sont non vides et sur lesquels G opère transitivement, et tout objet E de B_G est somme de ses composantes connexes, qui sont les sous-objets non vides minimaux de E (savoir les orbites de G dans E). Par suite E est un objet quasi-compact de B_G si et seulement si l'ensemble $\pi_0(E)$ des orbites de G dans E est fini, et alors E est même un objet prénoethérien de B_G. Ces objets (et même le seul objet G_s, qui est connexe non-vide) forment une sous-catégorie génératrice de B_G. Pour que l'objet final e de B_G soit quasi-séparé, i.e. pour que le produit de deux objets quasi-compacts de B_G soit quasi-compact, il faut et il suffit que le produit $G_s \times G_s$ soit quasi-compact, ce qui équivaut manifestement au fait que G est fini. On en conclut, plus généralement, qu'un objet E de B_G est quasi-séparé si et seulement si les stabilisateurs de ses points sont des sous-groupes finis de G ; i.e. s'il est isomorphe à une somme d'espaces homogènes G/H, avec H fini.) En effet, en vertu de 1.15 on peut supposer dans ce critère E connexe, mais si $x \in E$ a comme groupe
197 de stabilité G_x, on sait (IV 5.8) que B_G/E est équivalent au topos B_{G_x}, donc son objet final est quasi-séparé si et seulement si G_x est fini. On conclut de ce critère que tout objet de B_G qui se trouve au-dessus d'un objet quasi-séparé est quasi-séparé, a fortiori, le produit de deux objets quasi-séparés de B_G est quasi-séparé. On conclut aussi que les objets cohérents de B_G sont les objets isomorphes à des sommes finies d'espaces homogènes G/H, avec H fini. Comme G_s est cohérent, on voit que les objets cohérents de B_G forment déjà une sous-catégorie génératrice de B_G. De plus, cette sous-catégorie est stable par produits fibrés (comme il résulte de fait que tout objet au-dessus d'un objet

quasi-séparé est quasi-séparé). (Dans la terminologie 2.11 plus bas B_G est un topos localement noethérien, mais il n'est quasi-séparé que si G est fini, et alors B_G est même noethérien.)

On voit tout de suite qu'un morphisme $f : E' \to E$ est quasi-compact si et seulement si l'application induit $\pi_0(f) : \pi_0(E') \to \pi_0(E)$ pour les ensembles d'orbites est propre i.e. à fibres finies ; on retrouve qu'un monomorphisme est quasi-compact (1.32), donc tout morphisme est quasi-séparé. Par suite les morphismes cohérents dans B_G sont simplement les morphismes quasi-compacts, qu'on vient de caractériser.

Soit E un objet du topos B_G. On vérifie facilement que E est une limite inductive filtrante d'objets cohérents de B_G si et seulement si les stabilisateurs des points de E sont des groupes ind-finis (i.e. limites inductives filtrantes de leurs sous-groupes finis). **198**
En particulier, si G n'est pas ind-fini (par exemple si $G = \mathbf{Z}$), l'objet final du topos B_G n'est pas limite inductive d'objets cohérents ; plus précisément, pour que le topos B_G satisfasse aux conditions équivalentes de 1.25, il faut et il suffit que son objet final soit limite inductive filtrante d'objets cohérents, ou encore que le groupe G soit ind-fini.

2. Conditions de finitude pour un topos

Proposition 2.1. Soit E un $\mathcal{U}$-topos. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe une sous-catégorie pleine génératrice C de E, formée d'objets quasi-compacts, et stable par produits fibrés.

(ii) Il existe un $\mathcal{U}$-site C, tel que tout objet de C soit quasi-compact, que dans C les produits fibrés soient représentables, et que E soit équivalent à la catégorie des faisceaux $C^{\sim}$.

Supposons que ces conditions sont satisfaites. Alors on peut même choisir dans (i) (resp. (ii)) la catégorie C $\mathcal{U}$-petite. D'autre part, pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, l'objet X (resp. $\epsilon(X)$) du topos E est cohérent.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de IV 1.2.1., et le fait que dans (i) (resp. (ii)) on peut prendre C $\mathcal{U}$-petite se voit aussitôt par l'argument de IV 1.2.3 appliqué à une petite sous-catégorie pleine génératrice au sens topologique (II 3.0.1) de C. Il reste à prouver (ii) $\Rightarrow$ (i) et la dernière assertion de 2.1, ce qui résulte aussitôt du

Corollaire 2.1.1. Soit C un $\mathcal{U}$-site où les produits fibrés soient représentables et **199**
dont tout objet soit quasi-compact, et soient $E : C^{\sim}$, $\varepsilon : C \to E$ le foncteur canonique. Alors pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, $\varepsilon(X)$ est un objet cohérent de E. La sous-catégorie pleine de E formée des objets cohérents de E qui se trouvent au-dessus de quelque $\varepsilon(X)$ est stable par produits fibrés (et est évidemment génératrice dans E).

On sait déjà que $\epsilon(X)$ est quasi-compact (1.2), prouvons qu'il est quasi-séparé. Soient donc F, G deux objets quasi-compacts de E et $F \to \varepsilon(X)$, $G \to \epsilon(X)$ deux morphismes, prouvons que le produit fibré $F \times_{\epsilon(X)} G$ est quasi-compact. Recouvrant F et G par un nombre fini d'objets de la forme $\epsilon(Y_i)$ resp. $\epsilon(Z_j)$, et procédant comme dans 1.2 pour nous ramener au cas où les composés $\epsilon(Y_i) \to \epsilon(X)$, $\epsilon(Z_j) \to \epsilon(X)$ proviennent de morphismes $Y_i \to X$ resp. $Z_j \to Y$, on est ramené grâce à 1.3 au cas où les morphismes $F \to \epsilon(X)$ et $G \to \epsilon(X)$ sont les transformés par ϵ de morphismes $Y \to X$, $Z \to X$. Mais comme les produits fibrés sont représentables dans C et que ϵ y commute, on est réduit à prouver que $\epsilon(Y \times_X Z)$ est quasi-compact, ce qui a été déjà noté plus haut pour tout objet de la forme $\epsilon(U)$.

Soient maintenant $G \to F$, $H \to F$ des morphismes d'objets cohérents de E, tels qu'il existe un morphisme $F \to \epsilon(X)$, pour quelque $X \in \operatorname{ob} C$, prouvons que $G \times_F H$

est cohérent. Comme G et H sont quasi-compacts et F quasi-séparé, il résulte déjà des
200 définitions que le produit fibré est quasi-compact. Reste à voir qu'il est quasi-séparé, ou ce qui revient au même (1.15) que $G \times_{\epsilon(X)} H$ est quasi-séparé. Cela résulte du fait plus général :

Corollaire 2.1.2. Sous les conditions de 2.1.1, pour tout objet quasi-séparé G de E, tout morphisme $G \to \epsilon(X)$ est quasi-séparé. Si $H \to \epsilon(X)$ est un deuxième morphisme, avec H quasi-séparé, alors $G \times_{\epsilon(X)} H$ est quasi-séparé.

La première assertion implique la deuxième, car elle implique par changement de base que $G \times_{\epsilon(X)} H$ est quasi-séparé, donc, puisque H est quasi-séparé, $G \times_{\epsilon(X)} H$ l'est aussi (1.14 (ii)). Pour prouver que $G \to \epsilon(X)$ est quasi-séparé, nous allons utiliser le

Lemme 2.1.3. Soient E un topos, $f : X \to Y$ un morphisme dans E. Supposons que E admette une famille génératrice d'objets quasi-compacts, et qu'il existe une famille couvrante $(g_i : X_i \to X)_{i \in I}$ de X telle que les X_i soient quasi-compacts, et que pour tout couple d'indices $i, j \in I$, $X_i \times_Y X_j$ soit quasi-séparé. Alors, si X est un objet quasi-séparé de E, f est un morphisme quasi-séparé.

En effet, la famille $(g_i \times_Y g_j : X_i \times_Y X_j \to X \times_Y X)_{(i,j) \in I \times I}$ est couvrante, donc pour voir que le morphisme $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ est quasi-compact, il suffit de voir que pour
201 tout $(i, j) \in I \times I$, le morphisme qui s'en déduit par changement de base $g_i \times_Y g_j$ l'est (1.10 (ii)). Or ce dernier n'est autre que le morphisme canonique $X_i \times_X X_j \to X_i \times_Y X_j$; comme par hypothèse X est quasi-séparé et les X_i sont quasi-compacts, $X_i \times_X X_j$ est quasi-compact, donc comme $X_i \times_Y X_j$ est quasi-séparé par hypothèse, le morphisme $X_i \times_X X_j \to X_i \times_Y X_j$ est bien quasi-compact, C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de 2.1.2, en prouvant que tout morphisme $f : G \to \epsilon(X)$, avec G avec G quasi-séparé, est quasi-séparé. Pour ceci, couvrons G par des objets $\epsilon(X_i)$, tels que les morphismes composés $\epsilon(X_i) \to \epsilon(X)$ proviennent de morphismes $X_i \to X$. En vertu de 2.1.3, comme les $\epsilon(X_i)$ sont quasi-compacts, il suffit de vérifier que les produits fibrés $\epsilon(X_i) \times_{\epsilon(X)} \epsilon(X_j) = \epsilon(X_i \times_X X_j)$ sont quasi-séparés. Or on a déjà vu que tout objet de E de la forme $\epsilon(U)$ est cohérent. Cela prouve 2.1.2 et achève la démonstration de 2.1.

Proposition 2.2. Soit E un topos contenant une sous-catégorie pleine génératrice C formée d'objets cohérents. Les conditions suivantes sur E sont équivalentes :

(i) Tout objet quasi-séparé de E est quasi-séparé sur l'objet final.

(i bis) Pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans E, X quasi-séparé implique f quasi-sépare.

(i ter) Tout objet X de C est quasi-séparé sur l'objet final de E, i.e. le morphisme diagonal $X \to X \times X$ est quasi-compact.

202 (ii) Le produit de deux objets quasi-séparés de E est quasi-séparé.

(ii bis) Le produit dans E de deux objets de C est quasi-séparé.

Ces conditions impliquent que la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets cohérents de E est stable par produits fibrés (et à fortiori, que E satisfait aux conditions équivalentes de 2.1).

Évidemment (i bis) ⇒ (i), et l'implication inverse résulte de 1.8 (iii). On a (i) ⇒ (ii) par un argument déjà fait : si X et Y sont quasi-séparés, comme par l'hypothèse (i) X est quasi-séparé sur e, $X \times Y$ est quasi-séparé sur Y par changement de base, donc X est quasi-séparé en vertu de 1.14 (ii). Le même argument montre que (i ter) ⇒ (ii bis), et d'autre part (i) ⇒ (i ter) et (ii) ⇒ (ii bis) sont triviaux, de sorte qu'il reste à établir (ii bis) ⇒ (i). Mais si X est un objet quasi-séparé de E, recouvrant X par des objet X_i de C (ce qui est possible, C étant génératrice), comme les X_i sont quasi-compacts par hypothèse sur C, on peut appliquer 2.1.3 au morphisme $X \to e$, de sorte que pour prouver que ce dernier est quasi-séparé, on est ramené précisément à voir que les $X_i \times X_j$ sont quasi-séparés, ce qui est l'hypothèse (ii bis).

Remarque 2.2.1. La condition (i ter) équivaut aussi à la condition (i quater). Pour toute double flèche $g_1, g_2 : Y \rightrightarrows X$ dans C, le noyau dans E est quasi-compact (ou encore (1.15) cohérent).

Pour le voir, il suffit d'appliquer le critère 1.10 (i) au morphisme diagonal $X \to X \times X$ **203**
envisagé dans (i ter).

Définition 2.3. Un topos E satisfaisant les conditions équivalentes de 2.2 (resp. de 2.1) est appelé un topos algébrique (resp. un topos localement algébrique, ou localement cohérent). Un objet X d'un topos E est appelé objet algébrique du topos E si le topos induite $E_{/X}$ est algébrique. Un topos E est dit quasi-séparé (resp. cohérent) s'il est algébrique et si son objet final est quasi-séparé (resp. cohérent).

2.3.1. C'est dans les topos algébriques que les notions de finitude développées au n° 1 ont des propriétés pleinement satisfaisantes, analogues aux propriétés des notions de même nom dans la catégorie des schémas. Tous les topos localement algébriques (= localement cohérents) rencontrés en pratique sont en fait algébriques, donc l'intérêt pratique de cette notion semble pour l'instant assez réduit. On peut cependant construire des topos localement algébriques et non algébriques (2.17 f).

2.4. Voici quelques remarques générales concernant les notions introduites dans 2.3, qui convaincront le lecteur (du moins on l'espère) que la terminologie introduite est cohérente.

2.4.1. Sous les conditions de 2.1 (i) resp. (ii), pour tout $X \in C$, X (resp. $\epsilon(X)$) est
un objet (cohérent) algébrique de E (2.1.2 et 1.19.2), en d'autres termes le topos induit **204**
$E_{/X}$ (resp. $E_{\epsilon(X)} \approxeq (C_{/X})^{\sim}$) est algébrique, donc cohérent. Il revient au même de dire que lorsque C admet un objet final, alors E lui-même est algébrique, donc cohérent.

2.4.2. Si E est un topos algébrique, alors tout topos induit $E_{/X}$ est également algébrique (2.2 (i bis)) ; pour qu'un topos E soit localement algébrique = localement cohérent, il faut et il suffit qu'il existe une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de X, couvrant l'objet final, telle que les X_i soient algébriques (resp. cohérents) i.e. telle que les topos induits $E_{/X_i}$ soient algébriques (resp. cohérents). -La suffisance résulte aussitôt des définitions, la nécessité des observations 2.4.1. Bien entendu, un topos algébrique est localement algébrique, et si E est un topos localement algébrique, tout topos induit $E_{/X}$ est localement algébrique.

2.4.3. Si X est un objet algébrique d'un topos E, alors tout objet X' de E qui se trouve au-dessus de X est encore algébrique (cf. 2.4.2). En particulier, tout objet d'un topos algébrique est algébrique, et inversement bien sûr.

2.4.4. La sous-catégorie pleine de E formée des objets quasi-séparés qui sont algébriques est stable par produits fibrés et par sous-objets (1.15), donc aussi par noyaux. Si E est algébrique, cette catégorie (qui n'est alors autre que la catégorie des objets
quasi-séparés de E sans plus) est également stable par produit de deux objets. Si E est **205**
quasi-séparé (et alors seulement) cette catégorie est stable par limites projectives finis quelconques, ou encore contient l'objet final de E.

La sous-catégorie pleine C de E formée des objets cohérents qui sont algébriques est stable par produits fibrés. Si E est localement algébrique i.e. localement cohérent, dire que E est algébrique revient à dire que C est également stable par noyaux de doubles flèches (2.2.1) ; et dire que E est quasi-séparé revient à dire que de plus C est stable par produit de deux objets (cf. 1.17). Enfin dire que E est cohérent revient à dire que C est stables par limites projectives finies quelconques, ou encore qu'il contient l'objet final de E.

2.4.5. Soit E un topos. Pour que E soit localement cohérent (resp. algébrique, resp. quasi-séparé, resp. cohérent) il faut et il suffit qu'il admette une sous-catégorie pleine génératrice C formée d'objets quasi-compacts (qui seront automatiquement cohérents (2.1)), et qui soit stable par produits fibrés (resp. par produits fibrés et par noyaux, resp. par produits fibrés et par produits de deux objets, resp. par limites projectives finies quelconques) ; ou encore que E soit équivalent à un topos $C^{\sim}$, où C est un $\mathcal{U}$-site dont tout objet est quasi-compact, et où les produits fibrés et les produits de deux objets (resp. toutes les limites projectives finies) sont représentables. (Pour la nécessité, on prend
206 pour C la catégorie des objets de E qui sont cohérents et algébriques, et on applique 2.4 ; pour la suffisance, on applique 2.2 (i ter)). Dans cet énoncé, on peut évidemment supposer encore C $\mathcal{U}$-petit.

2.4.6. Soit E un topos, Si E est algébrique, un objet X de E est quasi-séparé (resp. cohérent) si et seulement si le topos induit $E_{/X}$ l'est. Lorsque E n'est plus supposé algébrique, on peut dire seulement que $E_{/X}$ est quasi-séparé (resp. cohérent) si et seulement si X est quasi-séparé (resp. cohérent) et algébrique. Ce n'est pas grave, vu qu'on n'aura sans doute pas à utiliser ces notions en dehors du cas E algébrique.

2.4.7. Pour que la notion d'objet cohérent (resp. quasi-séparé d'un topos E ait des propriétés satisfaisantes, il faut se borner aux objets qui sont de plus algébriques, condition automatiquement satisfaite si E est algébrique. Comme nous n'aurons sans doute jamais à travailler avec des E localement algébriques qui ne soient algébriques, la question de réviser la terminologie introduite dans 1.13, en la réservant éventuellement aux seuls objets algébriques, ne se pose donc pas en termes bien aigus !

D'autre part, nous sommes abstenus de définir la notion de topos quasi-compact. Dans l'esprit du présent numéro, il s'imposerait d'appeler ainsi les topos algébriques sont l'objet final est quasi-compact.

207 Nous avons hésité à introduire un tel usage, car si X est un espace topologique, il ne serait pas vrai que X est quasi-compact si et seulement si le topos associé $\mathrm{Top}(X)$ l'est. On notera à ce propos que $\mathrm{Top}(X)$ est localement cohérent si et seulement si X admet une base d'ouverts formée d'ouverts quasi-compacts U tels que pour $U_j, U_k \subset U_i$, $U_j \cap U_k$ soit encore quasi-compact (et alors $\mathrm{Top}(X)$ est même algébrique). Cette conditions est vérifiée pour les espaces topologiques sous-jacents aux schémas, mais rarement pour les espaces rencontrés par les analystes, fussent-ils (les espaces) compacts. Explicitons encore, pour la commodité des références :

Proposition 2.5. *Soit E un topos algébrique, $f : X \to Y$ un morphisme dans E. Si Y est un objet quasi-séparé (resp. cohérent) de E, alors, pour que X soit un objet quasi-séparé (resp. cohérent) de E, il faut et il suffit que le morphisme f soit quasi-séparé (resp. cohérent).*

La suffisance a déjà été vue dans 1.14(ii), et est vraie sans hypothèse sur E. La nécessité dans la cas non respé est vraie sans supposer même Y quasi-séparé, et n'est autre que la définition 2.3 via 2.2 i bis). Il reste à prouver que si Y est cohérent et X cohérent, alors f est cohérent. Comme on sait déjà que f est quasi-séparé, il suffit de voir que f est quasi-compact, ce qui résulte du fait que X est quasi-compact et Y quasi-séparé (1.13).

208 Corollaire 2.6. *Soient E un topos algébrique, $f : X \to Y$ un morphisme dans E,*

$(Y_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante, avec les Y_i quasi-séparés (resp. cohérents). Pour que f soit quasi-sépare (resp. quasi-compact, resp. cohérent) il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $X_i = X \times_Y Y_i$ soit un objet quasi-séparé (resp. quasi-compact, resp. cohérent) de E.

Il suffit de conjuguer 1.10 (ii) et 2.5 dans le cas « quasi séparé » ou « cohérent » ; le cas « quasi-compact » a déjà été vu dans 1.16. On notera que la nécessité de la condition énoncée dans 2.6 est également valable sans hypothèse sur le topos E.

On trouve comme cas particulier de 2.6 :

Corollaire 2.7. Soient E un topos cohérent, X un objet de E. Pour que X soit un objet quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) de E, il faut et il suffit qu'il soit quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au-dessus de l'objet final (1.9.2).

En particulier, X est constructible (1.9.2) si et seulement s'il est cohérent.

Corollaire 2.8. Soient E un topos localement cohérent, $f : X \to Y$ un morphisme dans E. Pour que f soit quasi-séparé, il faut et il suffit que pour tout objet quasi-séparé Y' de $E_{/Y}$, $f^*(Y') = X \times_Y Y'$ soit un objet quasi-séparé de $E_{/X}$ (ou de E, cela revient au même (1.20.2)).

Le « il faut » est valable sans condition sur E, car si Y' est quasi-séparé, comme **209**
$f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est quasi-séparé par changement de base, X' est quasi-séparé (1.14 (ii)). Pour la réciproque, notons qu'il existe une famille couvrante $Y_i \to Y$ de Y par des objets quasi-séparés et algébriques. En vertu de 1.10 (ii), pour vérifier que f est quasi-séparé, il suffit de vérifier que les $f_i : X_i = X \times_Y X_i \to Y_i$ le sont. Or l'hypothèse sur f^* implique que les X_i sont quasi-séparés, donc les f_i le sont puisque $E_{/Y_i}$ est un topos algébrique.

Remarque 2.8.1. Les énoncés 2.5 et 2.6 restent valables si on y remplace l'hypothèse « E algébrique » par l'hypothèse plus générale « Y est algébrique », comme on voit trivialement en appliquant l'énoncé primitif au topos induit $E_{/Y}$, qui est algébrique. De même, dans 2.8 il suffit de supposer que $E_{/Y}$ (au lieu de E) soit localement cohérent.

Proposition 2.9. Soient E un topos, C une sous-catégorie de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est localement cohérent (resp. cohérent), satisfait aux conditions équivalentes de 1.25, et C est la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets cohérents.

(ii) C est une sous-catégorie strictement pleine génératrice de E, stable par limites inductives finies et par produits fibrés (resp. et par limites projectives finies), et est formée d'objets quasi-compacts.

L'implication (i) ⇒ (ii) résulte trivialement des définitions et de la forme 1.25 (ii) des **210**
conditions envisagées dans 1.25 ; prouvons l'implication inverse. Le fait que C soit une sous-catégorie pleine génératrice, formée d'objet quasi-compacts, et stable par produits fibrés (resp. par limites projectives finies) implique, par définition, que E est localement cohérent (resp. cohérent). Le fait que de plus C soit strictement pleine et stable par limites inductives finies implique alors que $C = E_{\mathrm{coh}}$ (en vertu de 1.24 (ii) ⇒ (iii)), et que la condition 1.25 (ii) est satisfaite, C.Q.F.D.

Définition 2.9.1. Un $\mathscr{U}$-topos E est dit parfait s'il est cohérent (2.3) et s'il satisfait aux conditions équivalentes de 1.25. i.e. si la sous-catégorie E_{coh} de E formée des objets cohérents de E est stable par limites inductives finies. On dit que E est localement parfait s'il existe une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de E couvrant l'objet final, telle que pour tout $i \in I$, le topos induit $E_{/X_i}$ soit parfait.

2.9.2. Il résulte aussitôt de cette définition qu'un topos parfait (resp. localement parfait) est cohérent (resp. localement cohérent). Comme exemples de topos parfaits (resp. localement parfaits), signalons les topos noethériens (resp. localement noethériens) introduits dans 2.11 ci-dessous (cf. 2.14), le topos zariskien et le topos étale d'un schéma
211 cohérent (resp. d'un schéma quelconque) (IX, note page 42). Comme contre-exemple, signalons le topos fppf d'un schéma S, qui est localement cohérent (et même cohérent si S est un schéma cohérent, i.e. quasi-compact et quasi-séparé) (VII 5.6), mais qui n'est pas localement parfait si $S \neq \varnothing$ (1.28 f)).

Dans un topos localement parfait, la notion d'objet constructible est particulièrement stable (2.9.3 ci-dessous), ce qui est une raison pourquoi la notion semble intéressante. Une autre raison est dans le fait que comme celle de topos cohérent ou localement cohérent, la notion de topos parfait ou localement parfait est stable par rapport à la formation du sous-topos fermé complémentaire d'un ouvert (4.6), et qu'elle se comporte de façon particulièrement simple pour l'opération de recollement de topos (4.11, 4.14).

Proposition 2.9.3. Soit E un topos localement parfait (2.9.1). Alors la sous-catégorie pleine E_{cons} de E formée des objets constructibles de E (1.9.3) est stable par limites inductives finies (et aussi par limites projectives finies bien sûr, en vertu de (1.9.3)).

Comme la propriété pour un objet de E d'être constructible est locale sur E (1.10 (ii)), on est ramené au cas où E est un topos parfait. Mais alors $E_{\text{cons}} = E_{\text{coh}}$ (2.7), et la conclusion résulte de la définition 2.9.1.

212 Corollaire 2.9.4. Soit E un topos localement parfait. Alors E est parfait si et seulement si E est cohérent. Pour tout objet X de E, le topos induit $E_{/X}$ est localement parfait.

Problème 2.9.5. Il est concevable que les topos parfaits soient assez particuliers pour se prêter à une théorie de structure aussi explicite (suivant un modèle proposé par M.Artin à l'époque du séminaire oral). Appelons topos fini un topos équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une catégorie finie (cf. exercice 3.11), et topos profini un topos qui est une limite projective filtrante de topos finis (au sans de 6. plus bas, qui s'applique grâce à 3.12 c)). Comme un topos fini est noethérien (2.17 g)) donc parfait, et qu'une limite projective filtrante de topos parfaits est parfait (6.), on voit qu'un topos profini est parfait. La question qui se pose serait de savoir si réciproquement tout topos parfait est profini. Cela équivaut à la question si toute sous-catégorie finie de E_{coh} est contenue dans une sous-catégorie pleine F_0 de E_{coh} qui est équivalente à une catégorie F_{coh}, où F est un topos fini (cf. 3.11). (Si la réponse était négative, il y aurait lieu de trouver des conditions intrinsèques supplémentaires maniables pour un topos parfait qui assurent qu'il est profini.) Il resterait enfin à étudier la structure des topos profinis en termes d'une notion convenable de « catégorie profinie karoubienne », inspirée de IV
213 7.6 h). Cette étude n'a pas été faite encore même dans le cas particulier où E est le topos zariskien, ou étale, d'un brave schéma cohérent X, et devrait donner alors des invariants plus fins que l'espace compact X_{cons} (EGA IV 1.) associé à X.

Dans le même ordre d'idées, signalons la questions suivante : Soit E un topos parfait, E' le topos induit sur un ouvert de E, et E'' le sous-topos fermé correspondant (IV 9.9). Si E' et E'' sont des topos finis, en est-il de même de E ?

Proposition 2.10. Soit E un topos. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E admet une sous-catégorie pleine génératrice stable par produits fibrés, formée d'objets prénoethériens de E.

(ii) E admet une sous-catégorie pleine génératrice formée d'objets prénoethériens quasi-séparés (i.e. prénoethériens cohérents).

(iii) E est localement cohérent (2.3) et tout objet quasi-compact de E est prénoethérien.

(iii bis) E est localement cohérent et admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens de E.

L'équivalence de (iii) et (iii bis) résulte de 1.32, et il est trivial que (i) ⇒ (iii bis) et (iii) ⇒ (i), donc (i) équivaut à (iii) et (iii bis). Enfin (i) ⇒ (ii) résulte de la dernière assertion de 2.1, et il reste à prouver (ii) ⇒ (i). Cette implication résulte du fait que la sous-catégorie **214**
pleine de E formée des objets noethériens quasi-séparés, si elle est génératrice, est stable par produits fibrés, car un tel produit fibré est quasi-compact en vertu des définitions, donc noethérien par la première assertion de 1.32 ; et il est quasi-séparé par la dernière assertion de 1.32.

Définition 2.11. Un topos E est dit topos localement noethérien s'il satisfait aux conditions équivalentes de 2.10, noethérien si de plus son objet final est cohérent (ou ce qui revient au même (1.32)) prénoethérien et quasi-séparé). Un objet X d'un topos E est dit objet noethérien de E si le topos induit $E_{/X}$ est un topos noethérien.

2.12. Si E est un topos localement noethérien, alors il en est de même de tout topos induit $E_{/X}$; inversement, si on peut trouver une famille (X_i) couvrant l'objet final telle que les E_{X_i} soient localement noethériens, il en est de même de E. Si C est une sous-catégorie pleine génératrice de E formée d'objets prénoethériens et stable par produits fibrés (2.11 (i)), alors pour tout $X \in C$, $E_{/X}$ est un topos noethérien, i.e. les objets de C sont même noethériens, (car si E est localement noethérien et $X \in \operatorname{Ob} E$, alors $E_{/X}$ est noethérien si et seulement si X est cohérent). Il s'ensuit qu'un topos E est localement noethérien si et seulement si on peut recouvrir l'objet final de E par des objets noethériens X_i.

2.13. Dans un topos localement noethérien E, tout monomorphisme est quasi- **215**
compact, et tout morphisme est quasi-séparé (1.32). A fortiori, E est un topos algébrique (2.3) et non seulement localement cohérent i.e. localement algébrique. Donc un topos E est noethérien si et seulement si il est localement noethérien et cohérent (2.3). En d'autres termes, si E est un topos localement noethérien, alors les objets noethériens de E ne sont autres que les objets cohérents de E.

2.14. Soit E un topos localement noethérien, Si E est quasi-séparé, i.e. si son objet final est quasi-séparé, alors tout objet de E est quasi-séparé (1.32), donc les objets prénoethériens de E sont identiques aux objets noethériens (i.e. cohérents) de E. Comme un objet quotient d'un objet prénoethérien est prénoethérien, il s'ensuit que E satisfait aux conditions équivalentes de 1.25 (puisqu'il satisfait la condition 1.25 (ii bis)). En particulier, si C est la sous-catégorie pleine de E formée des objets noethériens (cohérents) de E, alors le foncteur naturel

$$\operatorname{Ind}(C) \longrightarrow E$$

est une équivalence de catégories. On conclut de ceci qu'un topos noethérien est parfait (2.9.1), donc qu'un topos localement noethérien est localement parfait.

Si on suppose seulement E localement noethérien, il sera encore vrai que tout objet de E est limite inductive de ses sous-objets prénoethériens (car dans un topos admettant une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts, tout objet est limite in- **216**
ductive filtrante de ses sous-objets quasi-compacts). Mais comme un objet prénoethérien de E n'est plus nécessairement cohérent, cet énoncé n'a alors qu'une utilité très limitée, et on sait (1.33) que les conditions de 1.25 ne sont plus nécessairement vérifiées.

Exemple 2.15. (Espaces topologiques.) Soit X un espace topologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes : (i) l'espace topologique X est noethérien (i.e. tout ouvert de X est quasi-compact), i.e. toute suite croissante d'ouverts de X est stationnaire) ; (ii) le topos $\mathrm{Top}(X)$ est noethérien ; (iii) l'objet final X de $\mathrm{Top}(X)$ est noethérien ; (iv) l'objet final X de $\mathrm{Top}(X)$ est prénoethérien.

En effet, on a trivialement (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (i), d'autre part (i) implique que la sous-catégorie génératrice ouv(X) de $\mathrm{Top}(X)$, qui est stable par limites projectives finies, est formée d'objets prénoethériens, d'où (ii).

On voit de même que l'espace topologique X est localement noethérien (i.e. est réunion d'ouverts noethériens) si et seulement si le topos $\mathrm{Top}(X)$ est localement noethérien.

2.15.1. Ainsi, nos définitions 1.30, 2.11 sont compatibles avec la terminologie reçue pour les espaces topologique. D'autre part, nous avons tenu dans le cas général à donner
217 au terme « objet noethérien » un sens plus fort que celui de la notion plus naïve de 1.30, pour que l'ensemble des propriétés qui s'attachent à cette notion (plutôt que la seule structure grammaticale de la définition) soit bien en accord avec l'intuition qui s'attache aux espaces topologiques et aux schémas noethériens.

Le lecteur trouvera d'autres exemples dans les exercices suivants.

Exercice 2.16. (Espaces à opérateurs et topos classifiants).

Soit X un espace topologique sur lequel opère un groupe discret G, d'où (IV 2.3) un topos $E = \mathrm{Top}(X, G)$. On interprète les objets X' de ce topos comme des espaces étalés sur X à groupe d'opérateurs G, et on note que le topos induit $E_{/X}$, est canoniquement équivalent à $\mathrm{Top}(X', G)$.

a) Pour que l'objet final du topos E soit quasi-compact, il faut et il suffit que l'espace topologique quotient X/G soit quasi-compact (Utiliser IV 8.4.1).
b) Soit P l'objet de E définit par l'espace étalé trivial $X \times G$ avec opération diagonale de G. Montrer que le topos induit $E_{/P}$ est équivalent au topos $\mathrm{Top}(X)$ (comparer IV 5.8.3). En conclure que E est localement cohérent (resp. localement noethérien) si et seulement si $\mathrm{Top}(X)$ est localement cohérent (cf. 2.4.7) (resp. localement noethérien (cf. 2.15)). Montrer que si E est localement cohérent, i.e. localement algébrique, il est même algébrique, en utilisant la famille généra-
218 trice formée des objets T_U, où U est un ouvert cohérent de X, $T_U = G \times U$ avec opération $g \cdot (u, g') = (u, gg')$ de G, et la morphisme structural $p_U : T_U \to X$ défini par $P_U(u, g) = g \cdot u$.
c) Supposons E algébrique, i.e. $\mathrm{Top}(X)$ algébrique (2.4.7). Montrer que le morphisme structural $P \to e$ est quasi-séparé. Montrer que E est quasi-séparé si et seulement si $\mathrm{Top}(X)$ est quasi-séparé (ou encore l'espace topologique X est quasi-séparé, i.e. l'intersection de deux ouverts quasi-compacts de X est un ouverts quasi-compact), et G est fini ou X vide. (Comparer 1.33.)
d) Montrer que le morphisme structural $P \to e$ est quasi-compact si et seulement si G est fini. Montrer que E est cohérent (resp. noethérien) si et seulement si $\mathrm{Top}(X)$ l'est, et G est fini ou X vide.
e) Soient E un topos, G un Groupe de E, d'où un topos classifiant B_G (IV 2.4). Faire l'étude des conditions de finitude dans B_G, en s'inspirant de ce qui précède. Même question lorsqu'on part d'un pro-groupe strict $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$ de E. En particulier, on verra que si E est cohérent (resp. noethérien) et les G_i sont cohérents, alors $B_{\mathscr{G}}$ est cohérent (resp. noethérien).

EXERCICE 2.17. (Topos de la forme $\widehat{C}$.) Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, et $E = \widehat{C}$ la catégorie des préfaisceaux sur C. Par le foncteur canonique $\varepsilon : C \to \widehat{C}$, on identifie C à une sous-catégorie pleine de E.

(a) C est une sous-catégorie génératrice de E formée d'objets quasi-compacts. Pour 219
que ceux-ci soient prénoethériens (cf. 1.32), il faut et il suffit que pour tout objet X de C, tout crible de X soit engendré par une famille finie de morphismes $X_i \to X$ de C. Pour que l'objet final de E soit quasi-compact (resp. prénoethérien), il faut et il suffit qu'il existe une sous-catégorie finale de C dont l'ensemble d'objets soit fini (resp. que tout crible de C soit engendré par une sous-catégorie de C dont l'ensemble d'objets soit fini).

(b) Pour que E admette une sous-catégorie génératrice formée d'objets cohérents (ou encore, quasi-séparés), il faut et il suffit que les objets de C soient cohérents dans E, ou encore que pour deux flèches $Y \xrightarrow{f} X$, $Z \xrightarrow{g} X$ dans C, l'objet $Y \times_X Z$ de E soit quasi-compact i.e. on peut trouver une famille finie de carrés commutatifs dans C

$$\begin{tikzcd} & T_i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd},$$

telle que tout autre carré commutatif dans C

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd},$$

provienne d'un morphisme $T \to T_i$. (Noter que si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille géné- 220
ratrice de E, tout $X \in \operatorname{ob} C$ est isomorphe à un facteur direct d'un des F_i.)

(c) Pour que E soit localement cohérent, i.e. soit engendré par une famille d'objets cohérents et algébriques, il faut et il suffit que les objets X de C soient des objets cohérents et algébriques de E, i.e. que la condition de b) soit vérifiée, ainsi que la condition suivante : pour toute double flèche $f, g : Y \rightrightarrows Z$ de C au-dessus d'un objet X de C, le noyau de cette double flèche dans E est un objet quasi-compact de E, i.e. il existe une famille finie de diagramme commutatifs dans C

$$T_i \longrightarrow Y \overset{f,g}{\rightrightarrows} Z$$

telle que tout autre diagramme commutatif dans C

$$T \longrightarrow Y \overset{f,g}{\rightrightarrows} Z$$

provienne d'un morphisme $T \to T_i$. Pour que E soit algébrique, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la conditions de b) et à la condition précédente, mais où on prend une double flèche quelconque (f, g) de C (pas nécessairement au-dessus d'un objet X de C). Pour que E soit quasi-séparé, il faut et il suffit qu'il satisfasse les conditions de b), et que de plus pour deux objets X, $Y \in \operatorname{ob} C$, le produit $X \times Y$ dans E soit quasi-compact. Pour que E soit cohérent, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions précédentes, et qu'il existe un sous-catégorie finale de C dont l'ensemble sous-jacent soit fini.

221 (d) Donner un exemple où les objets de la sous-catégorie génératrice C de E sont prénoethériens, mais où E n'admet pas de famille génératrice formée d'objets cohérents (i.e. (b)) où les objets de C ne sont pas tous cohérents). Prendre pour ceci pour C la catégorie ayant des objets X, T_i $(i = 0, 1, \dots)$ et e (l'objet final), les seuls morphismes entre ces objets en plus des morphismes structuraux dans e et des identités, étant des morphismes $u_i : T_i \to X$, $v_i : X \to T_i$ soumis aux conditions $u_i v_i = \mathrm{id}_X$, et enfin $p_i = v_i u_i$ (satisfaisant nécessairement $p_i^2 = \mathrm{id}_{T_i}$). On vérifie que les seuls cribles de X ou d'un T_i sont les deux cribles triviaux, et que e admet exactement un crible non trivial, donc en vertu de a), les objets de C sont des objets prénoethériens de E. Cependant, le produit $X \times X$ dans E n'est pas quasi-compact, car il ne satisfait pas au critère de b).

(e) Donner un exemple où la sous-catégorie génératrice C de E est formée d'objets cohérents de E, mais où E n'est pas localement cohérent. Prendre pour ceci pour C la catégorie dont l'ensemble des objets est formée d'objets distincts e (l'objet final), Y, Z et T_i $(i = 0, 1, \dots)$, avec comme seuls morphismes entre ces objets, en plus des morphismes dans l'objet final e et des morphismes identiques, des morphismes $f, g : Y \rightrightarrows Y$, soumis aux conditions $f u_i = g u_i$. On vérifiera que C satisfait à la condition de b) (avec un peu de patience ; on trouve que
222 tous les produits fibrés d'objets de C sont isomorphes à $\varnothing_E$ ou sont dans C, à l'exception de $Z \times_e Z$ et $Y \times_e Z$ qui sont recouverts par deux éléments de C), mais évidemment $\operatorname{Ker}(f, g)$ ne satisfait pas à la condition de c).

(f) Donner un exemple où C est stable par produits fibrés (a fortiori, E est un topos localement cohérent i.e. localement algébrique) mais où E n'est pas un topos algébrique. (Prendre l'exemple donné dans d), et la sous-catégorie pleine C' de E formée des objets Y, Z, T_i $(i > 0)$ et $\varnothing_E$).

(g) Supposons la catégorie C finie. Prouver que le topos E est noethérien, que ses objets noethériens (i.e. quasi-compacts) sont les contrafoncteurs $F : C^\circ \to (\mathrm{Ens})$ tels que pour tout objet X de C, $F(X)$ soit un ensemble fini, et que les foncteurs fibres sur E transforment objets noethériens en ensembles finis (cf. IV 7.6. h)).

(h) Supposons que tout morphisme $f : X \to X$ de C se factorise en un composé ip, où i est un monomorphisme et où p admet un inverse à droite. Soit X un objet de C, $I(X)$ l'ensemble de ses sous-objets au sens de C, considéré comme un ensemble ordonné, $S(I(X))$ l'ensemble des parties U de $I(X)$ telles que pour deux éléments $X', X'' \in I(X)$, $X' \in U$ et $X'' \leq X'$ implique $X'' \in U$. Montrer que l'ensemble ordonné des sous-objets dans E de X est isomorphe à l'ensemble $S(I(X))$ (ordonné par inclusion). En conclure que si $I(X)$ est fini, alors X est un objet prénoethérien de E. En particulier, si (en plus de la conditions de factorisation ci-dessus) C est stable par produits fibrés (resp. par limites projectives
223 finies) et si pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, l'ensemble $I(X)$ des sous-objets de X dans C est fini, alors le topos E est localement noethérien (resp. noethérien).

(i) Soit C la catégorie des ensembles finis (ou, au choix, des ensembles finis non vides) $\in \mathscr{U}$, de sorte que $E = \widehat{C}$ est la catégorie des ensembles simpliciaux augmentés (resp. des ensembles simpliciaux tout court). Montrer que E est un topos noethérien. (Utiliser h).) Prenant un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ non essentiellement constant de C, montrer que E admet des foncteurs fibres qui ne transforment pas objets noethériens en objets noethériens (i.e. en ensembles finis).

(j) On considère le diagramme d'implications suivant de propriétés pour un topos E :

$$\begin{tikzcd}
\text{E est noethérien} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{E est localement noethérien} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
\text{E est cohérent} \arrow[r, Rightarrow] & \text{E est algébrique} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \begin{array}{c}\text{E est loc. cohérent, i.e.}\\ \text{E}_{\text{cohalg}} \text{ engendre E}\end{array} \arrow[d, Rightarrow] & \text{E}_{\text{prénoeth}} \text{ engendre E} \arrow[ddl, Rightarrow] \\
& \text{E}_{\text{coh}} \text{ engendre E} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \text{E}_{\text{qucpct}} \text{ engendre E} &
\end{tikzcd}.$$

Montrer que toutes les implications de ce diagramme sont strictes, et qu'il n'y a pas entre les notions envisagées d'autres implications que les implications composées du diagramme précédent. Ici E_{coh}, E_{qucpct}, $E_{\text{prénocth}}$, E_{cohalg} désignent **224**
respectivement les sous-catégories pleines de E formées des objets cohérents, resp. quasi-compacts, resp. prénoethériens, resp. cohérents et algébriques de E. (On se bornera à des topos de la forme $\widehat{C}$, en utilisant les résultats énoncés dans d), e), f).)

(k) Résoudre la question suivante (dont le rédacteur de ces lignes ignore la réponse) : $E = \widehat{C}$ peut-il être localement noethérien sans que les $\mathrm{Hom}(X, Y)$ (pour $X, Y \in \mathrm{ob}\, C$) soient finis ?

Exercice 2.18. Soit E un topos.

a) Soit X un objet prénoethérien de E. Montrer que X est isomorphe à une somme finie d'objets connexes (IV 4.3.5) de E. (Montrer par l'absurde qu'une suite croissante de partitions de X (IV 8.7) est stationnaire.)

b) Soient X un objet de E, $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ une famille couvrante de X. Montrer que si chacun des X_i est isomorphe à une somme d'objets connexes de E, il en est de même de X. (Se ramener au cas où les X_i sont connexes, puis au cas où ce sont des sous-objets de X, et considérer alors sur l'ensemble d'indices I la relation d'équivalence R engendrée par la relation $X_i \cap X_j \neq \phi_E$, et montrer que si $J = I/R$, X est somme des $X(i) = \operatorname*{Sup}_{i\in I} X_i$.)

c) Conclure de b) que si on désigne par $(X_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, alors E est localement connexe (IV 8.7. ℓ)) si et seulement si chacun des X_i $(i \in I)$ **225**
est isomorphe à une somme d'objets connexes de E.

d) Conclure de a) et c) que si E admet une sous-catégorie génératrice formée d'objets prénoethériens, en particulier si E est localement noethérien, alors E est localement connexe, et a fortiori est isomorphe au topos somme (IV 8.7 b)) d'une famille de topos connexes (IV 8.7 e)) i.e. dont l'objet final est connexe. (En particulier, on peut associer à E, pour tout morphisme $f : P \to E$, où P est un topos « connexe non vide et simplement connexe » (IV 2.7.5) un pro-groupe fondamental $\pi_1(E, f)$; on notera que si E est localement noethérien « non vide » on peut toujours trouver un tel f, avec P le topos ponctuel, grâce à Deligne ([9]).

3. Conditions de finitude pour un morphisme de topos

Définition 3.1. Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos. On dit que f est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si pour tout objet quasi-compact (resp. quasi-séparé) X de E, $f^*(X)$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé). On dit que f est cohérent si f est quasi-compact et quasi-séparé.

3.1.1. On notera que si f possède une des propriétés précédentes, alors tout morphisme de topos isomorphe à f possède la même propriété. Il est trivial également que le composé de deux morphismes de topos quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. cohérents) est encore quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

226 Proposition 3.2. Avec les notations de 3.1, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille génératrice d'objets quasi-compacts (resp. cohérents) de E. Supposons, dans le cas respé, que E' admette une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts. Pour que f soit quasi-compact (resp. cohérent), il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $f^*(X_i)$ soit quasi-compact (resp. cohérent).

La nécessité de la condition est triviale. Pour la suffisance dans le premier cas, on note que pour tout objet quasi-compact X de E, il y a une famille épimorphique finis de morphismes $X_i \to X$, donc il y a une famille épimorphique finie $f^*(X_i) \to f^*(X)$, avec les $f^*(X_i)$ quasi-compacts par hypothèse, donc $f^*(X)$ est quasi-compacts (1.3). Dans le deuxième cas, il reste à voir que si X est un objet quasi-séparé de E, alors $f^*(X)$ est quasi-séparé. L'hypothèse sur X peut s'exprimer (1.17) par l'existence d'une famille épimorphique de morphismes $X_i \to X$ telle que les $X_i \times_X X_j$ soient quasi-compacts. Ceci dit, on aura une famille couvrante $f^*(X_i) \to f^*(X)$, telle que les produits fibrés $f^*(X_i) \times_{f^*(X)} f^*(X_j)$ sont quasi-compacts (puisque en vertu de a), f^* transforme objets quasi-compacts en objets quasi-compacts). Comme les $f^*(X_i)$ sont cohérents, on conclut encore à l'aide de 1.17.

Corollaire 3.3. Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-sites où les produits fibrés soient représentables et où toute famille couvrante admet une sous-famille couvrante finie, $g : C \to C'$ un morphisme de sites (IV 4.9.1). Alors le morphisme de topos $f : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ défini par g est cohérent.

227 En effet, $\epsilon_C(C)$ (resp. $\epsilon_{C'}(C')$) est une famille génératrice de C (resp. de C') satisfaisant les conditions respées de 3.2 (2.1.1).

Proposition 3.4. Soient E un topos localement cohérent (2.3), $f : X \to Y$ une flèche de E, d'où un morphisme de topos induits (IV (5.5.2)) $E_{/X} \to E_{/Y}$. Pour que ce dernier soit un morphisme de topos quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent), il faut et il suffit que f soit un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

Le cas « quasi-compact » est trivial en vertu des définitions (sans condition sur E), le cas « quasi-séparé » n'est autre que 2.8, enfin le cas « cohérent » résulte de la conjonction des deux cas précédents.

Proposition 3.5. Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos localement cohérents. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille génératrice dans E formée d'objets cohérents algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute flèche u quasi-compacte de E, $f^*(u)$ est quasi-compacte.

(i bis) Pour toute flèche $u : X_i \to X_j$, $f^*(u)$ est quasi-compacte.

(ii) Pour tout objet cohérent Y' de E', tout objet cohérent algébrique Y de E, et toute flèche $v : Y' \to f^*(Y)$, le morphisme de topos correspondant

$$f_v : E'_{/Y'} \longrightarrow E_{/Y}$$

composé du morphisme de localisation $E'_{/Y'} \to E'_{/f^*(Y)}$ déduit de Y (IV (5.5.2)) 228
et du morphisme $E'_{/f^*(Y)} \to E_{/Y}$ induit par f (IV (5.10.1)) est cohérent.

(ii bis) Même condition que dans (ii), mais en se bornant à un ensemble de données $v_\alpha : Y'_\alpha \to f^*(Y_\alpha)$ tel que les Y'_α soient algébriques et recouvrent l'objet final de E'.

(ii ter) (Lorsqu'on se donne une famille génératrice $(X'_{i'})_{i' \in I'}$ dans E' formée d'objets cohérents, et pour tout $i' \in I'$, un $i \in I$ et une flèche $v_{i'} : X'_{i'} \to f(X_i)$.) Pour tout $i' \in I'$, le morphisme de topos $E'_{/X'_{i'}} \to E_{/X}$ défini par v_i est cohérent.

Comme toute flèche $X_i \to X_j$ est quasi-compacte, il est évident que (i) ⇒ (i bis). Inversement, supposons (i bis) vérifié et prouvons (i). Soit $u : X \to Y$ une flèche quasi-compacte de E. En termes d'une famille épimorphique $X_i \to Y$, l'hypothèse sur u s'exprime donc par le fait que les $X \times_Y X_i$ sont quasi-compacts (1.16), i.e. qu'il existe pour chaque i une famille finie épimorphique de morphismes $X_j \to X \times_Y X_i$ (1.3). Alors on a une famille épimorphique correspondante $f^*(X_i) \to f^*(Y)$, telle que pour tout i on ait une famille épimorphique finie $f^*(X_j) \to f^*(X \times_Y X_i) \simeq f^*(X) \times_{f^*(Y)} f^*(X_i)$, dont le composé avec la projection pr_2 dans $f^*(X_i)$ est un morphisme quasi-compact $f^*(X_j) \to f^*(X_i)$, grâce à l'hypothèse (i bis). Il s'ensuit (1.11 (i)) que pour tout i, $\mathrm{pr}_2 : f^*(X) \times_{f^*(Y)} f^*(X_i)$ est quasi-compact, donc (1.10 (ii)) $f^*(u) : f^*(X) \to f^*(Y)$ est quasi-compact.

Il reste à prouver les implications (i) ⇒ (ii) et (ii bis) ⇒ (i), l'implication (ii) ⇒ (ii 229
bis) étant triviale, et (ii ter) étant un cas particulier de (ii bis). L'implication (i) ⇒ (ii) est immédiate : en effet, un objet X de $E_{/Y}$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si et seulement si le morphisme structural $X \to Y$ (resp. le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$) est quasi-compact (2.7), et on a le même critère de quasi-compacité et de quasi-séparation pour $f^*_Y(X')$. Prouvons enfin (ii bis) ⇒ (i). Soit donc $u : X \to Y$ une flèche quasi-compacte dans E, prouvons que $f^*(u)$ est quasi-compacte. Comme les Y'_α recouvrent l'objet final de E', il suffit de prouver que les $f^*(u)|Y'_\alpha$ sont quasi-compacts (1.10 (ii)). Or, ces morphismes ne sont autres que les $f^*_{v_\alpha}(u|Y_\alpha)$, et on est donc réduit à prouver ceci :

Corollaire 3.6. Soit $f : E' \to E$ un morphisme cohérent de topos localement cohérents. Alors pour tout flèche quasi-compacte u de E, $f^*(u)$ est quasi-compacte.

Grâce à l'implication (i bis) ⇒ (i) de 3.4 déjà prouvée, il suffit de prouver que si $u : X \to Y$ est une flèche de E, avec X, Y cohérents, alors $f^*(u)$ est un morphisme quasi-compact, ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse sur f, impliquant que $f^*(X)$ et $f^*(Y)$ sont également cohérents.

Définition 3.7. Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos localement cohérents. On 230
dit que f est localement cohérent s'il satisfait aux conditions équivalentes de 3.5.

Remarquons que « localement » signifie localement en haut.

3.7.1. Cette notion ne dépend encore que de la classe d'isomorphie du morphisme de topos f, et elle est manifestement stable par composition de morphismes de topos. De plus, en vertu de 3.5, si f est cohérent il est localement cohérent, la réciproque étant vraie si E' et E sont cohérents (en vertu de 3.5 (ii bis)). Du critère 3.5 (ii bis) résulte aussitôt le critère suivant :

Corollaire 3.7. Soient $f : E' \to E$ un morphisme de topos localement cohérents, $(Y_i)_{i\in I}$, $(Y'_i)_{i\in I}$ deux familles d'objets de E et de E', et pour tout $i \in I$ $v_i : Y'_i \to f^*(Y_i)$ un morphisme, d'où un morphisme de topos

$$f_{v_i} : E'_{/Y'_i} \longrightarrow E_{/Y_i}.$$

Supposons que les Y'_i recouvrent l'objet final de E'. Alors f est localement cohérent si et seulement si pour tout $i \in I$, f_{v_i} l'est.

En particulier, appliquant ceci au morphisme identique d'un topos induit, on trouve :

Corollaire 3.8. Soient E un topos localement cohérent, $v : X \to Y$ une flèche de E. Alors le morphisme des topos induits $E_{/X} \to E_{/Y}$ défini par v est localement cohérent.

231 Remarque 3.9. Il semble que tous les morphismes de topos algébriques qu'on ait rencontrés en pratique soient localement cohérents (c'est pourquoi le terme « localement cohérent » n'est pas appelé sans doute à un très grand usage). Il revient au même d'affirmer que les morphismes de topos cohérents qu'on a rencontrés en pratique sont cohérents. On peut cependant construire des morphismes non cohérents de topos cohérents, et plus particulièrement, un morphisme non cohérent du topos ponctuel (IV 2.2) dans un topos noethérien E, cf. 2.17 i).

Exemples 3.10. (Topos associés aux schémas.) Reprenons l'exemple 1.22 de la catégorie (Sch) avec des topologies T_i de SGA IV 6.3. Soit, pour tout schéma X, X_{T_i} le $\mathscr{V}$-topos défini par le site induit $(\mathrm{Sch})_{/X}$. Alors le morphisme de schémas $f : X \to Y$ définit un morphisme de topos $f_{T_i} : X_{T_i} \to Y_{T_i}$, et il résulte de 3.4 et de 1.22 que ce dernier morphisme de topos est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le morphisme de schémas f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au sens habituel de EGA IV 1. En tout état de cause, f_{T_i} est localement cohérent en vertu de 3.8.

On peut aussi associer à un schéma X les $\mathscr{U}$-topos $\mathrm{Top}(X)$ et $\mathrm{Top}(X_{\text{ét}})$ comme dans 1.22.1, et à tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ sont alors associés des morphismes
232 $\mathrm{Top}(f)$ et $\mathrm{Top}(f_{\text{ét}})$ des topos correspondants. Soit $T(f)$ l'un de ces deux morphismes de topos. On vérifie immédiatement via 3.2 que ce morphisme de topos est toujours localement cohérent, et qu'il est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le morphisme de schémas f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au sens habituel.

Ces observations montrent donc encore que la terminologie introduite dans le présent numéro est compatible avec la terminologie reçue en théorie des schémas, et mérite donc d'être acceptée par le lecteur le plus récalcitrant.

Exercice 3.11. (Topos cohérents et prétopos.)

a) On appelle $\mathscr{U}$-prétopos (ou simplement prétopos), une catégorie C satisfaisant aux conditions suivantes :
   1) Les limites projectives finies dans C sont représentables.
   2) Les sommes finies dans C sont représentables, elles sont disjointes et universelles.

3) Les relations d'équivalence dans C sont effectives, et tout épimorphisme dans C est effectif universel.
4) C est équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$.

Montrer que si E est un $\mathscr{U}$-topos cohérent, alors la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets cohérents de E est un $\mathscr{U}$-prétopos, et que le foncteur d'inclusion $E_{\mathrm{coh}} \to E$ est exact à gauche, commute aux sommes finies et au 233
passage au quotient par des relations d'équivalence. (Utiliser 1.5.3, 1.15 et 1.17.1). Montrer que la topologie induite par E sur C est la topologie « précanonique », i.e. la topologie dont les familles couvrantes $X_i \to X$ sont celles qui admettent une sous-famille finie couvrantes pour la topologie canonique de C. Par suite E se reconstitue à équivalence près par la connaissance du prétopos $C = E_{\mathrm{coh}}$, comme le topos $C^{\sim}$ (C étant munie de sa topologie précanonique).

b) Soit C un $\mathscr{U}$-prétopos. Munissons C de la topologie précanonique. Montrons que tout morphisme f de C se factorise en $f''f'$, avec f' un épimorphisme et f'' un monomorphisme. Montrer que le topos $E = C^{\sim}$ est cohérent, et que la foncteur canonique $\epsilon : C \to E$ induit une équivalence de C avec la sous-catégorie E_{coh} de E. (Montrer d'abord que ε est un foncteur pleinement fidèle exact à gauche commutant aux sommes finies et au passage au quotient par une relation d'équivalence, puis qu'un sous-objet cohérent dans E d'un objet de C est dans l'image essentielle de C.) Par suite, le $\mathscr{U}$-prétopos C se reconstitue à équivalence de catégories près quand on connaît le $\mathscr{U}$-topos associé $E = C^{\sim}$.

c) Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-prétopos. Montrer que pour qu'un foncteur $\varphi : C' \to C$ soit un morphisme de sites de C dans C' (pour les topologies précanoniques), il faut et il suffit que φ soit exact à gauche, et commute aux sommes finies et au passage un quotient par une relation d'équivalence.

d) Avec les notations de c), supposons que C et C' soient associés à deux $\mathscr{U}$-topos 234
cohérents E, E' comme dans a). Montrer que le foncteur canonique (IV 4.9.3)

$$\mathscr{M}\!\mathit{orsite}(C, C') \longrightarrow \mathscr{H}\!\mathit{omtop}(E, E')$$

induit une équivalence de premier membre (explicité dans C)) avec la sous-catégorie pleine de deuxième formé des morphismes de topos $E \to E'$ qui sont cohérents, un foncteur quasi-inverse étant obtenu en associant à tout morphisme cohérent de topos $f : E \to E'$ le foncteur $E'_{\mathrm{coh}} = C' \to E_{\mathrm{coh}} = C$ induit par F^*.

e) Soient C un $\mathscr{U}$-prétopos et $E = C^{\sim}$. Exprimer directement en termes de propriétés d'exactitude de C les conditions équivalentes de 1.25 (Consulter 1.28 b.) Montrer qu'un objet X de C est noethérien dans E si et seulement si toute suite croissante de sous-objets de X dans C est stationnaire, donc que E est noethérien si et seulement si tout objet de C satisfait à la conditions précédente.

Exercice 3.12. Un topos E est appelé un topos fini s'il existe une catégorie finie C telle que E soit équivalent à $\widehat{C}$.

a) Pour que E soit un topos fini, il faut et il suffit que E admette suffisamment de points essentiels (IV 7.6 b)), et que la catégorie $\mathscr{P}\!\mathit{ointess}(E)$ des points essentiels de E soit équivalente à une catégorie finie. (Utiliser IV 7.6 d) et h).)

b) Supposons E fini. Prouver que tout point de E est essentiel. Prouver que les 235
2-foncteurs $E \mapsto \mathscr{P}\!\mathit{oint}(E)$ et $C \mapsto \widehat{C}$ établissent des 2-équivalences entre la 2-catégorie des topos finis E, et la 2-catégorie des catégories karoubiennes (IV

7.5 a)) C qui sont équivalentes à des catégories finies, et que tout morphisme de topos finis est essentiel (IV 7.6 a)). (Utiliser a) et IV 7.6 h).)

c) Supposons $E = \widehat{C}$, avec C équivalente à une catégorie finie, et soit F un topos cohérent. Rappelons (IV (4.6.3.1.)) que les morphismes de topos $f : E \to F$ correspondent aux foncteurs $u : C \to \mathscr{P}oint(F)$. Montrer que pour que f soit cohérent, il faut et il suffit que f transforme point cohérent de E (3.1) en point cohérent de F, ou encore que pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, $u(X)$ soit un point cohérent de F. (Utiliser 3.2 et 2,17 g).) En conclure que tout morphisme $f : E \to F$ d'un topos fini dans un topos fini est cohérent.

d) Soit X un espace topologique sobre (IV 4.2.1). Pour que le topos $\mathrm{Top}(X)$ (IV 2.1) soit fini, il faut et il suffit que X soit un ensemble fini. (Utiliser IV 7.1.6)

4. Conditions de finitude dans un topos obtenu par recollement

Le Présent paragraphe ne sera plus utilisé dans la suite du Séminaire.

4.1. Soient E un topos, U un ouvert de E (i.e. un sous-objet de l'objet final de E),
236 et considérons les sous-topos ouverts et fermés correspondants de E (IV 9)

$$E' = E_{/U}, E'' = E_{/U}.$$

Nous désignerons par

$$j : E' \longrightarrow E, i : E'' \longrightarrow E$$

les morphismes de topos canoniques. Rappelons (3.4) que pour que j soit un morphisme quasi-compact (resp. cohérent) de topos, il faut et il suffit que l'inclusion

$$j : U \longrightarrow e$$

de U dans l'objet final de E (inclusion que nous noterons également j) soit un morphisme quasi-compact (resp. cohérent) dans E ; d'autre part, $j : E' \to E$ est toujours quasi-séparé (car $j : U \to e$ l'est (1.8.1)). Nous nous proposons de donner des critères pour que le topos E'' soit cohérent, et le morphisme de topos $i : E'' \to E$ soit cohérent. Notons d'abord :

Proposition 4.2. Les notations étant celles de 4.1, le morphisme d'inclusion $i : E'' \to E$ est quasi-compact, i.e. pour tout objet quasi-compact X de E, l'objet $i^*(X)$ de E'' est quasi-compact ; de plus, si X est prénoethérien (1.30), $i^*(X)$ est prénoethérien.

Cela résulte de la définition 1.1 et du

237 Lemme 4.2.1. L'application $Y \mapsto i^*(Y)$ induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-objets de X qui contiennent le sous-objet $X_U = X \times U$ de X, et l'ensemble des sous-objets de $i^*(X)$.

Notons que, i_* étant conservatif (car pleinement fidèle) et exact à gauche (en particulier, commuant aux produits fibrés), il s'ensuit aussitôt qu'un morphisme $u : Y \to Z$ dans E'' est un monomorphisme si et seulement si $i_*(u) : i_*(Y) \to i_*(Z)$ l'est . Il s'ensuit aussitôt, identifiant (par i_*) E' à la sous-catégorie pleine de E formée des objets Z satisfaisant aux conditions équivalentes de IV 9.7 1), que les sous-objets sans E' de l'objet Z de E'' s'identifient aux sous-objets Y de Z dans E qui veulent bien appartenir à E'', ou, ce qui revient au même, qui contiennent $Z_U \xrightarrow{\sim} U$. Or pour Z de la forme $i_* i^*(X) = X_{\complement U}$ donné par la somme amalgamée IV (9.5.1),

$$i_* i^*(X) = X_{\complement U} = X \amalg_{X_U} U,$$

la donnée d'un sous-objet Y de ce dernier dans E équivaut à la donnée d'un couple formé un sous-objet Y_1 de X et d'un sous-objet Y_2 de U, avec la condition que les images inverses de ces sous-objets dans X_U coïncident. La condition que Y contienne U signifie alors que $Y_2 = U$, et la condition qui reste sur Y_1 est que Y_1 contienne X_U. Cela établit donc une bijection entre l'ensemble des sous-objets de $i^*(X)$ dans E'', et l'ensemble des sous-objets de X qui contiennent X_U. Il est clair que c'est un isomorphisme d'ensembles 238
ordonnés, et que l'application inverse est bien celle annoncée dans 3.14.1.

Corollaire 4.3. a) Soit X un objet de E. Pour que X soit quasi-compact, il suffit que $i^*(X)$ et $j^*(X)$ le soient, et cette condition est également nécessaire si $j : U \to e$ est quasi-compact.

b) Soit Y un objet de E''. Pour que Y soit quasi-compact, il suffit que $i_*(Y)$ le soit, et cette condition est également nécessaire si U est quasi-compact.

Démonstration

a) La suffisance résulte de la définition 1.1 et du fait que le couple (i^*, j^*) est conservatif (IV 9.11 3)). La nécessité résulte du fait que i et j sont quasi-compacts (en vertu de 3.14 et de l'hypothèse que j est quasi-compact).

b) Comme $Y \simeq i^* i_*(Y)$, la suffisance résulte de 4.2. La nécessité résulte de la suffisance dans a), compte tenu que $i^* i_*(Y) \simeq Y$ et $j^* i_*(Y) \simeq U$.

Corollaire 4.4. Soit Y un objet de E''. Si U est quasi-compact ou si E admet une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, alors pour que Y soit quasi-séparé (resp. cohérent), il suffit qu'il en soit ainsi de $i_*(Y)$. Si U est quasi-séparé (resp. cohérent) et si $j : U \to e$ est un morphisme quasi-compact, alors pour que Y soit quasi-séparé (resp. cohérent), il faut que $i_*(Y)$ le soit.

Le cas respé résulte du cas non respé, compte tenu de 4.3 b). Supposons $i_*(Y)$ quasi- 239
séparé, et prouvons qu'il en est de même de Y, sous l'une des deux hypothèses faites. Il faut donc prouver que pour deux objets quasi-compacts Y' et Y'' au-dessus de Y, le produit fibré $Y' \times_Y Y''$ est quasi-compact. Lorsqu'on suppose Y quasi-compact, on note qu'il suffit de prouver que $i_*(Y' \times_Y Y'')$ est quasi-compact (4.3 b)), ce qui résulte du fait que $i_*(Y')$ et $i_*(Y'')$ le sont (4.3 b)), utilisant ici la quasi-compacité de U), que i_* commute aux produits fibrés, et l'hypothèse $i_*(Y)$ quasi-séparé. Lorsqu'on suppose que E admet une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, alors $i_*(Y')$ est limite inductive filtrante de ses sous-objets quasi-compacts X'_α, donc $Y' \simeq i^* i_*(Y')$ est limite inductive filtrante de sous-objets $i^*(X'_\alpha)$, et comme Y' est quasi-compact, il est égale à un des $i^*(X'_\alpha)$. De même Y'' est de la forme $i^*(X''_\beta)$, où X''_β est un sous-objet quasi-compact de $i_*(Y'')$. Mais alors $Y' \times_Y Y'' = i^*(X'_\alpha \times_{i_* Y} X''_\beta)$, et comme $X'_\alpha \times_{i_*(Y)} X''_\beta$ est quasi-compact en vertu de l'hypothèse $i_*(Y)$ quasi-séparé, il s'ensuit que $Y' \times_Y Y''$ l'est aussi en vertu de 4.2.

Inversement, supposant U quasi-séparé et $j : U \to e$ quasi-compact, montrons que si Y est quasi-séparé, il en est de même de $i_*(Y)$, i.e. que pour deux objets X', X'' quasi-compacts au-dessus de $i_*(Y)$, le produit fibré $X' \times_{i_*(Y)} X''$ est quasi-compact. Pour ceci, appliquant 4.3 a), il suffit de prouver que son image par i^* est quasi-compact (ce 240
qui résulte de 4.2 et de l'hypothèse que Y est quasi-séparé) et que son image par j^* est quasi-compact ; or cette dernière est $j^*(X') \times j^*(X'')$, et est bien quasi-compacte car $j^*(X')$ et $j^*(X'')$ le sont (j étant quasi-compact) et U est quasi-séparé.

Corollaire 4.5. Supposons que E admette une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts (resp. prénoethériens), alors il en est de même de E''.

Cela résulte de 4.2 et du

Lemme 4.5.1. Si $(X_\alpha)_\alpha$ est une famille génératrice dans E, alors $(i^*(X_\alpha))_\alpha$ est une famille génératrice dans E''.

Cela signifie en effet que la famille des foncteurs

$$Y \longrightarrow \mathrm{Hom}(i^*(X_\alpha), Y)$$

sur E'' est conservative, or on a $\mathrm{Hom}(i^*(X_\alpha), Y) \simeq \mathrm{Hom}(X_\alpha, i_*(Y))$, et il suffit d'utiliser le fait que le foncteur i_* est conservatif.

Proposition 4.6. Les notations sont celles de 4.1.

a) Si E admet une famille génératrice formée d'objets cohérents, il en est de même pour le sous-topos fermé E'', et le morphisme d'inclusion $i : E'' \to E$ est cohérent.

241 b) Supposons que le morphisme $j : U \to e$ dans E soit quasi-compact. Si E est localement cohérent (resp. cohérent, resp. quasi-séparé, resp. localement noethérien, resp. noethérien, resp. localement parfait, resp. parfait) il en est de même de E'', et le morphisme d'inclusion $i : E'' \to E$ est cohérent.

a) La première assertion résultera de la seconde et de 4.5.1. En tous cas, 4.5 implique que E'' admet une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, donc 3.2 s'applique et nous montre qu'il suffit de vérifier que pour tout objet cohérent X de E, l'objet $i^*(X)$ de E'' est cohérent. Utilisant la compatibilité de la formation du topos complémentaire d'un ouvert avec la localisation (IV 9.13 b)), on est ramené au cas où X est l'objet final de E, donc à prouver que l'objet final de E'' est cohérent. Or, 4.4 s'applique, donc il suffit de prouver que $i_*(e_{E''}) = e_E$ est cohérent, ce qui est bien le cas.

b) Comme sous chacune des hypothèses faites dans b), E admet une famille génératrice formée d'objets cohérents, il résulte déjà de a) que $i : E'' \to E$ est cohérent. De plus, 4.5.1 implique alors que E'' admet la sous-catégorie pleine E''_{coh} formée de ses objets cohérents comme sous-catégorie génératrice. Supposons E cohérent, et montrons que E'' l'est aussi, i.e. (2.4.5) montrons que la sous-catégorie E''_{coh} de E'' est stable par limites projectives finies, sachant qu'il en est ainsi pour la sous-catégorie E_{coh} de E ; or cela résulte aussitôt du critère
242 4.4 respé (qui s'applique, car U est maintenant cohérent, e l'étant et $j : U \to e$ étant quasi-compact), compte tenu que i_* est exact à gauche. Par localisation, utilisant encore IV 9.13 b), on en conclut que si E est localement cohérent, il en est de même de E''. Si E est quasi-séparé, alors E'' l'est aussi : en effet son objet final est quasi-séparé en vertu de 4.4, celui de E l'étant, et il reste à prouver que le produit de deux objets quasi-séparés de E'' est quasi-séparé (sachant qu'il en est ainsi dans E''), ce qui résulte encore du critère 4.4 et du fait que i_* commute aux produits (compte tenu que le sous-objet U de e est quasi-séparé, e l'étant, de sorte que 4.4. s'applique).

Comme un topos est localement noethérien (resp. noethérien) si et seulement si il est localement cohérent (resp. cohérent) et admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens (2.10 (iii bis)), il résulte de ce qui précède et de 4.5 que si E est localement noethérien (resp. noethérien), il en est de même de E''. Supposons maintenant E parfait, et prouvons que E'' l'est. Comme on sait déjà qu'il est cohérent, il reste à vérifier qu'il satisfait au critère 1.25 (i), i.e. que tout objet Y de E'' est limite inductive filtrante d'objets cohérents, sachant que l'énoncé analogue est vrai dans E ; or $i_*(Y)$ étant limite inductive filtrante d'objets cohérents X_α, $Y \simeq i^* i_*(Y)$ est limite inductive filtrante des objets cohérents $i^*(X_\alpha)$. Par localisation (IV 9.13 b)) on en conclut que si E est localement parfait, il en est de même de E''. Cela achève la démonstration de 4.6.

Remarque 4.6.1. En fait, dans 4.6 b) l'hypothèse que $j : U \to e$ soit quasi-compact 243
est inutile, sauf peut-être dans le cas « E quasi-séparé ». Il suffit en effet, en vertu de la démonstration qui précède, de voir que E cohérent implique E'' cohérent. Or U est limite inductive filtrante de ses sous-objets quasi-compacts U_α, et on vérifiera alors dans 7. qu'alors E'' s'identifie au topos limite projective (au sens de 7.) des sous-topos fermés E''_i complémentaire des $E_{/U_i}$, qui en vertu de 4.6 b) sont des topos cohérents à morphismes de transition cohérents. Il s'ensuit alors que E'' est un topos cohérent (7).

Corollaire 4.7. Supposons que la sous-catégorie E_{coh} de E formée des objets cohérents soit génératrice, et soit X un objet de E.

a) Pour que X soit quasi-séparé, il faut que $i^*(X)$ et $j^*(X)$ le soient, et cette condition est aussi suffisante si $j : U \to e$ est quasi-compact.
b) Supposons que $j : U \to e$ soit quasi-compact. Alors X est cohérent si et seulement si $i^*(X)$ et $j^*(X)$ le sont.
c) Supposons E cohérent et $j : U \to e$ quasi-compact. Alors E est parfait (2.9.1) si et seulement si E' et E'' le sont.

a) On a signalé dans 4.1 que $j : E' \to E$ est quasi-séparé, et d'autre part on sait par 4.6 a) qu'il en est de même de i, d'où la nécessité. Pour la suffisance, soient X' et X'' des objets quasi-compacts au-dessus de X, il faut prouver que $X' \times_X X''$ est quasi-compact, et pour ceci il suffit de prouver que ses images par 244
i^* et j^* le sont (4.3 a)). Comme i et j sont quasi-compacts, en vertu de 4.2 et de l'hypothèse $j : U \to e$ quasi-compact, la conclusion résulte alors du fait que i^* et j^* commutent aux produits fibrés, et de l'hypothèse que $i^*(X)$ et $j^*(X)$ sont quasi-séparés.
b) Résulte de la conjonction de a) et de 4.3 a).
c) La nécessité a été déjà vue (4.6 b)). La suffisance résulte du fait que, E étant cohérent, E' et E'' le sont (4.6 b)), de sorte que pour un des topos envisagés, le fait qu'il soit parfait signifie que la catégorie de ses objets cohérents est stable par $\varinjlim$ finies. On conclut donc par b).

Exercice 4.8. a) Résoudre la question suivante (dont le rédacteur avoue à sa confusion ignorer la réponse) : avec les notations de 4.1, si E est quasi-séparé (resp. algébrique) en est-il de même de E'' ?
b) Supposons que E soit équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$. Prouver directement, en utilisant 2.17 c) et IV 9.24, que si E est localement cohérent (resp. cohérent, resp. algébrique, resp. quasi-séparé, resp. localement noethérien, resp. noethérien) il en est de même de E''.

4.9. Gardons les notations de 4.1, et rappelons (IV 9.16) que la donnée d'une situation (E, U), formée par un topos E et un ouvert U de E, équivaut essentiellement à celle d'un triple (E', E'', f), où E' et E'' sont des topos et où 245

(4.9.1) $$f : E' \longrightarrow E''$$

est un « foncteur de recollement », i.e. un foncteur exact à gauche et accessible ; partant de (E, U) comme dans 4.1, le foncteur de recollement associé est donné par

(4.9.2) $$f = i^* j_*.$$

Nous nous proposons d'exprimer, en termes des données E', E'', f le fait que E soit un topos cohérent (resp. parfait) et que U soit un objet quasi-compact, ou ce qui revient au même, que E et E' soient cohérents. Nous savons déjà que ceci entraîne que E'' est également cohérent (4.6 b)), de sorte que la question revient à la suivante : étant donnés deux topos cohérents E' et E'' et un foncteur de recollement f (4.9.1), à quelles conditions sur f le topos recollé E est-il cohérent (resp. parfait) ? Nous savons d'ailleurs (4.7 c)) que E est parfait si et seulement si E est cohérent, et E' et E'' sont parfaits ; donc le cas respé du problème posé se ramène au cas non respé. Signalons cependant que la solution (4.10) de ce dernier est plus jolie si on suppose déjà E' parfait.

4.9.3. Notons d'abord que si E est cohérent, alors on reconstruit la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets $X = (X', X'', u : X'' \to f(X'))$ de E qui sont
246 cohérents, comme étant la sous-catégorie E_0 de E formée des X pour lesquels $X' = j^*(X)$ et $X'' = i^*(X)$ sont cohérents (4.7 b)). Une condition nécessaire pour que E soit cohérent est donc que la sous-catégorie E_0 précédente soit génératrice. Cette condition est également suffisante, car en vertu de 4.3 a) E_0 est formée d'objets quasi-compacts, d'autre part il est clair que E_0 est stable par limites projectives finies, et on conclut par 3.4.5.

Rappelons maintenant (IV 9.18) que la donnée d'un foncteur de recollement (4.9.1) équivaut à celle d'un faisceau sur E'', à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E')^0$:

$$G \in \mathscr{F}\!aisc(E'', \mathrm{Pro}(E')^0), G : E''^0 \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'^0), \tag{4.9.4}$$

ou ce qui revient au même, à celle d'un foncteur $g = G^0$,

$$g : E'' \longrightarrow \mathrm{Pro}(E') \tag{4.9.5}$$

qui commute aux limites inductives. Si C est une sous-catégorie génératrice de E'', qu'on munit de la topologie induite, on sait (II 6.10) que la donnée de G équivaut aussi (à isomorphisme unique près) à celle d'un faisceau sur C à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E')^0$

$$G_C \in \mathscr{F}\!aisc(C, \mathrm{Pro}(E')^0), G_C : C^\circ \longrightarrow \mathrm{Pro}(E')^0, \tag{4.9.6}$$

ou, ce qui revient au même, à celle d'un foncteur $g_C = G_C^0$,

$$g_C : C \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'), \tag{4.9.7}$$

247 satisfaisant aux conditions d'exactitude à gauche qu'on sait (II 6.2.1)). Bien entendu, g_C n'est autre que la restriction de g (4.9.5) à C. Le cas le plus intéressant pour nous est celui où on prend $C = E'_{\mathrm{coh}}$, d'où des objets

$$G_0 \in \mathscr{F}\!aisc(E''_{\mathrm{coh}}, \mathrm{Pro}(E')^0), G_0 : E''^0_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E')^0, \tag{4.9.8}$$

$$g_0 = G_0^0 : E''_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'), \tag{4.9.9}$$

dont chacun revient encore à la donnée de f.

4.9.10. Supposons la sous-catégorie pleine génératrice C de E'' formée d'objets quasi-compacts et qu'elle soit stable dans E'' par sommes finies, par passage au quotient par des relations d'équivalence, et par produits fibrés : c'est le cas par exemple pour $C = E''_{\mathrm{coh}}$ (1.15 et 1.17.1). Il est alors immédiat, si P est une catégorie où les limites projectives finies sont représentables (par exemple $P = \mathrm{Pro}(E')^0$), qu'un foncteur $G_C : G^0 \to P$ est un faisceau à valeurs dans P si et seulement si le foncteur $g_C = G_C^0 : C \to P^0$ commute aux sommes finies et au passage au quotient par une relation d'équivalence. Ceci précise en particulier quels sont les faisceaux (4.9.6) (exprimant donc les foncteurs de recollement $f : E' \to E''$).

Ces rappels étant posés, nous pouvons donner la solution au problème posé dans 4.9 :

PROPOSITION 4.10. Soient E', E'' deux topos cohérents, et $f : E' \to E''$ un foncteur de recollement (IV 9.10), i.e. un foncteur exact à gauche et accessible. Soit E le topos qu'on en déduit par recollement (IV 9.16), et désignons par E'_{coh} (resp. E'_{PF}) la sous-catégorie strictement pleine de E' formée des objets cohérents (resp. des objets X tels que le foncteur covariant $\mathrm{Hom}(X, -)$ représenté par X commute aux petites limites inductives filtrantes). Considérons les conditions suivantes : **248**

(i) E est cohérent.

(ii) Pour tout objet X' de E', il existe une famille de morphismes

$$v_\alpha : Y'_\alpha \longrightarrow X'$$

de but X', à sources des objets cohérents de E', telle que la famille des

$$f(v_\alpha) : f(Y'_\alpha) \longrightarrow f(X')$$

dans E'' soit couvrante.

(ii bis) f commute aux (petites) limites inductive inductives filtrantes, et (ii) est vrai pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\, E'_{PF}$.

(ii ter) Le foncteur canonique (IV 9.20.1)

$$\pi : \mathscr{P}oint(E'') \longrightarrow \mathrm{Pro}(E') \tag{4.10.1}$$

défini par le foncteur de recollement f se factorise (à isomorphisme près) par $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$ (via le foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}}) \to \mathrm{Pro}(E')$ provenant de l'inclusion $E'_{\mathrm{coh}} \to E'$) :

$$\pi_0 : \mathscr{P}oint(E'') \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}}). \tag{4.10.2}$$

(iii) Le foncteur f commute aux (petites) limites inductives filtrantes. **249**

(iii bis) Le foncteur g_0 (4.9.9) se factorise (à isomorphisme près) par un foncteur

$$E''_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{PF}), \tag{4.10.3}$$

via le foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Pro}(E'_{PF}) \to \mathrm{Pro}(E')$ déduit de l'inclusion $E'_{PF} \to E'$.

(iii ter) Le foncteur canonique π (4.10.1) se factorise (à isomorphisme près) en

$$\pi_1 : \mathscr{P}oint(E'') \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{PF}). \tag{4.10.4}$$

(iv) Le foncteur g_0 (4.9.9) se factorise (à isomorphisme près) par un foncteur

$$E''_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}}). \tag{4.10.5}$$

On a alors le diagramme d'implications :

$$\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(ii bis)} \Leftrightarrow \text{(ii ter)} \Rightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iii bis)} \Leftrightarrow \text{(iii ter)}. \tag{4.10.6}$$

Signalons tout de suite le

COROLLAIRE 4.11. a) Supposons que E' soit parfait. Alors toutes les conditions envisagées dans 4.10 sont équivalentes, en particulier E est cohérent si et seulement si f commute aux limites inductives filtrantes, ou encore si et seulement si le foncteur g_0 (4.9.9) se factorise (à isomorphisme près) par $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$. **250**

b) Pour que E soit parfait, il faut et il suffit que E' et E'' le soient, et que f (resp. g_0) satisfasse à la condition énoncée dans a).

En effet, a) résulte du fait que E' parfait signifie $E'_{\mathrm{coh}} = E'_{PF}$, de sorte que (iii bis) implique (iv). L'assertion b) s'ensuit, comme il résulte des remarques préliminaires de 4.9.

4.12. Démonstration de 4.10.

a) Explicitons la condition équivalente à (i) obtenue dans 4.9.3, savoir que la sous-catégorie pleine E_0 de E est génératrice i.e. que pour tout objet $X = (X', X'', u : X'' \to f(X'))$ de E, la famille de tous les morphismes

$$v = (v', v'') : Y = (Y', Y'', v : Y'' \longrightarrow f(y')) \longrightarrow X,$$

avec $Y \in \mathrm{Ob}\, E_0$ i.e. Y', Y'' cohérents, est épimorphique. Comme le couple de foncteurs (i^*, j^*) est conservatif, cela signifie aussi que la famille des morphismes correspondants $Y' \to X'$ est épimorphique dans E', et que la famille des morphismes correspondants $Y'' \to X''$ est épimorphique dans E''. Or c'est clair pour la première, comme on voit en prenant des $Y \in \mathrm{Ob}\, E_0$ au-dessus de U i.e. tels que $Y'' = \varnothing_{E''}$: on trouve la famille de toutes les flèches dans E' de but X', à source cohérente, qui est bien épimorphique puisque E' est cohérent donc la cous-catégorie ${E'}_{\mathrm{coh}}$ est génératrice. Il reste donc à exprimer que la famille des $Y'' \to X''$ est épimorphique, quel que soit l'objet donné X de E.

251 b) Or supposons satisfaite la condition (ii) pour l'objet X' envisagé ici. Il en résulte que l'on peut trouver une famille épimorphique de morphismes $Y''_\beta \to X''$, dont les composées avec $u : X'' \to f(X')$ se relèvent chacun en un morphisme $Y''_\beta \to f(Y'_\alpha)$ pour $\alpha = \phi(\beta)$ convenable ; comme E''_{coh} est une sous-catégorie génératrice de E'', on peut même supposer les Y''_β cohérents. Mais alors les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} Y''_\beta \arrow[r] \arrow[d] & f(Y'_{\varphi(\beta)}) \arrow[d] \\ X'' \arrow[r] & f(X') \end{tikzcd}$$

fournissent la famille cherchée de morphismes dans E, donnant une famille épimorphique $Y''_\beta \to X''$. Donc (ii) ⇒ (i).

Réciproquement, supposons (i) et prouvons (ii). On applique la condition explicitée dans a) au cas de l'objet

$$X = j_*(X') = (X', f(X'), \mathrm{id} = f(X') \xrightarrow{\sim} f(X'));$$

comme les $Y'' \to X'' \simeq f(X')$ forment une famille épimorphique, il en est de même a fortiori de la famille des $f(v') : f(Y') \to f(X')$, d'où la conclusion, puisque les Y' sont cohérents par hypothèse. Donc

$$(i) \Leftrightarrow (ii).$$

252 c) Notons maintenant que la condition (iv) signifie aussi que pour tout objet X'' de F'', le foncteur pro-représentable

$$g(X'') : X' \longrightarrow \mathrm{Hom}(X'', f(X'))$$

sur E' est pro-représentable par un pro-objet dont les composants sont dans ${E'}_{\mathrm{coh}}$, ou ce qui revient au même, qu'il existe dans la catégorie $E'_{/g(X'')}$, formée des couples d'un objet X' de E' et d'un élément $u \in g(X'')(X') = \mathrm{Hom}(X'', f(X'))$, $u : X'' \to f(X')$, un ensemble cofinal d'objets (X'_α, u_α), $u_\alpha : X'' \to f(X'_\alpha)$, avec $X''_\alpha \in \mathrm{Ob}\, E'_{\mathrm{coh}}$. La condition de cofinalité, comme la catégorie $E'_{/g(X'')}$ est filtrante, signifie simplement que pour tout objet (X', u), $u : X'' \to f(X')$ de $E'_{/g(X'')}$ il existe un morphisme d'un (X'_i, u_i) dans l'objet précédent, i.e. un morphisme $v'_\alpha : X'_\alpha \to X'$ rendant commutatif le triangle

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & f(x'_\alpha) \arrow[d, "f'(v'_\alpha)"] \\ X'' \arrow[ur, dash, "u_\alpha"] \arrow[r] & f(X'). \end{tikzcd}$$

Donc la condition (iv) équivaut à ceci :

(iv bis) Pour tout flèche $u : X'' \to f(X')$, avec $X' \in \mathrm{Ob}\, E'$ et $X'' \in \mathrm{Ob}\, E'_{\mathrm{coh}}$, il existe une flèche $v : Y' \to X'$ dans E' telle que u se factorise à travers $f(v') : f(X') \to f(X')$.

Or il est clair que la condition (iv bis) implique (ii), puisque pour X' fixé, la famille des $u : X'' \to f(X')$ de source un objet cohérent est épimorphique, **253**
de sorte qu'il en est a fortiori ainsi de la famille de tous les $f(v'_\alpha)$ dans les diagrammes correspondants $(*)$. Donc

$$(iv) \Rightarrow (i).$$

d) Explicitons la condition (ii ter). Soit p un point de E'', alors par définition $\pi(p)$ est le pro-objet de E' qui pro-représente le foncteur $h : X' \to f(X')_p$, ou encore la pro-objet défini par le foncteur canonique $E'_{/h} \to E'$, où $E'_{/h}$ désigne la catégorie des couples (X', u), avec $X' \in \mathrm{Ob}\, E'$ et $u \in h(X')$ i.e. $u \in f(X')_p$. Dire que ce pro-objet est isomorphe à un pro-objet provenant de $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$ signifie que la sous-catégorie de $E'_{/h}$ formée des (X', u) avec $X' \in \mathrm{Ob}\, E'_{\mathrm{coh}}$ y est cofinale, i.e. que pour tout objet (X', u), $u \in f(X')_p$, de $E'_{/h}$, il existe un objet (X'_0, u_0) qui le majore, avec X'_0 cohérent, i.e. qu'il existe un morphisme $X'_0 \to X'$ (X'_0 cohérent) tel que u soit dans $\mathrm{Im}(f(X'_0) \to f(X'))$. Dire que ceci est vrai pour tout point p signifie que pour tout objet X' de E', la famille des $f(X'_0) \to f(X')$, avec $f(X'_0)_P \to f(X')_P$ soit surjective. Comme on verra dans l'appendice (10.) qu'un topos cohérent E'' a assez de points, on voit que la condition obtenue signifie aussi que pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\, E$, la famille des $f(X'_0) \to f(X')$ est épimorphique. Mais cela n'est autre que la condition (ii), donc

$$(ii) \Leftrightarrow \text{(ii ter)}.$$

e) La condition que f commute aux limites inductives filtrantes (condition (iii)) **254**
équivaut, comme la famille des foncteurs fibres de E'' est conservative, à celle que les foncteurs composés $h : X' \to f(X')_P$ le sont. Prouvons que cela signifie que le pro-objet $\pi(p)$ qui pro-représente ce foncteur est dans l'image essentielle de $\mathrm{Pro}(E'_{PF})$: cela prouvera alors les implications

$$(iii) \Leftrightarrow \text{(iii ter)} \Leftarrow \text{(ii ter)} \Rightarrow \text{(iii bis)}.$$

Nous sommes donc amenés à prouver le

Lemme 4.12.1. Soient E' un topos tel que la sous-catégorie E'_{coh} y soit génératrice, et $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(E')$. Pour que X' appartienne à l'image essentielle de

$\mathrm{Pro}(E'_{PF})$, il faut et il suffit que le foncteur $h : E' \to (\mathrm{Ens})$ qu'il pro-représente commute aux limites inductives filtrantes.

Comme une limite inductive filtrante de foncteurs commutant aux limites inductives filtrantes possède la même propriété, la suffisance résulte de la définition de E'_{PF}. Pour la nécessité, il faut prouver que si le foncteur h commute aux limites inductives filtrantes, alors dans la catégorie filtrante $E'_{/h}$ des couples (X', u) avec $u \in h(X')$, la sous-catégorie formée des couples (X', u) avec $X' \in \mathrm{Ob}\, E'_{PF}$ est cofinale, i.e. pour tout (X', u) dans $E'_{/h}$, il existe un mor-
255 phisme $X'_0 \to X'$, avec $X'_0 \in \mathrm{Ob}\, E'_{PF}$, tel que $u \in \mathrm{Im}(h(X'_0) \to h(X'))$. Or on sait que X' est limite inductive filtrante d'objets X'_i de E'_{PF} (1.24.2 a)), donc $h(X')$ est limite inductive filtrante des $h(X'_i)$, d'où la conclusion.

f) Il reste seulement à prouver les implications

$$\text{(ii bis)} \Rightarrow \text{(ii)} \quad \text{et} \quad \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iii bis)}.$$

La première implication résulte trivialement du fait que tout objet X' de E' est limite inductive filtrante d'objets X'_i de E'_{PF}. Pour la deuxième, il suffit de noter que la famille des foncteurs

$$Y'' \longmapsto \mathrm{Hom}(X'', Y''),$$

pour $X'' \in \mathrm{Ob}\, E''{}_{\mathrm{coh}}$, est conservative et formée de foncteurs commutant aux limites inductives filtrantes (1.23 (ii)), donc le foncteur $f : E' \to E''$ commute aux limites inductives filtrantes si et seulement s'il en est ainsi des foncteurs composés $X' \to \mathrm{Hom}(X', f(X')) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(E')}(g_0(X''), X')$, ce qui équivaut au fait que les $g_0(X'')$ sont dans l'image essentielle de $\mathrm{Pro}(X'_{PF})$, en vertu de 4.12.1. C.Q.F.D.

Remarque 4.13. Il convient de préciser, en langage faisceautique, la signification de la condition 4.10 (iv). Considérons le diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^{\circ} \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\beta_0"] & \mathrm{Pro}(E')^{\circ}_{\beta} \arrow[d, "\beta"] \\ \overset{\vee}{E}{}'_{\mathrm{coh}} & \overset{\vee}{E}{}' \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd} \tag{4.13.1}$$

256 où les signes $\vee$ désignent les catégories de foncteurs à valeurs dans (Ens), et la deuxième flèche horizontale γ est la flèche de restriction des foncteurs, toutes les autres flèches désignant les foncteurs pleinement fidèles bien connus. Notons que la flèche d'inclusion α ne commute pas en général aux limites projectives, mêmes finies, donc en général un faisceau F sur un site C (tel que E'') définit un préfaisceau $\alpha \circ F$ sur ce même site, à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E'')^0$, qui n'est pas nécessairement un faisceau. Néanmoins, si un préfaisceau F sur C à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0$ est tel que le préfaisceau αF correspondant à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E')^0$ est un faisceau, alors F est lui-même un faisceau. Cela provient en effet du fait que la condition d'être un faisceau est une propriété d'exactitude à gauche (II 6.2 1)), et que les foncteurs β, β_0 et γ commutent aux petites limites projectives.

D'autre part, il résulte de la caractérisation 4.9.10 des faisceaux sur E''_{coh} à valeurs dans une catégorie P quelconque, que pour tout foncteur $\alpha : P \to Q$ tel que $\alpha^0 : P^0 \to$
257 Q^0 commute aux sommes finies et au passage au quotient par des relations d'équivalence, le foncteur $g \mapsto \alpha \circ g'$ de $\mathrm{Hom}(E''^{0}_{\mathrm{coh}}, P)$ dans $\mathrm{Hom}(E''^{0}_{\mathrm{coh}}, Q)$ transforme faisceaux

en faisceaux. D'autre part, nous savons que dans Hom E'_{coh} et dans E' les sommes finies et les quotients par les relations d'équivalence sont représentables, et que le foncteur d'inclusion $E'_{\text{coh}} \to E'$ y commute (1.15 et 1.17.1). Il en est donc de même pour les catégories $\text{Pro}(E'_{\text{coh}})$ et $\text{Pro}(E')$ et le foncteur d'inclusion entre ces catégories (I 8.9.5 b) et 8.9.7), lequel n'est autre que α^0, où α est le foncteur intervenant dans (4.13.1). De ceci on conclut que si

$$\varphi : {E'}^0_{\text{coh}} \longrightarrow \text{Pro}(E'_{\text{coh}})^0 \tag{4.13.2}$$

est un foncteur, alors φ est un faisceau sur E''_{coh} à valseurs dans $\text{Pro}(E'_{\text{coh}})^0$ si et seulement si $\alpha \circ \varphi$ est un faisceau sur E''_{coh} à valeurs dans $\text{Pro}(E')^0$. Donc la catégorie des foncteurs de recollement $f : E' \to E''$ qui satisfont à la condition 4.10 (iv) est canoniquement équivalente à la catégorie des faisceaux φ sur E''_{coh} à valeurs dans $\text{Pro}(E'_{\text{coh}})^0$. On en conclut, compte tenu de 4.10, qu'un tel faisceau φ définit canoniquement un foncteur de recollement (à isomorphisme unique près), et que le topos E déduit de ce dernier est cohérent ; de plus (4.11) si E' est parfait, on obtient ainsi tous les topos cohérents qu'on peut déduire des topos E', E'' par recollement.

Notons d'autre part que E'_{coh} est équivalente à une petite catégorie et est stable par limites projectives finies, de sorte que (I 8.10.14) $\text{Pro}(E'_{\text{coh}})^0$ est équivalente, par le foncteur pleinement fidèle β_0 de (4.13.1), à la sous-catégorie pleine de $\hat{E}'_{\text{coh}} = \text{Hom}(E'_{\text{coh}}, (\text{Ens}))$ formée des foncteurs qui sont exacts à gauche. Donc la donnée d'un faisceau (4.13.2) équivaut à celle d'un foncteur **258**

$$F : {E''}^0_{\text{coh}} \times E'_{\text{coh}} \longrightarrow (\text{Ens}) \tag{4.13.3}$$

qui soit un faisceau par rapport au premier argument et qui soit exact à gauche en le second argument ; ou encore, à celle d'un foncteur

$$f_0 : E'_{\text{coh}} \longrightarrow E'' \tag{4.13.4}$$

qui soit exact à gauche. Si f est le foncteur de recollement satisfaisant à la condition 4.10 (iv) associé à φ, on vérifie immédiatement que f_0 est canoniquement isomorphe à la restriction du foncteur $f : E' \to E''$. On voit donc que sous les conditions envisagées f_0 détermine f (à isomorphisme canonique près). Signalons enfin, pour résumer le contenu de 4.11 :

Corollaire 4.14. Lorsque E' est un topos parfait, alors la catégorie des foncteurs de recollement $f : E' \to E''$ qui donnent par recollement un topos cohérent E est équivalente par $f \mapsto f_0 = f/E'_{\text{coh}}$ à la catégorie des foncteurs $f_0 : E'_{\text{coh}} \to E''$ qui sont exacts à gauche, ou encore à la catégorie des faisceaux φ sur le site E''_{coh} (ou, ce qui **259** revient au même, sur le topos E'') à valeurs dans la catégorie $\text{Pro}(E'_{\text{coh}})^0$ (cf. 4.9.10).

On observera que la première assertion résulte également 4.10 en notant que $E' \approxeq \text{Ind}(E'_{\text{coh}})$ (1.25), donc que la catégorie des foncteurs $f : E' \to P$ commutant aux limites inductives filtrantes (où P est une catégorie où les petites limites inductives filtrantes sont représentables) est équivalente, par le foncteur restriction, à la catégorie des foncteurs quelconque $f : E'_{\text{coh}} \to P$; il est immédiat que sous ces conditions, si dans P les $\varinjlim$ finies sont représentables, que f est exact à gauche si et seulement si f_0 l'est.

Remarques 4.15. a) La démonstration donnée de 4.10 montre qu'on obtient des conditions équivalentes à (ii ter) resp. (iii ter) en remplaçant la catégorie $\mathscr{P}oint(E'')$ par une sous-catégorie qui définisse une famille conservative de foncteurs fibres.

b) Prenant pour E'' le topos ponctuel (IV 2.2), on voit aussitôt que les conditions (ii ter) et (iii ter) ne sont équivalentes que si $E'_{\mathrm{coh}} = E'_{PF}$, i.e. si E' est parfait. Donc la condition « E cohérent » n'équivaut à la condition « f commute aux limites inductives filtrantes » que si E' est parfait. Par contre, prenant plus généralement pour E'' un topos cohérent de la forme $\widehat{C}$, on voit que dans ce cas la condition (i) équivaut à (iv) pour tout E'. En fait, le rédacteur n'est pas arrivé à construire dans le cas général un exemple où E soit cohérent, sans que la condition (iv) soit vérifiée. C'est honteux !

5. Commutation des foncteurs $H^i(X, -)$ aux limites inductives filtrantes

260 Théorème 5.1. Soient E' un topos algébrique (2.3), E un topos localement cohérent (2.3), $f : E' \to E$ un morphisme cohérent de topos (3.1). Alors, pour tout entier q, les foncteurs $R^q f_*$ (V 5.0) commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens.

Corollaire 5.2. Soit E' un topos cohérent (2.3). Pour tout entier q, le foncteur $H^q(E', -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens.

Corollaire 5.3. Soient E un topos (resp. un topos algébrique) (2.3), X un objet de E algébrique et cohérent (resp. cohérent) (2.3). Pour tout entier q, le foncteur $H^q(X, -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens.

Le corollaire 5.2, se déduit de 5.1 en prenant pour E le topos ponctuel et pour f : $E' \to E$ l'unique morphisme (IV 2.2). Montrons que 5.2 entraîne 5.3. Soit $j_X : E_{/X} \to E$ le morphisme de localisation. On a un isomorphisme canonique, fonctoriel en le faisceau abélien (V 2.2.1) $H^q(X, F) \simeq H^q(E_{/X}, j_X^* F)$. Le foncteur j_X^* commute aux limites inductives et le topos $E_{/X}$ est cohérent (2.4.6) d'où 5.3. Montrons que 5.3 entraîne 5.1. Soit E_{cohalg} la sous-catégorie pleine de E définie par les objets algébriques et cohérents de E. C'est une catégorie génératrice (2.4.5). Pour tout faisceau abélien F, $R^q f_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto H^q(f^* X, F)$ ($X \in \mathrm{ob}\, C$) (V 5.1). Comme f est cohérent, $f^* X$ est cohérent pour tout objet X de C (3.1). D'après 5.3 le préfaisceau $X \mapsto H^q(f^* X, F)$ commute aux limites inductives filtrantes de l'argument F d'où 5.1. en utilisant le fait que le foncteur faisceau associé commute aux limites inductives. (On remarquera qu'on n'utilise que la propriété suivante du morphisme f : Il existe une famille génératrice S de E telle que pour tout X de S, $f^*(X)$ soit algébrique et cohérent). Il reste donc à démontrer 5.2. On sait déjà que le foncteur $H^\circ(E', -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens (1.2.3). D'après un résultat classique de [15], il suffit pour démontrer 5.2, de montrer qu'une limite inductive filtrante de faisceaux acycliques pour le foncteur $H^\circ(E', -)$ est acyclique pour $H^\circ(E', -)$. Ceci résulte du lemme suivant appliqué au cas où $C = E'_{\mathrm{coh}}$' :

261 Lemme 5.4. Soient E un topos localement cohérent (2.3), C une sous-catégorie pleine de E, génératrice et stable par produit fibré telle que tout objet de C soit quasi-compact (1.1). Une limite inductive filtrante de faisceaux C-acycliques (V 4.2) est un faisceau C-acyclique.

Soit $(F_i)_{i \in I}$, un système inductif filtrante de faisceaux C-acycliques et notons F sa limite inductive. Tout objet Y de C est cohérent (2.1) et par suite $F(Y) = \varinjlim_i F_i(Y)$ (1.2.3). Pour montrer que F est C-acyclique, il suffit de montrer que $\check{H}^q(Y, F) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout Y de C (V 4.3). Soient X un objet de C, $\mathscr{X} = (X_\alpha \to X)_{\alpha \in A}$ une famille couvrante finie par des objets de $C^{\cdot}$. On a $H^q(\mathscr{X}, F) = H^q(C^{\cdot}(\mathscr{X}, F))$ (V 2.4.3). D'après ce qui précède, et en utilisant le fait que $C^{\cdot}(\mathscr{X}, F)$ ne fait intervenir que des produits finis de groupes (V 2.3.3), on a $C^{\cdot}(\mathscr{X},F) = \varinjlim_i C^{\cdot}(\mathscr{X},F_i)$. Donc $H^q(\mathscr{X},F) = H^q(C^{\cdot}(\mathfrak{X},F)) = H^q(\varinjlim_i C^{\cdot}(\mathfrak{X},F_i)) = \varinjlim_i C^{\cdot}(\mathfrak{X},F_i)) = 0$ pour $q > 0$ (V 4.3). Par suite $\check{H}^q(X,F) = \varinjlim_{\mathfrak{X}} H^q(\mathfrak{X},F) = 0$.

Corollaire 5.5. Soient E un topos cohérent (2.3), $(X_i)_{i\in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-objets cohérents de l'objet final. Notons Φ la famille des fermés de E (IV 9) contenue dans le fermé complémentaire de l'un des X_i. La famille Φ est une famille de supports de E (V 6.12) et pour tout entier q, les foncteurs $H^q_\Phi(E,-)$ et H^q_Φ (V 6.13) commutent aux limites inductives filtrantes.

Soit Z_i le fermé complémentaire de X_i. Pour tout faisceau abélien F on a une suite exact (V 6.5) :

$$0 \longrightarrow H^0_{Z_i}(E,F) \longrightarrow H^0(E,F) \longrightarrow H^0(X_i,F) \longrightarrow H^1_{Z_i}(E,F) \longrightarrow \dots \quad .$$

Les foncteurs $H^q(E,F)$ et $H^q(X_i,F)$ commutent aux limites inductives de l'argument F (5.2, 5.3). Par suite $H^q_{Z_i}(E,F)$ commute aux limites inductives filtrantes de l'argument F, d'où la propriété analogue pour les foncteurs $H^q_\Phi(E,F)$, en passant à la limite inductive sur les Z_i (V 6.13). L'assertion concernant les foncteurs $\mathscr{H}^q_\Phi$ s'en déduit en localisant et en passant au faisceau associé.

Définition 5.6. Soient E un topos annelé d'anneau A et q un entier. Un A-Module 262
G est dit de q-présentation finie s'il existe une famille X_i d'objets de E couvrant l'objet final de E, telle que pour tout i on ait une suite exacte de Modules sur $E_{/X_i}$:

$$L_q \longrightarrow L_{q-1} \longrightarrow \cdots L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow G_{/X_i} \longrightarrow 0 \tag{5.5.1}$$

où pour tout p, $L_p = A^{n_p}_{/X_i}$, n_p entier.

Proposition 5.7. Soit G un faisceau de q-présentation finie. Pour tout $i \leq q-1$, le foncteur $\mathscr{E}xt^i_A(G,-)$ commute aux limites inductives filtrantes de A-Modules.

Le problème est local sur E (V 6.1). On peut donc supposer, quitte à se localiser aux $E_{/X_i}$, qu'on a une suite exacte du type (5.5.1). Posons $L. = L_q \to \cdots L_1 \to L_0$. On a $\mathscr{E}xt^i_A(G,F) : \mathscr{H}^i(\mathscr{H}om_A(L.,F))$ et le foncteur $F \mapsto \mathscr{H}om_A(L.,F)$ commute aux limites inductives, d'où la proposition.

Corollaire 5.8. Soient (E,A) un topos annelé, G un faisceau de A-Modules de q-présentation finie, X un objet algébrique et cohérent de E. Les foncteurs $F \mapsto \operatorname{Ext}^i_A(X\,;G,F)$, tels que $\frac{i(i-1)}{2} \leq q-1$, commutent aux limites inductives filtrantes de l'argument F.

Se déduit de 5.7, et de 5.3 par la suite spectrale (V 6.1.3).

5.9. Soient (E,A) un topos annelé, Φ une famille de supports de E (V 6.12), G un A-module de r-présentation finie (5.6), X un objet de E algébrique et cohérent (2.3). En passant à la limite inductive sur les fermés de Φ dans les dernières suites spectrales de V 6.9.1 et V 6.9.2 respectivement, on obtient deux suites spectrales (V 6.13)

$$\begin{cases} {}'E_2^{pq} = \varinjlim_{Z\in\Phi} \operatorname{Ext}^p_A(X;G,H^q_Z F) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_{A,\Phi}(X;G,F), \\ {}''E_2^{pq} = \varinjlim_{Z\in\Phi} \mathscr{E}xt^p_A(G,H^q_Z F) \Rightarrow \mathscr{E}xt^{p+q}_{A,\Phi}(G,F). \end{cases} \tag{5.9.1}$$

Il résulte de 5.7 et de 5.8 qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{cases} {}'E_2^{pq} \simeq \operatorname{Ext}^p_A(X;G,H^q_\Phi F) & , \quad \frac{p(p-1)}{2} \leq r-1, \\ {}''E_2^{pq} \simeq \mathscr{E}xt^p_A(G,H^q_\Phi F) & , \quad p \leq r-1. \end{cases} \tag{5.9.2}$$

263 Corollaire 5.10. On utilise les hypothèses et les notations de 5.5. Soient A un Anneau de E et G un A-Module de q-présentation finie. Pour tout entier i tel que $\dfrac{i(i-1)}{2} \leq r-1$, les foncteurs $F \mapsto \mathrm{Ext}^i_{A,\Phi}(E;G,F)$ et $F \mapsto \mathscr{E}xt^i_{A,\Phi}(G,F)$ (V 6.13) commutent aux limites inductives filtrantes.

Se déduit de 5.5 et 5.7 par les premières suites spectrales de V 6.9.1 et V 6.9.2 respectivement.

6. Limites inductive et projective d'une catégorie fibrée

6.0. Nous supposons que le lecteur est familier avec la théorie des catégories fibrées [5]. Ce numéro a essentiellement pour but de fixer la terminologie et les notations concernant les catégories fibrées. Toutes les catégories considérées dans ce numéro appartiendront, sauf mention contraire, à un univers fixé $\mathscr{U}$.

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{E}$ trois catégories, $\pi : \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ et $\pi' : \mathscr{G} \to \mathscr{E}$ deux foncteurs. On désigne par $\mathscr{H}om_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{G} \arrow[dl, "\pi'"] \\
& \mathscr{E} &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, et dont les morphismes sont les $\mathscr{E}$-morphismes de foncteurs, i.e. les morphismes de foncteurs transformés par π' en morphismes identiques.

Soit ξ un objet de $\mathscr{E}$ au-dessus. Les objets X de $\mathscr{F}$ tels que $\pi(X) = \xi$ sont appelés les objets de $\mathscr{F}$ au-dessus de ξ. Soit $f : \xi \to n$, un morphisme de $\mathscr{E}$. Les morphismes m de $\mathscr{F}$
264 tels que $\pi(m) = f$ sont appelés les morphismes de $\mathscr{F}$ au-dessus de f. Soient $f : \xi \to \eta$ un morphisme de $\mathscr{E}$ et X un objet de $\mathscr{F}$ au-dessus de ξ, Y un objet de $\mathscr{F}$ au-dessus de η ; on désigne par $\mathrm{Hom}_f(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y au-dessus de f.

Définition 6.1.

1) Un morphisme $m : X \to Y$ de $\mathscr{F}$ est dit cartésien si pour tout morphisme $p : Z \to Y$ au-dessus de $\pi(m)$, il existe un unique morphisme $q : Z \to X$ au-dessus de l'identité de $\pi(X)$ tel que $mq = p$.
2) La catégorie $\mathscr{F}$ est dite préfibrée par π au-dessus de $\mathscr{E}$ si pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$ de $\mathscr{E}$ tout objet de $\mathscr{F}$ au-dessus de η est but d'un morphisme cartésien au-dessus de f.
3) La catégorie $\mathscr{F}$ est dite fibrée par π au-dessus de $\mathscr{E}$ si elle est préfibrée et si le composé de deux morphismes cartésiens composables de $\mathscr{F}$ est un morphisme cartésien.

6.1.1. Soit ξ un objet de $\mathscr{E}$. On appelle catégorie fibre de $\mathscr{F}$ en ξ, et on désigne par $\mathscr{F}_\xi$, la sous-catégorie de $\mathscr{F}$ dont les objets sont les objets de $\mathscr{F}$ au-dessus de ξ et les morphismes sont les morphismes de $\mathscr{F}$ au-dessus de id_ξ. Soient deux objets X et Y de F_ξ, on désigne par $\mathrm{Hom}_\xi(X,Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y dans $\mathscr{F}_\xi$.

6.1.2. Soit $f : \xi \to \eta$ un morphisme de $\mathscr{E}$. Un objet de Y au-dessus de η est but d'un morphisme cartésien au-dessus de f, si et seulement si le foncteur défini sur la fibre $\mathscr{F}_\xi$ à valeur dans les ensembles

$$Z \mapsto \mathrm{Hom}_f(Z,Y) \quad Z \in \mathrm{ob}(\mathscr{F}_\xi),$$

est représentable. Lorsque la catégorie $\mathscr{F}$ est préfibrée, le foncteur

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_f(.,Y) \quad Y \in \mathrm{ob}(\mathscr{F}_\eta),$$

à valeurs dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathscr{F}_\xi$, est en fait à valeurs dans la catégorie des foncteurs représentables sur $\mathscr{F}_\xi$, et définit donc, à isomorphisme unique près, un foncteur $f^* : \mathscr{F}_\eta \to \mathscr{F}_\xi$, qui est appelé le foncteur image réciproque pour f. 265
Supposons que la catégorie $\mathscr{F}$ soit préfibrée et choisissons pour tout morphisme f de $\mathscr{E}$ un foncteur changement de base f^*. La catégorie $\mathscr{F}$ est alors fibrée au-dessus de $\mathscr{E}$ si et seulement si pour tout couple f et g de morphismes composables de $\mathscr{E}$ le foncteur composé f^*g^* est un foncteur image réciproque. Soit alors

$$C_{f,g} : f^*g^* \longrightarrow (gf)^* \tag{6.1.2.1}$$

l'isomorphisme canonique. Les isomorphismes $C_{f,g}$ vérifient une condition de cocycles, provenant de l'associativité de la composition des morphismes dans $\mathscr{E}$:

$$C_{f,hg}(f^* \circ C_{g,h}) = C_{gh,f}(C_{f,g} \circ h^*) \tag{6.1.2.2}$$

6.1.3. Réciproquement lorsqu'on se donne pour tout objet ξ de $\mathscr{E}$ une catégorie $\mathscr{F}_\xi$, pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$ un foncteur $f^* : \mathscr{F}_\eta \to \mathscr{F}_\xi$, et pour tout couple (f,g) de morphismes de $\mathscr{E}$ un isomorphisme de foncteurs $C_{f,g} : f^*g^* \to (fg)^*$, tels que les $C_{f,g}$ vérifient la condition (6.1.2.2), on peut construire de manière essentiellement unique une catégorie $\mathscr{F}$ fibrée au-dessus de $\mathscr{E}$ dont les fibres « sont » les catégories $\mathscr{F}_\xi$ et dont les foncteurs changement de base peuvent être choisis « égaux » aux foncteurs donnés à l'avance [5].

6.1.4. Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux catégories au-dessus de $\mathscr{E}$. On désigne par

$$\mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ définie par les foncteurs qui transforment les morphismes cartésiens de $\mathscr{F}$ en morphismes cartésiens de $\mathscr{G}$. Les objets de $\mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ sont appelés foncteurs cartésiens.

Soient C et C' deux catégories et S un ensemble de morphismes de la catégorie C. On désigne par $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(C,C')$ l'ensemble des foncteurs de C dans C' qui transforment les morphismes de S en isomorphismes.

Désignons par (Cat) la catégorie dont les objets sont les catégories appartenant à l'univers et dont les morphismes sont les foncteurs entre ces catégories (la catégorie (Cat) n'appartient pas à l'univers).

Soient $\mathscr{F}$ une catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$ et S l'ensemble des morphismes cartésiens de $\mathscr{F}$. La catégorie $\mathscr{F}$ définit deux foncteurs sur (Cat) à valeur dans la catégorie des en- 266
sembles appartenant à l'univers :

$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathscr{F},C) \quad C \in \mathrm{ob(Cat)}$$

$C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}\,/\mathscr{E}}(\mathscr{F}, C \times \mathscr{E}) = \{$Foncteurs cartésiens de $\mathscr{F}$ dans $C \times \mathscr{E}\}$

(la catégorie $C\times\mathscr{E}$ est considérée comme une catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$ par le foncteur deuxième projection).

Proposition 6.2. Les foncteurs (Cat) $\to$ (Ens) :

$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathscr{F},C)$$
$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}\,/\mathscr{E}}(\mathscr{F}, C \times \mathscr{E})$$

sont canoniquement isomorphes. Ils sont représentables.

Preuve. Pour prouver la première assertion, il suffit de remarquer que les morphismes cartésiens de $C \times \mathscr{E}$ sont les morphismes de la forme $m \times f$, où m est un isomorphisme de C. Pour prouver la seconde assertion, il suffit de prouver que le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathscr{F}, .)$ est représentable. Ceci résulte de [1]. Indiquons simplement l'idée de la démonstration. On adjoint formellement aux morphismes de $\mathscr{F}$ les inverses des morphismes de S. On considère la catégorie libre engendrée par les objets de $\mathscr{F}$, les morphismes de $\mathscr{F}$ et les inverses formels des morphismes de S (catégorie des chemins). On passe au quotient par les relations provenant des relations entre morphismes de $\mathscr{F}$ et les relations du type :

$$s^{-1}s = \mathrm{id} \quad , \quad ss^{-1} = \mathrm{id} \quad s \in S.$$

La catégorie ainsi obtenue est notée $\mathscr{F}(S^{-1})$ munie du foncteur canonique $Q = \mathscr{F} \to \mathscr{F}(S^{-1})$ représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathscr{F}, .)$.

Définition 6.3. Lorsque $\mathscr{F}$ est fibrée au-dessus de $\mathscr{E}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathscr{F}, .)$ est noté $\varinjlim_{\mathscr{E}^\circ} \mathscr{F}$ et est appelé le foncteur limite inductive de $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}^\circ$. La catégorie qui le représente est encore notée $\varinjlim_{\mathscr{E}^\circ} \mathscr{F}$ et est appelée la catégorie limite inductive de $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}^\circ$.

6.4.0. Supposons $\mathscr{F}$ fibrée au-dessus de $\mathscr{E}$; choisissons pour tout morphisme f de $\mathscr{E}$ un foncteur changement de base au-dessus de f et soit

$$Q : \mathscr{F} \longrightarrow \varinjlim_{\mathscr{E}^\circ} \mathscr{F}$$

267 le foncteur canonique. Les foncteurs d'inclusions des fibres de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ composés avec le foncteur Q fournissent, pour tout objet ξ de $\mathscr{E}$, un foncteur

$$u_\xi : \mathscr{F}_\xi \longrightarrow \varinjlim_{\mathscr{E}} \mathscr{F}$$

et pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$ de $\mathscr{E}$ un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_\eta \arrow[dd, "f^*"'] \arrow[dr, "u_\eta"] & \\
& \varinjlim_{\mathscr{E}^0} \mathscr{F} \\
\mathscr{F}_\xi \arrow[ur, "u_\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

La catégorie $\varinjlim_{\mathscr{E}^\circ} \mathscr{F}$ apparaît alors comme la limite inductive au sens des pseudo-foncteurs [5] du pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathrm{Cat}$ qui associe à tout $\xi \in \mathrm{ob}$, $\mathscr{F}_\xi$ et à tout $f : \xi \to \eta$, le foncteur $f^* : \mathscr{F}_\eta \to \mathscr{F}_\xi$. On notera toute-fois que même lorsque $\xi \mapsto \mathscr{F}_\xi$ est un véritable foncteur, la catégorie $\varinjlim_{\mathscr{E}^\circ} \mathscr{F}$ n'est pas en général la limite inductive au sens de I 2 du foncteur $\xi \mapsto \mathscr{F}_\xi$ (cf. 6.8).

Proposition 6.4. Soit $\mathscr{F}$ une catégorie fibrée au-dessus de $\mathscr{E}$. On suppose que la catégorie $\mathscr{E}$ possède les propriétés suivantes :

L1) Tout diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & \\ & \cdot \\ \cdot \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr] & \\ \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

L2) Pour tout couple de morphisme $u, v : \cdot \rightrightarrows \cdot$ tel qu'il existe un morphisme t vérifiant la relation $tu = tv$, il existe un morphisme w vérifiant la relation $uw = vw$. **268**

(Notons que si la catégorie $\mathscr{E}$ est pseudo-filtrante (I 2.7), elle possède les propriétés L1) et L2)). L'ensemble S des morphismes cartésiens de $\mathscr{F}$ possède alors les propriétés :

Fr1) L'ensemble S est stable par composition. Les isomorphismes appartiennent à S.

Fr2) Tout diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & \\ & \cdot \\ \cdot \arrow[ur, "s"] & \end{tikzcd},$$

où s appartient à S, peut se compléter en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr] & \\ \cdot \arrow[ur, "t"] \arrow[dr] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

où t appartient à S.

Fr3) Pour tout couple de morphismes $u, v : \cdot \rightrightarrows \cdot$ tel qu'il existe un morphisme $s \in S$ vérifiant la relation $su = sv$, il existe un morphisme $t \in S$ tel que $ut = vt$.

Preuve. Laissée au lecteur à titre d'exercice.

Proposition 6.5. Soient $\mathscr{F}$ une catégorie, S un ensemble de morphismes de $\mathscr{F}$ possédant les propriétés Fr1), Fr2) et Fr3) (6.4). Pour tout objet X de $\mathscr{F}$, désignons par $S(X)$ la catégorie des morphismes de S de but X. La catégorie $S(X)$ est cofiltrante (I 2.7). La catégorie $\mathscr{F}(S^{-1})$ (qui représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathscr{F}, \cdot)$) peut alors se décrire comme suit : **269**

a) Les objets de $\mathscr{F}(S^{-1})$ sont les objets de $\mathscr{F}$.

b) Soient X et Y deux objets de $\mathscr{F}(S^{-1})$. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{S(X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(.,Y).$$

c) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes de $\mathscr{F}(S^{-1})$. Soit

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & Y \end{tikzcd} \qquad t \in S$$

(resp.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Y & Z \end{tikzcd} \qquad t \in S)$$

un diagramme dans $\mathscr{F}$ dont l'image est f (resp. g). Soit

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t''"'] \arrow[dr, "f''"] & \\ \cdot \arrow[dr, "f'"'] & \cdot \arrow[d, "t'"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad t'' \in S$$

un diagramme commutatif dont l'existence est assurée par Fr2). L'image dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(S^{-1})}(X,Z)$ du diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "tt''"'] \arrow[dr, "g'f''"] & \\ X & Z \end{tikzcd}$$

est le morphisme composé gf.

270 Soit

$$Q : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}(S^{-1})$$

le foncteur canonique.

d) Le foncteur $Q^* : \mathscr{F}(S^{-1})\hat{} \to \hat{\mathscr{F}}$ ($F \mapsto F \circ Q$ I 5.0) est pleinement fidèle et injectif sur les objets.

e) Le foncteur $Q_! : \hat{\mathscr{F}} \to \mathscr{F}(S^{-1})\hat{}$ (adjoint à gauche au foncteur Q^* (I 5.1) est exact à gauche. (Il en est donc de même du foncteur Q lorsque dans $\mathscr{F}$ les limites projectives finies sont représentables).

Preuve. Nous renvoyons pour la preuve à [1].

Exercice 6.6. Soient $\mathscr{F}$ une catégorie, S un ensemble de morphismes de $\mathscr{F}$ possédant les propriétés Fr1), Fr2) et Fr3). Pour tout objet X de $\mathscr{F}$, on note $S(X)$ la catégorie des morphismes de but X.

a) La catégorie $S(X)$ est cofiltrante (I 2)

b) Pour tout objet X de $\mathscr{F}$, désignons par $J_S(X)$ l'ensemble des cribles de X qui contiennent un crible engendré par un morphisme de S. Les $J_S(X)$ définissent sur $\mathscr{F}$ une topologie T.

c) Pour la topologie T, les morphismes de S sont bicouvrants (II 5.2).

d) Pour tout objet X de $\mathscr{F}$, désignons par $\mathscr{J}^2(X)$ la catégorie des morphismes bicouvrants de but X. Le catégorie $S(X)$ est cofinale dans $\mathscr{J}^2(X)$ (I 8).

e) Soit G un préfaisceau d'ensemble sur $\mathscr{F}$. Soit a le foncteur associé pour la topologie T. Pour tout objet X de $\mathscr{F}$, on a un isomorphisme canonique

$$aG(X) \xrightarrow{\sim} \frac{\lim}{S(X)} G(\cdot).$$

Un préfaisceau est un faisceau si et seulement s'il transforme tout morphisme de S en isomorphisme.

f) On choisit le foncteur faisceau associé de façon que sa restriction à $\mathscr{F}$ soit injective sur les objets. Désignons par $\underrightarrow{\mathscr{F}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\mathscr{F}$ définie par les faisceaux associés aux préfaisceaux représentés. La catégorie $\underrightarrow{\mathscr{F}}$ est isomorphe à la catégorie $\mathscr{F}(S^{-1})$ décrite dans 271
6.5. Les objets de $\underrightarrow{\mathscr{F}}$ forment une famille de générateurs du topos $\mathscr{F}^\sim$ des faisceaux d'ensembles sur $\mathscr{F}$. La topologie induite sur $\underrightarrow{\mathscr{F}}$ par la topologie canonique de $\mathscr{F}^\sim$ est la topologie grossière (II 1.1.4).

g) Soit $Q : \mathscr{F} \to \underrightarrow{\mathscr{F}}$ le foncteur canonique. Le foncteur Q est un morphisme du site $\underrightarrow{\mathscr{F}}$ (topologie grossière) dans le site $\mathscr{F}$ (topologie T de b)) (IV 5.9) et induit un isomorphisme sur les topos correspondants.

h) Soit $u : \mathscr{F} \to C$ un foncteur. Le foncteur u est continu, si et seulement s'il transforme les morphismes de S en isomorphismes (III 1.1)

i) Soit $u : \mathscr{F} \to C$ un foncteur transformant les morphismes de S en isomorphismes. Le foncteur u se factorise d'une manière unique en

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "Q"'] & & C \\ & \underrightarrow{\mathscr{F}} \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

(On utilisera III 1.4).

j) Soit $\mathrm{Pro}_S\,\mathscr{F}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}\,\mathscr{F}$ (I 8) définie par les proobjets dont les morphismes de transition sont dans S. Montrer que le foncteur Q se factorise en

$$\mathscr{F} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{Pro}_S\,\mathscr{F} \xrightarrow{\quad j \quad} \mathscr{F}_{S^{-1}}$$

où j est la restriction à $\mathrm{Pro}_S\,\mathscr{F}$ de $\mathrm{Pro}\,Q$. Montrer que le foncteur j admet un adjoint à gauche pleinement fidèle

$$A : \mathscr{F}_{S^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Pro}_S\,\mathscr{F}.$$

Montrer que pour tout objet X de $\mathscr{F}$, $AQ(X)$ est le pro-objet

$$Y \longrightarrow X \in S(X) \mapsto Y.$$

Proposition 6.7. Soient $\mathscr{E}$ une catégorie cofiltrante (I 8.7) et $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$ une catégorie 272
fibrée (6.1.3).

1) Soient ξ un objet de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}/\xi$ la catégorie fibrée sur $\mathscr{E}/\xi$ obtenue par le changement de base $\mathscr{E}/\xi \to \mathscr{E}$. Le foncteur canonique $\varinjlim_{\mathscr{E}/\xi} \mathscr{F}/\xi \to \varinjlim_{\mathscr{E}} \mathscr{F}$ est une équivalence de catégorie.

2) Soit plus généralement $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un foncteur cofinal (I 8). Soit $\mathscr{F}' \to \mathscr{E}'$ la catégorie fibrée déduite de $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$ par le changement de base $\mathscr{E}' \hookrightarrow \mathscr{E}$. Le foncteur canonique :

$$\varinjlim_{\mathscr{E}'} \mathscr{F}' \longrightarrow \varinjlim_{\mathscr{E}} \mathscr{F}$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. Exercice.

Exercice 6.8. 1) Soient $g : \mathscr{E}^{\circ} \to \mathrm{Cat}$ un foncteur et $\mathscr{G} \to \mathscr{E}$ la catégorie fibrée correspondante [5]. Montrer qu'il existe un foncteur canonique $\varinjlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{G} \to \varinjlim_{\mathscr{E}^{\circ}} g$. Montrer que ce foncteur n'est pas nécessairement une équivalence de catégories. (On pourra prendre pour g le foncteur constant dont la valeur est l'objet final de Cat et pour $\mathscr{E}$ la catégorie associée à un groupe).

2) On supposons que la catégorie $\mathscr{E}^{\circ}$ est pseudo-filtrante. Montrer qu'alors le foncteur canonique $\varinjlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{G} \to \varinjlim_{\mathscr{E}^{\circ}} g$ est une équivalence de catégories.

Proposition 6.9. Soit $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$ une catégorie fibrée (6.1). Le foncteur (Cat) → (Ens) :

$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}\,/\mathscr{E}}(C \times \mathscr{E}, \mathscr{F})$$

est représentable par la catégorie $\mathscr{H}\!om_{\mathrm{Cart}\,/\mathscr{E}}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

Soient C une catégorie, $F : C \times \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ un $\mathscr{E}$-foncteur cartésien (6.1.4), X un objet de C. Le foncteur $\xi \mapsto F((X, \xi))$ est un foncteur cartésien noté $F'(X)$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ qui dépend fonctoriellement de X. D'où une application $F \mapsto F'$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}\,/\mathscr{E}}(C\mathscr{E}, \mathscr{F})$ dans $\mathrm{Hom}(C, \mathscr{H}\!om_{\mathrm{Cart}\,/\mathscr{E}}(\mathscr{E}, \mathscr{F}))$ fonctorielle en C dont on vérifie immédiatement que c'est une bijection.

273 6.10. La catégorie $\mathscr{H}\!om_{\mathrm{Cart}\,/}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ est appelée la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée $\mathscr{F}$. Elle est aussi appelée parfois la catégorie limite projective de $\mathscr{F}$ suivant $\mathscr{E}^{\circ}$. Elle est alors notée $\varprojlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{F}$ [2].

6.11. Choisissons un scindage de la catégorie fibrée $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$, i.e. choisissons pour toute flèche $f : \xi \to \eta$ de $\mathscr{E}$ un foncteur changement de base $f^* : \mathscr{F}_\eta \to \mathscr{F}_\xi$. Pour tout objet ξ de $\mathscr{E}$, notons

$$v_\xi : \varprojlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}_\xi$$

le foncteur d'évaluation en ξ. Pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$, on a un diagramme de foncteurs commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{F} \arrow[r, "v_\xi"] \arrow[dr, "v_\eta"'] & \mathscr{F}_\xi \arrow[d, "f^*"] \\
 & \mathscr{F}_\eta .
\end{tikzcd}$$

La catégorie $\varprojlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{F}$ apparaît ainsi comme la limite projective au sens des pseudo foncteurs de $\xi \to \mathscr{F}_\xi$. Même lorsque $\xi \mapsto \mathscr{F}_\xi$ est un véritable foncteur (i.e. même lorsque le scindage choisi est un clivage [5]) les catégories $\varprojlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{F}$ (6.10) et $\varprojlim_{\mathscr{E}^{\circ}} \mathscr{F}_\xi$ (I 2) ne sont pas, en général, équivalentes.

7. Topos et sites fibrés

7.1. Topos fibrés.

DÉFINITION 7.1.1. Soit $\mathcal{U}$ un univers. Un $\mathcal{U}$-topos fibré sur une catégorie I est une catégorie fibrée sur I (6.1) :

$$p : F \longrightarrow I$$

dont les fibres sont des $\mathcal{U}$-topos, et dont les foncteurs images inverses[33] relatifs aux morphismes $f : i \to j$ de I sont des foncteurs $f^* : F_j \to F_i$ images inverses de morphismes de topos $f\cdot : F_i \to F_j$ (IV 3.1.2).

7.1.2. Il revient au même de dire qu'un $\mathcal{U}$-topos fibré sur une catégorie I est une catégorie fibrée $p : F \to I$ dont les fibres sont des $\mathcal{U}$-topos et dont les foncteurs images 274
inverses sont exacts et commutent aux limites inductives (IV 1.6).

7.1.3. Choisissons pour tout morphisme $f : i \to j$ de I un foncteur image inverse $f^* : F_j \to F_i$. On a alors, pour tout couple $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ de morphismes composables de I, un isomorphisme canonique $c_{f,g} : f^*g^* \to (gf)^*$ (6.1.2.1) et les $c_{f,g}$ possèdent la propriété de cocycle (6.1.2.2). Choisissons de plus, pour tout $f : i \to j$ un foncteur adjoint à droite $f_* : F_i \to F_j$ au foncteur $f^* : F_j \to F_i$. Le foncteur $f_* : F_i \to F_j$ est défini à isomorphisme canonique près par sa propriété d'être adjoint à droite à f^*. On en déduit, par les résultats généraux sur les foncteurs adjoints, des isomorphismes canoniques ;

$$c'_{g,f} : g_*f_* \longrightarrow (gf)_*. \tag{7.1.3.1}$$

qui possèdent une propriété de cocycle analogue à la propriété 6.2.2.2 et qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. En appliquant alors les résultats de 6.1.3, on obtient une catégorie fibrée sur I° :

$$p' : F' \longrightarrow I^\circ. \tag{7.1.3.2}$$

On vérifie facilement que la catégorie fibrée $p' : F' \to I^\circ$ ne dépend pas à I°-isomorphisme unique près des différents choix utilisés pour la construire[33]. La fibre en tout objet i de I° de la catégorie fibrée $p' : F' \to I^\circ$ est canoniquement isomorphe au $\mathcal{U}$-topos F_i et est identifiée à ce dernier. Les foncteurs images inverses de la catégorie fibrée $p' : F' \to I^\circ$ sont des foncteurs images directes par des morphismes de topos.

7.1.4. Soit $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibré. Choisissons pour chaque $f : i \to j$ un morphisme de topos (IV 3.1.2) $f\cdot : F_i \to F_j$ tel que le foncteur image inverse f^* (par $f\cdot$) soit l'image inverse pour la structure fibrés (6.1). On obtient alors des cocycles $c_{f,g}$ reliant ces morphismes de topos (7.1.3.1) et (7.1.3.2). La collection des morphismes $f.$, $f \in \mathrm{Fl}(I)$, et des cocycles $c_{f,g}$ est appelée un biscindage du topos fibré $F \to I$. Le choix d'un biscindage permet d'associer au topos fibré $F \to I$ un pseudo-foncteur $i \mapsto F_i$ de la catégorie I dans la 2-catégorie des $\mathcal{U}$-topos. On peut alors lui associer de 275
manière essentiellement unique (cf. [5]) un $\mathcal{U}$-topos fibré $F \to I$ muni d'un biscindage tel que le pseudo-foncteur correspondant soit canoniquement isomorphe à $i \mapsto F_i$. Dans la pratique on notera le plus souvent un $\mathcal{U}$-topos fibré $F \to I$ par la notation $(F_i)_{i\in I}$ en supposant implicitement qu'on a choisi un biscindage. On notera cependant que les constructions qu'on effectue sur les topos fibrés (telles que le topos total associé (7.4), la limite projective (8.1)) ne dépendent que des topos fibrés et non pas des biscindages éventuellement choisis.

[33] pour la structure fibrée (6.1.2).

[33] Le rédacteur présente ses excuses pour le caractère non intrinsèque de cette construction.

Définition 7.1.5. Soient $p : F \to I$ et $q : G \to I$ deux $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I. Un morphisme m de topos fibrés de (F, p) dans (G, q) consiste en la donnée d'un I-foncteur $m^* : G \to F$ (6.1.4) et en la donnée pour tout i objet de I d'un adjoint à droite $m_{i*} : F_i \to G_i$ au foncteur $m_i^* : G_i \to F_i$ obtenu en restreignant aux fibres en i le foncteur m^*. Cette donnée doit être de plus soumise à la condition suivante : Pour tout objet i de I le couple de foncteurs adjoints (m_i^*, m_{i*}) est un morphisme du topos F_i dans le topos G_i.

7.1.6. Soient $m : (F, p) \to (G, q)$ un morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I et $p' : F' \to I^\circ$, $q' : G' \to I^\circ$ les catégories fibrées associées par le procédé 7.1.3 aux topos fibrés (F, p) et (G, q) respectivement. Choisissons des biscindages de F et G (7.1.4), notés dans les deux cas $(f : i \to j) \mapsto f. : (f^*, f_*)$, de F_i dans F_j et de G_i dans G_j respectivement. Comme $f^* : G \to F$ est un I-foncteur, on a, pour tout morphisme $f : i \to j$, un morphisme de foncteurs (morphisme de transition)

$$b_f : f^* m_j^* \longrightarrow m_i^* f^*, \tag{7.1.6.1}$$

et pour tout couple $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ de morphismes composables, on a

$$m_i^*(c_{f,g}) b_f^* f^*(b_g) = b_{gf} c_{f,g}. \tag{7.1.6.2}$$

En passant aux foncteurs adjoints, on obtient des morphismes

$$b'_f : f_* m_{i*} \longrightarrow m_{j*} f_* \tag{7.1.6.3}$$

qui satisfont à des relations analogues aux relations (7.1.6.2). Comme les foncteurs f_*
276 sont des foncteurs images inverses des catégories fibrées (F', p') et (G', q') (7.1.3), on peut construire un I°-foncteur :

$$m_* : F' \longrightarrow G', \tag{7.1.6.4}$$

dont les restrictions aux fibres sont les foncteurs m_{i*} et dont les isomorphismes de transition sont les b'_f. On vérifie avec un peu de patience que le foncteur m_* ainsi construit ne dépend pas du choix des morphismes de topos f.[33]

7.1.7. On note $\mathrm{Homtop}_I(E, G)$ l'ensemble des morphismes de topos fibrés entre le topos fibré (F, p) et le topos fibré (G, q). L'ensemble $\mathrm{Homtop}_I(F, G)$ est l'ensemble des objets d'une catégorie notée $\mathscr{H}\!omtop_I(F, G)$: Si m et n sont deux morphismes de topos fibrés, un morphisme de m dans n est un I-morphisme de foncteur n^* dans le foncteur m^*. On en déduit d'ailleurs par adjonction un I°-morphisme du foncteur m_* dans le foncteur n_* (7.1.6). On a donc en définitive deux foncteurs

$$\mathscr{H}\!omtop_I(F, G) \longrightarrow \mathscr{H}\!om_I(G, F)^\circ \tag{7.1.7.1}$$

$$\mathscr{H}\!omtop_I(F, G) \longrightarrow \mathscr{H}\!om_{I^\circ}(F', G') \tag{7.1.7.2}$$

qui associent à tout morphisme $(m^*, (m_{i*})_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, d'une part le foncteur $m^* \in \mathrm{Hom}_I(G, F)$, et d'autre part le foncteur $m_* \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(F', G')$ obtenu en recollant les m_{i*} comme en (7.1.6). Le foncteur $m^* : G \to F$ (7.1.7.1) est appelé le foncteur image inverse par le morphisme de topos fibré $m : F \to G$; le foncteur $m_* : F' \to G'$ (7.1.7.2) est appelé le foncteur image directe par le morphisme de topos fibré $m : F \to G$. Il résulte immédiatement des définitions que les foncteurs $m \mapsto m^*$ et $m \mapsto m_*$ sont pleinement fidèles et que leurs images essentielles sont, d'une part, l'ensemble des I-foncteurs de G dans F qui, fibre par fibre, sont exacts et commutent aux limites inductives et, d'autre part, l'ensemble des I^0-foncteurs de F' dans G' qui, fibre par fibre, sont exacts et commutent aux limites inductives et, d'autre part, l'ensemble des I^0-foncteurs de F' dans G' qui, fibre par fibre, possèdent un foncteur adjoint à gauche exact. Ceci justifie les abus de langage

[33] voir note du bas de la page (page 112)

consistant à définir un morphisme de topos fibrés par son image directs ou son image inverse. En fait un tel morphisme de topos fibrés n'est alors défini qu'à isomorphisme **277**
unique près.

On note $\mathcal{H}omtop_{\mathrm{Cart}\,/I}(F,G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}omtop_I(F,G)$ engendrée par les morphismes m tels que m_* (ou ce qui est équivalent m^*) soit un foncteur cartésien (6.1.4). De tels morphismes sont appelés des morphismes cartésiens. On a donc des foncteurs pleinement fidèles, induits par (7.1.7.1) et (7.1.7.2)

$$\mathcal{H}omtop_{\mathrm{Cart}\,/I}(F,G) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathrm{cart}\,/I}(G,F)^{\circ}, \tag{7.1.7.3}$$

$$\mathcal{H}omtop_{\mathrm{Cart}\,/I}(F,G) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathrm{cart}\,/I^{\circ}}(F',G'). \tag{7.1.7.4}$$

7.1.8. Soient $p : F \to I$, $q : G \to I$, $r : H \to I$ trois $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I et $m : F \to G$, $n : G \to H$ deux morphismes de $\mathcal{U}$-topos fibrés. On définit comme en IV 3.3 le composé des deux morphismes m et n, qu'on note $nm : F \to H$, et si $\mathcal{V}$ est un univers tel que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$, on définit une catégorie ($\mathcal{V}$-$\mathcal{U}$-$\mathrm{Top}_{/I}$) dont les objets sont les $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I à catégories fibres éléments de $\mathcal{V}$, et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I. De plus, comme en IV 3.3.2, l'application de composition

$$\mathrm{Homtop}_{/I}(F,G) \times \mathrm{Homtop}_{/I}(G,F) \longrightarrow \mathrm{Homtop}_{/I}(F,H)$$

est l'application induite sur les objets par un « foncteur de composition de morphismes » :

$$\mathcal{H}omtop_{/I}(F,G)\,\mathcal{H}omtop_{/I}(G,H) \longrightarrow \mathcal{H}omtop_{/I}(F,H)$$

et les considérations de IV 3.3 et IV 3.4 s'étendent sans changement au cas des U-topos fibrés. Le lecteur aura d'ailleurs remarqué que lorsque I est une catégorie ponctuelle (un objet, un morphisme identique) un $\mathcal{U}$-topos fibré sur I « n'est autre » qu'un morphisme de $\mathcal{U}$-topos, et un morphisme de $\mathcal{U}$-topos fibrés « n'est autre » qu'un morphisme de $\mathcal{U}$-topos et les constructions précédentes se réduisent à celles de IV 3.

7.1.9. Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibré et $\phi : J \to I$ un foncteur. La catégorie fibrée $p_J : F_J \to J$ déduite de (F,p) par le changement de base $\phi : J \to I$ est un $\mathcal{U}$-topos fibré sur J. Soient $p' : F' \to I^{\circ}$ et $(p_J)' : (F_J)' \to J^{\circ}$ les catégories fibrées déduites respectivement de (F,p) et (F_J,p_J) par la construction de 7.1.3. On vérifie immédiatement que la catégorie $((F_J)',(p_J)')$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $(p')_J : (F')_J \to J^{\circ}$ déduite de $p' : F' \to I^{\circ}$ par le changement de base $\phi :$ **278**
$J^{\circ} \to I^{\circ}$. Ces deux catégories fibrées sur J° seront par la suite identifiées et notées $p'_j : F'_j \to J^{\circ}$. L'opération de changement de base est fonctorielle, et même 2-fonctorielle, par rapport à son argument : pour tout couple $p : F \to I$ et $G \to I$ de $\mathcal{U}$-topos fibrées sur I, on a deux diagrammes commutatifs se catégories et foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}omtop_I(F,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_I(G,F)^{\circ} \arrow[d] \\ \mathcal{H}omtop_J(F_J,G_J) \arrow[r] & \mathcal{H}om_J(G_J,F_J)^{\circ}, \end{tikzcd} \tag{7.1.9.1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}omtop_I(F,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{I^{\circ}}(F',G') \arrow[d] \\ \mathcal{H}omtop_J(F_J,G_J) \arrow[r] & \mathcal{H}om_{J^{\circ}}(F'_{J^{\circ}},G_{J^{\circ}}), \end{tikzcd} \tag{7.1.9.2}$$

où les foncteurs verticaux sont des foncteurs changement de base et où les foncteurs horizontaux sont respectivement dans (7.1.9.1) les foncteurs « morphisme $\mapsto$ image inverse » (7.1.7.1), et dans (7.1.9.2) les foncteurs « morphisme $\to$ image directe » (7.1.7.2).

7.2. Sites fibrés.

7.2.1. Un $\mathscr{U}$-site fibré C sur une catégorie I est une catégorie fibrée $p : C \to I$ dont les fibres sont munies de topologies faisant de celles-de des $\mathscr{U}$-sites (IV 3.0.2) telles que pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, le foncteur image inverse $f^* : C_j \to C_i$ soit un morphisme de site C_i dans le site C_j (IV 4.9.1).

7.2.2. Soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux $\mathscr{U}$-sites fibrés sur I. Un morphisme de $\mathscr{U}$-sites fibrée de C dans D est un I-foncteur (6.0) $m : D \to C$ tel que pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ soit un morphisme du site C_i dans le site D_i. On désigne par $\mathrm{Morsite}_I(C, D)$ l'ensemble des morphismes de sites fibrés de C dans D. Un foncteur continu du site fibré D dans le site fibré C est un I-foncteur de D dans C qui induit sur les fibres des foncteurs continus (III 1). On note $\mathrm{Cont}_I(D, C)$ l'ensemble des foncteurs conti-
279 nus du site fibré D dans le site fibré C. On désigne par $\mathscr{M}or site_I(C, D)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om_I(D, C)^\circ$ définie par l'ensemble d'objets $\mathrm{Morsite}_I(C, D) \subset \mathrm{Hom}_I(D, C)$. On désigne de même par $\mathscr{C}ont_I(D, C)$, la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om_I(D, C)$ définie par le sous-ensemble d'objets $\mathscr{C}ont_I(D, C) \subset \mathrm{Hom}_I(D, C)$. On a donc deux foncteurs pleinement fidèles et injectifs sur les objets

$$\mathscr{M}or site_I(C, D) \hookrightarrow \mathscr{C}ont_I(D, C)^\circ \hookrightarrow \mathscr{H}om_I(D, C)^\circ. \tag{7.2.2.1}$$

On définit, de même qu'en 7.1.7, les morphismes cartésiens du site fibré C dans le site fibré D. On a un diagramme de sous-catégories pleines

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}or site_{\mathrm{Cart}/I}(C, D) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathscr{H}om_{\mathrm{Cart}/I}(D, C)^\circ \arrow[d, hook] \\ \mathscr{M}or site_I(C, D) \arrow[r, hook] & \mathscr{H}om_I(D, C)^\circ. \end{tikzcd} \tag{7.2.2.2}$$

7.2.3. Les morphismes de $\mathscr{U}$-sites fibrés se composent. Ceci permet de définir la catégorie $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-Site}/I)$ dans les objets sont les $\mathscr{U}$-sites dont les fibres appartiennent à un univers $\mathscr{V}$ (dont $\mathscr{U}$ est un élément). La catégorie $\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-site est d'ailleurs munie d'une structure de 2-catégorie et en particulier la composition des morphismes de $\mathscr{U}$-sites fibrés est fonctorielle par rapport aux morphismes entre morphismes. Pour tout foncteur $\phi : J \to I$ et tout site fibré $p : C \to I$, la catégorie $p_J : C_J \to J$ déduite de (C, p) par le changement de base $\phi : J \to I$, est munie canoniquement d'une structure de $\mathscr{U}$-site fibré sur J. L'opération de changement de base est 2-fonctorielle.

7.2.4. Soit $p : C \to I$ une catégorie fibrée dont les fibres sont munies de topologies faisant de celles-ci des $\mathscr{U}$-sites. Supposons que les limites projectives soient représentables dans les catégories fibrées. Pour que $p : C \to I$ soit un $\mathscr{U}$-site fibré il suffit que les foncteurs images inverses soient exacts à gauche et transforment familles couvrantes en familles couvrantes, et cette condition est aussi suffisante lorsque les topologies des fibres sont moins fines que la topologie canonique (IV 4.9.2). Tous les sites fibrés utilisés dans ce séminaire seront du type décrit ci-dessus. De même, soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux sites fibrés tels que les limites projectives finies dans les catégories
280 fibres soient représentables. Un foncteur cartésien $m : D \to C$ qui induit sur les catégories fibres des foncteurs exacts à gauche et qui transforme les familles couvrantes des catégories fibres en familles couvrantes est un morphisme de sites fibrés de C dans D, la

réciproque étant vraie si les topologies fibres de C sont moins fines que la topologies canonique (IV 4.9.2). Tous les morphismes de sites fibrés utilisés dans ce séminaire seront du type décrit ci-dessus.

7.2.5. Un $\mathscr{U}$-topos fibré $p : F \to I$ est un $\mathscr{U}$-site fibré lorsqu'on munit les fibres de la topologie canonique, ce que nous ferons toujours par la suite. Soit $m : F \to G$ un morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés. Le foncteur image inverse $m^* : G \to F$ (7.1.7) est un morphisme du $\mathscr{U}$-site fibré F dans le $\mathscr{U}$-site fibré G. On a donc un foncteur $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Top}_{/I}) \to (\mathscr{V}\text{-}U\text{-}\mathrm{Site}_{/I})$, foncteur qui n'est pas fidèle en général. Mais ce foncteur de prolonge en fait naturellement en un 2-foncteur qui induit, pour deux $\mathscr{U}$-topos fibrés F et G sur I, un foncteur :

$$\mathscr{H}omtop_I(F,G) \longrightarrow \mathscr{M}orsite_I(F,G) \tag{7.2.5.1}$$

qui est une équivalence de catégories, ainsi qu'il résulte immédiatement des définitions. D'ailleurs le foncteur (7.2.5.1) composé avec l'inclusion canonique $\mathscr{M}orsite_I(F,G) \hookrightarrow \mathscr{H}om_I(G,F)^\circ$ n'est autre que le foncteur (7.1.7.1) qui, à un morphisme de topos fibrés, associe son image inverse.

7.2.6. Soit $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré. Choisissons pour tout morphisme $f : i \to j$ de I un foncteur changement de base $f^* : C_j \to C_i$. En passant aux catégories de $\mathscr{U}$-faisceaux, le foncteur f^* de prolonge en un foncteur $\mathrm{Top}(f)^* : C_j^\sim \to C_i^\sim$, où $\mathrm{Top}(f) : C_i^\sim \to C_j^\sim$ est un morphisme de topos (IV 4.9.1.1), rendant commutatif à isomorphisme près le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C_j \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\varepsilon_j"'] & C_i \arrow[d, "\varepsilon_i"] \\ C_j^\sim \arrow[r, "\mathrm{Top}(f)^*"] & C_i^\sim \end{tikzcd} \tag{7.2.6.1}$$

Soient

$$c_{f,g} : f^* g^* \longrightarrow (gf)^* \tag{7.2.6.2}$$

les isomorphismes canoniques (6.1.2.1) et **281**

$$b_f : \mathrm{Top}(f)^* \epsilon_j \longrightarrow \epsilon_i f^* \tag{7.2.6.3}$$

les isomorphismes qui « rendent commutatifs » les diagrammes (7.2.6.1). En utilisant le fait que les foncteurs $\mathrm{Top}(f)^*$ commutent aux limites inductives, on vérifie immédiatement que pour tout couple de morphismes composables : $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$, il existe un et un seul isomorphisme :

$$\mathrm{Top}(c_{f,g}) : \mathrm{Top}(f)^* \, \mathrm{Top}(g)^* \longrightarrow \mathrm{Top}(gf)^* \tag{7.2.6.4}$$

tel qu'on ait

$$\epsilon_i(c_{f,g}) b_f \, \mathrm{Top}(f)^*(bg) = b_{gf} \, \mathrm{Top}(c_{f,g}). \tag{7.2.6.5}$$

De plus, les isomorphismes (7.2.6.4) satisfont automatiquement la condition de cocycles de 6.2.2.2. On peut donc construire une catégorie fibrée

$$p^\sim : C^{\sim/I} \longrightarrow I \tag{7.2.6.6}$$

dont les fibres sont canoniquement isomorphes aux $\mathscr{U}$-topos $C_i^\sim$ (6.1.3), et un foncteur cartésien

$$\epsilon_{c/I} : C \longrightarrow C^{\sim/I} \tag{7.2.6.7}$$

qui induit sur les fibres les foncteurs $\epsilon_i : C_i \to C_i^{\sim}$. Il résulte immédiatement des définitions que $p^{\sim} : C^{\sim/I} \to I$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur I, que $\epsilon_{c/I}$ est un morphisme cartésien de $\mathscr{U}$-sites fibrés de $C^{\sim/I}$ dans C, et que le $\mathscr{U}$-topos fibré $C^{\sim/I} \to I$ et le foncteur cartésien $\epsilon_{C/I}$ ne dépendent pas, à isomorphisme canonique prés, des différents choix utilisés pour les construire (choix des foncteurs changement de base f^* et choix des prolongements $\mathrm{Top}(f)^*$). Le $\mathscr{U}$-topos fibré $C^{\sim/I}$ est appelé le $\mathscr{U}$-topos fibré associé au $\mathscr{U}$-site fibré.

. On vérifie que la formation du $\mathscr{U}$-topos fibré associé à un site fibré « commute » aux opérations de changement de catégorie base.

282 Proposition 7.2.7. Soient E un $\mathscr{U}$-topos fibré sur I et C un $\mathscr{U}$-site fibré sur I. Le foncteur $m \mapsto m^*\epsilon_{C/I}$, associant à tout morphisme de topos fibrés $m : E \to C^{\sim/I}$ le composé avec $\epsilon_{C/I}$ du foncteur image inverse associé $m^* : C^{\sim/I} \to E$, induit une équivalence de catégories préservant les objets cartésiens

$$\mathscr{H}\!omtop_I(E, C^{\sim/I}) \xrightarrow{\approx} \mathscr{M}\!orsite_I(E, C).$$

Lorsque dans les catégories fibres de C les limites projectives finies sont représentables, le foncteur pleinement fidèle correspondant

$$\mathscr{H}\!omtop_I(E, C^{\sim/I}) \longrightarrow \mathscr{H}\!om_I(C, E)^{\circ}$$

a comme image essentielle l'ensemble des I-foncteurs $g : C \to E$ qui sont exacts à gauche fibre par fibre et qui transforment les familles couvrantes des catégories fibres en familles épimorphiques des catégories fibres correspondantes.

Cette proposition ne fait que généraliser au contexte fibré la proposition IV 4.9.4, et la démonstration donnée en IV 4.9.4 se généralise immédiatement.

7.3. Exemple.

Exemple 7.3.1. (le topos fibré des morphismes d'un topos)

Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $\mathrm{Fl}(E)$ la catégorie des morphismes de E et $p : \mathrm{Fl}(E) \to E$ le foncteur qui associe à un morphisme son but. La catégorie $(\mathrm{Fl}(E), p)$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur E. (7.1.1 et IV 5.1). La fibre en tout objet X de E est le topos $E_{/X}$. Le foncteur image inverse $f^* : E_{/Y} \to E_{/X}$ par un morphisme $f : X \to Y$ est le foncteur produit fibré. À tout foncteur $\phi : I \to E$, on peut donc associer le $\mathscr{U}$-topos fibré sur I

$$(7.3.1.1) \qquad p_I : \mathrm{Fl}(E)_I \longrightarrow I,$$

obtenu par le changement de base $\phi : I \to E$, dont la fibre en tout objet i de I est $E_{/\phi(i)}$ (7.1.9). Si $\mathscr{V}$ est un univers dont E est un élément, on a, avec les notations de 7.1.8, une application

$$(7.3.1.2) \qquad \mathrm{Hom}(I, E) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\mathrm{top}_{/I}),$$

qui associe à tout foncteur $\phi \in \mathrm{Hom}(I, E)$ le $\mathscr{U}$-topos fibré sur I déduit de $(\mathrm{Fl}(E), p)$
283 par le changement de base $\phi : I \to E$. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux foncteurs de I dans E et $m : \phi_1 \to \phi_2$ un morphisme de foncteurs. Notons $p_1 : \mathrm{Fl}(E)_1 \to I$ et $p_2 : \mathrm{Fl}(E)_2 \to I$ les $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I déduits de $p : \mathrm{Fl}(E) \to E$ par les changements de base $\phi_1 : I \to E$ et $\phi_2 : I \to E$ respectivement. Choisissons, pour tout objet i de I, un morphisme de topos (IV 5.5.2)

$$(7.3.1.3) \qquad \mathrm{loc}(m(i)) : E_{/\phi_1(i)} \longrightarrow E_{/\phi_2(i)}.$$

On vérifie alors facilement qu'il existe un et un seul[33] morphisme cartésien de topos fibrés sur I :

$$\mathrm{loc}(m) \,:\, F1(E)_1 \longrightarrow F1(E)_2, \tag{7.3.1.4}$$

qui induise sur les topos fibrés les morphismes $\mathrm{loc}(m(i))$. Le morphisme $\mathrm{loc}(m) : \mathrm{Fl}(E)_1 \to \mathrm{Fl}(E)_2$ est déterminé à isomorphisme canonique près par le morphisme de foncteurs $m : \phi_1 \to \phi_2$. Si $n : \phi_2 \to \phi_3$ est un morphisme de foncteurs, on a un isomorphisme

$$c(m,n) \,:\, \mathrm{loc}(n)\,\mathrm{loc}(m) \simeq \mathrm{loc}(nm), \tag{7.3.1.5}$$

et les morphismes $c(m,n)$ possèdent une propriété de cocycle analogue à (6.1.2.2).

Exemple 7.3.2. (Le site fibré des morphismes d'un site).

Soient C un $\mathscr{U}$-site où les produits fibrés sont représentables, $\mathrm{Fl}(C)$ la catégorie des morphismes de C et $p : \mathrm{Fl}(C) \to C$ le foncteur qui associe à un morphisme son but. La catégorie fibrée $(\mathrm{Fl}(C), p)$ est un $\mathscr{U}$-site fibré sur C lorsqu'on munit les catégories fibres des topologies induites (II 5.2). Soient $\epsilon_C : C \to C^\sim$ le foncteur canonique de C dans la catégorie des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C. En notant $\mathrm{Fl}(\epsilon_C)$ l'extension naturelle de ce dernier foncteur aux catégories de morphismes, on a un diagramme commutatif de catégories et foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}(C) \arrow[r, "\mathrm{Fl}(\varepsilon_C)"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Fl}(C^\sim) \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\varepsilon_C"] & C^\sim \end{tikzcd} \tag{7.3.2.1}$$

d'où un foncteur cartésien entre catégories fibrée sur C : **284**

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}(C) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{Fl}(C^\sim)_C \arrow[dl, "p_{/C}"] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{7.3.2.2}$$

où $p_{/C} : \mathrm{Fl}(C^\sim)_C \to C$ est déduite de $\mathrm{Fl}(C^\sim) \to C^\sim$ par le changement de base $\epsilon_C : C \to C^\sim$. Le foncteur $\mathrm{Fl}(C) \to \mathrm{Fl}(C^\sim)_C$ de (7.3.2.2) est un morphisme du site fibré $\mathrm{Fl}(C^\sim)_C$ dans le site fibré $\mathrm{Fl}(C)$ (7.2.2), d'où par 7.2.7 un morphisme de topos fibrés sur C :

$$\mathrm{can} \,:\, \mathrm{Fl}(C^\sim)_C \longrightarrow \mathrm{Fl}(C)^{\sim/C}, \tag{7.3.2.3}$$

où $\mathrm{Fl}(C)^{\sim/C}$ est le topos fibré sur C associé au site fibré $\mathrm{Fl}(C) \to C$ (7.2.6). Il résulte de la définition du topos fibré associé (7.2.6) et de II 5.5 que le morphisme can de (7.3.2.3) est une C-équivalence de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur C, i.e. il existe un morphisme $\Theta : \mathrm{Fl}(C)^{\sim/C} \to \mathrm{Fl}(C^\sim)_C$ de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur C tel que les composés $\Theta \circ \mathrm{can}$ et $\mathrm{can} \circ \Theta$ soient C-isomorphes à l'identité.

Soit $\phi : I \to C$ un foncteur. On en déduit par changement de base un site fibré sur I :

$$p_I \,:\, \mathrm{Fl}(C)_I \longrightarrow I \tag{7.3.2.4}$$

et comme la formation du topos fibré associé commute au changement de base (7.2.6), on a une I-équivalence de $\mathscr{U}$-topos fibrés

$$\mathrm{can}_I \,:\, \mathrm{Fl}(C^\sim)_I \longrightarrow \mathrm{Fl}(C)_I^{\sim/I} \tag{7.3.2.5}$$

où $\mathrm{Fl}(C^\sim)_I \to I$ est le $\mathscr{U}$-topos fibré obtenu par le changement de base $\epsilon_C \circ \phi : \to C^\sim$.

[33] l'unicité provient de ce qu'on exige, avec les notations de (IV 5.5.3), la formule : $(gf)_! = g_! f_!$.

Soient enfin $\phi_1 : I \to C$ et $\phi_2 : I \to C$ deux foncteurs et $m : \phi_1 \to \phi_2$ un morphisme de foncteurs. Notons $\mathrm{Fl}(C)_1$ et $\mathrm{Fl}(C)_2$ les sites fibrés sur I déduits de $p : \mathrm{Fl}(C) \to C$ par les changements de base ϕ_1 et ϕ_2 respectivement. On construit comme en 7.3.1 un morphisme de sites fibrés sur I :

$$\mathrm{loc}(m) : \mathrm{Fl}(C)_1 \longrightarrow \mathrm{Fl}(C)_2. \tag{7.3.2.6}$$

285 Notons $\mathrm{Fl}(C^{\sim})_1 \to I$ et $\mathrm{Fl}(C^{\sim})_2 \to I$ les $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I obtenus par les changements de base $\epsilon_C \circ \phi_1$ et $\epsilon_C \circ \phi_2$ respectivement. On a un diagramme commutatif à isomorphisme près de morphismes sur I :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}(C^{\sim})_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}(\varepsilon_C * m)"] \arrow[d] & \mathrm{Fl}(C^{\sim})_2 \arrow[d] \\ \mathrm{Fl}(C)_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}(m)"] & \mathrm{Fl}(C)_2 \end{tikzcd} \tag{7.3.2.7}$$

où les morphismes verticaux se déduisent par changement de base des morphismes de (7.3.2.2).

Exercice 7.3.3. (Petit site et gros site fibrés).

Cet exercice est une suite à l'exercice IV 4.10.6 dont on utilise les hypothèses et les notations. On note $\mathbf{M}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fl}(S)$ définie par les morphismes de $\mathscr{M}$, et $p : \mathbf{M} \to S$ le foncteur qui associe à un morphisme son but.

6°) Montrer que $(\mathbf{M}, p)$ est un site fibré sur S et que, lorsque dans S les produits fibrés sont représentables, le foncteur d'inclusion $\mathbf{M} \to \mathrm{Fl}(S)$ est un morphisme cartésien du site fibré $\mathrm{Fl}(S) \to S$ dans le site fibré $\mathbf{M} \to S$.

7°) Soit $\mathbf{M}^{\sim/S} \to S$ le topos fibré associé à $\mathbf{M} \to S$. Montrer qu'on a avec les notations de 7.3.2, un morphisme canonique $g : \mathrm{Fl}(S^{\sim})_{/S} \to \mathbf{M}^{\sim/S}$ de topos fibrés sur S qui induit sur chaque fibre en $X \in \mathrm{ob}(S)$ le morphisme $(\mathrm{Prol}_X, \mathrm{Res}_X)$ (IV 4.10.6 4°)). Montrer que, bien que pour tout $X \in \mathrm{ob}(S)$ le morphisme $g_X : S^{\sim}_{/X} \to S(X)^{\sim}$ admette une section (loc. cit.), le morphisme g n'admet pas en général de section.

7.4. La topologie totale d'un topos ou d'un site fibré.

Définition 7.4.1. Soit $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré et pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, notons $\alpha_{i!} : C_i \to C$ le foncteur d'inclusion de la catégorie fibre C_i dans C. On appelle topologie totale sur C la topologie la moins fine sur C qui rende continu les foncteurs $\alpha_{i!}$ pour $i \in$ ob (I) (III 3.6). On appelle site total la catégorie C munie de la topologie totale.

286 Proposition 7.4.2. Soient $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré, T la topologie totale sur C et pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, T_i la topologie de la fibre C_i.

1) Soit X un objet de C au-dessus d'un objet i de I. Une famille $(X_\beta \to X)_{\beta \in B}$ est couvrante pour T si et seulement si elle est raffinée par une famille couvrante pour $T_i (Y_\gamma \to X)_{\gamma \in \Gamma}$ de C_i.
2) La topologie T induit sur les catégories C_i, les topologies T_i.
3) Pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est cocontinu.

. La propriété 3) résulte de 1) et de III 2.1. Démontrons 1). Soit, pour tout objet X de C, $J(X)$ l'ensemble des cribles de C/X décrits dans 1). On vérifie que les $J(X)$ possèdent les propriétés T 1), T 2), T 3 de II 1.1, et qu'ils définissent par suite une topologie T' sur C. La topologie T' est la moins fine des topologies sur C pour lesquelles les familles couvrantes pour les topologies T_i sont couvrantes. La topologie T' est donc moins fine que T (III 1.6). Pour montrer que $T' = T$, il suffit donc de montrer que pour tout objet

i de I, le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu lorsqu'on munit C de la topologie T' ; ou encore, il suffit de montrer que la topologie induite par T' sur la catégorie C_i est la topologie T_i, ce qui démontrera en même temps la propriété 2). Soit T_i' la topologie sur C_i induite par T', et $u : R \hookrightarrow X$ un crible couvrant pour T_i'. D'après III 3.2 le morphisme $\alpha_{i!}(u) : \alpha_{i!}(R) \to \alpha_{i!}(X)$ est bicouvrant et en particulier couvrant, ce qui revient à dire, d'après la définition de T', que le crible $R \hookrightarrow X$ est couvrant pour T_i. La topologie T_i' est donc moins fine que T_i, et pour démontrer que T_i' est plus fine que T_i, il suffit, par définition de la topologie induite (III 3.1), de montrer que le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu lorsqu'on munit les catégories C_i et C des topologies T_i et T' respectivement. En résumé, pour démontrer les propriétés 1) et 2), il suffit, via III 1.2 et 1.5, de démontrer le lemme suivant :

Lemme 7.4.2.2. Avec les hypothèses et notations de 7.4.2 et 7.4.2.1, soient X un objet de C au-dessus de i et $R \xrightarrow{u} X$ un morphisme de $C_i^\wedge$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le morphisme $R \to X$ est bicouvrant pour T_i. 287

ii) Le morphisme $\alpha_{i!}(u) : \alpha_{i!}(R) \to \alpha_{i!}(X)$ est bicouvrant pour T'.

i) $\Rightarrow$ ii) : Il est clair que si $R \to X$ est bicouvrant pour T_i, le morphisme $\alpha_{i!}(u)$ est couvrant pour T'. Il reste à montrer qu'il est bicouvrant (II 5.2). Soit Y un objet de C au-dessus d'un objet j de I, m et n $n : Y \rightrightarrows \alpha_{i!}(R)$ deux morphismes de $C^\wedge$ tels que $\alpha_{i!}(u)m = \alpha_{i!}(u)n$, et posons $f = p(\alpha_{i!}(u)m)$. Comme le foncteur $\alpha_{i!}$ commute aux limites inductives (I 5.4.3)), on a (I 3.4) :

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y, \alpha_{i!}(R)) \simeq \varinjlim_{C_i/R} \mathrm{Hom}_C(Y, \alpha_{i!}(.)).$$

Comme pour tout objet Z de C_i, on a avec les notations de 6.1.1 :

$$\mathrm{Hom}_C(Y, Z) \simeq \coprod_{w \in \mathrm{Hom}(j,i)} \mathrm{Hom}_w(Y, Z),$$

on en déduit

$$\varinjlim_{C_i/R} \mathrm{Hom}(Y, \alpha_{i!}(.)) \simeq \coprod_{w \in \mathrm{Hom}(j,i)} \varinjlim_{C_i/R} \mathrm{Hom}_w(Y, \alpha_{i!}(.)).$$

Mais pour tout $w \in \mathrm{Hom}(j, i)$, on a un foncteur image inverse $w^* : C_i \to C_j$, et on a $\mathrm{Hom}_w(Y, \alpha_{i!}(.)) \simeq \mathrm{Hom}_{C_j}(Y, w^*(.))$. D'où en notant encore $w^* : C_i^\wedge \to C_j^\wedge$ le prolongement de w^* aux préfaisceaux (qu'on devrait noter d'après I 5.4 $(w^*)_!$) et en remarquant que le foncteur $w^* : C_i^\wedge \to C_j^\wedge$ commute aux limites inductives (I 5.4.3)), on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y, \alpha_{i!}(R)) = \coprod_{w \in \mathrm{Hom}(j,i)} \mathrm{Hom}_{C_j^\wedge}(Y, w^*(R)).$$

Dans cet isomorphisme, les morphismes m et $n : Y \rightrightarrows \alpha_{i!}(R)$ correspondent à deux morphismes m' et $n' : Y \rightrightarrows f^*R$ tels que $f^*(u)m' = f^*(u)n'$. Comme le foncteur image inverse est un morphisme de topos, il est en particulier continu et par suite $f^*(u)$ es bicouvrant (III 3.2). Il existe donc une famille couvrante de C_j $(Y_\delta \xrightarrow{v_\delta} Y)_\delta$ telle que pour tout δ on ait $m'v_\delta = n'v_\delta$. On en déduit que $mv_\delta = nv_\delta$ pour tout δ, et par suite que $\alpha_{i!}(u)$ est bicouvrant pour T'.

ii) $\Rightarrow$ i) : Supposons que $\alpha_{i!}(R) \xrightarrow{\alpha_{i!}(u)} \alpha_{i!}(X)$ soit bicouvrant. Le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ 288
est cocontinu (III 2.1). Par suite $\alpha_i^* \alpha_{i!}(u)$ est bicouvrant (III 2.3.2) et (II 5.3 ii)). Le foncteur

$\alpha_{i!} : C_i \to C$ possède la propriété (PPF) de I 5.14. Par suite on a diagramme cartésien des $\widehat{C_i}$ (I 5.14 3)) :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \alpha_i^* \alpha_{i!}(R) \arrow[d, "\alpha_i^*\alpha_{i!}(u)"] \\ X \arrow[r] & \alpha_i^* \alpha_{i!}(X). \end{tikzcd}$$

Par suite, u est bicouvrant (II 5.2).

Remarque 7.4.3. 1) La proposition 7.4.2 peut s'énoncer et se démontrer dans un cadre un peu plus général que celui des sites fibrés, mais apparemment sans intérêt : au lieu d'un site fibré $p : C \to I$, on considère une catégorie fibrée $p : C \to I$ dont les fibres sont munies de topologies et dont les foncteurs images inverses sont continus pour ces topologies (alors que dans le cas des sites fibrés on exige de plus que ces foncteurs images inverses soient des morphismes de sites (IV 4.9)).

2) On peut démontrer que la topologie totale d'un site fibré est la topologie la plus fine rendant cocontinus les foncteurs $\alpha_{i!} : C_i \to C$ (III 2).

3) Soit $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré au-dessus d'une catégorie équivalent à une catégorie $\mathcal{U}$-petite. Alors le site total C est un $\mathcal{U}$-site (II 3.0.2). En effet, si pour tout objet i de I $(X_\beta)_{\beta \in B_i}$ est une petite famille topologiquement génératrice de C_i, la famille $(X_\beta)_{\beta \in \amalg_i B_i}$ est topologiquement génératrice pour C et est $\mathcal{U}$-petite. On appelle Topos total et on note $\mathrm{Top}(C)$ le topos des faisceaux sur le site total.

4) Soit $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une petite catégorie. Comme le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est cocontinu, il donne naissance à un morphisme de topos $\alpha_i = (\alpha_i^*, \alpha^{i*})$ de $C_i^\sim$ dans $\mathrm{Top}(C)$ (IV 4.7). Comme de plus le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est
289 continu, le foncteur $\alpha_i^* : \mathrm{Top}(C) \to C_i^\sim$ admet un adjoint à gauche noté encore $\alpha_{i!} : C_i^\sim \to \mathrm{Top}(C)$ qui prolonge le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ (III 1.2 iv)).

Proposition 7.4.4. Soit $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibre sur une petite catégorie I.

1) Un préfaisceau F sur C est un faisceau pour la topologie totale si et seulement si pour tout objet i de I, le préfaisceau $F \circ \alpha_{i!} = F|C_i$ est un faisceau sur C_i.
2) Un foncteur m de C dans un site D est un foncteur continu du site total C dans le site D si et seulement si pour tout objet i de I le foncteur $m|C_i = m \circ \alpha_{i!} : C_i \to D$ est continu.

Si F est un faisceau pour la topologie totale, le préfaisceau $F \circ \alpha_{i!}$ est un faisceau sur C_i car $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu. Supposons que pour tout i, $F \circ \alpha_{i!}$ soit un faisceau sur C_i. Soit X un objet de C au-dessus d'un objet i de I. Pour tout crible couvrant R de C_i/X, on a $F(X) \simeq F \circ \alpha_{i!}(R)$ et par suite $F(X) \simeq F(\alpha_{i!}(R))$. Soit $R' \hookrightarrow X$ le crible de C/X image du morphisme canonique de préfaisceaux $\alpha_{i!}(R) \to X$. Le morphisme $\alpha_{i!}(R) \to R'$ est un épimorphisme de préfaisceaux et par suite $F(R') \to F(\alpha_{i!}(R))$ est injectif. Comme $F(R') \to F(\alpha_{i!}(R))$ est aussi surjective, l'application $F(R') \to F(\alpha_{i!}(R))$ est bijective, et par suite l'application $F(X) \to F(R')$ est bijective. Comme les cribles couvrants X (7.4.2.1)), le préfaisceau F est un faisceau, car en revenant à la construction du faisceau associé (II 3) on constate que F est isomorphe à son faisceau associé (II 3.3). La deuxième assertion se déduit immédiatement de la première et de la définition de la continuité (III 1.1).

7.4.5. Soient $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une catégorie I équivalente à une petite catégorie et

$$f : i \longrightarrow j$$

une flèche de la catégorie d'indices I. En notant encore $f : C_i^\sim \to C_j^\sim$ le morphisme de topos déterminé par la structure de site fibré, on a (avec les notations de 7.4.3.4) un diagramme de morphismes de $\mathcal{U}$-topos

(7.4.5.1)
$$\begin{tikzcd} C_i^\sim \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Top}(C) \\ C_j \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Top}(C)$ est le topos total (7.4.3.3). Le diagramme (7.4.5.1) n'est pas commutatif en **290**
général. Nous allons définir un morphisme canonique de morphismes de topos :

(7.4.5.2)
$$\rho_f : \alpha_i \longrightarrow \alpha_j \circ f.$$

Il suffit de définir un tel morphisme au niveau des images inverses, i.e. de définir un morphisme de foncteurs :

(7.4.5.3)
$$\beta_f^* : f^* \circ \alpha_j^* \longrightarrow \alpha_i^*,$$

où encore, en utilisant l'adjonction entre les foncteurs f^* et f_*, il suffit de définir un morphisme de foncteurs :

(7.4.5.4)
$$\gamma_f : \alpha_j^* \longrightarrow f_*\alpha_i^*.$$

Soient donc Y un objet de C_j et F un faisceau sur le site total C. On a, par définition, $\alpha_j^* F(Y) = F(\alpha_{j!}(Y))$ et $f_*\alpha_i^* F(Y) - F(\alpha_{i!} f^*(Y)))$, où dans le deuxième membre $f^* : C_j \to C_i$ désigne le foncteur image inverse pour la structure fibrée. Mais, par définition de ce foncteur image inverse, on a un morphisme cartésien canonique :

(7.4.5.5)
$$m_Y : \alpha_{i!} f^* \longrightarrow \alpha_{j!};$$

d'où, en appliquant le foncteur F, une application fonctorielle en Y ;

(7.4.5.6)
$$\gamma_f(F)(Y) = F(m_Y) : \alpha_j^* F(Y) \longrightarrow f_*\alpha_i^* F(Y),$$

application définissant un morphisme de faisceaux sur C_j :

(7.4.5.7)
$$\gamma_f(F) : \alpha_j^* F \longrightarrow f_*\alpha_i^* F;$$

d'où le morphisme de foncteurs γ_f de (7.4.5.4).

Soient alors $f : i \to j$ et $g : j \to k$ deux morphismes composables de I. On a un **291**
isomorphisme canonique :

$$c'_{g,f} : g_* f_* \longrightarrow (gf)_*$$

et on vérifie immédiatement la formule de compatibilité :

(7.4.5.8)
$$c'_{g,f} \circ g_*(\gamma_f) \circ \gamma_g = \gamma_{gf}.$$

7.4.6. Introduisons alors le $\mathscr{U}$-topos fibré $p^{\sim/I} : C^{\sim/I} \to I$ associé à $p : C \to I$ (7.2.6) et la catégorie fibrée sur I° correspondante $(p^{\sim/I})' : (C^{\sim/I})' \to I^\circ$ (7.1.3.2). Les considérations précédentes permettent d'associer à tout objet F de $\mathrm{Top}(C)$ une famille $F_i = (\alpha_i^* F)_{i\in \mathrm{ob}(I)}$ d'objets des $C_i^\sim$ et une famille de morphismes

$$\gamma_f F : F_j \longrightarrow f_* F_i, \quad f \in F1(I), \quad f : i \longrightarrow j,$$

cette famille de morphismes étant soumise aux conditions de compatibilités de (7.4.5.8). On a donc associé à F un I°-foncteur de la catégorie I° dans la catégorie $(C^{\sim/I})'$ i.e. un objet $\Theta_C(F)$ de la catégorie $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$. Comme cette construction est fonctorielle en F, on a en définitive un foncteur :

$$\Theta_C : \mathrm{Top}(C) \longrightarrow \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})'). \tag{7.4.6.1}$$

Proposition 7.4.7. *Soit $C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré avec I équivalente à une petite catégorie. Le foncteur Θ_C (7.4.6.1) est une équivalence de catégories.*

Nous nous contenterons de décrire un foncteur quasi-inverse à Θ_C. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^\sim)')$ i.e. un I°-foncteur $i \mapsto \sigma(i)$ de I° dans $(C^{\sim/I})'$. Pour tout objet X de C au-dessus de $p(X) = i \in \mathrm{ob}(I)$, on dispose d'un faisceau $\sigma(p(X)) \in \mathrm{ob}\, C_i^\sim$; d'où un ensemble $\sigma(p(X))(X)$. Soit $m : X \to Y$ un morphisme de C au-dessus du morphisme $f : i \to j$ de I. Le morphisme m se factorise d'une manière unique en un morphisme $m' : X \to f^*Y$ de C_i et le morphisme cartésien canonique $f(Y) \to Y$. De même le morphisme $\sigma(f)$ se factorise de manière unique en un morphisme $\gamma_f(\sigma) : \sigma(p(Y)) \to f_*\sigma(p(X))$ et le morphisme I°-cartésien canonique $f_*\sigma(p(X)) \to \sigma(p(X))$. On a donc
292 application de $\sigma(p(Y))(Y)$ dans $\sigma(p(X))(X)$, obtenue en composant les applications :

$$\sigma(p(Y))(Y) \xrightarrow{\gamma_f(\sigma)(Y)} f_*(p(X))(Y) = \sigma(p(X))(f^*Y) \xrightarrow{\sigma(p(X))(m')} \sigma(p(X))(X).$$

On a donc associé à tout objet X de C un ensemble $\sigma(p(X))(X)$ et à tout morphisme $m : X \to Y$ une application $\sigma(p(X))(Y) \to \sigma(p(X))(X)$. On vérifie qu'on a bien déterminé ainsi un préfaisceau sur C, préfaisceau qui ne dépend pas du choix des foncteurs images inverses utilisés pour le construire. Il résulte de 7.4.4 que le préfaisceau $X \mapsto \sigma(p(X))(X)$ est un faisceau sur le site total C, et il est clair que ce faisceau dépend fonctoriellement de l'objet σ de $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$. Il est aussi clair, en revenant à la définition du foncteur Θ_C, qui le foncteur de $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ dans $\mathrm{Top}(C)$ qu'on vient de construire est un foncteur quasi-inverse de Θ_C.

Remarque 7.4.8. Il résulte en particulier de 7.4.7 que la catégorie $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ est un $\mathscr{U}$-topos. Ce dernier fait peut se voir directement. On voit immédiatement, en utilisant I 9.21.10, que les conditions a), b) et c) de IV 1.1.2 sont satisfaites, et l'existence d'une petite catégorie génératrice résulte de I 9.25.

7.4.9. Soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux $\mathscr{U}$-sites fibrés sur une petite catégorie et soit m un morphisme du site fibré C dans le site fibré D (7.2.2). Notons $m^{\sim/I} : C^{\sim/I} \to D^{\sim/I}$ le morphisme correspondant entre les $\mathscr{U}$-topos fibrés associés. Le morphisme de topos fibrés $m^{\sim/I}$ est défini à isomorphisme canonique près (7.2.7). Il lui correspond un foncteur image directe $m_*^{\sim/I} : (C^{\sim/I})' \to (D^{\sim/I})'$ (7.1.7) qui fournit, en passant aux sections sur I°, un foncteur :

$$\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*^{\sim/I}) : \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})') \longrightarrow \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (D^{\sim/I})'). \tag{7.4.9.1}$$

Par ailleurs, le foncteur m est un foncteur continu entre les sites totaux (7.4.4) et par suite fournit, par composition, un foncteur $m_* : \mathrm{Top}(C) \to \mathrm{Top}(F)$.

En résumé, on a un diagramme de foncteurs :

(7.4.9.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top}(C) \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "m_*"'] & \mathcal{H}om^{\circ}_I(I^{\circ}, (C^{\sim/I})') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{I^{\circ}}(I^{\circ}, m_*^{\sim/I})"] \\
\mathrm{Top}(D) \arrow[r, "\theta_D"] & \mathcal{H}om^{\circ}_I(I^{\circ}, (D^{\sim/I})')
\end{tikzcd}$$

Proposition 7.4.10. Le diagramme (7.4.9.2) est commutatif à isomorphisme près. 293
Lorsque m est cartésien, m est un morphisme du site total C dans le site total D.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la commutativité à isomorphisme près du diagramme (7.4.9.2). Pour montrer que m est un morphisme entre les sites totaux, il suffit, compte tenu de 7.4.7, de montrer que le foncteur adjoint à gauche au foncteur $\mathrm{Hom}_{I^{\circ}}(I^{\circ}, m_*^{\sim/I})$ est exact à gauche. Nous allons tout d'abord décrire le foncteur image inverse du morphisme $m^{\sim/I}$ (7.2.7), et pour tout objet i de I, notons $m_i^* : D_i^{\sim} \to C_i^{\sim}$ le foncteur induit par $(m^{\sim/i})^*$ sur les fibres en i. Choisissons pour tout morphisme $f : i \to j$ de I des morphismes de topos, notés dans les deux cas $(f^*, f_*) : C_i^{\sim} \to C_j^{\sim}$ et $(f^*, f_*) : D_i^{\sim} \to D_j^{\sim}$. Comme $(m^{\sim/I})^*$ est un I°-foncteur cartésien, on a, pour tout $f : i \to j$, un isomorphisme canonique

(7.4.10.1)
$$m_i^* f_* \longrightarrow f^* m_j^*,$$

et comme les foncteurs f^* et f_* sont adjoints, on a des morphismes canoniques (morphismes d'adjonction)

(7.4.10.2)
$$\begin{aligned} \phi &: \mathrm{id} \longrightarrow f_* f^* \\ \psi &: f^* f_* \longrightarrow \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

Considérons alors la suite de morphismes fonctoriels :

(7.4.10.3)
$$m_j^* f^* \xrightarrow{(1)} f_* f^* m_j^* f_* \xrightarrow{(2)} f_* m_i^* f^* f_* \xrightarrow{(3)} f_* m_i^*,$$

où le morphisme (1) est déduit de ϕ, le morphisme (2) est déduit de l'isomorphisme (7.4.10.1)) et le morphisme (3 est déduit de ψ. En composant les différents morphismes 294
de la suite (7.4.10.3), on obtient un morphisme fonctoriel :

(7.4.10.4)
$$\mathrm{can}_f : m_j^* f_* \longrightarrow f_* m_i^*.$$

Soit alors τ un objet de $\mathcal{H}om_{I^{\circ}}(I^{\circ}(D^{\sim/I})')$. On a donc, pour tout objet i de I un objet $\tau(i)$ de $D_i^{\sim}$ et pour tout morphisme $f : i \to j$, un morphisme

(7.4.10.5)
$$\gamma_f(\tau) : \tau(j) \longrightarrow f_* \tau(i),$$

où la famille des $\gamma_f(\tau)$ possède une propriété de compatibilité analogue à (7.4.5.8)). Posons alors $\sigma(i = m_i^*(\tau(i))$ et notons

(7.4.10.6)
$$\gamma_f(\sigma) : \sigma(j) \longrightarrow f_* \sigma(i)$$

le morphisme composé $m_j^* \tau(j) \xrightarrow{m_j^* \gamma_f(\tau)} m_j^* f_* \tau(i) \xrightarrow{\mathrm{can}_f(\tau(i))} f_* m_i^* \tau(i)$. On vérifie que les $\gamma_f(\sigma)$ possèdent la propriété de compatibilité de (7.4.5.8) et par suite qu'on a défini ainsi un objet de $\mathcal{H}om_{I^{\circ}}(I^{\circ}, (C^{\sim/I})')$. Un « adjoint functor chasing » montre alors que le foncteur de $\mathcal{H}om_{I^{\circ}}(I^{\circ}, (D^{\sim/I})')$ dans $\mathcal{H}om_{I^{\circ}}(I^{\circ}, (C^{\sim/I})')$ qu'on vient de construire est adjoint à gauche au foncteur $\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*^{\sim/I})$. Reste à montrer que cet adjoint à gauche commute aux limites projectives finies, ce qui résulte immédiatement du fait que dans les catégories de sections les limites projectives se calculent fibre par fibre et que tous les foncteurs utilisés pour construire cet adjoint à gauche commutent aux limites projectives finies.

Corollaire 7.4.11. Soient $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré sur une petite catégorie, $p^{\sim/I} : C^{\sim/I} \to I$ le $\mathscr{U}$-topos fibré associé (7.2.6), $\epsilon_I : C \to C^{\sim/I}$ le morphisme canonique de $\mathscr{U}$-site fibré $C^{\sim/I}$ dans le $\mathscr{U}$-site fibré C. Le morphisme ϵ_I induit une équivalence $\mathrm{Top}(\epsilon_I) : \mathrm{Top}(C) \to \mathrm{Top}(C^{\sim/I})$ entre les topos totaux correspondants

Résulte de la commutativité du diagramme (7.4.9.2) et du fait que le morphisme ϵ_I fournit une équivalence entre les $\mathscr{U}$-topos fibrés associés.

Remarque 7.4.11.1. Il résulte de 7.4.11 que dans les questions concernant le topos total on peut remplacer les sites fibrés par les topos fibrés correspondants.

295 Lemme 7.4.12. Soient $p : C \to I$ un site fibré sur une petite catégorie I et i un objet final de I (I 10). Le foncteur $\alpha_{i!} : C_i^\sim \to \mathrm{Top}(C)$ (7.4.3.4) est exact et pleinement fidèle. Les couples de foncteurs $\beta_i = (\alpha_{i!}, \alpha_i^*) : \mathrm{Top}(C) \to C_i^\sim$ et $\alpha_i = (\alpha_i^*, \alpha_{i*}) : C_i^\sim \to \mathrm{Top}(C)$ sont des morphismes de topos. Le morphisme composé $\beta_i\alpha_i : C_i^\sim \to C_i^\sim$ est isomorphe au morphisme identique.

Pour tout objet j de I, notons $f_j : j \to i$ l'unique morphisme de j dans i. En utilisant l'équivalence $\Theta_C : \mathrm{Top}(C) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ (7.4.7) on voit que pour tout objet X de C_i, $\alpha_{i!(X)}$ est le section $j \to f_i^*(X)$ et que pour tout section $j \mapsto \sigma(j) \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$, $\alpha_i^*(j \mapsto \sigma(j))$ est l'objet $\sigma(i)$. Par suite $\alpha_i^*\alpha_{i!}$ est isomorphe à l'identité. Donc $\alpha_{i!}$ est pleinement fidèle. Comme les foncteurs f_j^* sont exacts à gauche, le foncteur $\alpha_{i!}$ est exact à gauche. Donc β_i est un morphisme de topos, et comme $\alpha_i^*\alpha_{i!}$ est isomorphe à l'identité, le morphisme $\beta_i\alpha_i$ est isomorphie au morphisme identique.

Théorème 7.4.13.1. Soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux $\mathscr{U}$-sites fibrés sur une petite catégorie I et $m : D \to C$ un I-foncteur. Pour que m soit un morphisme du site fibre C dans le site fibré D (7.2.2), il suffit que m soit un morphisme du site total C dans le site total D.

. Il faut montrer que si un I-foncteur $m : D \to C$ est un morphisme du site total C dans le site total D, le foncteur m est un morphisme du site fibré C dans le site fibré D, i.e. pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ induit par m sur les fibres en i est un morphisme du site C_i dans le site D_i. La démonstration de cette dernière assertion occupe les alinéas 7.4.13.3 à 7.4.13.7.

. Montrons que pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ est continu. En effet on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\alpha_{i!}"'] & C_i \arrow[d, "\alpha_{i!}"] \\
D \arrow[r, "m"] & C
\end{tikzcd}$$

296 et il suffit de montrer que pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow X$ de C_i/X, le morphisme $m_{i!}(R) \to m_i(X)$ est bicouvrant (III 1.2 et 1.5). Mais, en vertu de la commutativité du diagramme de la page (page 133) et du fait que les foncteurs $\alpha_{i!}$ et m sont continus, le morphisme $\alpha_{i!}m_{i!}(R) \to \alpha_{i!}m_i(X)$ est bicouvrant. L'assertion résulte donc de 7.4.2.2.

. Réduction au cas où C et D sont des $\mathscr{U}$-topos fibrés. Comme les foncteurs m_i sont continus, ils admettent des prolongements naturels aux catégories de faisceaux que nous noterons $m_i^* : D_i^\sim \to C_i^\sim$ (III 1.2 iv)). Soient $D^{\sim/I}$ et $C^{\sim/I}$ les $\mathscr{U}$-topos fibrés associés aux sites fibrés D et C respectivement, et pour tout morphisme f de I, notons f^* les foncteurs images inverses pour les quatre catégories fibrées C, D, $C^{\sim/I}$ et $D^{\sim/I}$. Comme le foncteur m est un I-foncteur, on a pour tout $f : i \to j$ un morphisme canonique

$$f^*mj \leftarrow m_i f^*.$$

Comme les foncteurs f^*, m_i et m_j sont continus, on en déduit, en passant aux catégories de faisceaux, des isomorphismes canoniques

$$f^*m_j^* \longleftarrow m_i^* f^*.$$

Ces isomorphismes possèdent des propriétés de compatibilité, permettant de construire un foncteur cartésien $m^* : D^{\sim/I} \to C^{\sim/I}$ qui induit sur les topos fibres les foncteurs m_i^*. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varepsilon_I"'] & C \arrow[d, "\varepsilon_I"] \\ D^{\sim/I} \arrow[r, "m^*"] & C^{\sim/I} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près. Comme les foncteurs ϵ_I induisent des équivalences sur les topos totaux (7.4.11) et comme m est un morphisme entre les sites totaux, le foncteur $m^* : D^{\sim/I} \to C^{\sim/I}$ est un morphisme entre les sites totaux. On est donc ramené à démontrer l'assertion de 7.4.13.2 lorsque D et C sont des $\mathscr{U}$-topos fibrés, ce que nous supposerons désormais.

. Pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ transforme l'objet final de D_i en **297**
l'objet final de C_i. Notons $m : D^\sim \to C^\sim$ le prolongement naturel de m aux topos totaux (III 1.2). Utilisant les équivalences $\Theta_D : D^\sim \to \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, D')$ (7.4.7), on vérifie immédiatement que m associe à toute section $\sigma \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, D')$ la section $(i \mapsto m_i\sigma(i)) \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, C')$. Comme m est un morphisme de sites, le foncteur m est exact à gauche et en particulier transforme l'objet final de $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, D)$ en l'objet final de $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, C')$. Pour tout objet i de I, notons e_i un objet final de D_i. Un objet final de $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, D')$ est la section $i \mapsto e_i$. Donc la section $i \mapsto m_i(e_i)$ est un objet final de $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, C')$ et par suite, pour tout objet i de I, $m_i(e_i)$ est un objet final de C_i.

. Réduction au cas où i est un objet final de I. Soit i un objet de I. Le foncteur $\alpha_{i!} : D_i \to D$ se factorise en

$$D_i \xrightarrow{\overline{\alpha}_{i!}} D_{/e_i} \xrightarrow{\mathrm{loc}(e_i)} D,$$

où $\overline{\alpha}_i$ est le foncteur évident et $\mathrm{loc}(e_i)$ le foncteur d'oubli. Notons $m/i : D_{/e_i} \to D_{m(e_i)}$ le foncteur qui associe à tout objet $u : X \to e_i$ de $D_{/e_i}$, l'objet $m(u) : m(X) \to m(e_i)$ de $C_{/m(e_i)}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_{i!}"'] & C_i \arrow[d, "\overline{\alpha}_{i!}"] \\ D_{/e_i} \arrow[r, "m/i"] & C_{/m(e_i)} \end{tikzcd}$$

Comme e_i et $m(e_i)$ sont des objets finaux de D_i et C_i respectivement (7.4.13.5), les catégories $D_{/e_i}$ et $C_{/m(e_i)}$ sont des $\mathscr{U}$-topos fibrés sur $I_{/i}$ et le foncteur $m_{/i}$ est un $I_{/i}$-foncteur. Comme la propriété pour un foncteur d'être un morphisme de sites se localise (IV 4.9), le foncteur $m_{/i}$ est un morphisme du site total $C_{/m(e_i)}$ dans le site total $D_{/(e_i)}$. On est donc ramené à démontrer que m_i est un morphisme de topos lorsque i est un objet final de I,
298 ce que nous supposerons désormais.

. Fin de la démonstration. Notons $\alpha_{i!} : D_i \to D^\sim$, $m^\sim : D^\sim \to C^\sim$, $\alpha_{i!} : C_i \to C^\sim$, les prolongements naturels aux catégories de faisceaux des foncteurs $\alpha_{i!}$ et m. On a un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\alpha_{i!}"'] & C_i \arrow[d, "\alpha_{i!}"] \\ D^\sim \arrow[r, "m^\sim"] & C. \end{tikzcd}$$

Comme i est un objet final, le foncteur $\alpha_i^* \alpha_{i!} : C_i \to C_i$ est isomorphe à l'identité (7.4.12) et par suite m_i est isomorphe à $\alpha_i^* m^\sim \alpha_{i!}$. De plus les foncteurs α_i^*, $m^\sim$ et α_i^* sont exacts à gauche (7.4.12). Par suite m_i est exact à gauche et est donc un morphisme de site C_i dans le site D_i.

Exercice 7.4.14. Soient $X = (X_i)_{i\in I}$ un topos fibré sur I et T un topos. Montrer que les catégories $\mathscr{H}omtop(X_i, T)$ sont les fibres d'une catégorie fibrée qu'on notera $\mathscr{H}omtop_I(X, T\times I)$. Montrer que la catégorie des sections sur I de $\mathscr{H}omtop_I(X, T\times I)$ est canoniquement équivalente à $\mathscr{H}omtop_I(\mathrm{Top}(X), T)$ où $\mathrm{Top}(X)$ est le topos total de X.

Exercice 7.4.15. Soit $X = (X_i)_{i\in I}$ un topos fibré sur I. Définir un morphisme cartésien m de X dans le topos fibré constant de fibre (Ens). Montrer que le topos total du topos fibré constant de fibre (Ens) est canoniquement équivalent à $I\hat{}$. En déduire un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(m) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow I\hat{}.$$

Soit $F = (F_i)_{i\in I}$ (où $F_i = F|X_i$) un objet de $\mathrm{Top}(X)$ (7.4.7). Montrer que

$$\mathrm{Top}(m)(F) = (i \mapsto \Gamma(X_i, F_i)).$$

Déduire de 7.4.12 que si F est abélien injectif, F_i est abélien injectif pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$. En déduire que

$$R^q\,\mathrm{Top}(m)(F) = (i \mapsto H^q(X_i, F_i)).$$

299 Montrer que la suite spectrale de Cartan-Leray du morphisme m (V 5) est :

$$H^{p+q}(\mathrm{Top}(X), F) \Leftarrow \varprojlim_I{}^{(p)} H^q(X_i, F|X_i).$$

8. Limites projectives de topos fibrés

8.1. Généralités.

Définition 8.1.1. Soient $\mathscr{U}$ un univers et $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré. Un couple (C, m) constitué par un $\mathscr{U}$-topos C et un morphisme cartésien $m : C\times I \to F$ de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I est appelé une limite projective du topos fibré F si pour tout $\mathscr{U}$-topos D, le foncteur

$$\mathscr{H}omtop(D, C) \longrightarrow \mathscr{H}omtop_{\mathrm{cart}\,/I}(D\times I, F) \tag{8.1.1.1}$$

obtenu en composant le foncteur de changement de base

$$\mathcal{H}omtop(D, C) \longrightarrow \mathcal{H}omtop_I(D \times I, C \times I)$$

et le foncteur de composition avec m (7.1.8), es une équivalence de catégories. (cf. 8.1.3.3 pour une formulation plus « géométrique »).

8.1.2. On utilise les notations de 8.1.1. Soient D un $\mathcal{U}$-topos et $m_I : D \times I \to F$ un morphisme de $\mathcal{U}$-topos fibrés. En traduisant la définition 8.1.1, on constate aussitôt qu'il existe un morphisme de topos $n : D \to C$, et un isomorphisme de morphismes de topos fibrés sur I, $\gamma : m_1 \xrightarrow{\sim} m_\circ(n \times \mathrm{id}_I)$, rendant commutatif le diagramme :

(8.1.2.1)
$$\begin{tikzcd}
D \times I \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "m\times \mathrm{id}_I"'] & F \\
C \times I \arrow[ur, "m_1"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

De plus, si (n', γ') est un autre couple possédant la propriété ci-dessus, il existe un unique isomorphisme $\eta : n \xrightarrow{\sim} n'$ tel que

(8.1.2.2)
$$\gamma \circ m(n \times \mathrm{id}) = \gamma'.$$

De là résulte que, si (D, m_1) est une limite projective de F, n est une équivalence de 300
$\mathcal{U}$-topos (IV 3.4) et que la donnée supplémentaire de l'isomorphisme γ faisant commuter le diagramme (8.1.2.1) détermine le couple (n, γ) isomorphisme canonique près. L'existence de la limite projective sera démontrée en 8.2.3 lorsque I est cofiltrante.

8.1.3. On note

$$\underset{\substack{\longleftarrow \\ I}}{\mathrm{limtop}}\ F \text{ ou } \underset{\substack{\longleftarrow \\ I}}{\mathrm{limtop}}\ F_i \text{ ou encore } \underleftarrow{F}$$

une limite projective du topos fibré F, $\mu : (\underset{\substack{\longleftarrow \\ I}}{\mathrm{limtop}}\ F) \times I \to F$ le morphisme canonique, et pour tout objet i de I on note

$$\mu_i : \underleftarrow{F} \simeq \underleftarrow{F} \times i \longrightarrow F_i$$

le morphisme de topos induit par μ sur les fibres en i.

Choisissons un biscindage de F (7.1.4) i.e. pour tout $f : i \to j$ un morphisme de topos $f\cdot = (f^*, f_*) : F_i \to F_j$ tel que f^* soit un foncteur image inverse pour la structure fibrée. On a alors, pour tout couple $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ de morphismes composables de I, un isomorphisme de morphismes de topos (7.1.3)

$$c_{f,g} : g.f. \simeq (gf). \quad .$$

Comme μ est un morphisme cartésien de topos fibrés, on a pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, un isomorphisme de morphismes de topos (7.1.6)

(8.1.3.1)
$$b_f : f.\mu_i \xrightarrow{\sim} \mu_j,$$

et la famille des b_f satisfait à des relations analogues aux relations (7.1.6.2)

. Soient D un $\mathscr{U}$-topos, $m : D \times I \to F$ un morphisme de topos fibrés, $m_i : D = D \times \{i\} \to F_i$ les morphismes induits par m sur les fibres et pour tout $f : i \to j$:

$$b'_f : f.m_i \xrightarrow{\sim} m_j,$$

l'isomorphisme de transition. Il résulte de 8.1.2 qu'il existe un morphisme de topos $n :$
301 $D \to \underleftarrow{F}$ et une famille d'isomorphismes :

$$\gamma_i : m_i \xrightarrow{\sim} \mu_i n \quad i \in \mathrm{ob}\, I,$$

tels que pour tout $f : i \to j$ on ait :

$$b_f \circ f.(\gamma_i) = \gamma_j \circ b'_f.$$

De plus, le morphisme n et la famille des γ_i, $i \in ob(I)$ sont déterminés à isomorphisme unique près (8.1.2).

Réciproquement lorsqu'on se donne un topos $\underleftarrow{F}$, des morphismes $\mu_i : \underleftarrow{F} \to F_i$ et des isomorphismes b_f (8.1.3.1.), satisfaisant aux conditions de compatibilités usuelles, et lorsque toutes ces données possèdent la propriété universelle décrite ci-dessus, il existe un unique morphisme $\mu : \underleftarrow{F} \times I \to F$ de topos fibrés qui donnent naissance aux μ_i et aux b_f et $(\underleftarrow{F}, \mu)$ est une limite projective du topos fibré F.

. Soit $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. Les considérations ci-dessus permettent donc d'interpréter les limites projectives de topos fibrés comme des « limites projectives », au sens des 2-catégories, des pseudo-foncteurs à valeurs dans la 2-catégorie des $\mathscr{U}$-topos fibrés éléments de $\mathscr{V}$ déduits de la structure fibrée en choisissant les morphismes f.. Toutefois le lecteur prendra garde de ne pas confondre cette notion de « limite projective » au sens des 2-catégories (avec isomorphisme de commutation) avec la notion stricte (ou naïve) de limite projective (commutation stricte de diagrammes). Même lorsque la notion stricte a un sens (lorsque le pseudo-foncteur est un vrai foncteur) les notions de « limite projective » généralisée et de limite projective stricte ne coïncident pas en général.

8.1.4. Soient $p : F \to I$ et $q : G \to I$ deux $\mathscr{U}$-topos fibrés et $m : F \to G$ un morphisme de topos fibrés. Supposons que les topos fibrés F et G possèdent des limites projectives (8.1.1). Il résulte alors immédiatement de la définition 8.1.1 qu'il existe un morphisme de topos :

(8.1.4.1) $$\underleftarrow{m} : \underleftarrow{F} \longrightarrow \underleftarrow{G},$$

et un isomorphisme de morphismes de topos fibrés $\gamma : m \circ \mu \xrightarrow{\sim} \mu \circ \underleftarrow{m} \times \mathrm{id}_I$, rendant
302 commutatif le diagramme

(8.1.4.2)
$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{F} \times I \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\underleftarrow{m}\times\mathrm{id}_I"'] & F \arrow[d, "m"] \arrow[dl, phantom, "\gamma"] \\
\underleftarrow{G} \times I \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd} .$$

De plus, si $(\underleftarrow{m}', \gamma')$ est un autre couple possédant la propriété ci-dessus il existe un unique isomorphisme $n : \underleftarrow{m} \xrightarrow{\sim} \underleftarrow{m}'$ de morphismes de topos tel que

$$\gamma \circ \mu(\eta \times \mathrm{id}) = \gamma'.$$

8.1.5. Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibrés élément de $\mathcal{V}$, $\phi : I' \to I$ un foncteur élément de $\mathcal{V}$, $p_\phi : F_\phi \to I'$ le $\mathcal{U}$-topos fibré déduit de (F, p) par le changement de base ϕ (7.1.9). Soit $(\underleftarrow{F}, \mu)$ une limite projective de F. On obtient par changement de base un morphisme de topos fibrés sur I' :

$$\mu' : \underleftarrow{F} \times I' \longrightarrow F.$$

Soit $(\underleftarrow{F_\phi}, \mu_\phi)$ une limite projective de F_ϕ. On a alors, par la propriété universelle de la limite projective (8.1.2) un morphisme de topos

$$m_\phi : \underleftarrow{F} \longrightarrow \underleftarrow{F_\phi},$$

et un isomorphisme de morphismes de topos fibrés sur I' :

$$\gamma : \mu' \xrightarrow{\sim} \mu_\phi \circ (m_\phi \times \mathrm{id}_{I'}).$$

Le couple (m_ϕ, γ) est déterminé à isomorphisme unique prés.

8.1.6. Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une petite catégorie I, $F^{\sim/I} \to I$ le $\mathcal{U}$-topos fibre associé (7.2.6) et D un U-topos. On a tout d'abord un foncteur

(8.1.6.1) $$\mathscr{H}om top_{\mathrm{cart}\,/I}(D \times I, F^{\sim/I}) \longrightarrow \mathscr{M}or site_{\mathrm{cart}\,/I}(D \times I, F),$$

qui associe à tout m le foncteur composé de m^* avec $\epsilon_{F/I}$ (7.2.7). De plus, par définition de la catégorie $\mathscr{M}or site_{\mathrm{cart}\,/I}(D \times I, F)$ (7.2.2.2), on a un foncteur

(8.1.6.2) $$\mathscr{M}or site_{\mathrm{cart}\,/I}(D \times I, F) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/I}(F, D \times I)^\circ.$$

Enfin, par définition de la limite inductive (6.3), on a un foncteur 303

(8.1.6.3) $$\mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/I}(F, D \times I)^\circ \longrightarrow \mathscr{H}om(\varinjlim_{I^\circ} F, D)^\circ.$$

Notons

(8.1.6.4) $$\Theta : \mathscr{H}om top_{\mathrm{cart}\,/I}(D \times I, F^{\sim/I}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} F, D)^\circ$$

le foncteur composé de ces trois derniers foncteurs et

(8.1.6.5) $$\Pi : F \longrightarrow \varinjlim_{I^\circ},$$

le foncteur canonique.

Proposition 8.1.7. *Le foncteur Θ est pleinement fidèle. Son image essentielle est l'ensemble des foncteurs $m : \varinjlim_{I^\circ} F \to D$ tel que le foncteur*

$$(m \circ \Pi, p) : F \longrightarrow D \times I$$

soit un morphisme du site total $D \times I$ dans le site total F.

Il résulte de 7.2.7 que le foncteur (8.1.6.1) es une équivalence de catégories, de 7.2.2 que le foncteur (8.1.6.2) est pleinement fidèle et de 6.3 que le foncteur (8.1.6.4) est une équivalence de catégories. Par suite Θ est pleinement fidèle. Un foncteur $m : \varinjlim_{I^\circ} F \to D$ est isomorphie à l'image par $\mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/I}(F, D \times I)^\circ \to \mathscr{H}om(\varinjlim_{I^\circ} F, D)^\circ$ du foncteur $(m \circ \Pi, p)$, et un tel foncteur est dans l'image essentielle de (8.1.6.2) si et seulement s'il est un morphisme du site total $D \times I$ dans le site total F (7.4.13.1) ; d'où la proposition.

8.2. Construction de la limite projective lorsque la catégorie d'indice est cofiltrante.

Lemme 8.2.1. Soient I et I' deux catégories cofiltrantes (I 8.1) et $\phi : I' \to I$ un foncteur tel que $\phi^{\circ} : I'^{\circ} \to I^{\circ}$ soit cofinal (I 8.1). Soient de plus $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré, D un $\mathscr{U}$-topos, $m : D \times I \to F$ un morphisme cartésien de topos fibré, $m' : D \times I' \to F$ le morphisme de topos fibrés déduit de m par le changement de base ϕ (7.1.9). Le couple (D, m) est une limite projective de F si et seulement si (D, m') est une limite projective de F'.

304 La démonstration n'est qu'une vérification de routine assez longue. Elle est laissée au lecteur patient, qui pourra utiliser le point de vue des limites projectives de pseudo-foncteurs (8.1.3.3).

Lemme 8.2.2. Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré sur une petite catégorie cofiltrante, $\underleftarrow{F}$ la Limite inductive de la catégorie fibrée F (6.3.9), $\pi : F \to \underleftarrow{F}$ le foncteur canonique. Munissons $\underleftarrow{F}$ de la topologie la moins fine rendant continu le foncteur π (III 1). Soit D un $\mathscr{U}$-site et $n : \underleftarrow{F} \to D$ un foncteur. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) n est un morphisme de sites $D \to \underleftarrow{F}$.

ii) $n \circ \pi$ est un morphisme de sites (où F est muni de la topologie totale).

iii) $(n \circ \pi, p) : F \to D \times I$ est un morphisme du site total $D \times I$ dans le site total F.

iv) Pour tout objet i de I, le foncteur composé $F_j \xrightarrow{\alpha_{i!}} F \xrightarrow{n \circ \pi} D$ est un morphisme de sites.

On a i) = ii) d'après (6.6) et iii) = iv) d'après (7.4.13). Montrons que iii) = ii). Il suffit pour cela de montrer que le foncteur première projection $\mathrm{pr}_1 : D \times I \to D$ est un morphisme de sites. Notons $D^{\simeq}$ le topos des faisceaux sur D. Il résulte de (7.4.7) que $(D \times I)^{\sim}$ est équivalent au topos $\mathscr{H}om_{I^{\circ}}(I^{\circ}, D^{\sim} \times I^{\circ}) = \mathscr{H}om(I^{\circ}, D^{\sim})$. De plus, on constate immédiatement que le prolongement naturel de $\mathrm{pr}_1 : D \times I \to D$ aux faisceaux (III 1.2) est le foncteur de $\mathscr{H}om(I^{\circ}, D^{\sim})$ dans $D^{\sim}$ qui associe au foncteur $i \to \sigma(i)$ $\mathrm{Hom}(I^{\circ}, D^{\sim})$ l'objet $\varinjlim_{I^{\circ}} \sigma(i)$. Comme I° est filtrante, les limites inductives suivant I° sont exacts (II 4) et par suite pr_1 est un morphisme de sites (IV 4.9). Il reste à démontrer que ii = iv). Traitons tout d'abord le cas où D est un $\mathscr{U}$-topos et F un $\mathscr{U}$-topos fibré sur I. Soit i un objet de I. En raisonnant comme dans 7.4.13.6, on voit que le foncteur $\alpha_{i!} : F_i \to F$ se factorise en un morphisme $\overline{\alpha}_{i!} : F_i \to F/\alpha_{i!}(e_i)$ et le foncteur de localisation $F/\alpha_{i!}(e_i) \to F$, où e_i est un objet final de F_i. Il suffit donc de montrer que le foncteur composé $f/\alpha_{i!}(e_i) \xrightarrow{n \circ \pi} D$ est un morphisme de sites. Mais on a un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
F/\alpha_{i!}(e_i) \arrow[r, "n\circ\pi/\alpha_{i!}(e_i)"] \arrow[d] & D/n \circ \pi\alpha_{i!}(e_i) \arrow[d] \\
F \arrow[r, "n\circ\pi"] & D
\end{tikzcd}$$

305 Comme la propriété d'être un morphisme se localise (IV 5.10), il suffit de montrer que $n \circ \pi \circ \alpha_{i!}(e_i)$ est un objet final de D. Pour tout morphisme $f : j \to k$ de I, il existe un et un seul morphisme $e_f : \alpha_{j!}(e_j) \to \alpha_{k!}(e_k)$ au-dessus de f et ce morphisme est cartésien. On a donc une section cartésienne $j \mapsto \alpha_{j!}(e_j)$ de F sur I. Par suite le morphisme canonique $n \circ \pi \circ \alpha_{i!}(e_i) \to \varinjlim_I n \circ \pi \circ \alpha_{j!}(e_j)$ est un isomorphisme, car π transforme les morphismes cartésiens en isomorphismes. Par ailleurs $\varinjlim_I \alpha_{j!}(e_j)$, où la limite inductive est prise dans $F^{\wedge}$, est un objet final de $F^{\wedge}$. Comme $n \circ \pi$ est un morphisme, il transforme l'objet final de

$F^{\sim}$ en un objet final de D. Par suite $\varinjlim_I n\circ\pi\circ\alpha_{j!}(e_j)$ est un objet final de D, ce qui achève le démonstration dans ce cas. Dans le cas général, le foncteur $(n\pi, p) : F \to D \times I$ est cartésien et continu (7.4.4). De plus, le foncteur $n \circ \pi$ est le foncteur composé

$$F \xrightarrow{(n\pi,p)} D \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} D.$$

En passant aux $\mathscr{U}$-topos fibrés associés, on obtient un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "(n\pi,p)"] \arrow[d, "\varepsilon_{F/I}"'] & D \times I \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\varepsilon_D \times \mathrm{id}"] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ F^{\sim/I} \arrow[r, "(n\pi,p)^{\sim/I}"] & D^{\sim} \times I \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] & D^{\sim} \end{tikzcd} .$$

Comme $(n\pi, p)^{\sim/I}$ est cartésienne, il est du type $(n'\pi', p')$ où $p' : F^{\sim/I} \to I$ et $\pi' : F^{\sim/I} \to \varinjlim_{I^\circ} F_i^{\sim}$ sont les foncteurs canoniques. On a donc $\mathrm{pr}_{1^\circ}(n\pi, p)^{\sim/I} = n'$. Comme les foncteurs $\epsilon_{F/I}, \epsilon_D$ induisent une équivalence sur les topos de faisceaux (7.4.11), les foncteurs n et n' donnent des foncteurs isomorphes en passant aux faisceaux associés (III 1.2) et par suite n' est un morphisme de sites. D'après ce qui précède, le foncteur **306**
$(n\pi, p)^{\sim/I}$ induit sur les fibres des morphismes de topos. C'est donc un morphisme de site total F dans le site total $D^{\sim} \times I$ (7.4.13). Comme les foncteurs $\epsilon_{F/I}, \epsilon_D \times \mathrm{id}$ induisent des équivalences sur les topos totaux (7.4.11), le foncteur $(n\pi, p)$ est un morphisme de sites fibrés (7.4.13), d'où l'assertion.

Théorème 8.2.3. Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite (I 8.1).

1) Notons $\underrightarrow{F}$ le site dont la catégorie sous-jacente est la limite inductive de la catégorie fibrée $F \to I$ (6.3) et dont la topologie est la topologie la moins fine rendant continu le foncteur canonique $\pi : F \to \underrightarrow{F}$. Alors $\underrightarrow{F}$ est un $\mathscr{U}$-site et
$$(\pi, p) : F \longrightarrow \underrightarrow{F} \times I$$
est un morphisme du site fibré $\underrightarrow{F} \times I$ dans le site fibré F.

2) Soit $\mu : \underrightarrow{F}^{\sim} \times I \to F^{\sim}/I$ le morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés déduit de (π, p) en passant aux $\mathscr{U}$-topos fibrés associés. Le couple $(\underrightarrow{F}^{\sim}, \mu)$ est une limite projective de $F^{\sim/I}$.

Remarque 8.2.4. 1) Vu les notations introduites en 8.1.3, on peut poser
$$\underset{I}{\underleftarrow{\mathrm{limtop}}}\, F^{\sim} = \underrightarrow{F}^{\sim}$$

2) Il résulte de 7.4.4 que la topologie sur $\underrightarrow{F}$ est aussi la topologie la moins fine rendant continue la famille des foncteurs $\pi_j : F_j \to F \xrightarrow{\pi} \underrightarrow{F}$, $j \in \mathrm{ob}\, I$.

Définition 8.2.5. Le site $\underrightarrow{F}$ introduit dans 8.2.3 est appelé le site limite projective du site fibré F.

A titre d'exercice, le lecteur pourra comme en 8.2.1 définir la notion de limite projective d'un site fibré et vérifier que le site $\underrightarrow{F}$ est bien une limite projective du site F. La deuxième assertion du théorème peut donc se paraphraser ainsi : Le topos des faisceaux sur le site limite projective est équivalent à la limite projective du topos fibré associé.

8.2.6. Démonstration du théorème : Réduction au cas d'une petite catégorie d'in-
307 dices. Nous nous bornerons à donner des indications. Soit I' une sous-catégorie pleine de I telle que I'° soit cofinale dans I°. Notons $F' \to I'$ la catégorie fibrée déduite de F par le changement de base $I' \to I$, $\pi' : F' \to \underrightarrow{F'}$ le foncteur canonique. On constate tout d'abord que les catégories $\underrightarrow{F}$ et $\underrightarrow{F'}$ sont équivalentes et que la topologie sur $\underrightarrow{F'}$ déduite de la topologie de $\underrightarrow{F}$ par cette équivalence est la topologie la moins fine rendant continue le foncteur $\pi' : F' \to \underrightarrow{F'}$. L'assertion 1) du théorème en résulte alors lorsqu'elle est démontrée dans le cas où I est petite. L'assertion 2) dans le cas général de déduit alors de l'assertion 2) dans le cas où I est petite par le lemme 8.2.1.

8.2.7. Fin de la démonstration de théorème. La première assertion résulte du lemme 8.2.2 appliqué au cas où $D = \underrightarrow{F}$ et $n = \mathrm{id}$. Soit D un $\mathscr{U}$-topos. On a un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}omtop(D,(\underrightarrow{F})^{\sim}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(3)"'] & \mathscr{M}orsite(D,\underrightarrow{F}) \arrow[r, hook, "(2)"] \arrow[d, "(3)"'] & \mathscr{H}om(F,D)^{\circ} \arrow[dd, "(5)"'] \\
\mathscr{H}omtop_{\mathrm{Cart}\,/I}(D\times I,(\underrightarrow{F})^{\sim}\times I) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(4)"'] & \mathscr{M}orsite_{\mathrm{Cart}\,/I}(D\times I,(\underrightarrow{F})\times I) \arrow[d] & \\
\mathscr{H}omtop_{\mathrm{Cart}\,/I}(D\times I,\underrightarrow{F}^{\sim/I}) \arrow[r, "(1)"] & \mathscr{M}orsite_{\mathrm{Cart}\,/I}(D\times I,F) \arrow[r, hook, "(2)"] & \mathscr{H}om_{\mathrm{Cart}\,/I}(F,D\times I)^{\circ},
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs du type (1) sont des équivalences (IV 4.9.4 et 7.2.7), les foncteurs du type (2) sont pleinement fidèles (IV 4.9.1 et 7.2.2), les foncteurs du type (3) sont des foncteurs de changement de base, les foncteurs du type (4) sont des foncteurs de composition (avec μ, resp. (π, p)) et le foncteur (5) est l'équivalence déduite de la propriété universelle de la limite inductive (6.3). Pour montrer que le foncteur $\mathscr{H}omtop(D, (\underrightarrow{F})^{\sim}) \xrightarrow{(4)\circ(3)} \mathscr{H}omtop_{/I}(D \times I, F^{\sim/I})$ est une équivalence, il suffit de montrer que le foncteur

$$\mathscr{M}orsite(D, \underrightarrow{F}) \xrightarrow{(4)\circ(3)} \mathscr{M}orsite_{/I}(D \times I, F)$$

308 est une équivalence de catégories ou encore il suffit de montrer que les deux foncteurs pleinement fidèles

$$\mathscr{M}orsite(D, \underrightarrow{F}) \xrightarrow{(5)\circ(2)} \mathscr{H}omcart_{I}(F, D \times I)^{\circ}$$
$$\mathscr{M}orsite_{/I}(D \times I, F) \xrightarrow{(2)} \mathscr{H}omcart_{I}(F, D \times I)^{\circ}$$

ont mêmes images essentielles, ce qui résulte immédiatement du lemme 8.2.2.

8.2.8. Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré sur une catégorie I, $(\varprojlim_{I}\mathrm{top}\ F_i, \mu)$ une limite projective de F. On a donc un morphisme cartésien de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I :

$$\mu \varprojlim_{I}\mathrm{top}\ F_i \times I \longrightarrow F,$$

d'où, en passant aux catégories fibrées aux I° par les foncteurs images directes (7.1.3), un foncteur cartésien :

$$\mu_* : \varprojlim_{I}\mathrm{top}\ F_i \times I^{\circ} \longrightarrow F'$$

qui est le foncteur image directe par μ (7.1.7). On a donc, par définition de la limite projective d'une catégorie fibrée (6.10), un foncteur canonique

$$\Theta \,:\, \underset{I}{\underleftarrow{\mathrm{limtop}}}\, F_i \longrightarrow \varprojlim_{I, f_*} F_i = \mathscr{H}\!om_{\mathrm{cart}\,/I^\circ}(I^\circ, F'). \tag{8.2.8.1}$$

Théorème 8.2.9. On utilise les notations de 8.2.8, et on suppose que I est une catégorie cofiltrante essentiellement petite. Alors le foncteur Θ est une équivalence de catégories. Supposons I petite. Posons $\underset{I}{\underleftarrow{\mathrm{limtop}}}\, F_i = (\underrightarrow{F})^\sim$ (ce qui est licite d'après 8.2.3 et 8.2.4) et interprétons la catégorie $\mathscr{H}\!om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ comme la catégorie des faisceaux sur le site total F (7.4.7). Alors le foncteur composé

$$(\underrightarrow{F})^\sim = \underset{I}{\underleftarrow{\mathrm{limtop}}}\, F_i \xrightarrow{\Theta} \mathscr{H}\!om_{\mathrm{cart}\,/I^\circ}(I^\circ, F') \hookrightarrow \mathscr{H}\!om_{I^\circ}(I^\circ, F') \approxeq F^\sim,$$

n'est autre que le foncteur image directe par le morphisme de sites défini par le foncteur

$$\pi \,:\, F \longrightarrow \underrightarrow{F}.$$

8.2.10. Quelques commentaires avant la démonstration du théorème 8.2.9. À part la **309**
solution du problème d'existence des limites projectives dans le cas où la catégories d'indices est cofiltrante, solution qui curieusement n'est pas triviale dans cette théorie, les théorèmes 8.2.3 et 8.2.9 apportent deux informations supplémentaires essentielles pour le maniement dans la pratique des topos limites projectives. Tout d'abord le théorème 8.2.3 interprète le topos limite projective comme le topos des faisceaux sur un site dont la catégorie sous-jacente est la catégorie limite inductive des catégories F_i suivant le système des foncteurs images inverses. Dans les applications, on saura interpréter concrètement cette catégorie et sa topologie. D'autre part, le théorème 8.2.9 affirme qu'un faisceau de la limite projective est connu lorsque'on connaît le système de ses images directes dans le topos F_i (qui fournit une section cartésienne sur I° de la catégorie $(F^{\sim/I})'$). Ce théorème affirme de plus que réciproquement lorsqu'on se donne pour tout objet i de I un faisceau X_i sur F_i et pour tout morphisme $f \,:\, i \to j$ de I un isomorphisme $X_j \simeq f_* X_i$, ces isomorphismes étant soumis à des conditions de compatibilité, il existe essentiellement un seul faisceau de la limite projective qui donne naissance par images directes au système des X_i.

8.2.11. L'assertion 2) de 8.2.3 et la première assertion de 8.2.9 peuvent être résumées dans la formule frappante :

$$\varprojlim_{I, f_*} F_i^\sim \approxeq \underset{I, f.}{\underleftarrow{\mathrm{limtop}}}\, F_i^\sim \approxeq (\varinjlim_{I^\circ, f_*} F_i)^\sim. \tag{8.2.11.1}$$

8.2.12. Démonstration du théorème 8.2.9 Pour démontrer la première assertion, on se ramène au cas où la catégorie I est petite en utilisant 8.2.1 et un lemme analogue sur les limites projectives de catégories fibrées. Nous laissons les détails au lecteur. Supposons désormais que I est une petite catégorie. On site que le foncteur

$$\pi \,:\, F \longrightarrow \varinjlim_{I^\circ} F_i$$

est un morphisme de sites (8.2.2). Le foncteur image directe

$$\pi_* \,:\, (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^\sim \longrightarrow F^\sim$$

qu'il définit sur les topos est alors pleinement fidèle, et son image essentielle est l'en- **310** semble des faisceaux sur F qui transforment les morphismes cartésiens de F en isomorphismes (6.6). Or il est immédiat que ces faisceaux correspondent dans l'équivalence $F^{\sim} \simeq \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ aux sections cartésiennes de F' sur I° (7.4.7). De plus, pour tout $j \in \mathrm{ob}(I)$, notons $\alpha_{j!} : F_j \to F$ le foncteur d'inclusion qui donne naissance aux trois foncteurs $(\alpha_{j!}, \alpha_j^*, \alpha_{j*}) : F_j \rightleftarrows F$ (7.4.3). Il résulte de la définition de l'équivalence $F' \simeq \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F)$ (7.4.7) qu'à un faisceau X sur $\varinjlim_{I^\circ} F_i$ correspond par le foncteur $(\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \xrightarrow{\pi_*} F \simeq \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ la section cartésienne $j \mapsto \alpha_j^* \pi_*(X)$. Or il résulte de la description du foncteur $\mu : (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \times I \to F$ donnée dans 8.2.3 que pour tout objet j de I, le foncteur $\mu_{j_*} : (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \to F_j$ image directe par le morphisme $\mu_j : (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \to F_j$ déduit de μ par passage aux fibres en j, n'est autre que le foncteur $\alpha_j^* \pi_*$. Par suite le foncteur $(\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \xrightarrow{\pi_*} F \simeq \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ n'est autre que le foncteur $(\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \xrightarrow{\Theta} \mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/I^\circ}(I^\circ, F') \hookrightarrow \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$, d'où le théorème.

8.3. Topologie du site limite projective : Cas des topos cohérents.

8.3.1. Dans ce numéro, $p : F \to I$ est un $\mathscr{U}$-site fibré sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite, dont les foncteurs images inverses $f^* : F_i \to F_j$ commutent aux produits fibrés. On se donne de plus, pour tout objet X d'une catégorie fibre F_i, un ensemble $\mathrm{Cov}(X)$ de familles couvrantes pour la topologie de F_i qui possèdent les propriétés (PTO) et (PT1) de II 1.3 et qui engendrant la topologie de F_i. Enfin on suppose que pour tout $f : i \to j$, tout $Y \in \mathrm{ob}\, F_j$, et toute famille $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A}$ de $\mathrm{Cov}(Y)$, la famille $(f^*(Y_*) \to f^*(Y))_{\alpha \in A}$ appartient à $\mathrm{Cov}(f^*(Y))$. Ces conditions sur $\mathrm{Cov}(X)$ sont vérifiées par exemple si on prend $\mathrm{Cov}(X) = \{$toutes les familles couvrantes de X
311 dans $F_i\}$. On se propose d'étudier dans ce numéro le site limite projective de F sous des hypothèses de finitude convenables (8.3.13).

8.3.2. Soient $\pi : F \to \underrightarrow{F}$ le foncteur canonique et Y un objet de $\underrightarrow{F}$. Désignons par $\mathrm{Cov}(Y)$ l'ensemble des familles $(Y_\alpha \xrightarrow{n_\alpha} Y)_{\alpha \in A}$ du type suivant :

Il existe un $i \in I$, un objet X de F_i, une famille $(X_\alpha \xrightarrow{n'_\alpha} X)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(X)$, un isomorphisme $\phi : \pi(X) \simeq Y$ et une famille d'isomorphismes $\phi_\alpha : \pi(X_\alpha \simeq Y_\alpha)$, $\alpha \in A$, tels que pour tout $\alpha \in A$ on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi(X_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha", "\sim"', no head] \arrow[d, "\pi(n'_\alpha)"] & Y_\alpha \arrow[d, "n_\alpha"] \\
\pi(X) \arrow[r, "\phi", "\sim"', no head] & Y.
\end{tikzcd}$$

Proposition 8.3.3. 1) L'ensemble des familles $\in \mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \mathrm{ob}\, \underrightarrow{F}$, engendre la topologie du site limite projective (8.2.5).

2) La famille $Y \mapsto \mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \mathrm{ob}\, \underrightarrow{F}$, possède les propriétés (PTO) et (PT1) de II 1.3.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 8.3.4. Soient i un objet de I, $n : X' \to X$ un morphisme quarrable de F_i tel que pour tout $f : j \to i$, $f^*(n)$ soit quarrable. Alors $\pi(n)$ est quarrable. Les foncteurs :

$$\pi_j : F_j \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} \underset{\longrightarrow}{F}, \quad j \in \operatorname{ob} I,$$

commutent aux produits fibrés.

Rappelons que tout objet Y de $\underset{\longrightarrow}{F}$ est égal à un objet $\pi(Z)$, $Z \in \operatorname{ob} F$, et que tout morphisme $m : Y \to \pi(X)$ est de la forme :

$$\pi(Z) \xrightarrow{\pi(s)^{-1}} \pi(Z') \xrightarrow{\pi(m')} \pi(X),$$

où s est un morphisme cartésien de F. Par suite, pour montrer que $\pi(n)$ est quarrable, il **312**
suffit de montrer que le produit fibré de tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(X') \arrow[d, "\pi(u)"] \\
\pi(Z') \arrow[r, "\pi(m')"] & \pi(X)
\end{tikzcd}$$

est représentable. Mais le morphisme $m' : Z' \to X$ se factorise en $Z' \xrightarrow{m''} X'' \xrightarrow{s'} X$, où $p(m'')$ est l'identité de $p(Z') = j$ et où s' est cartésien au-dessus de $p(s') = f$. Posons $X''' = f^*(X')$, $n' = f^*(n)$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X''' \arrow[r, "s''"] \arrow[d, "n'"] & X' \arrow[d, "n"] \\
X'' \arrow[r, "s'"] & X,
\end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif dans $\underset{\longrightarrow}{F}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(X'' ') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi(u')"] & \pi(X') \arrow[d, "\pi(n)"] \\
\pi(Z') \arrow[r, "\pi(m')"] & \pi(X'') \arrow[r, "\sim"] & \pi(X)
\end{tikzcd}$$

où n' est un morphisme quarrable de F_j. Pour montrer que $\pi(n)$ est quarrable, il suffit donc de montrer que le produit $\pi(Z') \times_{\pi(X'')} \pi(X''')$ est représentable, et par suite il suffit de montrer que $\pi_j : F_j \hookrightarrow F \to \underset{\longrightarrow}{F}$ commute aux produits fibrés.

Soient

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de F_j et W un objet de F au-dessus de $k \in \operatorname{ob} I$. On a (6.5) :

$$\mathscr{H}om(\pi(W), \pi(Y')) \simeq \varinjlim_{\substack{\begin{tikzcd}[row sep=small] & j \\ l \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & k \end{tikzcd}}} \mathscr{H}om_{F_\ell}(g^*(W), f^*(Y'))$$

313 Mais comme $f^* : F_j \to F_\ell$ commute aux produits fibrés, on a

$$\mathrm{Hom}(g^*(W), f^*(Y')) \simeq \mathrm{Hom}(g^*(W), f^*(Y)) \times_{\mathrm{Hom}(g^*(W), f^*(X))} \mathrm{Hom}(g^*(W), f^*(X')).$$

Utilisant alors la commutation des limites filtrantes aux produits fibrés (I 2) et la formule (6.5) on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}(\pi(W), \pi(Y')) \simeq \mathrm{Hom}(\pi(W), \pi(Y)) \times_{\mathrm{Hom}(\pi(W), \pi(X))} \mathrm{Hom}(\pi(W), \pi(X')),$$

ce qui montre que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \pi(Y') \arrow[r] \arrow[d] & \pi(X') \arrow[d] \\ \pi(Y) \arrow[r] & \pi(X) \end{tikzcd}$$

est cartésien dans $\underrightarrow{F}$.

8.3.5. Démonstration de 8.3.3. Démontrons d'abord la deuxième assertion. Il résulte de 8.3.4 que les familles de $\mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \underrightarrow{F}$, sont composées de morphismes quarrables, d'où la propriété (PTO). Pour montrer que ces familles possèdent la propriété (PT1) (stabilité par changement de base), on est ramené, en procédant à une suite de réductions comme dans la démonstration de 8.3.3, à démontrer l'assertion suivante :

Pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, tout $Y \in \mathrm{ob}\, F_i$, tout $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(Y)$, et tout morphisme $u : Z \to Y$ de F_i, la famille $(\pi(Z) \times_{\pi(Y)} \pi(Y) \to \pi(Z)_{\alpha \in A}$ appartient à $\mathrm{Cov}((Z))$.

Cette dernière assertion résulte du fait que les $\pi_i : F_i \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} \underrightarrow{F}$ commutent aux produits fibrés (8.3.3) et que les familles $X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$ de F_i sont stables par changement de base. Démontrons la première assertion. Il est clair que les familles qui appartiennent aux $\mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \underrightarrow{F}$, sont couvrantes pour la topologie T la moins fine rendant continu le foncteur π (III 1). Donc la topologie T' engendrée par ces familles est moins fine que
314 T. Pour montrer qu'elle est plus fine que T (et par suite égale à T), il suffit de montrer que tout faisceau M pour T' est tel que $M \circ \pi$ est un faisceau sur F, ou encore (8.2.4) que $M \circ \pi_i$ est un faisceau sur F_i pour tout i ob I. Or, comme les foncteurs $\pi_i : F_i \to \underrightarrow{F}$ commutent aux produits fibrés (8.3.4), M est un faisceau pour T' si et seulement si (II 2.3 et I 2.12) pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, pour tout $Y \in \mathrm{ob}\, F_i$, pour tout $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(Y)$, la suite d'ensembles

$$M(\pi_i(Y)) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} M(\pi_i(Y_\alpha)) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta) \in A \times A} M(\pi_i(Y_\alpha \times_Y Y_\beta))$$

est exacte, i.e. (loc. cit.) si et seulement si pour $i \in \mathrm{ob}\, I$, $M \circ \pi_i$ est un faisceau sur F_i.

Proposition 8.3.6. *On utilise les notations et hypothèses de 8.3.1 et 8.3.2. Si pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, $X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$ est une prétopologie sur F_i (II 1.3) et si pour tout $X \in \mathrm{ob}\, F_i$, les familles couvrantes de $\mathrm{Cov}(X)$ sont finies, alors pour tout $Y \in \underrightarrow{F}$, les familles couvrantes de $\mathrm{Cov}(Y)$ sont finies et $Y \mapsto \mathrm{Cov}(Y)$ est une prétopologie sur $\underrightarrow{F}$.*

8.3.7. La seule chose à démontrer est que les familles $Y \mapsto \mathrm{Cov}(Y)$ possèdent la propriété (PT2) de (II 1.3) (stabilité par composition). Soit $i \in \mathrm{ob}\, I$, Y un objet de F_i, $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(Y)$. Soient de plus i_α, $\alpha \in A$, une famille d'objets de I, pour tout α, Z_α un objet de F_i et $(Z_{\alpha\beta} \xrightarrow{n_{\alpha\beta}} Z_\alpha)_{\alpha\beta \in B_\alpha}$ une famille de $\mathrm{Cov}(Z_\alpha)$. Enfin donnons nous pour tout $\alpha \in A$, un isomorphisme $\phi : \pi(Z_\alpha) \xrightarrow{\sim} \pi(Y_\alpha)$. En revenant à la définition des familles de $\mathrm{Cov}(X)$, $X \in \mathrm{ob}\,\underrightarrow{F}$ (8.3.2), on voit qu'il s'agit de démontrer que la famille

$$(\pi(Z_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\pi(n_\alpha)\circ\phi_\alpha\circ\pi(n_{\alpha\beta})} \pi(Y))_{\alpha\beta\in\coprod_A B_\alpha}$$

appartient à $\mathrm{Cov}(\pi(Y))$ ce que nous ferons après cinq réductions.

8.3.8. Réduction au cas où pour tout $\alpha \in A$, on a $\phi_\alpha = \pi(m_\alpha)$, $m_\alpha : Z_\alpha \to Y_\alpha$. Pour tout $\alpha \in A$, on a $\phi_\alpha = \pi(m_\alpha)\pi(s_\alpha)^{-1}$ (6.5) où s_α est un morphisme cartésien au-dessus de $f_\alpha : i'_\alpha \to i_\alpha$. On a donc des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} Z_{\alpha\beta} \arrow[d, "n_{\alpha\beta}"'] & f^*(Z_{\alpha\beta}) \arrow[l, "s_{\alpha\beta}"'] \arrow[d, "f_\alpha^*(n_{\alpha\beta})"] \\ Z_\alpha & f_\alpha^*(Z_\alpha), \arrow[l, "s_\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad \alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha,$$

qui fournissant des diagrammes commutatifs **315**

$$\begin{tikzcd} \pi(Z_{\alpha\beta}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi(n_{\alpha\beta})"] & \pi(f_\alpha^*(Z_{\alpha\beta})) \arrow[d, "\pi(f_\alpha^*(m_{\alpha\beta}))"] & \\ \pi(Z_\alpha) \arrow[r, "\pi(S_\alpha)^{-1}", "\sim"'] & \pi(f_\alpha^*(Z_\alpha)) \arrow[r, "\pi(m_\alpha)"] & \pi(Y_\alpha), \end{tikzcd} \quad \alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha.$$

Comme les familles $(f_\alpha^*(Z_{\alpha\beta}) \xrightarrow{f^*(n_\alpha)} f^*(Z_\alpha))$ appartiennent à $\mathrm{Cov}(f_\alpha^*(Z_\alpha))$, on peut se ramener au cas où pour tout α, on a $\phi_\alpha = \pi(m_\alpha)$.

8.3.9. Réduction au cas où, pour tout $\alpha \in A$, $i_\alpha = j$ et $p(m_\alpha) = k : j \to i$. Posons $g_\alpha = p(m_\alpha)$. Comme I est cofiltrante et comme A est fini, il existe un objet j de I et des morphismes $h_\alpha : j \to i_\alpha$ tels que pour tout couple (α, α') on ait $g_\alpha h_\alpha = g_{\alpha'} h_{\alpha'} = k$. En utilisant les foncteurs images inverses h_α^* comme en 8.3.8, on se ramène au cas décrit.

8.3.10. Réduction au cas où $i = j$ et $k : j \to i$ est l'identité. On a, pour tout α, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z_\alpha \arrow[r, "m'_\alpha"] & k^*(Y_\alpha) \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "k^*(n_\alpha)"'] & Y_\alpha \arrow[d, "n_\alpha"] \\ & k^*(Y) \arrow[r, "t"] & Y, \end{tikzcd}$$

où les morphismes t et t_α, $\alpha \in A$, sont cartésiens, où m'_α est au-dessus de l'identité de j
et où $t_\alpha \circ m'_\alpha = m_\alpha$. En remplaçant la famille $(Y_\alpha \to Y)\alpha \in A$ par la famille $(k^*(Y_\alpha) \to$ **316**
$k^*(Y))_{\alpha\in A} \in \mathrm{Cov}(k^*(Y_\alpha))$, et les morphismes m_α par les morphismes m'_α, on est ramené au cas décrit.

Lemme 8.3.11. *Soient j un objet de I et $m : X' \to X$ un morphisme de F_j tel que $\pi(m)$ soit un isomorphisme. Il existe un morphisme $\ell : j' \to j$ tel que $\ell^*(m)$ soit un isomorphisme.*

Montrons qu'il existe un morphisme $f : i \to j$ et un morphisme $q : f^*(X) \to f^*(X')$ tels que $f^*(m)q = \mathrm{id}_{f^*(X)}$ et tels que $\pi(q)$ soit un isomorphisme. En effet, il existe un isomorphisme $n : \pi(X) \to \pi(X')$ tel que $\pi(m) \circ n = \mathrm{id}_{\pi(X)}$. Il existe donc (6.5) deux morphismes $X \xleftarrow{s_1} Y_1 \xrightarrow{q_1} X'$, où s_1 est cartésien, tels que $n = \pi(q_1)\pi(s_1)^{-1}$. On a donc $\pi(m) \circ \pi(q_1) = \pi(s_1)$. Les morphismes mq_1 et s_1 de Y_1 dans X ont même image dans $\underrightarrow{F}$. Par suite (cf. la description des morphismes dans la limite inductive (6.5)), il existe un morphisme cartésien $s_2 : Y_2 \to Y_1$ tel que $mq_1 s_2 = s_1 s_2$. Posons $q_1 s_2 = q_2$ et notons s_3 le morphisme cartésien $s_1 s_2$. On a donc $mq_2 = s_3$. Le morphisme $q_2 : Y_2 \to X'$ se factorise de manière essentiellement unique en $Y_2 \xrightarrow{q} Y_3 \xrightarrow{s_4} X'$ où s_4 est cartésien et où q est au-dessus de l'identité de $p(Y_2)$. On a donc un diagramme commutatif

(8.3.11.1)
$$\begin{tikzcd} Y_3 \arrow[d, "s_4"'] & Y_2 \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "s_3"] \\ X' \arrow[r, "m"] & X.. \end{tikzcd}$$

Posons $p(s_4) = p(s_3) = f : i \to j$. On a $f^*(X') \simeq Y_3$, $f^*(X') \simeq Y_2$, et $f^*(m) : Y_2 \to Y_3$ rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y_3 \arrow[r, "f^*(m)"] \arrow[d, "s_4"'] & Y_2 \arrow[d, "s_3"] \\ X' \arrow[r, "m"] & X. \end{tikzcd}$$

317 On a donc $s_3 = s_3(f^*(m) \circ q)$; comme s_3 est cartésien et comme $f^*(m) \circ q$ est au-dessus de l'identité de $p(Y_2)$, on a $f^*(m) \circ q = \mathrm{id}_{Y_2}$. De plus, il résulte de la commutativité du diagramme (8.3.11.1) que $\pi(q)$ est un isomorphisme.

Appliquons alors le résultat précédent au morphisme $q : f^*(X) \to f^*(X')$: il existe un morphisme $f' : j' \to i$ et un morphisme $q' : f'^*(X') \to f'^*(X)$, tels que $f'^*(q)q' = \mathrm{id}_{f'^*(f'^*(X'))}$. Mais en posant $\ell^* = ff'$; on a un isomorphisme $f'^* f^* \simeq \ell^*$. On a donc un morphisme $f'^*(q) : \ell^*(X) \to \ell^*(X')$ et un isomorphisme $f'^* f^* \simeq \ell^*$. On a donc un morphisme $f'^*(q) : \ell^*(X) \to \ell^*(X')$ et un morphisme $q' : \ell^*(X') \to \ell^*(X)$, tels que $\ell^*(m) f'^*(q) = \mathrm{id}_{\ell^*(X)}$ et $f'^*(q)q' = \mathrm{id}_{\ell^*(X')}$. Par suite $\ell^*(m)$ est un isomorphisme.

8.3.12. Fin de la démonstration. Comme I est cofiltrante et A fini, il résulte de 8.3.11 qu'il existe un foncteur image inverse ℓ^* qui transforme tous les morphismes m_α, $\alpha \in A$, en isomorphismes. On se ramène donc au cas où les m_α sont des isomorphismes. Mais alors les familles couvrantes $(Z_{\alpha\beta} \to Z)_{\alpha\beta \in B_\alpha}$ sont déduites par le changement de base $m_\alpha : Z_\alpha \to Y_\alpha$ de familles couvrantes $(Y_{\alpha\beta} \to Y_\alpha)_{\alpha\beta \in B_\alpha} \in \mathrm{Cov}(Y_\alpha)$. On est donc ramené au cas où $Z_\alpha = Y_\alpha$ et $\Phi_\alpha = \mathrm{id}_{\pi(Y_\alpha)}$. Mais dans ce cas la famille $(Y_{\alpha\beta} \xrightarrow{n_\alpha \circ n_{\alpha\beta}} Y)_{\alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha}$ appartient à $\mathrm{Cov}(Y)$ (propriété (PT2)). Donc son image par π appartient à $\mathrm{Cov}(\pi(Y))$ (8.3.2).

Théorème 8.3.13. Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite. Si pour tout objet i de I le topos fibre F_i est cohérent (2.3) et si pour tout morphisme $f : i \to j$, le morphisme de topos $f\cdot = (f^*, f_*) : F_i \to F_j$ est cohérent (3.1), alors le topos $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_I F_i$ est cohérent et pour tout objet i de I, le morphisme canonique de topos

$$\mu_i : \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_I F_i \longrightarrow F_i$$

est cohérent.

De plus, en notant F_{coh} la sus-catégorie pleine de F définie par les objets de F qui sont cohérents dans leur fibre (1.13), la catégorie F_{coh} est fibrée sur I et $\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie des objets cohérents de $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i$

Pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, notons $(F_i)_{\mathrm{coh}}$ le $\mathscr{U}$-site (muni de le topologie induite) des objets cohérents de F_i (1.13). Comme F_i est cohérent, F_i est le topos des faisceaux sur $(F_i)_{\mathrm{coh}}$. Pour tout morphisme $f : i \to j$, les morphismes $f\cdot = (f^*, f_*)$ sont cohérents et par suite $f^*(F_j)_{\mathrm{coh}} \subset (F_i)_{\mathrm{coh}}$. On a donc un $\mathscr{U}$-site fibré $p_{\mathrm{coh}} : F_{\mathrm{coh}} \to I$, dont les sites fibres sont les sites $(F_i)_{\mathrm{coh}}$ et dont le topos fibré associé est équivalent à $p : F \to I$. Par suite on a (8.2.3) : 318

$$\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I,f.} F_i \approxeq (\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}})^{\sim} \tag{8.3.13.1}$$

Comme les topos F_i sont cohérents, les produits finis et les produits fibrés sont représentables dans $(F_i)_{\mathrm{coh}}$ (2.2). De plus les foncteurs $f^* : (F_i)_{\mathrm{coh}} \to (F_j)_{\mathrm{coh}}$ sont exacts à gauche. Enfin, comme les objets de $(F_i)_{\mathrm{coh}}$ sont quasi-compacts, les familles couvrantes finies forment une prétopologie. Il résulte alors de (8.3.4) que les produits finis et les produits fibrés sont représentables dans $\underleftarrow{\lim}_{I^\circ,F} (F_i)_{\mathrm{coh}}$ (remords au lemme 8.3.4. : Montrer que les foncteurs canoniques $(F_i)_{\mathrm{coh}} \to \underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$ transforment l'objet final en l'objet final) et de (8.3.6) que les objet de $\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$ sont quasi-compacts. Par suite (2.4.5), $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} (F_i)$ est cohérent. Enfin les morphismes canoniques $\mu_i : \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} (F_i) \to F_i$ se déduisent, par passage aux topos des faisceaux, des morphismes de sites (8.2.3) :

$$(F_i)_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$$

donc (3.3) les morphismes μ_i sont cohérents.

Démontrons la dernière assertion. On a (8.3.13.1)

$$\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{\mathscr{I}} (F_i) \simeq (\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}})^{\sim}.$$

Soit X un objet cohérent de $(F_{\mathrm{coh}})^{\sim}$. Comme X est quasi-compact, il existe une famille couvrante finie $(Y_\alpha \to X)$ où $Y_\alpha \in \mathrm{ob}\, \underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$ (1.1). Quitte à prendre un indice $i \in \mathrm{ob}\, I$ assez petit, on peut supposer que les Y_α sont les images par $\mu_i : F_{i\mathrm{coh}} \to \underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$ d'une famille Y'_α d'où, en prenant la somme directe des Y'_α (1.15), on voit qu'il existe un indice $i \in \mathrm{ob}\, I$, un $Y' \in F_{i\mathrm{coh}}$ et un morphisme surjectif $\mu_i(Y') \to X$. La relation d'équivalence $R = \mu_i(Y') \times_X \mu_i(Y')$ est alors un objet cohérent car $(\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}})^{\sim}$ est un topos cohérent (2.2). 319
Montrons tout d'abord que R est un objet de $\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$. Par définition R est un sous-objet de $\mu_i(Y' \times Y')$ et comme R est cohérent, on peut, quitte à changer l'indice i, trouver une flèche $m : Z \to (Y' \times Y')$ de $F_{i\mathrm{coh}}$ telle que $\mathrm{Im}(\mu_i(m)) = R$. Il en résulte que, F_i étant cohérent, $\mathrm{Im}(m)$ est cohérent dans F_i (1.17.1) et par suite appartient à $F_{i\mathrm{coh}}$. Il existe donc un indice i et un diagramme $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} Y'$ de $F_{i\mathrm{coh}}$ tel que $\mu_i(R) \overset{\mu_i(p_1)}{\underset{\mu_i(p_2)}{\rightrightarrows}} \mu_i(Y')$ soit une relation d'équivalence et tel que $X = \mu_i(Y')/\mu_i(R)$. Posons $X_i = \mathrm{coker}(p_1, p_2)$ et $R' = Y' \times_{X'_i} Y'$. On a un morphisme canonique dans $F_i : u : R \to R'$. De plus $\mu_i^*(u)$ est un isomorphisme. Donc, quitte à changer l'indice i, on peut supposer que $R = R'$, i.e. que R est une relation d'équivalence. Mais alors X_i appartient à $F_{i\mathrm{coh}}$ (1.17.1) et par suite $X = \mu_i(X_i)$ appartient à $\underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$.

Corollaire 8.3.14. Soient I une catégorie cofiltrante essentiellement petite, $p : F \to I$ et $q : G \to I$ deux $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I tels que pour tout objet i de I les topos F_i et G_i soient cohérents et tels que pour tout morphisme $f : i \to j$ les morphismes $f. : F_i \to F_j$ et $G_i \to G_j$ soient cohérents. Soit de plus $m : F \to G$ un morphisme cartésien de $\mathscr{U}$-topos fibrés tels que pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, $m_i : F_i \to G_i$ soit cohérent. Alors le morphisme $\underleftarrow{m}$ déduit de m par passage à la limite projective est cohérent.

Pour tout objet i de I, le morphisme m_i induit un foncteur $m^*_{i,\mathrm{coh}} : G_{i,\mathrm{coh}} \to F_{i,\mathrm{coh}}$, d'où un foncteur cartésien $m^*_{\mathrm{coh}} = G_{\mathrm{coh}} \to F_{\mathrm{coh}}$ qui est un morphisme du site fibré F_{coh} dans le site fibré G_{coh} (7.4.13). Le foncteur $\varinjlim_{I^\circ} m^*_{\mathrm{coh}} : \varinjlim_{I^\circ} G_{\mathrm{coh}} \to \varinjlim_{I^\circ} F_{\mathrm{coh}}$ est un morphisme de sites qui fournit en passant aux topos correspondants le morphisme $\underleftarrow{m}$. L'assertion résulte alors de 8.3.13 et de 3.3.

Exercice 8.3.15. Avec les notations de 8.3.13, montrer que si les F_i, $i \in I$, sont
320 algébriques (2.3) et si les morphismes $f. : F_i \to F_j$, $f \in \mathrm{Fl}(I)$, sont cohérents, $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i$ est algébrique et que $(\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i)_{\mathrm{coh}} \xrightarrow{\sim} \underrightarrow{F}_{\mathrm{coh}}$.

8.4. Exemple : Topos locaux.

8.4.1. Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ un topos fibré sur une catégorie I. On en déduit un topos fibré sur la catégorie $\mathrm{Pro}(I)$ (I 8.10) par la formule

$$X_\alpha = \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I_\alpha} X_{i\alpha} \tag{8.4.1.1}$$

pour tout pro-objet $\alpha = (i_\alpha)$ de I (pour voir ceci on pourra généraliser aux pseudo foncteurs l'exercice I 8.2.8).

8.4.2. Soient E un topos et $p : \mathrm{Fl}(E) \to E$ le topos fibré considéré dans 7.3.1. En prolongeant comme en 8.4.1, on obtient un topos fibré $\overline{\mathrm{Fl}(E)} \to \mathrm{Pro}(E)$. La catégorie $\mathrm{Point}(E)$ s'envoie par un foncteur pleinement fidèle dans $\mathrm{Pro}(E)$ (IV 6.8.5), d'où, par changement de base (7.1.9), un topos fibré $\mathrm{Loc}(E) \to \mathrm{Point}(E)$. La fibre $\mathrm{Loc}_p(E)$ en un point p de E est appelée le topos localisé de E en le point p. Ce topos dépend, d'après ce qui précède, de façon covariant du point p. On a, par définition,

$$\mathrm{Loc}_p(E) = \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{X \in \mathrm{Vois}(p)} E_{/X}, \tag{8.4.2.1}$$

où $\mathrm{Vois}(p)$ est la catégorie des voisinages de p (IV 6.8).

8.4.3. Soit $m : p' \to p$ un morphisme de $\mathrm{Point}(E)$ (IV 6). On en déduit, pour tout $X \in \mathrm{Vois}(p)$ un point p'_X de $E_{/X}$, d'où, par la propriété universelle de $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}$ 8.1 un point $\theta_p(m)$ de $\mathrm{Loc}_p(E)$. On définit ainsi un foncteur

$$\theta_p : \mathrm{Point}(E)_{/p} \longrightarrow \mathrm{Point}(\mathrm{Loc}_p(E)), \tag{8.4.3.1}$$

dont on constate immédiatement que c'est une équivalence de catégories. Par suite $\mathrm{Point}(\mathrm{Loc}_p(E))$ est canoniquement équivalent à la catégorie des générisations de p (IV 7.1.8). On a de plus une équivalence canonique de topos :

$$\mathrm{can} \cdot : \mathrm{Loc}_{\theta(m)}(\mathrm{Loc}_p(E)) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{p'}(E),$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Loc}_{\theta(m)}(\mathrm{Loc}_p(E)) \arrow[rr, "\mathrm{can}\,\cdot"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathrm{Loc}_{p'}(E) \arrow[dl, "m"] \\
& \mathrm{Loc}_p(E) &
\end{tikzcd}$$

où ϕ est le morphisme canonique (8.4.2.1). **321**

8.4.4. Les topos localisés ne semblent présenter un intérêt que dans le cas des topos provenant de la géométrie algébrique ou tout au moins que dans le cas des topos possédant des propriétés de finitude convenables. Ainsi, lorsque E est le topos des faisceaux sur un espace topologique séparé, on constate immédiatement (à l'aide par exemple de 8.2.9) que les topos localisés sont des topos ponctuels. Par ailleurs dans ce cas, la catégorie $\mathrm{Point}(E)$ est discrète et la situation décrite en 8.4.2 est triviale. En revanche, soient $E = \mathrm{Top}(X)$ le topos des faisceaux pour la topologie de Zariski sur un schéma X, x in point de X, O_x l'anneau local de X en x, $Y = \mathrm{spec}(O_x)$. On constate que

$$\mathrm{Loc}_x(E) = \mathrm{Top}(Y).$$

Pour d'autres exemples provenant de la topologie étale, nous renvoyons à l'exposé VIII du présent séminaire.

8.4.5. Lorsque E est localement cohérent (2.3), les topos localisés $\mathrm{Loc}_p(E)$ sont cohérents (on peut dans (8.4.2.1) se borner aux $X \in \mathrm{Vois}(p)$ qui sont algébriques et cohérents et appliquer alors 8.3.13). Pour tout morphisme de points $m : p' \to p$, le morphisme de topos $m\cdot : \mathrm{Loc}_{p'}(E) \to \mathrm{Loc}_p(E)$ est cohérent (8.3.14).

8.4.6. On appelle topos local un topos X tel que le foncteur $\Gamma(X, -)$ = « section sur X » (IV 4.3) soit un foncteur fibre (IV 6). Le point correspondant à ce foncteur fibre est appelé le centre du topos local. Lorsque E est localement cohérent, les topos localisés sont des topos locaux (1.2.3, 8.5.2 et 8.5.7). Le centre de $\mathrm{Loc}_p(E)$ est canoniquement isomorphe à $\theta_p(\mathrm{id}_p)$ (8.4.3.1)). L'image du centre de $\mathrm{Loc}_p(E$ dans E est isomorphe à p. Le topos localisé $\mathrm{Loc}_p(E)$ muni du morphisme canonique $\mathrm{Loc}_p(E) \to E$ est la solution **322**
du problème universel (2-universel !) qui consiste à envoyer des topos locaux dans E de façon à envoyer le centre « sur » p.

8.4.7. A propos des topos locaux, il se pose un certain nombre de problèmes que les rédacteurs n'ont pas abordés. Ainsi, si X est un topos local, l'objet final e de X possède un ouvert maximal $U \neq e$. Le complémentaire Y de U est un topos local qui ne possède pas d'ouvert non trivial. Un tel topos est-il ponctuel ? Soit U un topos et $X = (U, \Phi : U \to (\mathrm{Ens}))$ en topos obtenu par recollement. Quelles sont les conditions sur le foncteur de recollement Φ pour que X soit un topos local ?

8.5. Structure des faisceaux d'une limite projective filtrante de topos.

8.5.1. Dans ce numéro, $F = (F_i)_{i \in I}$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur une petite catégorie cofiltrante I. On choisit un biscindage (7.1.4) de F, i.e. pour tout $f \in \mathrm{Fl}(I) : i \to j$ on choisit des morphismes des topos $f. : F_i \to F_j$ tels que $f^* : F_j \to F_i$ soit le foncteur image inverse pour la structure fibrée. On a alors des isomorphismes canoniques $c_{f,g}$ possédant une propriété de cocycles (7.1.3). On note $\underleftarrow{F}$ la limite projective du topos fibré F (8.2.3) et pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, on note

(8.5.1.1) $$\mu_i : \underleftarrow{F} \longrightarrow F_i,$$

le morphisme canonique (8.1.3). On note $\mathrm{Top}(F)$ le topos total de F (7.4.3,3). D'après 8.2.9, le foncteur canonique $F \to \underrightarrow{F}$ définit un morphisme de topos

$$Q : \underleftarrow{F} \longrightarrow \mathrm{Top}(F). \tag{8.5.1.2}$$

Le topos F s'identifie à $\mathscr{H}om_{\mathrm{Cart}\,/I^\circ}(I^\circ, F')$ (8.2.9) et le topos $\mathrm{Top}(F)$ s'identifie à $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ (7.4.7). Ces identifications faites, le morphisme Q n'est autre que le morphisme de plongement de $\mathscr{H}om_{\mathrm{cart}\,/I^\circ}(I^\circ, F')$ dans $\mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ (8.2.9) et pour tout objet M de F, on a

$$Q_*(M) = (i \longrightarrow \mu_{i*}(M)). \tag{8.5.1.3}$$

D'après 7.4.3.4, on a pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, un morphisme de topos

$$\alpha_i : F_i \longrightarrow \mathrm{Top}(F). \tag{8.5.1.4}$$

323 Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{F} \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "Q"'] & & F_i \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ & \mathrm{Top}(F) & \end{tikzcd} \tag{8.5.1.5}$$

n'est pas commutatif en général (même à isomorphisme près). Mais on a, par définition des morphismes en présence, un isomorphisme canonique

$$\alpha_i^* Q_* \simeq \mu_{i*}. \tag{8.5.1.6}$$

Lorsque i est un objet final de I, α_i est un plongement admettant une rétraction β_i : $\mathrm{Top}(F) \to F_i$ (7.4.12) et le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "Q"'] & & F_i \arrow[dl, "\beta_i"] \\ & \mathrm{Top}(X) & \end{tikzcd} \quad , \tag{8.5.1.7}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

Proposition 8.5.2. Soit $j \mapsto M_j$ un objet de $\mathrm{Top}(F)$. Il existe un isomorphisme fonctoriel

$$Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_*^j M_j. \tag{8.5.2.1}$$

Un objet de $\mathrm{Top}(F)$ (7.1.3) consiste en la donnée d'une application $j \mapsto M_j$, $M_j \in \mathrm{ob}\, F_j$, et en la donnée, pour tout morphisme $f : i \to j$, d'un morphisme

$$\beta_f : M_j \longrightarrow f_* M_i \tag{8.5.2.2}$$

ou de manière équivalence par adjonction, d'un morphisme

$$\beta_f' : f^* M_j \longrightarrow M_i, \tag{8.5.2.3}$$

les morphismes β'_f étant soumis à la condition que pour tout couple de morphismes composables $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$, le diagramme ci-après soit commutatif :

(8.5.2.4)
$$\begin{tikzcd} f^*g^*M_k \arrow[r, "f^*\beta'_g"] \arrow[d, dash, "c^*g{,}f"'] & f^*M_j \arrow[d, "\beta'_f"] \\ (gf)^*M_k \arrow[r, "\beta'_{gf}"] & M_i \end{tikzcd}$$

Rappelons de plus (8.1.3.1.) que pour tout morphisme $f : i \to j$, on a un isomorphisme 324
$b_f : f.\mu_i \xrightarrow{\sim} \mu_j$, et que pour tout couple de morphismes composables $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$, on a un diagramme commutatif :

(8.5.2.5)
$$\begin{tikzcd} g\cdot f\cdot\mu_i \arrow[r, "c_{g,f}"] \arrow[d, "g\cdot(b_f)"] & (gf)\cdot\mu_i \arrow[d, "b_{gf}"] \\ g\cdot\mu_j \arrow[r, "b_g"] & \mu_k \end{tikzcd}$$

Soit alors $f : i \to j$ un morphisme de I. Notons

(8.5.2.6)
$$t_f : \mu_j^*(M_j) \longrightarrow \mu_i^*(M_i)$$

le morphisme composé $\mu_j^*(M_j) \xrightarrow{b_f^*} \mu_j^*(f^*(M_j)) \xrightarrow{\mu_i^*(\beta'_f)} \mu_i^*(M_i)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la commutativité des diagrammes (8.5.2.4)) et ((8.5.2.5) entraîne que pour tout couple de morphismes composables $i \to j \to k$, on a

(8.5.2.7)
$$t_f t_g = t_{gf}.$$

Par suite on a défini un foncteur $I^\circ \to \overleftarrow{F}$ dont on peut considérer la limite inductive $\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(M_i)$. Soit alors N un objet de $\overleftarrow{F}$. On a

(8.5.2.8)
$$\mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(M_i), N) \simeq \varprojlim_{I^\circ} \mathrm{Hom}(\mu_i^*(M_i), N),$$

d'où, par adjonction, un isomorphisme

(8.5.2.9)
$$\mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(M_i), N) \simeq \varprojlim_{I^\circ} \mathrm{Hom}_{F_i}(M_i, \mu_{i*}(N)).$$

On se propose d'interpréter le deuxième membre de (8.5.2.9). Pour cela, notons, pour 325
tout morphisme $f : i \to j$, par

$$d_f : \mathrm{Hom}_{F_i}(M_i), \mu_{i*}(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_j}(M_j, \mu_{j*}(N)).$$

le morphisme de transition du système projectif qui figure dans (8.5.2.9)). Il résulte de la définition des morphismes t_f ((8.5.2.6) que l'application d_f associe à un morphisme

$$u_i : M_i \longrightarrow \mu_{i*}(N)$$

le morphisme

$$d_F(u_i) : M_j \longrightarrow \mu_{j*}(N),$$

obtenu en composant les morphismes

$$M_j \xrightarrow{\beta_f} f_*(M_i) \xrightarrow{f_*(u_i)} f_*\mu_{i*}(N) \xrightarrow{b_f} \mu_{j*}(N).$$

Par suite un élément du deuxième membre de (8.5.2.9) s'interprète comme une famille de morphismes $u_i : M_i \to \mu_{i*}(N)$, $i \in \operatorname{ob} I$, telle que pour tout $f : i \to j$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[r] \arrow[d, "u_j"'] & f_*(M_i) \arrow[d, "f_*(u_i)"] \\
\mu_{j*}(N) \arrow[r, "\sim"] & f_*\mu_{i*}(N)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, c'est-à dire comme un morphisme de la section $(i \mapsto M_i) \in \mathscr{H}om_{I^\circ}(I^\circ, F')$ dans la section $Q_*(N)$. On a donc un isomorphisme fonctoriel

$$\operatorname{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} \mu_{i*}(M_i), N)) \simeq \operatorname{Hom}((i \mapsto M_i), Q_*(N));$$

d'où la proposition par adjonction.

Proposition 8.5.3. Si pour tout $f : i \to j \in \operatorname{Fl}(I)$ les foncteurs $f_* : F_i \to F_j$ commutent aux petites limites inductives filtrantes, on a, pour tout section $(i \mapsto M_i) \in \operatorname{Hom}^\circ_I(I^\circ, F')$:

$$Q_*Q^*(i \mapsto M_i) \simeq i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} f_*M_j. \tag{8.5.3.1}$$

326 Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter en termes des β_f (8.5.2.2) et des $c_{f,g}$ (8.5.1) les morphismes de transition des systèmes inductifs $(f : j \to i) \mapsto f_*(M_j)$ et les morphismes de transition de la section $i \mapsto \varinjlim_{f:j\to i} f_*M_i$. Comme les foncteurs f_* commutent aux limites inductives filtrantes, la section $i \mapsto \varinjlim_{f:j\to i} f_*M_j$ est cartésienne. De plus on a un morphisme naturel u de $(i \mapsto M_i)$ dans la section $(i \mapsto \varinjlim_{f:j\to i} f_*M_j)$, et il est clair que tout morphisme de $(i \mapsto M_i)$ dans une section cartésienne se factorise d'une manière unique par u, d'où l'isomorphisme (8.5.3.1).

Corollaire 8.5.4. Sous les hypothèses de 8.5.3 le foncteur Q_* commute aux petites limites inductives filtrantes.

Soit $\alpha \mapsto N^\alpha$ un petit système inductif filtrant de $\underleftarrow{F}$. Posons $M^\alpha = Q_*(N^\alpha)$, de sorte que M^α est une section $i \mapsto M_i^\alpha$. On a $N^\alpha \simeq Q^*Q_*(N^\alpha)$ et comme Q^* commute aux limites inductives, on a $\varinjlim_\alpha N^\alpha \simeq Q^*(\varinjlim_\alpha M^\alpha)$. Les limites inductives dans $\operatorname{Top}(F) = \operatorname{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ se calculent fibre par fibre. On a donc $\varinjlim_\alpha M \simeq (i \mapsto \varinjlim_\alpha M_i^\alpha)$. En vertu de (8.5.3.1), on a

$$Q_*(\varinjlim_\alpha N^\alpha) \simeq Q_*Q^*(\varinjlim_\alpha M^\alpha) \simeq i \mapsto \varinjlim_{f:j\to i} f_*(\varinjlim_\alpha M_j^\alpha).$$

Comme les foncteurs f_* commutent aux limites inductives filtrantes, il vient :

$$Q_*(\varinjlim_\alpha N^\alpha) \simeq i \mapsto \varinjlim_{f:j\to i} \varinjlim_\alpha f_*(M_j^\alpha) \simeq i \mapsto \varinjlim_\alpha \varinjlim_{f:j\to i} f_*(M_j^\alpha) \simeq \varinjlim_\alpha Q_*(N^\alpha).$$

Corollaire 8.5.5. Si les foncteurs $f_* : F_i \to F_j$ commutent aux petites limites inductives filtrantes, on a, pour tout objet i de I et pour tout $M_i \in \operatorname{ob} F_i$

$$\mu_{i*}\mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} f_*f^*(M_i). \tag{8.5.5.1}$$

Quitte à faire le changement de base $I/i \to I$, on peut supposer que i est un objet final de
327 I (8.2.1). Le morphisme $\mu_i : \underleftarrow{F} \to F_i$ est alors le morphisme composé des morphismes (8.2.9) et (7.4.12) :

$$Q : \underleftarrow{F} \longrightarrow F^{\sim},$$
$$\beta_i : (\alpha_{i!}, \alpha_i^*) : F^{\sim} \longrightarrow F_i.$$

On a donc $\mu_i^*(M_i) \simeq Q^*\beta_i^*(M_i)$, où $\beta_i^*(M_i)$ est la section $(f : i \to j) \mapsto f^*(M_i)$ dont les morphismes de transition sont déduits des $c_{f,g}$. L'assertion résulte alors de 8.5.3.

Corollaire 8.5.6. Sous les hypothèses de 8.5.5, les foncteurs

$$\mu_{i*} : \underleftarrow{F} \longrightarrow F_i$$

commutent aux limites inductives filtrantes.

Le foncteur μ_{i*} est composé du foncteur Q_* qui commute aux limites inductives filtrantes, et du foncteur « restriction à la fibre en i », qui commute aux limites inductives.

Corollaire 8.5.7. Sous les hypothèses de 8.5.3, soient i un objet de I et X un objet de F_i tel que le foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$ sur F_i commute aux limites inductives filtrantes. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X), -)$ commute aux limites inductives filtrantes et pour tout objet M_i de F_i on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X), \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} \mathrm{Hom}(f^*(X), f^*(M_i)). \tag{8.5.7.1}$$

Pour tout objet $(j \mapsto M_j)$ de $\mathrm{Top}(F)$ on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X), Q^*(j \mapsto M_j)) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} \mathrm{Hom}(f^*(X), M_j). \tag{8.5.7.2}$$

Le foncteur $\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X), -)$ est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}(X, \mu_{i*}(-))$ et ce dernier commute aux limites inductives filtrantes (8.5.4). D'après (8.5.5.1), on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X), \mu_i^*(M_i)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \mu_{i*}, \mu_i^*(M_i)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \varinjlim_{f : j \to i} f_* f^*(M_i)),$$

d'où la formule (8.5.7.1)). De même, d'après ((8.5.3.1), on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X), Q^*(j \mapsto M_j)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \mu_{i*} Q^*(j \mapsto M_j)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \varinjlim_{f : j \to i} f_*(M_j)),$$

d'où la formule (8.5.7.2). 328

Proposition 8.5.8. Soient $G \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré et $m : F \to G$ un morphisme cartésien de topos fibrés (7.1.15). On utilise pour G les notations introduites en 8.1.1. Soit $\underleftarrow{m} : \underleftarrow{F} \to \underleftarrow{G}$ le morphisme déduit de m par passage à la limite projective (8.1.4). Le diagramme de topos et de morphismes de topos :

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{F} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\underleftarrow{m}"] & \mathrm{Top}(F) \arrow[d, "m^{\sim}"] \\ \underleftarrow{G} \arrow[r, "Q"] & \mathrm{Top}(G) \end{tikzcd} \tag{8.5.8.1}$$

est commutatif à isomorphisme près. Pour tout objet N de $\underleftarrow{F}$, on a

$$\underleftarrow{m}_*(N) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* m_{j*} \mu_{j*}(N). \tag{8.5.8.2}$$

La commutativité du diagramme (8.5.8.1) résulte immédiatement des définitions (8.2.8 et 8.5.1). On a $m_*(N) \simeq Q^* Q_* m_*(N)$ et, en vertu de la commutativité de (8.5.8.1)), $\underleftarrow{m}_*(N \simeq Q^* m_*^{\sim} \underleftarrow{Q}_*(N)$. Par suite, on a un isomorphisme $m_*(N) \simeq Q^* \underleftarrow{m}_*^{\sim}(j \mapsto \mu_{j*}(N))$. Le foncteur $\underleftarrow{m}_*^{\sim}$ n'est autre que le foncteur $\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*)$ (7.4.10), et par suite on a un isomorphisme canonique $\underleftarrow{m}_*(N) \simeq Q^*(j \mapsto m_{j*}\mu_{j*}(N))$. La formule (8.5.8.2) résulte alors de 8.5.2.

Proposition 8.5.9. Avec les hypothèses et notations de 8.5.8, on suppose de plus que pour tout objet i de I, le foncteur $m_{i*} : F_i \to G_i$ commute aux limites inductives filtrantes et que pour tout morphisme $f : i \to j$ de I le foncteur $f_* : F_i \to F_j$ commute aux limites inductives filtrantes. Alors le foncteur $\underleftarrow{m}_* : \underleftarrow{F} \to \underleftarrow{G}$ commute aux limites inductives filtrantes, et pour tout objet $(i \mapsto M_i)$ de $\mathrm{Top}(F)$ on a un isomorphisme canonique :

(8.5.9.1) $$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* m_{j*}(M_j).$$

329 La première assertion résulte de (8.5.8.2)) et de (8.5.6. D'après (8.5.8.2)) et ((8.5.3.1), on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{i} \mu_i^* m_{i*}(\varinjlim_{f:j\to i} f_*(M_j)).$$

En utilisant la commutation des m_{i*} aux limites inductives filtrantes et les isomorphismes $m_{i*}f_* \simeq f_* m_{j*}$ (7.1.6), on obtient :

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{i} \mu_i^* (\varinjlim_{f:j\to i} f_* m_{j*}(M_j)).$$

Comme les foncteurs μ_i^* commutent aux limites inductives, il vient :

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{i} \varinjlim_{f:j\to i} \mu_i^* f_* m_{j*}(M_j).$$

Ce dernier objet peut être interprété comme une limite inductive sur la catégorie $\mathrm{Fl}(I)^\circ$ où $\mathrm{Fl}(I)$ est la catégorie des morphismes de I. Soit alors $\phi : I \to \mathrm{Fl}(I)$ le foncteur qui associe à tout objet i de I le morphisme identique de I. Le foncteur $\phi^\circ : I^\circ \to \mathrm{Fl}(I^\circ)$ est cofinal et par suite (I 8.1) on a un isomorphisme canonique

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* m_{j*}(M_j).$$

Corollaire 8.5.10. Sous les conditions de 8.5.9, pour tout objet i de I et tout objet M_i de F_i, on a un isomorphisme canonique

(8.5.10.1) $$\underleftarrow{m}_* \mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mu_j^* m_{j*} f^*(M_i).$$

La démonstration est analogue à celle du corollaire 8.5.5.

Remarque 8.5.11. Rappelons que le foncteur image directe par un morphisme cohérent entre topos cohérents commute aux limites inductives filtrantes (5.1). Par suite les propositions 8.5.3 à 8.5.7 et 8.5.9, 8.5.10 s'appliquent lorsque les topos fibrés envisagés sont cohérents et les morphismes de topos fibrés envisagés sont cohérents.

8.6. $\mathscr{U}$-topos fibrés annelés.

8.6.1. On dit qu'un $\mathscr{U}$-topos fibré est annelé s'il est muni d'un faisceau d'anneaux
sur le site total (7.4.1). Soit $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré. Choisissons un biscindage **330**
(7.1.4). Il résulte de 7.4.7 que se donner un faisceau d'anneaux sur F revient à se donner, pour tout objet i de I, un anneau A_i de F_i, et pour tout morphisme $f : i \to j$, un morphisme $\phi_f : A_j \to f_* A_i$, la famille des ϕ_f étant soumise à des conditions de compatibilité explicitées dans loc. cit.. Les morphismes de topos $f_. : F_i \to F_j$ sont donc des morphismes de topos annelés (respectivement par A_i et A_j) (IV 11), et la structure annelé sur F et le choix des morphismes $f_.$ fournit un pseudo-foncteur de I dans la 2-catégorie des topos annelés. Réciproquement, lorsqu'on se donne un tel pseudo-foncteur, on peut reconstruire un $\mathscr{U}$-topos fibré annelé qui lui donne naissance.

8.6.2. On peut comme en 8.1, définir la notion de limite projective d'un $\mathscr{U}$-topos annelé $(F_i, A_i, i \in I)$. Nous supposerons que cette généralisation immédiate a été faite et nous appliquerons librement à cette situation le langage introduit dans 8.1. Lorsqu'elle existe, cette limite projective est un $\mathscr{U}$-topos annelé (H, B), et on a pour tout objet i de I des morphismes de topos annelés $\mu_i : (H, B) \to (F_i, A_i)$. Si le topos fibré F (non annelé) admet une limite projective $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i$, et si le système inductif d'anneaux $i \mapsto \mu_i^*(A_i)$ admet une limite inductive $\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^* A_i$ dans la catégorie des anneaux de $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i$ (ce qui est toujours le cas si I est petite) alors le topos annelé $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, \varinjlim_{I^\circ} \mu_i^* A_i)$ est de façon évidente une limite projective du topos fibré annelé considéré.

8.6.3. Les formules du numéro 8.5. établies pour les faisceaux d'ensembles sont valables pour les faisceaux abéliens. Elles sont aussi valables pour les faisceaux de modules, à condition d'interpréter les foncteurs images inverses qui y figurent comme des foncteurs images inverses au sens des faisceaux de modules (IV 1.1). Nous en laissons la vérification au lecteur.

8.6.4. Soit $(p : F \to I, A)$ un $\mathscr{U}$-topos fibré annelé sur une catégorie cofiltrante. On dit que $(p : F \to I, A)$ est $\mathscr{U}$-topos fibré annelé plat à droite (resp. à gauche) si pour tout morphisme $f : i \to j$, le morphisme $f_. : (F_i, A_i) \to (F_j, A_j)$ est un morphisme plat à droite (resp. à gauche) de topos annelés (V 1.8). Supposons I essentiellement petite.
Alors le morphisme de topos annelé $Q : (\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, (\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(A_i)) \to (\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F'), A)$ **331**
(8.5.1) est plat à droite (resp. à gauche), comme il résulte de la définition et de 8.5.2, et ceci est valable sans hypothèses de platitude sur les morphismes de transition $f_.$. Si on suppose de plus que $(p : F \to I, A)$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré annelé plat à droite (resp. à gauche), les morphismes $\mu_i : (\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, (\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^* A_i) \to (F_i, A_i)$ sont plats à droite (resp. à gauche). Ceci résulte de ce que l'image inverse d'un module plat est plat (V 1.7.1), et de ce qu'une limite inductive filtrante de Modules plats est un Module plat. On démontre par les mêmes arguments le fait suivant : Si $m : (F_i, A_i, i \in I) \to (G_i, A_i, i \in I)$ est un morphisme cartésien de $\mathscr{U}$-topos fibrés annelés sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite et si pour tout objet $i \in \mathrm{ob}(I)$, le morphisme m_i est plat à droite (resp. à gauche), alors le morphisme $\underleftarrow{m}$ déduit de m par passage à la limite projective est plat à droite (resp. à gauche).

8.7. Cohomologie des faisceaux d'une limite projective de topos.

8.7.1. Dans ce numéro, I désigne une petite catégorie cofiltrante, $(p : F \to I, A)$ et $(q : G \to I, B)$ deux $\mathscr{U}$-topos fibrés annelés, $m : (p : F \to I, A) \to (q : G \to I, B)$ un morphisme de U-topos fibrés annelés. On suppose que pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, les foncteurs dérivés $R^n f_*$, $n \in \mathbf{N}$, du foncteur $f_* : \mathrm{Mod}(F_i, A_i) \to \mathrm{Mod}(F_j, A_j)$

pour les modules, commutent aux limites inductives filtrantes, et que pour tout objet $i \in I$, les foncteurs dérivés $R^n m_{i*}$ du foncteur $m_{i*} : (F_i, A_i) \to (G_i, B_j)$ pour les modules[33] commutent aux limites inductives filtrantes. Rappelons que ces hypothèses sont satisfaites lorsque les catégories F_i, G_i $(i \in \mathrm{ob}(I))$ sont cohérentes et lorsque les morphismes $f. : F_i \to F_j, (f : i \to j \in F1(I))$ et $m_i : F_i \to G_i, (i \in I)$ sont cohérents (5.2). On utilise les notations de 8.5.1. De plus on note $\underrightarrow{A}$ (resp. $\underrightarrow{B}$) le faisceau $\varinjlim \mu_i^*(A_i)$ (resp. $\varinjlim \mu_i^*(B_i)$). Enfin pour les Modules, on utilise la notation μ_i^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation μ_i^* pour l'image inverse au sens des Modules (IV 11).

332 Lemme 8.7.2. Soit $j \mapsto M_j$ un A-Module injectif de Top(F). Alors $Q^*(j \mapsto M_j)$ est un A-Module acyclique pour $\underleftarrow{m}_*$ et pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, M_i est flasque.

Soient $i \in \mathrm{ob}(I)$ et e_i un objet final de F_i. Le U-topos fibré $F_{/e_i} \to I_{/i}$ est déduit de $F \to I$ par le changement de base $I_{/i} \to I$. Le faisceau $j \to M_j$ étant injectif est flasque (V 4.6). Sa restriction au topos localisé $F_{/e_i}$ est flasque (V 4.12). Le foncteur de restriction de $F_{/e_i}$ à F_i est un foncteur image directe par un morphisme de topos (7.4.12). Par suite, il transforme les Modules flasques en Modules flasques (V 5.2). Donc M_i est flasque.

Démontrons la première assertion du lemme. Posons $N' = Q^*(j \mapsto M_j)$. D'après (8.5.3.1)), on a, pour tout $i \in \mathrm{ob}(I$

$$\mu_{i*}(N') = \mu_{i*} Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} f_*(M_j).$$

En utilisant l'hypothèse (8.7.1), on voit que le faisceau N' possède la propriété suivante :

(P) Pour tout objet $i \in \mathrm{ob}(I)$, $\mu_{i*}(N')$ est m_{i*}-acyclique, et pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, $\mu_{i*}(N')$ est f_*-acyclique.

Il suffit de montrer que tout objet N' qui possède la propriété (P) est $\underleftarrow{m}_*$-acyclique. Comme les injectifs possèdent la propriété (P), il suffit de vérifier les deux propriétés suivantes (V 0.4) : Pour tout suite exacte $0 \to N' \to N'' \to 0$, où N' et N possèdent la propriété (P), (a) N'' possède la propriété (P) et (b) $m_*(N) \to m_*(N'')$ est un épimorphisme. La vérification de (a) est triviale. Vérifions (b). Posons $K = \mathrm{coker}(Q_*(N') \to Q_*(N))$ de sorte que K est la section $(i \mapsto K_i = \mathrm{coker}(\mu_{i*}(N') \to \mu_{i*}(N)))$. Pour tout $f : i \to j$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f_*\mu_{i*}(N') \arrow[r] & f_*\mu_{i*}(N) \arrow[r] & f_*(K_i) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{j*}(N') \arrow[r] \arrow[u] & \mu_{j*}(N) \arrow[r] \arrow[u] & K_j \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

333 Comme $\mu_{i*}(N')$ est f_*-acyclique, la suite horizontale du haut est exacte. Comme $i \mapsto \mu_{i*}(N')$ et $i \mapsto \mu_{i*}(N)$ sont des sections cartésiennes, les deux premiers morphismes verticaux sont des isomorphismes. Par suite le morphisme canonique $K_j \to f_*(K_i)$ est un isomorphisme et $i \mapsto K_i$ est une section cartésienne. Donc K est de la forme $Q_*(K')$, et les morphismes canoniques $Q_*(N) \to K$ et $K \to Q_*(N'')$ sont de la forme $Q_*(u)$ et $Q_*(v)$ respectivement, car Q_* est pleinement fidèle. Comme Q^* est exact et comme Q^*Q_* est isomorphe à l'identité, v est un isomorphisme et par suite $Q_*(v)$ est un isomorphisme. La suite $0 \to Q_*(N') \to Q_*(N) \to Q_*(N'') \to 0$ est donc exacte et par suite, pour tout objet i de I, la suite $0 \to \mu_{i*}(N) \to \mu_{i*}(N') \to \mu_{i*}(N'') \to 0$ est exacte. Comme $\mu_{i*}(N')$ est m_{i*}-acyclique, la suite $0 \to m_{i*}\mu_{i*}(N') \to m_{i*}\mu_{i*}(N) \to m_{i*}\mu_{i*}(N'') \to 0$ est exacts.

[33]Pour fixer les idées nous prendrons les modules à gauche.

De plus on a un isomorphisme $\underleftarrow{m}_* \simeq \varprojlim_{I^\circ} \mu_j^{-1} m_{j*}\mu_{j*}$ (8.5.8.2). Le foncteur μ_j^{-1} est exact et les limites inductives filtrantes sont exactes. Donc la suite $0 \to \underleftarrow{m}_*(N') \to \underleftarrow{m}_*(N) \to \underleftarrow{m}_*(N'') \to 0$ est exacte.

Théorème 8.7.3. Les notations et hypothèses sont celles de 8.7.1. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, le foncteur dérivé $R^n\underleftarrow{m}_*$ commute aux limites inductives filtrantes, et on a un isomorphisme fonctoriel pour tout A-Module $j \mapsto M_j$:

(8.7.3.1) $$R^n\underleftarrow{m}_* Q^*(j \longrightarrow M_j) \sim \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* R^n m_{j*}(M_j).$$

On a $Q^{-1}(A) = \underrightarrow{A}$, et par suite l'image réciproque pour les Modules est isomorphe à l'image réciproque pour les faisceaux abéliens. On en déduit par 8.5.8.2 que pour toute section $j \mapsto M_j$, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1}(M_j) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^*(M_j)$. De plus, sous les hypothèses de 8.7.1, on a un isomorphisme canonique (8.5.9.1) $\underleftarrow{m}_* Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1} m_{j*}(M_j)$. Comme pour tout injectif $j \mapsto M_j$, les M_j sont flasques et $Q^*(j \to M_j)$ est acyclique pour $\underleftarrow{m}_*$ (8.7.2), on a un isomorphisme $R^n\underleftarrow{m}_*(Q^*(j \mapsto M_j)) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1} R^n m_{j*}(M_j)$, d'où la formule (8.7.3.1) en utilisant ce qui précède. La première assertion résulte immédiatement de la formule (8.7.3.1).

Corollaire 8.7.4. On a des isomorphismes fonctoriels pour $n \in \mathbf{Z}$: 334

(8.7.4.1) $$R^n\underleftarrow{m}_*(N) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* R^n m_{j*}\mu_{j*}(N)).$$

En effet N est isomorphe à $Q^*(j \mapsto \mu_{j*}(N))$.

Corollaire 8.7.5. Pour tout objet i de I, pour entier n et tout A_i-Module M_i, on a un isomorphisme fonctoriel

(8.7.5.1) $$R^n\underleftarrow{m}_* \mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mu_j^* R^n m_{j*} f^*(M_i).$$

Quitte à faire le changement de base $I_{/i} \to I$, on peut supposer que i est un objet final de I (8.2.1). L'objet $\mu_i^*(M_i)$ est alors isomorphe à $Q^*(f : j \to i) \mapsto f^*(M_i))$ (cf. 8.5.5).

Corollaire 8.7.6. Soit i un objet de I et n un entier. On a un isomorphisme fonctoriel en la section $j \mapsto M_j$:

(8.7.6.1) $$R^n m_{i*} Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} R^n f_*(M_j).$$

On a un isomorphisme en le $\underrightarrow{A}$-Module N :

(8.7.6.2) $$R^n \mu_{i*}(N) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} R^n f_* \mu_{j*}(N)).$$

On a un isomorphisme fonctoriel en le A_i-Module M_i :

(8.7.6.3) $$R^n \mu_{i*}\mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} R^n f_* f_*(M_i)).$$

Les foncteurs $R^n\mu_{i*}$ commutent aux limites inductives filtrantes.

En faisant le changement de base $I_{/i} \to I$ on se ramène au cas où i est un objet final de I. Les formules (8.7.6.1)) et ((8.7.6.2) sont alors des cas particuliers des formules (8.7.3.1)), ((8.7.4.1) et (8.7.5.1), respectivement obtenus en prenant pour G le topos fibré constant de fibre F_i et pour morphisme m le morphisme $(f_\cdot, f \in \mathrm{ob}(I_{/i}))$. La dernière assertion résulte de (8.7.6.2) compte tenu de (8.5.4).

335 Corollaire 8.7.7. Soient i un objet de I, X un objet de F_i tel que les foncteurs $H^n(X, -)$, $n \in \mathbf{N}$, commutent aux limites inductives filtrantes. On a pour tout n un isomorphisme canonique fonctoriel en le A_i-Module M_i :

$$H^n(\mu_i^*(X), \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} H^n(f^*(X), f^*(M_i)) \tag{8.7.7.1}$$

et les foncteurs $H^n(\mu_i^*(X), -)$ commutent aux limites inductives filtrantes. En particulier si les foncteurs $H^n(F_i, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes, les foncteurs $H^n(\underleftarrow{F}, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes, et on a des isomorphismes canoniques, fonctoriels en les A_i-Modules M_i

$$H^n(\underleftarrow{F}, \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} H^n(F_j, f^*(M_i)). \tag{8.7.7.2}$$

Il résulte de (V 5.3) qu'on a deux suites spectrales

$$'E_2^{p,q} = \varinjlim_{f:j\to i} H^p(X, R^q f_* f^*(M_i)) \Rightarrow \varinjlim_{f:j\to i} H^{p+q}(f^*(X), f^*(M_i))$$
$$''E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \mu_{i*}\mu_i^*(M_i)) \Rightarrow H^{p+q}(\mu_i^*(X), \mu_i^*(M_i)),$$

et de (8.5.7.1) qu'on a un morphisme entre ces deux suites spectrales. Comme les $H^{p+q}(X, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes, il résulte de (8.7.6.2) que ce morphisme de suites spectrales est un isomorphisme au niveau des $E_2^{p,q}$. Par suite il induit un isomorphisme sur les aboutissements, d'où (8.7.7.1). Pour tout $\underrightarrow{A}$-Module N, on a une suite spectrale (V 5.3).

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \mu_{i*}(N)) \Rightarrow H^{p+q}(\mu_i^*(X), N).$$

La condition aux limites inductives filtrantes des foncteurs $H^n(\mu_i^*(X, -))$ résulte alors des propriétés analogues des foncteurs $H^n(X, -)$ et $R^n\mu_{i*}$ (8.7.6).

Remarque 8.7.8. Lorsque les topos F_j, $j \in \mathrm{ob}(I)$ sont cohérents et lorsque les morphismes de transition sont cohérents, l'hypothèse faite sur X (resp. F_i) dans 8.6.7 est satisfaite lorsque X (resp. F_i) est cohérent (5.2). On sait d'ailleurs que dans ce cas $\mu_i^*(X)$ (resp. $\underleftarrow{F}$) est cohérent (8.3.13).

336 Corollaire 8.7.9. Soient i un objet I, M_i un A_i-Module à gauche, L_i un A_i-Module à droite possédant la résolution du type :

$$P_{i,k} \longrightarrow P_{i,k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{i,0} \longrightarrow L_i \longrightarrow 0$$

où, pour tout entier k, $P_{i,k}$ est isomorphe à une somme directe finie d'objets de la forme $A_{i|X}$ (IV 11.3.3), où X vérifie les hypothèses de 8.7.7. Si, outre les hypothèses de 8.7.1, le topos fibré F est plat à droite (8.6), on a des isomorphismes canoniques, pour $n \leq k$-1 :

$$\mathrm{Ext}^n_{\underrightarrow{A}}(\underleftarrow{F}), \mu_i^*(L_i), \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mathrm{Ext}^n_{A_j}(F_j, f^*(L_i), f^*(M_i)). \tag{8.7.9.1}$$

Notons $P_{i,.}$ la résolution de L_i. Comme F est plat à droite, pour tout $f : j \to i$, $f^*(P_{i,.})$ est une résolution de $f^*(L_i)$ et $\mu_i^*(P_{i,.})$ est une résolution de $\mu_i^*(L_i)$ (8.6). Ces résolutions permettent de construite deux suites spectrales qui convergent respectivement vers les deux membres de (8.7.9.1), et un morphisme entre ces deux suites spectrales. Au niveau des $E_1^{p,q}$ ce morphisme est un isomorphisme (8.7.7.1). Il induit donc un isomorphisme sur les aboutissements.

9. Appendice. Critère d'existence de points

par P. Deligne

Proposition 9.0. Tout topos localement cohérent S a assez de points.

La question étant locale sur S, on peut supposer le topos S défini par un site $\mathcal{S}$, dans lequel est limites projectives finies sont représentables et tel que tout recouvrement $f_i : U_i \to U$ admette un sous-recouvrement fini. Il suffit de prouver que si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ n'est pas un monomorphisme, alors, il existe un point x de $\mathcal{S}$ tel que f_x ne soit pas injectif. Par hypothèse, il existe $u \in \operatorname{ob} \mathcal{S}$ et s, $s' \in \mathcal{F}(U)$ tels que $s \neq s'$ et $f(s) = f(s')$. Remplaçant $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}/U$, on se ramène au

Lemme 9.1. Si s et s' sont deux sections globales distinctes d'un faisceau $\mathfrak{F}$ sur un site $\mathcal{S}$ vérifiant les hypothèses précédentes, alors, il existe un point x de $\mathcal{S}$ tel que $s_x \neq s'_x$. **337**

Soit $P = (U_i)_{i \in I}$ un système projectif dans $\mathcal{S}$, indexé par un ensemble ordonné filtrant I. Pour tout faisceau $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{S}$, on pose $P(\mathcal{H}) = \varinjlim \mathcal{H}(U_i)$, et pour tout $V \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}$, on pose $P(V) = \varinjlim \operatorname{Hom}(U_i, V)$. Les foncteurs $P(\mathcal{H})$ et $P(V)$ commutent aux produits fibrés. Si le foncteur $P(V)$ transforme les recouvrements en familles surjectives de fonctions, c'est un morphisme de sites du topos ponctuel dans $\mathcal{S}$, et $P(\mathcal{H})$ est le foncteur fibre correspondant.

Si $P = (U_i)_{i \in I}$ et $Q = (V_j)_{j \in J}$ sont deux systèmes projectifs dans $\mathcal{S}$, on dit que Q raffine P si I est une partie de J munie de l'ordre induit et si P est la restriction de Q à J. On dispose alors de morphismes de foncteurs de $P(\mathcal{H})$ dans $Q(\mathcal{H})$ et de $P(V)$ dans $Q(V)$.

Quel que soit P comme plus haut, on notera s_p et s'_p les images dans $P(\mathcal{F})$ de s et s'. Le lemme 9.1 résulte du lemme suivant, dans lequel on prend pour P le système projectif indexé par $\{0\}$ et réduit à l'objet final de $\mathcal{S}$.

Lemme 9.2. Quel que soit P comme plus haut vérifiant $s_p \neq s'_p$, il existe Q raffinant P, vérifiant $s_q \neq s'_p$, et tel que, quels que soient le recouvrement $f_i : V_i \to V$ et $f \in Q(V)$, f soit dans l'image d'un des $Q(V_i)$.

On prouvera tout d'abord :

Lemme 9.3. Soient $P = (U_i)_{i \in I}$ vérifiant les hypothèses du lemme 9.2, $f_i : V_i \to V$ un recouvrement fini dans $\mathcal{S}$, et $f \in P(V)$. Il existe Q raffinant P, vérifiant $s_Q \neq s'_Q$ et tel que l'image de f dans $Q(V)$ soit dans l'image de l'un des (V_i).

Il existe $i_\circ \in I$ et $f' \in \operatorname{Hom}(U_{i_\circ}, V)$ qui définissent f. Pour $i \geq i_\circ$, posons $U_{i,k} = U_i \times_V V_k$, ce produit fibré étant défini par f'. On sait que (V_k) est un recouvrement de V, donc que $U_{i,k}$ est un recouvrement de U_i ; la flèche suivante sera injective (pour $i > i_\circ$) :

$$\mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_k \mathcal{F}(U_{i,k})$$

Passant à la limite, compte tenu de ce que les produits finis commutent aux limites in- **338** ductives filtrantes, on voit que

$$P(\mathscr{F}) \longrightarrow \prod_k \varinjlim \mathscr{F}(U_{i,k})$$

est injectif, donc qu'il existe k tel que s_p et s'_p aient des images distinctes dans $\varinjlim_{i>i_\circ} \mathscr{F}(U_{i,k})$. Soit alors $I_\circ = \{i | i \geq i_\circ \text{ et } i \in I\}$, et $J = I \coprod I_\circ$. On ordonne J en disant que $j' \leq j''$ si les images de j' et j'' dans I satisfont à $j' \leq j''$ et si on n's pas $j' \in I_\circ$, $j'' \in I$. Les U_i et $U_{i,k}$ sont indexés par J, et forment un raffinement Q de P, tel que $s_Q \neq s'_Q$, et que l'image de f dans $Q(V)$ soit dans l'image de $Q(V_k)$.

Lemme 9.4. Soit $P = (U_i)_{i\in I}$ vérifiant les hypothèses du lemme 9.2. Il existe Q raffinant P, tel que $s_Q \neq s'_Q$, et tel que pour tout recouvrement fini (V_k) d'un ouvert V de S, et tout $f \in P(V)$, l'image de f dans $Q(V)$ soit dans l'image de l'un des $Q(V_k)$.

Soit E l'ensemble des triples formés d'un ouvert V de S, d'un recouvrement fini (V_k) de V et de $f \in P(V)$. Soient $\leq$ un bon ordre sur E et $\overline{E}$ l'ensemble déduit de E par adjonction d'un plus grand élément, noté ∞. On va définir par récurrence transfinie sur $e \in \overline{E}$ des raffinements Q_e de P, vérifiant $s_{Q_e} \neq s'_{Q_e}$ et tels que

(i) si $e' \leq e$, alors Q_e raffine $Q_{e'}$.
(ii) si $e = (V, (V_k), f)$, alors l'image de f sans $Q_e(V)$ se trouve dans l'images de l'un des $Q_e(V_k)$.

Supposons les $Q_{e'}$ déjà définis pour $e' < e$. Si e est le premier élément de E, posons $Q'_e = P$. Si e a un prédécesseur $e - 1$, posons $Q'_e = Q_{e-1}$. Sinon, soit Q'_e le système projectif d'ensemble d'indices $\cup_{e'<e} I_{e'}$ qui raffine les $Q_{e'}$ pour $e' < e$. Dans ce cas, on a

$$Q'_e(\mathscr{F}) = \varinjlim_{e'<e} Q_{e'}(\mathscr{F})$$

339 de sorte que, dans tous les cas, Q'_e raffine les $Q_{e'}$ pour $e' < e$ et vérifie $s_{Q'_q} \neq s'_{Q'_e}$.

On obtient le système projectif Q_e requis en appliquant le lemme 9.3 à $Q_{e'}$ et à $e = (V, (V_k), f)$ (resp. en prenant $Q_e = Q'_e$ si $e = \infty$).

Le système projectif Q_∞ vérifie le lemme 9.4.

Le lemme 9.4. permet de définir, par récurrence sur n, une suite $Q_n = (U_i)_{i\in I_n}$ de systèmes projectifs dans $\mathscr{S}$ telle que

(i) $Q_\circ = P$
(ii) Q_{n+1} raffine Q_n
(iii) $s_{Q_n} \neq s'_{Q^n}$
(iv) Quels que soient le recouvrement $f_k : V_k \to V$ et $f \in Q_n(V)$, l'image de f dans $Q_{n+1}(V)$ se trouve dans l'image de l'un des $Q_{n+1}(V_k)$.

Le système projectif Q, d'ensemble d'indices la réunion des I_n, qui prolonge les différents Q_n, vérifie alors le lemme 9.2. La démonstration montre de plus que :

Corollaire 9.5. Soit $\mathscr{S}$ un site, dans lequel les produits fibrés sont représentables et tel que tout recouvrement dans $\mathscr{S}$ admette un sous-recouvrement fini. Soit e le cardinal sup($)_\circ$, card(Fl $\mathscr{S}$)). Alors il existe un ensemble très dense de points de $\mathscr{S}$, tel que

(i) $\operatorname{card}(X) \leq 2^c$
(ii) si $x \in X$ et $U \in \operatorname{Ob} \mathscr{S}$, alors $\operatorname{card}(U_x) \leq c$.

Bibliographie

340

[1] P.Gabriel et M.Zisman : Homotopy Theory and Calculus of Fraction, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.

[2] J. Giraud : Méthode de la descente. Mémoire de la S.M.F.

[3] A. Grothendieck et J. Dieudonne : Eléments de Géométrie Algébrique I, 2ème édition.

[4] A. Grothendieck et J. Dieudonne : Eléments de Géométrie Algébrique IV I, I.H.E.S. n°

[5] SGA . 1 VI, par A. Grothendieck, I.H.E.S.

[6] SGA . 3 IV 6.3 par M. Demazure, Lecture Notes n°, Springer Verlag.

[7] A. Grothendieck : Sur quelques points d'algèbres homologiques, Tohoku Math. J.

EXPOSÉ VII

Site et topos étales d'un schéma

A. Grothendieck

Dans le présent exposé et le suivant, nous développons les propriétés les plus élémentaires relatives à la topologie et la cohomologie étales. Les développements du présent exposé concernent certaines propriétés valables pour l'essentiel pour d'autres topologies très différentes, telle la « topologie fppf ». Dans l'exposé suivant seront développées des propriétés assez spéciales à la topologie étale, tenant à la nature très particulière des morphismes étales. 342

Nous suivons partiellement ici trois exposés oraux de J.E. Roos (qui n'avaient pu être rédigés par lui), notamment dans la démonstration, de VIII 6.3.

Sauf mention expresse du contraire, il sera sous-entendu que les schémas envisagés dans le présent exposé er les suivants sont éléments de l'univers fixé $\mathscr{U}$.

1. La topologie étale

1.1. Nous désignerons par (Sch) la catégorie des schémas (éléments de l'Univers fixé $\mathscr{U}$). Rappelons qu'un morphisme $f : X \to Y$ dans (Sch) est dit étale s'il est localement 343
de présentation finie, plat, et si pour tout $y \in Y$, la fibre X_y est discrète, et ses anneaux locaux sont des extensions finies séparables de $k(y)$. Il revient au même de dire que f est localement de présentation finie, et que pour tout Y - schéma Y' qui est affine (au sens absolu) et pour tout sous-schéma Y'_0 défini par un Idéal nilpotent, l'application

$$\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$$

est bijective. Pour les propriétés les plus importantes de cette notion, je renvoie à EGA IV § § 17 et 18, et en attendant à SGA 1 I et IV.

1.2. On appelle topologie étale sur (Sch) la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle, pour tout $X \in$ (Sch), l'ensemble Cov X est formé des familles $(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$ (indexées par un $I \in U$), telles que les u_i soient étales et $X = \bigcup_i u_i(X_i)$ (au sens ensembliste).

Il est commode d'associer à tout X la sous-catégorie $\mathrm{Et}_{/X}$ de $(\mathrm{Sch})_{/X}$ formée des flèches $X' \to X$ qui sont étales. On la munira de la « topologie induite » (III) par la topologie étale de (Sch), (appelée encore « topologie étale sur X ») et on désignera par $X_{\text{ét}}$ le site ainsi obtenu (« site étale » de X) [33]. Notons que tout morphisme de $\mathrm{Et}_{/X}$ est étale (SGA 1 I 4.8), d'où s'ensuit qu'une famille $(X'_i \xrightarrow{u_i} X')_{i\in I}$ dans $X_{\text{ét}}$ est couvrante si et seulement si elle est surjective i.e. $\bigcup_i u_i(X'_i) = X'$. On voit aussitôt (cf. 3.1) que $X_{\text{ét}}$ est un $\mathscr{U}$-site donc les résultats des Exp. I à VI sont applicables. Le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ des U-faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ est le topos étale de X.

1.3. Pour la suite, sauf mention expresse du contraire, toutes les notions topolo- 344

[33] Notons cependant qu'il serait préférable de désigner par $X_{\text{ét}}$ le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ défini par le site étale de X. Pour des raisons pratiques, nous nous en tiendrons dans ce Séminaire aux notations introduites ici (qui sont celles du séminaire primitif).

giques que nous envisagerons dans $\mathrm{Et}_{/X}$ ou (Sch), s'entendent au sens de la topologie étale. D'ailleurs, dans le langage et les notations, on écrira couramment X au lieu de $X_{\text{ét}}$ ou $Et_{/X}$. Ainsi, on appellera « faisceau sur X » (sous-entendu : pour la topologie étale) un faisceau sur le site $X_{\text{ét}}$. On désignera par $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ la catégorie de ces faisceaux, qui est un $\mathscr{U}$-topos. Si F est un faisceau abélien sur X, on désignera par $H^i(X, F)$ ses groupes de cohomologie, qui seraient notés $H^i(X_{\text{ét}}, F)$ dans Exp. V.

1.4. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Alors le foncteur image inverse

$$f^* : Y' \mapsto Y' \times_Y X$$

induit un foncteur

$$(*) \qquad f^*_{\text{ét}} : \mathrm{Et}_{/Y} \longrightarrow \mathrm{Et}_{/X}$$

qui commute aux $\varprojlim$ finies et transforme familles couvrantes en familles couvrantes ; c'est par suite un morphisme de sites

$$f^*_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}},$$

induisant donc un foncteur sur la catégorie des faisceaux :

$$f^{\text{ét}}_* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{Y_{\text{ét}}}$$

par

$$f^{\text{ét}}_*(F) = F \circ f^*_{\text{ét}}.$$

De plus $f^{\text{ét}}_*$ admet un adjoint à gauche

$$f^*_{\text{ét}} : \widetilde{Y_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

345 prolongeant celui envisagé dans $(*)$, et commutant aux $\varinjlim$ quelconques et aux $\varprojlim$ finies i.e. $f^*_{\text{ét}}$ définit un morphisme de topos

$$f_{\text{ét}} : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{Y_{\text{ét}}}.$$

Évidemment, pour un composé de deux morphisme de schémas

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{cases} (gf)^{\text{ét}}_* \simeq g^{\text{ét}}_* f^{\text{ét}}_* & , \quad \text{d'où} \\ (gf)^*_{\text{ét}} \simeq f^*_{\text{ét}} g^*_{\text{ét}} & , \quad \text{i.e. on a un isomorphisme} \\ (gf)_{\text{ét}} \simeq g_{\text{ét}} f_{\text{ét}} & , \end{cases}$$

(de sorte qu'on obtient un « pseudo-foncteur » (SGA 1 VI 8) de la catégorie (Sch) dans la catégorie (Top) des topos $\in \mathscr{U}'$, où $\mathscr{U}'$ est le plus petit univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{U}'$; comparer IV).

1.5. Notations. Dans la suite nous écrirons souvent f^*, f_* au lieu de $f^*_{\text{ét}}$, $f^{\text{ét}}_*$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, les foncteurs $R^i f^{\text{ét}}_*$ seront donc simplement notés $R^i f_*$. Rappelons avec ces notations la suite spectrale de Leray pour f, et un faisceau abélien F sur X (V 5) :

$$H^*(X, F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(F)).$$

De même si l'on a deux morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a une suite spectrale de Leray (suite spectrale de foncteurs composés)

$$R^*(gf)_*(F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = R^p g_*(R^q f_*(F)).$$

1.6. Lorsque $f : X \to Y$ est lui-même un morphisme étale, on peut considérer X comme objet de $Y_{\text{ét}}$, et on a un isomorphisme de sites canonique 346

$$X_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} (Y_{\text{ét}})_{/X}.$$

Moyennant cet isomorphisme, la foncteur $f^*_{\text{ét}} : Y' \mapsto Y' \times_Y X$ de $(*)$ s'identifie au foncteur changement de base interne dans la catégorie $\mathrm{Et}_{/Y}$. Il s'ensuit que le foncteur

$$f^* : \widetilde{Y_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

est alors isomorphe au foncteur « restriction à Y »

$$f^*(F) \simeq F \circ i_{X/Y},$$

où F est un faisceau sur $Y_{\text{ét}}$, et $i_{X/Y} = X_{\text{ét}} \to Y_{\text{ét}}$ est le foncteur évident (consistant à regarder un schéma étale sur X, $u : X' \to X$, comme un schéma étale sur Y par $fu : X' \to Y$).

1.7. Questions d'Univers. On notera que si $X \neq \varnothing$, alors $X_{\text{ét}}$ n'est pas élément de l'univers choisi $\mathcal{U}$. Cependant, comme nous avons signalé, on voit facilement (3.1) que l'on peut trouver une sous-catégorie pleine C de $X_{\text{ét}}$, élément de $\mathcal{U}$, satisfaisant aux conditions du « lemme de comparaison » (III), de sorte que le foncteur restriction induise une équivalence $\widetilde{C} \to \widetilde{X_{\text{ét}}}$. Ainsi, le topos étale est équivalent à un topos défini en termes d'un site $C \in \mathcal{U}$. En d'autres termes, $X_{\text{ét}}$ est un U-site donc en vertu de loc. cit. les résultats des Exposés I à VI sont applicables à ce site.

2. Exemples de faisceaux

347

a) Soit $F \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch})_{/X}$ un schéma sur X, et pour tout X' sur X, posons

$$F(X') = \mathrm{Hom}_X(X', F).$$

Le foncteur $(\mathrm{Sch})^{\circ}_{/X} \to (\mathrm{Ens})$ ainsi défini est un faisceau pour la topologie étale (et même pour la topologie plus fine fpqc étudiée dans SGA 3 IV). En d'autres termes la topologie étale sur (Sch) est moins fine que la topologie canonique. C'est en effet, essentiellement, le contenu de SGA 1 VIII 5.1 (cf. aussi SGA 3 IV 6.3.1). A fortiori, la restriction de ce faisceau à $X_{\text{ét}}$ est un faisceau. On le désignera encore par F, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre [33]. Noter aussi que le foncteur ainsi obtenu

$$(\mathrm{Sch})_{/X} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}} \qquad (*)$$

commute aux $\varprojlim$ finies (c'est trivial). Cela implique par exemple que lorsque F est un schéma en groupes (resp. ...) sur X, alors le faisceau qu'il définit est un faisceau en groupes (resp. ...). Notons que le foncteur $\mathrm{Et}_{/X} \to \widetilde{X_{\text{ét}}}$ induit par (*) n'est autre que le foncteur canonique, associant à tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{X_{\text{ét}}}$ le foncteur sur $X_{\text{ét}}$ qu'il représente. C'est donc un isomorphisme de la catégorie $\mathrm{Et}_{/X}$ sur une sous-catégorie pleine du topos étale $\widetilde{X_{\text{ét}}}$, par laquelle nous identifions généralement un $X \in \mathrm{Ob}\,X_{\text{ét}}$ au faisceau correspondant, qui sera noté $\widetilde{X}$ ou simplement X.

Évidemment on aura $H^{\circ}(X, F) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch})_{/X}}(X, F)$.

[33] Mais on fera attention que si $X \neq \varnothing$, le foncteur φ qui a $F \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch})_{/X}$ associe le faisceau correspondant $\varphi(F)$ n'est *pas* pleinement fidèle, ni même fidèle, et qu'on ne peut reconstituer F (mod. isom.) connaissant $\varphi(F)$. Par exemple ; si $S = \mathrm{Spec}\,k$, k corps alg. clos, la connaissance de $\varphi(F)$ équivaut à celle de l'ensemble sous-jacent à F seulement (en vertu de VIII 2.4). Comparer IV

Donnons également une interprétation de $H^1(X, F)$ lorsque F est un pré-
348 schéma en groupes sur X (commutatif si l'on veut, de sorte que la définition de $H^1(X, F)$ relève de Exp. V ; pour le cas général on pourra consulter la thèse de J. Giraud [33]). Alors des raisonnements bien connus, que je me dispense de répéter ici, montrent que $H^1(X, F)$ est canoniquement isomorphe au groupe des classes (mod. isomorphisme) de faisceaux d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ principaux homogènes sous F[33]. Lorsque F est affine sur X, alors SGA 1 VIII 2.1 implique (toujours par des arguments standards, cf. thèse de J. Giraud) que $H^1(X, F)$ est aussi le groupe des classes de schémas P sur X, sur lesquels F opère à droite et qui sont « fibrés principaux homogènes sur X au sens de la topologie étale » i.e. localement triviaux dans le sens de la topologie étale [33].

Remarques 2.1. On fera attention que si l'on désigne, pour tout schéma Z sur X, par $\varphi_X(Z)$ le faisceau associé sur $X_{\text{ét}}$, et si $f : Y \to X$ est un morphisme de schéma, on a un homomorphisme évident (fonctoriel en Z)

$$(*) \qquad f^*(\varphi_X(Z)) \longrightarrow \varphi_Y(Z_Y), \quad Z_y = Z \times_X Y,$$

i.e. un homomorphisme évident

$$\varphi_X(Z) \longrightarrow f_*(\varphi_Y(Z_Y)),$$

savoir l'homomorphisme fonctoriel en $X' \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}}$

$$\operatorname{Hom}_X(X', Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}_Y(X'_Y, Z_Y).$$

Mais on fera attention qu'en général $(*)$ n'est pas un isomorphisme, i.e. la formation du faisceau étale associé à un schéma relatif ne commute pas aux foncteurs images inverses. Cependant $(*)$ est un isomorphisme dans le cas particulier où Z est étale sur X. De
349 même, le foncteur

$$\varphi_X : \mathrm{Sch}_{/X} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

n'est pas fidèle si $X \neq \varnothing$ [33] ; cependant sa restriction à $X_{\text{ét}}$, qui n'est autre que le foncteur canonique $X_{\text{ét}} \to \widetilde{X_{\text{ét}}}$, est pleinement fidèle, car en vertu de a) la topologie de $X_{\text{ét}}$ est moins fine que sa topologie canonique.

b) Notons que $(*)$ commute également aux sommes directes indexées par les $I \in \mathscr{U}$, comme on vérifie facilement. En particulier, si pour tout ensemble I, on désigne par I_X le X schéma constant défini par I (SGA 3 I 1.8), somme directe de I copies de X, alors le faisceau associé n'est autre que le faisceau constant $I_{X_{\text{ét}}}$ (somme directe de I copies du faisceau final sur $X_{\text{ét}}$). Comme le foncteur $I \mapsto I_X$ commute également aux $\varprojlim$ finies, on voit qu'il transforme groupe en groupe, groupe commutatif en groupe commutatif etc. Si G est un groupe commutatif ordinaire, on écrira simplement $H^i(X, G)$ au lieu de $H^i(X, G_X)$. Supposons, par exemple, que G soit un groupe fini, alors G_X est fini donc affine sur X, donc en utilisant la remarque finale de a) on obtient une interprétation de $H^1(X, G)$ comme l'ensemble des classes de revêtements principaux galoisiens de groupe G (SGA 1 V 2.7). Lorsque X est connexe et muni d'un point géométrique a,

33

[33]ou F-torseurs dans la terminologie de *loc. cit.*.

[33]ou *F-torseurs représentables* dans la terminologie maintenant reçue

[33]Cf. pour ceci la note au bas de la page (page 6)

alors en termes du « groupes fondamental » $\pi_1(X, a)$ (SGA 1 V 7) on obtient l'isomorphisme canonique

$$(**) \qquad H^1(X, G) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X, a), G),$$

(où on a supposé G commutatif).

On peut dire qu'en passant de la cohomologie de Zariski à la topologie étale, « on a fait ce qu'il fallait » pour obtenir « le bon » H^1 (qui figure au 2ème membre de $(*)$) pour un groupe de coefficients constant fini G. C'est un fait remarquable, qui sera démontré par la suite de ce séminaire, que cela suffit également pour trouver les « bons » $H^i(X, G)$ pour tout groupe de coefficients de torsion (du moins si G est premier aux caractéristiques résiduelles de X). **350**

c) Soit F un $\mathcal{O}_X$-Module sur X, au sens de la topologie de Zariski. Alors (avec les notations de SGA 3 I 4.6) on définit un foncteur

$$W(F) : (\mathrm{Sch})^{\circ}_{/X} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

par

$$W(F)(X') = \Gamma(X', F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}).$$

Ce foncteur est encore un faisceau pour la topologie étale (et même pour la topologie fpqc) comme il résulte encore de SGA 1 VIII 1.6 et SGA 3 IV 6.3.1. A fortiori, la restriction de $W(F)$ à $X_{\text{ét}}$ est encore un faisceau, qu'on notera encore $W(F)$. Par définition on aura donc $H^{\circ}(X, W(F)) = \Gamma(F) = H^{\circ}(X, F)$. Mais on a mieux si F est quasi-cohérent, cf. 4.3

3. Générateurs du topos étale. Cohomologie d'une $\varinjlim$ de faisceaux

Proposition 3.1. Soient X un schéma, C une sous-catégorie pleine de $X_{\text{ét}}$, telle que pour tout X' étale sur X qui est affine, C contienne un objet isomorphe à X'. Alors C est une « famille de générateurs topologiques » du site $X_{\text{ét}}$ donc une famille de générateurs du topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$, et le foncteur restriction $\widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{C}$ est une équivalence de catégories (où C est muni de la topologie induite par celle de $X_{\text{ét}}$).

Trivial à l'aide du « lemme de comparaison ». **351**

Corollaire 3.2. Supposons que X soit quasi séparé. Appelons site étale restreint de X la sous-catégorie pleine C de $X_{\text{ét}}$ formée des schémas étales sur X qui sont de présentation finie sur X, munie de la topologie induite par $X_{\text{ét}}$. Alors :

(i) C est stables par produits fibrés, et est un site de type fini si X est quasi-compact.
(ii) Le foncteur restriction $\widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{C}$ est une équivalence de catégories.

L'assertion (i) est triviale, et (ii) résulte de 3.1 car C satisfait à la condition de 3.1 grâce au fait que X est quasi-séparé, qui implique que si X' est quasi-compact, par exemple affine, il est quasi-compact sur X (EGA IV 1.2.4, où on fait $Z = \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$), donc de présentation finie sur X si X' est localement de type fini sur X.

Proposition 3.3. Supposons X quasi-compact et quasi-séparé. Alors les foncteurs $H^q(X_{\text{ét}}, F)$ sur la catégorie des faisceaux abéliens sur $X_{\text{ét}}$ commutent aux $\varinjlim$.

En effet, on peut remplacer $X_{\text{ét}}$ par C en vertu de 3.2 (ii), or comme X est quasi-compact on a $X \in \mathrm{Ob}\,C$, et la conclusion résulte de 3.2 (i) et VI 6.1.2 (3) .

4. Comparaison avec d'autres topologies

4.0. Tout d'abord notons que les exemples de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ considérés au N° 2 sont en fait de façon naturelle des restrictions de faisceaux définis sur $(\mathrm{Sch})_{/X}$ muni de **352**
sa topologie étale (ou même de la topologie fpqc). Soit de façon générale

$$u^* : X_{\text{ét}} \longrightarrow (\mathrm{Sch})_{/X}$$

le foncteur d'inclusion, qui est continu (III) et commute aux $\varprojlim$ finies, donc définit un morphisme de sites

$$u : (\mathrm{Sch})_{/X} \longrightarrow X_{\text{ét}},$$

d'où un foncteur

$$u_* : \widetilde{(\mathrm{Sch})}_{/X} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

sur les catégories de faisceaux associées :

$$u_*(F) \longrightarrow F \circ u,$$

et un foncteur adjoint à gauche[33] de ce dernier

$$u^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sch}}_{/X}$$

Ceci posé :

Proposition 4.1. (i) Le foncteur u^* est pleinement fidèle, donc pour tout faisceau G sur $X_{\text{ét}}$, l'homomorphisme canonique $G \mapsto u_*u^*(G)$ est un isomorphisme.

(ii) Soient G (resp. F) un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$ (resp. $(\mathrm{Sch})_{/X}$). Alors les homomorphismes canoniques (définis par exemple comme edge-homomorphismes de
353 la suite spectrales de Leray suivants sont des isomorphismes :

$$H^*(X_{\text{ét}}, F \circ u) \xrightarrow{\sim} H^*((\mathrm{Sch})_{/X}, F)$$
$$H^*(X_{\text{ét}}, F \circ u) \xrightarrow{\sim} H^*((\mathrm{Sch})_{/X}, F).$$

En effet, le foncteur u est un comorphisme et on peut alors appliquer (III).

Ainsi, (i) montre que pour l'étude de la cohomologie des faisceaux, il est essentiellement équivalent de travailler avec le « petit » site étale $X_{\text{ét}}$, ou le « gros » site étale $(\mathrm{Sch})_{/X}$.

4.2. D'autre part, il y a lieu d'introduire dans (Sch) (donc dans les $(\mathrm{Sch})_{/X}$) diverses autres topologies que la topologie étale, dont les plus utiles sont définies dans SGA 3 IV 6.3. La plus grossière parmi ces dernières est la topologie de Zariski (Zar), définie par la prétopologie où les familles couvrantes sont les familles surjectives d'immersions ouvertes ; elle est moins fine que la topologie étale. La plus fine de ces topologies est la topologie « fidèlement plat quasi-compacte », en abrégé (fpqc), qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les familles couvrantes au sens de Zariski, ainsi que les morphismes fidèlement plats quasi-compacts, sont couvrants ; la topologie fpqc est plus

[33] En toute rigueur, comme $(\mathrm{Sch})_{/X}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie mais *pas* un $\mathscr{U}$-site on ne peut invoquer III pour l'existence se u^* ; Cependant, on construit facilement u^* par

$$u^*(F)(X') = (p_{X'})^*_{\text{ét}}(F)(X') \quad (X' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Sch}_{/X}),$$

où $p_{X'}$ désigne le morphisme structural $X' \to X$. D'autre part, pour donner un sens à 4.1 (ii) et justifier la démonstration indiquée de 4.1, il y a lieu d'introduire un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, et de considérer les faisceaux intervenant dans les formules 4.1 (i) comme des faisceaux à valeurs dans $\mathscr{V}$-(Ens). On peut aussi, si on ne veut travailler qu'avec des U-sites, remplaces $(\mathrm{Sch})_{/X}$ par une sous-catégorie pleine $(\mathrm{Sch})_{/X}$ stable par $\varprojlim$ finies, contenant C de 3.1, et qui soit U-petite.

fine que la topologie étale. Comme nous l'avons déjà remarqué, les divers exemples de faisceaux sur (Sch)/X envisagés au N° 2 sont en fait déjà des faisceaux pour la topologie fpqc.

4.2.1. On fera attention cependant que pour un faisceau abélien F sur $(\mathrm{Sch})_{/X}$ pour la topologie (fpqc), (ou une topologie, telle fppf, envisagée dans SGA 3, les groupes de cohomologie de F pour la topologie fpqc (resp. ...) ne sont pas toujours isomorphes aux groupes de cohomologie pour la topologie étale, et ceci même si X est le spectre 354
d'un corps k, et F est représentable par un groupe algébrique sur k, même en ce qui concerne le H^1. De façon générale, on peut montrer que la topologie étale donne les « bons » groupes de cohomologie pour les groupes de coefficients qui sont des schémas en groupes étales, ou plus généralement lisses, sur X[33], mais il n'en est plus de même pour des schémas en groupes tels que les groupes radiciels sur S, pour lesquels il y a lieu de remplacer la topologie étale, encore trop grossière, par la topologie fpqc, ou fppf.

4.2.2. Comme exemple des relations entre les cohomologies relatives à des topologies différentes, signalons ici le cas des topologies de Zariski et de la topologie étale. Nous désignerons par X_{Zar} le site des ouverts de Zariski de X, de sorte qu'on a un foncteur d'inclusion canonique

$$u^* : X_{\mathrm{Zar}} \longrightarrow X_{\text{ét}}$$

qui définit un morphisme de sites

$$u : X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\mathrm{Zar}},$$

d'où des foncteurs correspondants image directs

$$f_* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}} \quad (f_*(F) = F \circ u),$$

et image inverse

$$f^* : \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}},$$

adjoints l'un de l'autre ; géométriquement, il y a lieu d'interpréter le couple (f_*, f^*) comme un morphisme de topos

$$f : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X_{Zar}}.$$

On en déduit un homomorphisme de foncteurs cohomologiques

$$H^*(X_{\mathrm{Zar}}, f_*(F)) \longrightarrow H^*(X_{\text{ét}}, F)$$

et une suite spectrale de Leray 355

$$H^*(X_{\text{ét}}, F) \Longleftarrow H^p(X_{\mathrm{Zar}}, R^q f_*(F)),$$

où F est un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$. Cette suite spectrale résume les relations générales entre cohomologie étale et cohomologie de Zariski. Bien entendu, pour des faisceaux de coefficients F tel que des faisceaux de coefficients constants, cette suite spectrale en général est loin d'être triviale, i.e. en général on aura $R^q f_*(F) \neq 0$ (prendre notamment le cas où X est le spectre d'un corps). Cependant :

Proposition 4.3. Soit F un faisceau de modules variable sur le préschéma X (faisceau au sens de la topologie de Zariski), d'où un faisceau $F_{\text{ét}}$ sur $X_{\text{ét}}$ (cf. 2, c) et un homomorphisme de foncteurs cohomologiques

$$H^*(X, F) \longrightarrow H^*(X_{\text{ét}}, F_{\text{ét}}).$$

Lorsque F est quasi-cohérent, l'homomorphisme précédent est un isomorphisme.

[33]Cf. A Grothendieck, Le groupe de Brauer III th 11.7, in « Dix exposés sur la topologie des schémas », North Holland Pub. Cie

En effet, le premier membre n'est autre que $H^*(X_{\mathrm{Zar}'} f_*(F_{\text{ét}}))$, et avec les notations précédentes, il suffit de prouver qu'on a

$$R^q f_*(F) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

Cela résulte aussitôt, grâce au procédé de calcul des $R^q f_*$ et grâce au fait que les ouverts affines forment une base de la topologie de X, du

Corollaire 4.4. Si X est affine, on a

$$H^q(X_{\text{ét}}, F_{\text{ét}}) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

Pour le voir, soient $C = X_{\text{ét}}$, C' la sous-catégorie pleine formée des X' affines, alors en vertu de 3.1 on aura

$$H^q(C, F_{\text{ét}}) \simeq H^q(C', F|C').$$

356 Il suffit donc de prouver que $F|C'$ est C'-acyclique V 4.1, ou encore satisfait la condition de V 4.3 i.e. que pour tout $X' \in \operatorname{Ob} C'$ et tout famille couvrante $\mathscr{R} = (X'_i \to X')_i$ dans C', on a $H^q(\mathscr{R}, F) = 0$ pour $q > 0$. Or on peut supposer $(X'_i)_i$ fini, puis, quitte à remplacer les X'_i par leur somme, que la famille couvrante consiste en un morphisme $X'_i \to X'$ qui est couvrant, i.e. (étale et) surjectif. Donc on est ramené à prouver que si $f ; X \to Y$ est un morphisme étale surjectif de schéma affines et F un module quasi-cohérent sur X, alors

$$(*) \qquad H^q(X/Y, F) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

Or ceci est démontré dans TDTE I, B, 1.1. (dans FGA, cf. ref [4] de IX).

Remarques 4.5. En fait, par loc. cit., pour avoir $(*)$ il suffit que $X \to Y$ soit surjectif, et plat (au lieu de étale). Cela permet de montrer par la démonstration précédente, qu'on a encore des isomorphismes analogues à celui de 3.3, en y remplaçant le site étale $X_{\text{ét}}$ par $(\mathrm{Sch})_{/X'}$ muni d'une quelconque des topologies plus fines que celle de Zariski envisagées dans SGA 3 IV 6.3, par exemple la topologie fpqc.

5. Cohomologie d'une limite projective de schémas

5.1. Soit I un ensemble préordonné filtrante croissant,

$$\mathfrak{X} = (X)_{i \in I}$$

un système projectif de schémas, les morphismes de transition $u_i : X_i \to X_j$ $(i \geq j)$
357 étant affines. Rappelons (EGA IV 8...) que sous ces conditions, la limite projective

$$X = \varprojlim X_i$$

existe dans la catégorie des schémas, (et même dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux) et peut se construire ainsi : on choisit $i_0 \in I$, de sorte que pour $i \geq i_0$, on a un X_{i_0} - isomorphisme (EGA II 1.2 et 1.3)

$$X_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i,$$

où $\mathscr{A}_i$ est une Algèbre quasi-cohérente sur X_i, les $\mathscr{A}_i$ $(i \geq i_0)$ formant donc un système inductif de telles Algèbres. Posant

$$\mathscr{A} = \varinjlim_i \mathscr{A}_i,$$

on peut prendre

$$X = \operatorname{Spec} \mathscr{A}.$$

D'ailleurs, désignant par esp S l'espace topologique sous-jacent à un schémas S, on montre (EGA IV 8...) que l'application canonique

$$\operatorname{esp} X \longrightarrow \varprojlim \operatorname{esp}(X_i)$$

est un homéomorphisme et que l'homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux

$$\varinjlim_i \gamma_i^{-1}(\mathscr{O}_{X_i}) \longrightarrow \mathscr{O}_X$$

est bijectif, où $\gamma_i : X \to X_i$ est l'application continue canonique.

5.2. De façon imagée, on peut résumer le contenu de EGA IV 8, 9 en disant que, lorsque X_{i_0} est quasi-compact et quasi-séparé, alors « toute donnée de nature schématique sur X, de présentation finie sur X », est équivalente à une donnée de même nature **358**
sur un des X_i, « pour i assez grand ». Ainsi, on prouve (EGA IV 8 ...) :

(a) si $i_1 \in I$ et si X'_{i_1}, X''_{i_1} sont deux schémas de présentation finie sur X_{i_1}, alors posant pour tout $i \geq i_1$

$$X'_i = X'_{i_1} \times_{X_{i_1}} X_i, \quad X' = X'_{i_1} \times_{X_{i_1}} X,$$

et définissant de même X''_i, X'', l'application canonique

$$\varinjlim_{i \geq i_1} \operatorname{Hom}_{X_i}(X'_i, X''_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_X(X', X'')$$

est bijective.

(b) Pour tout schéma X' de présentation finie sur X, il existe un indice $i_1 \in I$, un schéma X'_{i_1} de présentation finie sur X_{i_1}, et un X-isomorphisme

$$X' \simeq X'_{i_1} \times_{X_{i_1}} X.$$

5.3. On peut exprimer le résultat précédent, et les résultats de nature analogue contenus dans EGA IV 8, dans le langage des $\varinjlim$ de catégories fibrées introduit dans VI. Pour ceci, considérons la catégorie $\mathscr{F}$ des morphismes $f : T \to S$ de présentation finie de schémas, et le « foncteur but »

$$\pi : \mathscr{F} \longrightarrow (\mathrm{Sch}),$$

qui est évidemment un foncteur fibrant, les catégories fibres étant d'ailleurs équivalentes à des catégories $\mathscr{U}$-petites. Considérons l'image inverse de la catégorie fibrée $\mathscr{F}/(\mathrm{Sch})$ par le foncteur

$$i \mapsto X_i : \operatorname{cat}(I) \longrightarrow (\mathrm{Sch})$$

(où $\operatorname{cat}(I)$ est la catégorie associée à I, avec $\operatorname{Hom}(i,j) \neq \varnothing$ si et seulement si $i \geq j$), d'où **359**
une catégorie fibrée

$$\pi_{\mathfrak{X}} : \mathscr{F}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \operatorname{cat}(I),$$

dont la fibre en chaque $i \in I$ est canoniquement isomorphe à la sous-catégorie pleine $\mathscr{F}_{X_i}$ de $(\mathrm{Sch})_{/X_i}$ formée des schémas de présentation finie sur X_i, le morphisme de changement de base $\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_j$ relatif à $j \geq i$ n'étant autre que $X'_i \mapsto X'_j = X'_i \times_{X_i} X_j$. Ceci posé, associant à tout X'_i de présentation finie sur X_i son image inverse sur X

$$\varphi(X'_i) = X'_i \times_{X_i} X,$$

on trouve un foncteur naturel

$$\varphi : \mathscr{F}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathscr{F}_{X'},$$

qui transforme évidemment morphisme cartésien de $\mathscr{F}_{\mathfrak{X}}$ en isomorphisme, donc par définition se factorise de façon unique par un foncteur canonique

$$(*) \qquad \psi : \varinjlim_{\mathscr{F}_X / \operatorname{Cat} I} \mathscr{F}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathscr{F}_X .$$

Compte tenu de la description du premier membre, le résultat de EGA IV 8 rappelé plus haut peut s'énoncer alors en disant que $(*)$ est une équivalence de catégories.

5.4. L'énoncé a) de 5.2. ci-dessus peut de préciser de diverses façons, en introduisant quelque ensemble $(\mathscr{M})$ de morphismes de schémas, stable par changement de base, et en
360 énonçant que pour un X_{i_1}-morphisme donné $u_{i_1} : X'_{i_1} \to X''_{i_1}$, le morphisme correspondant $u' : X' \to X''$ est $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ si et seulement si il existe $i \geq i_1$ tel que le X_i-morphisme $u_i : X'_i \to X''_i$ soit $\mathscr{E}(\mathscr{M})$. L'énoncé obtenu ainsi est vrai par exemple lorsque $(\mathscr{M})$ est l'un des ensembles de flèches suivants : morphismes propres (respectivement projectifs, resp. quasi projectifs, resp. affines, resp. affines, resp. finis, resp. quasi finis, resp. radiciels, resp. surjectifs, resp. plats, resp. lisses, resp. étales, resp. non ramifiés). Le lecteur trouvera les énoncés correspondants dans EGA IV par 8 (pour les 9 premiers) par. Il (pour le cas plat) par. 17 (pour les trois derniers cas).

5.5. Remplaçons alors $\mathscr{F} \to (\mathrm{Sch})$ par la sous catégorie fibrée $\mathscr{G}$ formée des morphismes étales de présentation finie, dont la catégorie fibre $\mathscr{G}_S$, pour tout schéma S, n'est autre que la catégorie des schémas étales de présentation finie sur S, et formons de même la catégorie fibrée $\mathscr{G}_{\mathfrak{X}}$ sur $\operatorname{cat}(I)$, dont la catégorie fibre en tout $i \in I$ est la catégorie $\mathscr{G}_{X_i}$. En vertu de 3.2 (ii), les topos étales $\widetilde{X_{i_{\text{ét}}}}$, $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ sont aussi canoniquement équivalents à $\widetilde{\mathscr{G}_{X_i}}$, $\widetilde{\mathscr{G}_X}$, (où tout $\mathscr{G}_S$ est muni de la topologie induite par $S_{\text{ét}}$). De plus, par 3.2 (i), chaque $\mathscr{G}_{X_i}$ est un site de type fini, d'ailleurs équivalent à un site $\mathscr{U}$-petit. Compte tenu des topologies sur les $\mathscr{G}_{X_i}$, $\mathscr{G}$ devient un site fibré sur $\operatorname{cat}(I)$. Ceci posé, on peut énoncer le

Lemme 5.6. *Le foncteur canonique*

$$\varinjlim_{\mathscr{G}_{\mathfrak{X}} / \operatorname{cat}(I)} \mathscr{G}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathscr{G}_X$$

361 *définit une équivalence, respectant les topologies, du site* $\varinjlim$ *des sites étales restreints* (3.2) *des* X_i, *avec le site étale restreint de* $X = \varprojlim_i X_i$.

Le fait qu'on obtient une équivalence de catégories est l'un des énoncés rappelés dans 5.4 (celui où $(\mathscr{M})$ est l'ensemble des morphismes étales dans (Sch)). L'assertion relative aux topologies s'obtient de même en prenant $(\mathscr{M})$ = ensemble des morphismes surjectifs dans (Sch).

Le résultat précédent nous permet d'appliquer les résultats de à la situation présente. On trouve en particulier

Théorème 5.7. *Soit* $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in I}$ *un système projectif de schémas, avec* I *ensemble préordonné filtrant croissant. Supposons que les morphismes de transition* $u_{ij} : X_j \to X_i$ *sont affines (de sorte que le schéma* $X = \varprojlim X_i$ *est défini* (5.1)*), et que les* X_i *sont quasi-compacts et quasi-séparés. Considérons le site fibré* $\mathscr{G}$ *sur* $\operatorname{cat}(I)$ *explicité dans* 5.5, *dont la fibre* $\mathscr{G}_i$ *en* $i \in I$ *est canoniquement isomorphe au « site étale restreint » de* X_i *(formé des schémas étales de présentation finie sur* X_i*). Soit* F *un faisceau abélien sur* $\mathscr{G}$ *(i.e.* (3)*) un foncteur* $\mathscr{G}^0 \to (\mathrm{Ab})$ *dont la restriction* F_i *à chaque* $\mathscr{G}_i$ *est un faisceau, i.e. un* faisceau sur X_i). Sont $F_\infty = \varinjlim_i u_i^*(F_i)$ le faisceau induit sur X, où $u_i : X \to X_i$ est le morphisme canonique. Alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i, F_i) \longrightarrow H^n(X, F_\infty)$$

sont des isomorphismes.

Compte tenu de 5.6, cela résulte de la conjonction de VI 8.7.3 et VI 8.5.2. On appliquera 362
surtout 5.7 dans le cas particulier suivant, explicité également dans

Corollaire 5.8. Avec les hypothèses et notations précédentes pour $(X_i)_{i\in I}$, X, u_{ij}, u_i, sont $i_0 \in I$, et soit F_{i_0} un faisceau abélien sur X_{i_0}. Pour tout $i \geq i_0$, soit $F_i = u_{i_0 i}{}^*(F_{i_0})$, soit de plus $F_\infty = u_i^*(F_{i_0})$. Sous ces conditions, les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i, F_i) \longrightarrow H^n(X, F_\infty)$$

sont des isomorphismes.

Voici cependant un cas parfois utile qui relève de 5.7 et non de 5.8 :

Corollaire 5.9. Avec les hypothèses et notations de 5.7 pour $(X_i)_{i\in I}$, X, u_{ij}, u_i, soit G_{i_0} un schéma en groupes commutatifs localement de présentation finie sur X_{i_0} (où $i_0 \in I$ est donné). Pour tout $i \geq i_0$, soit $G_i = G_{i_0} \times_{X_{i_0}} X_i$, et soit de même $G_\infty = G_{i_0} \times_{X_{i_0}} X$. Alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i, G_i) \longrightarrow H^n(X, G_\infty)$$

sont des isomorphismes.

En effet, nous savons que G_{i_0} définit un faisceau sur $(\mathrm{Sch})_{/X_{i_0}}$ (cf. 2 (a)), et supposant que i_0 est un plus petit objet pour I (ce qui est loisible), d'où un foncteur canonique $\mathscr{G} \to (\mathrm{Sch})_{/X_{i_0}}$, on trouve par composition un foncteur contravariant F sur $\mathscr{G}$, dont la restriction à $\mathscr{G}_i$ est canoniquement isomorphe au faisceau sur X_i défini par G_i. En 363
particulier F est un faisceau sur $\mathscr{G}$, et nous pouvons lui appliquer 5.7. L'hypothèse que G_{i_0} est localement de présentation finie sur X_{i_0} sert à assurer que le faisceau F_∞ de 5,7 est isomorphe, par l'homomorphisme naturel $F_\infty \to \mathrm{faisc}(G_\infty)$, au faisceau $\mathrm{faisc}(G_\infty)$ défini par G_∞ (comme il résulte en effet aussitôt de EGA IV 8.8.2 (i), en regardant les valeurs des faisceaux envisagés sur les objet du site étale restreint de G_∞ et appliquant 5.6). Cela achève de prouver 5.9.

Corollaire 5.10. Avec les hypothèses et notations de 5.7 pour $(X_i)_{i\in I}$, X, u_{ij}, u_i, soit F un faisceau en groupes commutatifs sur X, alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i, u_{i*}(F)) \longrightarrow H^n(X, F)$$

sont des isomorphismes.

Les énoncés 5.7 à 5.10 se généralisent en des énoncés correspondants pour les Ext^i de faisceaux de Modules, grâce à VI 8.7.9, que nous nous dispensons de répéter dans le cas particulier présent. Nous allons par contre expliciter, pour références ultérieures, les variantes de 5.8 et 5,9 en termes de foncteurs $R^n f_*$.

Corollaire 5.11. Soient I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux systèmes projectifs de schémas, à morphismes de transition affines, $X =$

$\varprojlim_i X_i$, $Y = \varprojlim_i Y_i$, $(f_i)_{i\in I}$ un système projectif de morphismes $f_i : X_i \to Y_i$ quasi-compacts et quasi-séparés, $i_0 \in I$, F_{i_0} un faisceau sur X_{i_0}. Pour tout $i \geq i_0$, soit F_i le
364 faisceau sur X_i image inverse de F_{i_0}. Soit de même $f : X \to Y$ déduit de (f_i) et F le faisceau sur X image inverse de F_{i_0}. Sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim_i u_i^*(R^n f_{i*}(F_i)) \longrightarrow R^n f_*(F)$$

est un isomorphisme (où $u_i : X \to X_i$ est le morphisme canonique).

On peut supposer que i_0 est un plus petit objet de I, et la question étant locale sur Y_{i_0}, que Y_{i_0} est affine, de sorte que les Y_i et les X_i sont quasi-compacts et quasi-séparés. On est alors sous les conditions d'application de VI 8.7.3 (où on se ramène à 5.8, compte tenu du calcul des $R^n f_*$ comme faisceaux associés à des préfaisceaux, On prouve de même :

Corollaire 5.12. Même énoncé que 5.11, à cela près que maintenant F_{i_0} désigne un schéma en groupes commutatifs localement de présentation finie sur X_{i_0}, et F_i, F ses images réciproques (au sens du changement de base pour les schémas).

On fera attention que 5.9 (resp. 5.12) n'est pas un cas particulier de 5.8 (resp. 5.11), cf. 2 a) remarque 2.1.

Corollaire 5.13. Avec les notations de 5.11, soit F un faisceau en groupes abéliens sur X. Alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i v_i^*(R^n f_{i*}(u_{i*}(F))) \longrightarrow R^n f_*(F)$$

sont des isomorphismes, (où $u_i : X \to X_i$ et $v_i : Y \to Y_i$ sont les homomorphismes canoniques).

La démonstration est essentiellement la même que précédemment.

365 Remarques 5.14. a) Les résultats de passage à la limite précédents sont valables pour le H^0 resp. les f_*, pour des faisceaux d'ensembles (au lieu de faisceaux abéliens), et pour le H^1 resp. les $R^1 f_*$ pour des faisceaux de groupes (non nécessairement commutatifs), - où les H^1 et $R^1 f_*$ non commutatifs sont définis comme d'habitude en termes de torseurs (où fibrés principaux homogènes) (cf. thèse de Giraud [33]). Cela peut se vérifier directement dans le contexte général de Il est certainement possible (et sans doute utile) de donner également une variante pour les H^2 non commutatifs de « liens », étudiés par Giraud.

b) Les résultats de passante à la limite pour les sites fibrés développés dans VI supposaient seulement que la catégorie base était une catégorie filtrante sans qu'il ait été nécessaire de supposer qu'elle sont associée à un ensemble préordonné filtrant. Le cas d'une catégorie d'indices filtrante arbitraire est également le cadre naturel pour les énoncés développés dans le présent $n°$. Si nous nous sommes placés dans un cadre trop restrictif, cela était pour pouvoir donner des références correctes à EGA IV, où l'on suppose malencontreusement dans les questions de passage à la limite (à partir du par. 8) que la catégorie d'indices est définie en termes d'un ensemble préordonné filtrant. Nous admettrons cependant par la suite que tous les résultats utilisés de EGA IV sont valables pour des catégories d'indices filtrantes quelconques, (les démonstrations données dans loc. cit. étant valables, essentiellement sans changement, dans ce cas plus général). Aussi, nous utiliserons également sans autre commentaire les résultats

[33] citée p.(page 7) note de bas de page $(*)$

du présent n° dans le cas où I est remplacé par une catégorie d'indices filtrante arbitraire.

EXPOSÉ VIII

Foncteurs fibres, supports, étude cohomologique des morphismes finis

A. Grothendieck

1. Invariance topologique du topos étale

Théorème 1.1. Soit $f : X' \to X$ un morphisme entier surjectif radiciel. Alors le foncteur changement de base 367

$$f^* : X_{\text{ét}} \longrightarrow X'_{\text{ét}}$$

est une équivalence de sites (i.e. une équivalence de catégories, qui est continue ainsi que tout foncteur quasi-inverse). Par suite les foncteurs

$$f_* : \widetilde{X'_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$
$$f^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X'_{\text{ét}}}$$

sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'antre.

La première assertion est bien connue (SGA 1 IX 4.10 et 4.11) lorsque f est présentation finie ou que f est plat ; le cas général se réduit à celui où f est de présentation finie. En effet, on sait déjà que le foncteur f^* est pleinement fidèle (SGA 1 IX 3.4). Il suffit de prouver que f^* est essentiellement surjectif, i.e. que tout Z' étale sur X' « pro- 368
vient » d'un Z étale sur X. Utilisant le fait que f est un homéomorphisme universel, et la pleine fidélité de f^*, on est ramené au cas où X, X', Z' sont affines, spectres d'anneaux A, A', B'. Écrivant A' comme limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini A'_i, B' provient d'une algèbre étale B'_i sur un A'_i (cf. EGA IV 8), ce qui nous ramène au cas où A' est entière et de type fini sur A, donc finie sur A. On a alors un A-isomorphisme $A' \simeq A''/J$, ou $A'' \simeq A[t_1, \dots t_n]$ et J est un idéal de A''. Écrivant J comme limite inductive de ses sous-idéaux J_i de type fini, et posant $A'_i = A''/J_i$, on aura encore $A' = \varinjlim_i A'_i$, donc B' provient d'une algèbre étale B'_i sur un A'_i (loco citato). D'autre part, comme $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ est surjectif, il en est de même des $\operatorname{Spec} A'_i \to \operatorname{Spec} A$, de plus on vérifie facilement que puisque $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ est radiciel, il en est de même de $\operatorname{Spec} A'_i \to \operatorname{Spec} A$ pour i assez grand (appliquer EGA IV 1.9.9 à Spec A[33]). Cela nous ramène au cas où A' est un des A'_i, donc de présentation finie sur A.

Cela prouve la première assertion de 2.1. Le fait que f_* et f^* soient des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre en résulte aussitôt.

Corollaire 1.2. Soient F un faisceau abélien sur X, F' son image inverse sur X', alors les homomorphismes canoniques

$$(*) \qquad H^i(X, F) \longrightarrow H^i(X', F')$$

[33]Soit $S_i \subset S = \operatorname{Spec} A$ l'ensemble des $s \in S$ tels que la fibre de $X_i = \operatorname{Spec} A'_i$ en s soit de rang séparable 1. Alors, les S_i sont des parties *constructibles* de S (EGA IV 9.7.9) formant une famille croissante, leur réunion est S d'après l'hypothèse sur $S' = \operatorname{Spec} A' \to S$ et le fait que les fibres de S'_i sont des schémas *noethériens*. On a donc $S = S_i$ pour i assez grand, par EGA IV 1.9.9, C.Q.F.D..

sont des isomorphismes. De même, si F' est un faisceau abélien sur X', F son image sur X, les homomorphismes canoniques $(*)$ sont des isomorphismes.

369 Exemples 1.3. Voici des exemples d'application fréquents de 1.1 :

a) X' est un sous-schéma de X ayant même ensemble sous-jacent que X, i.e. défini par un nil-Idéal I.
b) X est un schéma sur un corps séparablement clos k, k' est une clôture algébrique de k, et $X' = X \otimes_k k'$.
c) Soit X un schéma géométriquement unibranche (par exemple une courbe algébrique sur un corps k, n'ayant comme singularités que des singularités « cuspidales », à l'exclusion en particulier de points doubles ordinaires). Alors, si X' est le normalisé de X_{red}, par définitions $X' \to X$ est radiciel, donc 2.1 s'applique.

Remarques 1.4. Un morphisme f comme dans 1.1 est un homéomorphisme universel, i.e. est un homéomorphisme et reste tel par toute extension de la base. Réciproquement, si f est un homéomorphisme universel on prouve que f satisfait aux hypothèses de 2.1 [33], ce qui explique le titre du présent numéro.

Signalons expressément, à propos de l'exemple 2.3 c), que si X est une courbe algébrique (sur un corps algébriquement clos k pour fixer les idées) ayant au moins un point singulier qui n'est pas « unibranche »g (par exemple un point double ordinaire), alors (X' désignant le normalisé de X_{red}) la conclusion de 2.2 est déjà en défaut pour les H^1 et des coefficients constants (comparer SGA 1 I 11 a) et SGA 1 IX 5).

2. Faisceaux sur le spectre d'un corps

370

Proposition 2.1. Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k, $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ son groupe de Galois topologique, $X = \operatorname{Spec} k$, $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{k}$ (sur lequel π opère à gauche). Considérons le foncteur canonique

$$i : X_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

(défini par $i(X')(X'') = \mathrm{Hom}_X(X', X'')$), et le foncteur canonique

$$j : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \mathscr{B}_\pi$$

de la catégorie des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ dans la catégorie $\mathscr{B}_\pi$ (cf. IV 2.7) des ensembles (discrets) sur lesquels π opère continûment à gauche, défini par

$$j(F) = \varinjlim_\alpha F(\operatorname{Spec}(k_\alpha)),$$

où k_α parcourt les sous-extensions finies de $\overline{k}$. Alors i et j sont des équivalences de catégories. (Par suite, le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ est équivalent (IV 3.4) au « topos classifiant » $\mathscr{B}_\pi$.)

Le foncteur composé

$$ji : X_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow (\pi\text{-}\mathrm{Ens})$$

est une équivalence de catégories, d'après le théorème fondamental de la théorie de Galois (sous la forme de SGA I V). Comme $\mathscr{B}_\pi$ est évidemment un topos (II 4.14), il en est donc de même de $X_{\text{ét}}$. D'ailleurs une famille $(X_i \to X)$ de morphismes dans $X_{\text{ét}}$ est couvrante si et seulement si elle est surjective, i.e. son image dans $\mathscr{B}_\pi$ est surjective, ou ce qui revient au même, couvrante pour la topologie canonique de $\mathscr{B}_\pi$ ce qui montre que la topologie de $X_{\text{ét}}$ est bien sa topologie canonique. Par suite i est une équivalence, et il en est donc de même de j.

[33] Cf. EGA IV 8.11.6 si f est de présentation finie, et EGA IV 18.12.11 dans le cas général.

Corollaire 2.2. Le foncteur j de 2.1 induit un équivalence entre la catégorie des faisceaux abéliens sur $X = \operatorname{Spec} k$, et la catégorie des π-modules galoisiens. 371

En effet, ces derniers sont justement les « groupes abéliens » du topos $\mathscr{B}_\pi$. On voit de même, par « transport de structure » :

Corollaire 2.3. Soient F un faisceau abélien sur $X = \operatorname{Spec} k$, $M = j(F)$ le π-module galoisien associé, alors on a un isomorphisme canonique de ∂-foncteurs en F :

$$H^*(X, F) \simeq H^*(\pi, M),$$

(où le deuxième membre désigne la cohomologie galoisienne, étudiée par exemple dans le cours de Serre C.G.).

Corollaire 2.4. Supposons k séparablement clos. Alors le foncteur

$$\Gamma : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow (\text{Ens})$$

est une équivalence de catégories. Si F est un faisceau abélien sur $X = \operatorname{Spec} k$, on a $H^i(X, F) = 0$ pour $i \neq 0$. (En d'autres termes, le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ est un « topos ponctuel » (IV 2.2).)

Corollaire 2.5. Soit k' une extension séparablement close d'un corps séparablement clos k, $X = \operatorname{Spec} k$, $X' = \operatorname{Spec} k'$, $u : X' \to X$ le morphisme canonique. Alors le foncteur

$$u^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X'_{\text{ét}}}$$

est une équivalence de catégories.

3. Foncteurs fibres relatifs aux points géométriques d'un schéma

372

3.1. Soit X un schéma. Nous appellerons point géométrique de X tout X schéma ξ qui est le spectre d'un corps Ω séparablement clos. La donnée d'un tel point équivaut donc à celle d'un point ordinaire $x \in X$, et d'une extension séparablement close Ω du corps résiduel $k(x)$ de x. Le cas le plus fréquent pour nous sera celui où Ω est une clôture séparable de $k(x)$, que nous dénoterons alors généralement par $\overline{k(x)}$, le point géométrique correspondant de X étant alors noté $\overline{x}$. Pour $x \in X$ donné, les $\overline{k(x)}$ (resp. $\overline{x}$) sont déterminés à k-isomorphisme (resp. X- isomorphisme) non unique près.

Remarques 3.2. Dans la plupart des questions géométriques, il est plus naturel de se borner au cas Ω algébriquement clos. La convention différente utilisée ici est spéciale à l'étude de la topologie étale. C'est la convention que nous avions adoptée dans la définition du groupe fondamental SGA 1 V 7. Mais on notera que les développements de loco citato sont également valables avec la convention adoptée ici (car la propriété de Ω qui y est utilisée est que tout revêtement étale du spectre Ω est trivial, i.e. justement que Ω est séparablement clos).

Définition 3.3. Soient X un schéma, ξ un point géométrique de X, $u : \xi \to X$ son morphisme structural. On appelle foncteur fibre (géométrique) relatif à ξ, et on note $F \mapsto F_\xi$, le foncteur

$$\widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow (\text{Ens})$$

composé de

$$\widetilde{X_{\text{ét}}} \xrightarrow{u^*} \widetilde{\xi_{\text{ét}}} \xrightarrow{\Gamma_\xi} (\text{Ens}).$$

On peut dire aussi que, grâce à 2.4, un point géométrique ξ de X définit un point du topos $X^{\sim}_{\text{ét}}$ (IV 6.1), dont on prend simplement le foncteur fibre associé (loc. cit.).

373 3.4. Comme le foncteur Γ_ξ (foncteur sections sur ξ) est une équivalence de catégories (12.4), la connaissance des foncteurs fibres $F \mapsto F_\xi$ équivaut essentiellement à celle des foncteurs images réciproques u^*. Notons d'ailleurs qu'il résulte aussitôt de 2.5 que si ξ est un point géométrique de X tel qu'il existe un X-morphisme $\xi' \to \xi$ (i.e. ξ' correspond à une extension séparablement close Ω' de Ω) alors l'homomorphisme canonique $F_\xi \to F_{\xi'}$ est un isomorphisme fonctoriel

$$F_\xi \simeq F_{\xi'}.$$

Cela montre que pour l'étude des foncteurs fibres, on peut (quitte à remplacer Ω par la clôture algébrique séparable de k dans Ω) se borner au cas où $\omega = k(\xi)$ est une clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$, et que les foncteurs fibres correspondant aux points géométriques de X localisés en un même $x \in X$ sont isomorphes entre aux (de façon non unique).

On désignera, conformément aux conventions de 3.1, par $F_{\overline{x}}$ un foncteur fibre correspondant an choix d'une clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$.

Signalons une propriété de transitivité évidente (qui montre l'utilité technique à ne pas se borner exclusivement à des points géométriques définis par des clôtures séparables de corps résiduels) : Soient $f = X' \to X$ un morphisme de schémas, $u' : \xi' \to X'$ un point géométrique de X, alors $u = fu' : \xi' \to X$ est un point géométrique de X que nous noterons ξ ; relativement à ces points géométriques on a un isomorphisme fonctoriel en $F \in \operatorname{Ob} \widetilde{X_{\text{ét}}}$:

$$f^*(F)_{\xi'} \simeq F_\xi.$$

374 Cela résulte en effet de la formule de transitivité des foncteurs images inverses

$$(fu)^* \xrightarrow{\sim} u^* f^*.$$

Théorème 3.5. Soit X un schéma.

a) Pour tout point géométrique ξ de X, le foncteur fibre $F \mapsto F_\xi$, $\widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\text{Ens})$ commute aux $\varinjlim$ quelconques (indexées par des catégories $\in \mathscr{U}$) et aux $\varprojlim$ finies[33]. En particulier, il transforme faisceaux en groupes (resp. faisceaux abéliens, etc.) en groupes (resp. groupes abéliens, etc.).
b) Lorsque x parcourt les points de X, les foncteurs fibres $F_{\overline{x}}$ forment une famille de foncteurs « conservative », i.e. si $u : F \to G$ est un homomorphisme de faisceaux sur X, u est un isomorphisme si et seulement si pour tout $x \in X$, l'homomorphisme correspondant $u_{\overline{x}} : F_{\overline{x}} \to G_{\overline{x}}$ l'est [33].

Notons tout de suite, compte tenu des propriétés d'exactitude de a), les conséquences formelles suivantes de b) :

Corollaire 3.6. Soit $u : F \to G$ un homomorphisme de faisceaux. Alors u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $x \in X$, $u_{\overline{x}} : F_{\overline{x}} \to G_{\overline{x}}$ est injectif (resp. surjectif).

Corollaire 3.7. Soient $u, v : F \to G$ deux morphismes de faisceaux sur X, alors $u = v$ si et seulement si pour tout $x \in X$, on a $u_{\overline{x}} = v_{\overline{x}} : F_{\overline{x}} \to G_{\overline{x}}$. En particulier, si u,
375 v sont deux sections de F, on a $u = v$ si et seulement si on a $u_{\overline{x}} = v_{\overline{x}}$ dans $F_{\overline{x}}$ pour tout $x \in X$.

Corollaire 3.8. Soit $F \to G \to H$ une suite de deux homomorphismes de faisceaux sur X, alors la suite est exacte si et seulement si pour tout $x \in X$, la suite correspondante $F_{\overline{x}} \to G_{\overline{x}} \to H_{\overline{x}}$ l'est.

[33]C'est donc bien un « foncteur fibre » au sens de Exp. IV.

[33]Il y a donc « suffisamment de foncteurs fibres » de la forme $F \mapsto F_{\overline{x}}$, dans la terminologie de IV 6.5.

Nous laisserons au lecteur le soin de déduire les corollaires [33], qui seront d'ailleurs prouvés partiellement dans la démonstration qui suit.

L'assertion a) résulte des propriétés d'exactitude déjà signalées dans (VII 1.4) pour tout foncteur image réciproque, tel $u^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{\xi_{\text{ét}}}$, et du fait que $\widetilde{\xi_{\text{ét}}} \to (\text{Ens})$ est une équivalence. Pour prouver b), notons la formule suivant, qui donne un procédé de calcul des foncteurs fibres :

Proposition 3.9[33]. Soit $\xi \xrightarrow{u} X$ un point géométrique de X, et soit C_ξ la catégorie des « X-schémas étales ξ-ponctués », i.e. des couples (X', u'), o $X' \in \text{Ob}\, X_{\text{ét}}$ est un schéma étale sur X, et u' un X-morphisme $\xi \to X'$. Alors la catégorie opposée C_ξ^0 est filtrante et pour un faisceau F (resp. préfaisceau P) variable sur X, on a un isomorphisme fonctoriel canonique

$$F_\xi \simeq \varinjlim_{C_\xi^0} F(X'), (\text{resp. } (aP)_\xi \simeq \varinjlim_{C_\xi^0} P(X')),$$

(où aP = faisceau associé à P).

En effet, notons d'abord que pour tout préfaisceau P sur $\xi_{\text{ét}}$, si aP est le faisceau associé, l'homomorphisme naturel

$$P(\xi) \longrightarrow aP(\xi)$$

est un isomorphisme, comme il résulte par exemple aussitôt du calcul explicite de aP 376
comme $L(LP)$ (II 3.19). Soit $\varphi : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{\xi_{\text{ét}}}$ le foncteur « image réciproque », alors $u^* = \varphi^*$ n'est autre (III 2.3. (d)) que le composé a $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}} i$, où $i : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widehat{X_{\text{ét}}}$ est le foncteur inclusion, et $a : \widehat{\xi_{\text{ét}}} \to \widetilde{\xi_{\text{ét}}}$ le foncteur « faisceau associé ». Par le remarque précédente on trouve

$$u^*(F)(\xi) = (\varphi^{\boldsymbol{\cdot}} i(F))(\xi),$$

de sorte qu'il suffit d'appliquer l'expression explicite de $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$ donnée dans la démonstration de XXX Référence à inclure. Le cas respé, où on part avec un préfaisceau P sut X, se prouve de même, en utilisant l'isomorphisme fonctoriel $\varphi^* a(P) \simeq a\varphi^*(P)$ XXX Référence à inclure. Le fait que la catégorie C_ξ est filtrante (qui reste valable pour tout X-schéma ξ, pas nécessairement réduit à un point géométrique) résulte aussitôt du fait que dans C_ξ les limites projectives finies existent, ce qui résulte du fait que $X_{\text{ét}}$ est une sous-catégorie de $(\text{Sch})/X$ stable par limites projectives finies.

Soit maintenant $u : F \to G$ un homomorphisme de faisceaux sur X, tel que pour tout $x \in X$, $u_{\overline{x}} : F_{\overline{x}} \to G_{\overline{x}}$ soit un monomorphisme, prouvons que u est un monomorphisme. Pour ceci, on doit prouver que si $X' \in \text{Ob}\, X_{\text{ét}}$, $\varphi, \psi \in F(X')$ sont tels que $u(\varphi) = u(\psi)$, on a $\varphi = \psi$. Remplaçant X par X' et utilisant le transitivité des foncteurs fibres, on peut supposer $X = X'$. Pour tout $x \in X$, on aura $u(\varphi)_{\overline{x}} = u(\psi)_{\overline{x}}$ i.e. $u_{\overline{x}}(\varphi_{\overline{x}}) = u_{\overline{x}}(\psi_{\overline{x}})$, donc $\varphi_{\overline{x}} = \psi_{\overline{x}}$ puisque $u_{\overline{x}}$ est un monomorphisme. Utilisant 3.9 il s'ensuit qu'il existe un $X'_x \in \text{Ob}\, X_{\text{ét}}$, dont l'image contient x, tel φ et ψ aient même image inverse sur X'_x. Comme pour x variable dans X, les X'_x forment une famille couvrante de X, il s'ensuit que $\varphi = \psi$.

Cela prouve que si les $u_{\overline{x}}$ sont des monomorphismes, il en est de même de u. Suppo- 377
sons de plus que les $u_{\overline{x}}$ soient des épimorphismes, prouvons qu'il en est de même de u, donc que u est un isomorphisme. Il reste à prouver que pour tout $X' \in \text{Ob}\, X_{\text{ét}}$, et tout $\psi \in G(X')$, il existe $\varphi \in F(X')$ tel que $u(X')(\varphi) = \psi$. On peut encore supposer $X' = X$, et utilisant 3.9 on voit que pour tout $x \in X$, il existe $X'_x \in \text{Ob}\, X_{\text{ét}}$ tel que l'image de X'_x dans X contienne x, et un $\varphi_x \in F(X'_x)$ dont l'image dans $G(X'_x)$ soit l'image inverse de

[33]Cf. IV 6.5.2.

[33]Cf. IV 6.8.3

ψ. Utilisant le fait que u est un monomorphisme, on voit que les φ_x coïncident sur les $X'_x \times_X X'_x$ $(x, y \in X)$ donc proviennent d'un $\varphi \in F(X)$ bien déterminé, et on aura alors $u(\varphi) = \psi$ puisque les images inverses sur les X'_x coïncident. C.Q.F.D..

Scholie 3.10. Le théorème 3.5 implique que la collection des « foncteurs fibres » pour la topologie étale jouit des même propriétés essentielles que dans la théorie des faisceaux habituelle sur un espace topologique. Nous utiliserons très fréquemment 3.5 et ses corollaires, et pour cette raison nous nous dispenserons généralement d'y référer explicitement.

3.11. Pour tout $x \in X$ nous désignerons aussi, par abus de langage, par x le $X-$schéma $\operatorname{Spec} k(x)$, pour le morphisme structural habituel

$$i_x : x = \operatorname{Spec} k(x) \longrightarrow X.$$

Il donne lieu à un foncteur canonique

$$i_x^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{x_{\text{ét}}}.$$

Si F est un faisceau sur X, nous poserons $F_x = i_x^*(F)$, c'est donc un faisceau sur $x =$
378 $\operatorname{Spec} k(x)$ (et à ce titre peut s'identifier aussi à un schéma étale sur x, en vertu de 2.1). Il dépend fonctoriellement de F, et le foncteur $i_x^* : F \mapsto F_x$ commute encore aux $\varinjlim$ quelconques, et $\varprojlim$ finies, en vertu de VII 1.4.

Si $\overline{x} = \operatorname{Spec} \overline{k(x)}$, le foncteur fibre $F \mapsto F_{\overline{x}}$ est canoniquement isomorphe au composé du foncteur $F \mapsto F_x$ et du foncteur j de 2.1 (compte tenu que ce dernier est isomorphe au foncteur fibre relatif au point géométrique $\operatorname{Spec} \overline{k}$ de $\operatorname{Spec} k$). Il résulte aussitôt de ceci et de 3.5 que le système des foncteurs $(F \mapsto F_x)$ $(x \in X)$ est encore conservatif. D'ailleurs, si $k(x)$ est séparablement clos, i.e. $x = \overline{x}$, les notations F_x et $F_{\overline{x}}$ sont en toute rigueur contradictoires (la première désignant un objet de $\widetilde{x_{\text{ét}}}$, la deuxième un ensemble), mais en vertu de 2.1 c'est là une contradiction inessentielle.

3.12. On voit par les remarques qui précèdent que si $\overline{x} = \operatorname{Spec} k(x)$, alors pour tout faisceau F sur X, le groupe $\pi_x = \operatorname{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$ opère de façon naturelle (à gauche) sur l'ensemble fibre $F_{\overline{x}}$, de sorte que $F \mapsto F_{\overline{x}}$ peut en fait être considéré comme un foncteur

$$\widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \mathscr{B}_{\pi_x}$$

dont la connaissance équivaut essentiellement (grâce à 2.1) à celle du foncteur $F \mapsto F_x$.

Cela montre, dans un cas particulier important, que contrairement à ce qui a lieu dans le cas des faisceaux sur les espaces topologiques, les « foncteurs fibres » admettent en général des automorphismes non triviaux. De façon générale, nous déterminerons dans 7.9 tous les homomorphismes d'un foncteur fibre dans un autre.

379 Remarque 3.13. Voici une généralisation parfois utile de 3.5 b). Considérons une partie E de X telle que pour tout morphisme étale $f : X' \to X$, $E' = f^{-1}(E)$ soit « très dense » dans X' (EGA IV 10.1.3), i.e. que pour tout f comme ci-dessus, tout ouvert U de X' qui contient E' soit égal à X'. Alors les foncteurs fibres $F_{\overline{x}}$ sur $\widetilde{X_{\text{ét}}}$, pour $x \in E$, forment déjà une « famille conservative » (et par suite les corollaires 3.6, 3.7 et 3.8 restent valables en se bornant à y choisir $x \in E$). Cela se voit immédiatement en reprenant la démonstration donnée de 3.5 b). Le résultat précédent s'applique notamment dans les situations suivantes :

a) X est un schéma de Jacobson (EGA IV 10.4.1.), par exemple localement de type fini sur un corps, ou sur $\operatorname{Spec}(\mathscr{Z})$, et E est l'ensemble des points fermés de X.

b) X est localement de type fini sur un schéma S, et E est l'ensemble des points de X qui sont fermés dans leur fibre.
c) X est localement noethérien, et E est l'ensemble des $x \in X$ tels que $\overline{x}$ soit un ensemble fini (i.e. un schéma semi-local de dimension ≤ 1) cf. EGA IV 10.5.3 et 10.5.5.

4. Anneaux et schémas strictement locaux

4.1. Rappelons qu'on dit, avec Azumaya, qu'un anneau local A est hensélien s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

(i) Toute algèbre B finie sur A est composée directe $\prod_i B_i$ d'anneaux locaux (les B_i sont alors nécessairement isomorphes aux $B_{\mathfrak{m}_i}$, où $\mathfrak{m}_i$ parcourt les idéaux **380**
maximaux de B).
(ii) Toute algèbre B sur A qui est localisée d'une algèbre de type fini C sur A en un idéal premier $\mathfrak{p}$ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, et telle que $B/\mathfrak{m}B$ soit fini sur $k = A/\mathfrak{m}$, est finie sur A.
(iii) Comme (ii). mais en supposant C étale sur A en $\mathfrak{p}$ et $k \to B/\mathfrak{m}B$ un isomorphisme.
(iv) Le « lemme de Hensel » sous la forme classique est valable pour A, i.e. pour tout polynôme unitaire $F \in A[T]$, désignant par $\dot{F} \in k[T]$ le polynôme réduit correspondant, et pour toute décomposition

$$\dot{F} = \dot{F}_1\dot{F}_2$$

de $\dot{F}$ en produit de deux polynômes unitaires étrangers, $\dot{F}_1$, et $\dot{F}_2$ se relèvent (de façon nécessairement unique) en des $F_1, F_2 \in A[T]$, tels que $F = F_1F_2$.

Pour la démonstration de ces équivalences et les propriétés générales des anneaux henséliens, cf. EGA IV 18.5.11. Rappelons que si A est un anneau local quelconque, on montre (Nagata) que l'on peut trouver un homomorphisme local,

$$A \longrightarrow A^h$$

avec A^h hensélien, qui est universel pour les homomorphismes locaux de A dans des anneaux locaux henséliens. L'anneau A^h est appelé le hensélisé de A. La construction donnée dans EGA IV 18.6 (différente de celle de Nagata) consiste à poser

$$A^h = \varinjlim_i A_i,$$

où A_i parcourt les A-algèbres essentiellement de type fini et essentiellement étales sur A (i.e. localisées d'une algèbre étale sur A) telles que $A \to A_i$ soit **381**
un homomorphisme local et l'extension résiduelle $k(A_i)/k(A)$ soit triviale. Cette construction montre en particulier que A^h est plat sur A et que si A est noethérien, il en est de même de sa clôture hensélienne.

Définition 4.2. Un anneau local A est dit strictement local s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) A est hensélien (4.1) et son corps résiduel est séparablement clos.
(ii) Tout homomorphisme local $A \to B$, où B est localisé d'une algèbre étale sur A, est un isomorphisme.

Un schéma est dit schéma strictement local s'il est isomorphe au spectre d'un anneau strictement local.

L'équivalence de (i) et (ii) résulte aussitôt de 4.1. Notons que, sous forme géométrique, 4.2 (ii) (resp. 4.1 (iii)) s'exprime en disant que pour tout schéma étale X sur $Y = \operatorname{Spec} A$, et tout point x de la fibre X_y (respectivement tout point de X_y rationnel sur $k(y)$), où y est le point fermé de Y, il existe une section de X sur Y passant par y (section qui est d'ailleurs nécessairement unique).

Définition 4.3. Soient X un schéma, $\mathscr{O}_{X_{\text{ét}}}$ le faisceau sur $X_{\text{ét}}$ défini par

$$\mathscr{O}_{X_{\text{ét}}}(X') = \Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$$

(comparer VII 2. c)), $u : \xi = \operatorname{Spec}(\Omega) \to X$ un point géométrique de X. On appelle
382 anneau strictement local de X en ξ, et on note $\mathscr{O}_{X,\xi}$ ou simplement $\mathscr{O}_\xi$, la fibre du faisceau $\mathscr{O}_{X_{\text{ét}}}$ en le point ξ. Son spectre est appelé localisé strict de X en ξ.

En vertu de 3.9, on a la description de la fibre $\mathscr{O}_{X,\xi}$:

$$(*) \qquad \mathscr{O}_{X,\xi} = \varinjlim \Gamma(X', \mathscr{O}_{X'}),$$

où X' parcourt la catégorie filtrante opposée de la catégorie des schémas étales sur X qui sont ξ- ponctués, i.e. munis d'un X-morphisme $\xi \to X'$. D'après la transitivité des limites inductives, on peut remplacer au deuxième membre $\Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$ par $\mathscr{O}_{X',x'}$, ou x' est l'image de ξ dans X', et on trouve l'expression

$$(**) \qquad \mathscr{O}_{X,\xi} = \varinjlim_i A_i$$

où A_i parcourt les algèbres essentiellement de type fini et étales sur $A = \mathscr{O}_{X,x}$ munies d'un k-homomorphisme $k(A_i) \to \Omega$. (N.B. x désigne l'image de ξ dans X). Bien entendu les homomorphismes de transition entre les A_i sont les homomorphismes locaux de A-algèbres $A_i \to A_j$ qui rendent commutatif le triangle correspondant

$$\begin{tikzcd} k(A_i) \arrow[r] \arrow[dr] & k(A_j) \arrow[d] \\ & \Omega, \end{tikzcd}$$

ce qui implique que s'il existe un homomorphisme admissible de A_i dans A_j, ce dernier est unique. Donc la limite inductive $(**)$ est une limite relative à un ensemble d'indices ordonné filtrant croissant.

383 4.4. La description $(**)$ montre que l'anneau local strict de X en ξ ne dépend essentiellement que de l'anneau local habituel $A = \mathscr{O}_{X,x}$ ($x = u(\xi)$), et de l'extension Ω de $k = k(A)$. On l'appelle aussi anneau hensélisé strict de A (relativement à l'extension séparablement close considérée ω de k) et on le notera A^{hs}. On renvoie à EGA IV 18.8 pour les propriétés générales de A^{hs}. Signalons simplement que la construction donnée montre encore que A^{hs} est plat sur A, et qu'il est noethérien si A l'est. D'autre part, on montre facilement (loc. cit.) que l'homomorphisme local

$$A \longrightarrow A^{hs}$$

muni du k-homomorphisme

$$k(A^{hs}) \longrightarrow \Omega$$

est solution de problème universel, relatif à la donnée de A et de l'extension Ω de k, correspondant à la recherche des homomorphismes locaux

$$A \longrightarrow A',$$

avec A' strictement local, munis d'un k-homomorphisme

$$k(A') \longrightarrow \Omega.$$

En particulier, A^{hs} est bien un anneau strictement local (ce qui justifie la terminologie 4.3).

4.5. Gardons les notations de 4.3 et choisissons un voisinage ouvert affine U de x. Notons que dans 3.9 on peut évidemment se borner aux X' qui sont affines au-dessus de U. Ces derniers forment alors un système projectif pseudo-filtrant de schémas affines, de sorte que nous sommes dans la situation générale de VII 5 (cf. VI 5.12 b). En vertu de **384**
l'expression $(*)$ pour $O_{X,\xi}$, on aura un X-isomorphisme

$$(***) \qquad \varprojlim_{\substack{X' \text{étale} \\ \text{affine sur } U, \\ X'_\xi\text{- ponctué}}} X' \simeq \operatorname{Spec} O_{X,\xi}$$

ce qui précise la signification géométrique intuitive de $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,\xi})$ comme « limite des voisinages étales de ξ ».

Proposition 4.6. Soit X un schéma strictement local, x son point fermé, qui est donc un point géométrique de X. Alors le foncteur $F \mapsto \Gamma(X, F) : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\text{Ens})$ est canoniquement isomorphe au foncteur fibre $f \mapsto F_x$, et par suite commute aux $\varinjlim$ quelconques [33].

En effet, en vertu de déf 4.2 (ii), l'objet final X de la catégorie des X' étales x-ponctués sur X envisagée dans 3.9 majore tous les autres objets, donc $\varinjlim F(X')$ est canoniquement isomorphe à $F(X)$, C.Q.F.D..

En particulier, le foncteur induit par Γ sur la catégorie des faisceaux abéliens est exact, donc on conclut

Corollaire 4.7. Sous les conditions des 4.6 on a pour tout faisceau abélien F sur X :

$$H^q(X, F) = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0.$$

Corollaire 4.8. Soient X un schéma, ξ un point géométrique de X, $\overline{X} = \operatorname{Spec} O_{X,x}$ le schéma localisé strict correspondant, F un faisceau variable sur X, $\overline{F}$ son image inverse sur $\overline{X}$, alors on a un isomorphisme fonctoriel

$$F_\xi \simeq \Gamma(\overline{X}, \overline{F}).$$

En effet, ξ peut être considéré comme un point géométrique de $\overline{X}$ également, et il suffit **385**
d'appliquer 4.6 et la transitivité des fibres (3.4).

5. Application au calcul des fibres des $R^q f_*$

5.1. Soient

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de schémas, F un faisceau abélien sur X, on se propose de déterminer les $R^q f_*(F)$. En vertu de 3.5, il revient au même, à peu de choses près, de connaître les fibres géométriques $R^q f_*(F)_{\overline{y}}$, pour $y \in Y$. Or (V 5.1) $R^q f_*(F)$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\mathscr{H}^q : Y' \mapsto H^q(X \times_Y Y', F)$$

[33] pas nécessairement filtrantes !

sur Y, et par suite (3.9)

$$R^q f_*(F)_{\overline{y}} = \varinjlim_{Y'} \mathscr{H}^q(Y'),$$

où la limite inductive est prise suivant la catégorie filtrante opposée de la catégorie des Y' étales sur Y ponctués par $\overline{y}$. Choisissant un voisinage ouvert affine U de y, on peut se limiter dans la limite du deuxième membre à la catégorie cofinale des Y' qui sont affines et au-dessus de U. On obtient ainsi

$$R^q f_*(F)_{\overline{y}} \simeq \varinjlim H^q(X \times_Y Y', F), \tag{5.1.1}$$

où Y' varie dans la catégorie précédente.

Introduisons

$$\overline{Y} = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,\overline{y}}) = \varinjlim Y'$$

(cf. 4.5), et

$$\overline{X} = X \times_Y \overline{Y}.$$

386 Notons que dans le système projectif des $X \times_Y Y'$ (déduit de celui des Y' par changement de base $X \to Y$) les morphismes de transition sont affines, on est donc dans les conditions générales de VII 5.1, et on voit aussitôt, par construction de $\varprojlim$ dans loc. cit., que l'on a un isomorphisme canonique

$$\overline{X} = \varprojlim X \times_Y Y'.$$

Désignons par $\overline{F}$ le faisceau sur $\overline{X}$ image réciproque de F, alors on obtient un homomorphisme canonique

$$\varinjlim_{Y'} H^q(X \times_Y Y', F) \longrightarrow H^q(\overline{X}, \overline{F})$$

d'où en comparant avec (5.1.1), un homomorphisme canonique

$$R^q f_*(F)_{\overline{y}} \longrightarrow H^q(\overline{X}, \overline{F}), \tag{5.1.2}$$

évidemment fonctoriel en F.

Supposons maintenant $f : X \to Y$ quasi-compact et quasi-séparé, alors il en est de même de $X' \times_Y Y' \to Y'$, et comme Y' est affine, les $X \times_Y Y'$ sont quasi-compacts et quasi-séparés. Utilisant (5.1.1) et le théorème de passage à la limite VII 5.8, on obtient alors :

Théorème 5.2. Soient $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas, F un faisceau abélien sur X, y un point de Y, $\overline{y}$ le point géométrique au-dessus de y, relatif à une clôture séparable $k(\overline{y})$ de $k(y)$, $\overline{Y} = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,\overline{y}})$ le schéma localisé strict correspondant, $\overline{X} = X \times_Y \overline{Y}$, $\overline{F}$ l'image inverse de F sur $\overline{X}$. Alors l'homomorphisme canonique (5.1.2) est un isomorphisme :

$$R^q f_*(F)_{\overline{y}} \simeq H^q(\overline{X}, \overline{F}).$$

387 Cet énoncé ramène pratiquement la détermination des fibres d'un faisceau $R^q f_*(F)$ à la détermination de la cohomologie d'un préschéma au-dessus d'un schéma strictement local, et sera constamment utilisé par la suite. Techniquement, c'est 5.2 qui explique le rôle important des anneaux henséliens et des anneaux strictement locaux dans l'étude de la cohomologie étale.

Remarque 5.3. L'énoncé reste valable pour $R^0 f_*(F) = f_*(F)$, pour un faisceau d'ensembles quelconque. D'autre part, 5.2 reste également valable pour $R^1 f_*(F)$, lorsque F est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif), en prenant la définition habituelle du $R^1 f_*(F)$ (cf. thèse de Giraud).

5.4. Supposons maintenant que f soit un morphisme fini. Alors $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ est un morphisme fini, et comme $\overline{Y}$ est strictement local, il s'ensuit que $\overline{X}$ est une somme finie de schémas strictement locaux $\overline{X}_i$. Par suite, utilisant 4.7 on trouve

$$H^q(\overline{X}, \overline{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0. \tag{5.4.1}$$

D'autre part, notons que les composantes $\overline{X}_i$ de $\overline{X}$ correspondent aux points $\overline{x}_i$ de $\overline{X}$ au-dessus du point fermé $\overline{y}$ de $\overline{Y}$, i.e. aux points de $\overline{X}_{\overline{y}} = X_y \otimes_{k(y),} k(\overline{y}),$. D'ailleurs, ces points peuvent être considérés comme des points géométriques de X, et $\overline{X}_i$ n'est alors autre que le schéma localisé strict de X en $\overline{x}_i$. On a donc (4.8)

$$H^0(\overline{X}_i, \overline{F}) \simeq F_{\overline{x}_i},$$

d'où

$$H^0(\overline{X}, \overline{F}) = \prod_i F_{\overline{x}_i}, \tag{5.4.2}$$

qui est un isomorphisme fonctoriel en le faisceau d'ensembles F (inutile ici de se restreindre aux faisceaux abéliens). Tenant compte de 5.2 et 5.3, les formules précédentes (5.4.1) et (5.4.2) donnent : **388**

Proposition 5.5. Soient $f : X \to Y$ un morphisme fini de préschémas, y un point de Y. Alors pour tout faisceau F sur X, on a un isomorphisme (fonctoriel en F)

$$f_*(F)_{\overline{y}} \simeq \prod_{\overline{x} \in X_y \otimes_{k(y)} (\overline{y})} F_{\overline{x}},$$

(par suite la formation de $f_*(F)$ commute à tout changement de base $y' \to Y$), et si F est un faisceau abélien, on a

$$R^q f_*(F) = 0 \text{ si } q > 0.$$

On notera que la première formule 5.5 est en fait indépendante de 5.2. et du théorème de passage à la limite général VII 5.7, et qu'elle implique (grâce à 3.5) que $F \mapsto f_*(F)$ est un foncteur exact sur la catégorie des faisceaux abéliens, d'où encore $R^q f_*(F) = 0$ pour $q \neq 0$. Voici une légère variante de 5.5 :

Corollaire 5.6. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entier. Alors pour tout faisceau abélien F sur X, on a

$$R^q f_*(F) = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0.$$

De plus, le foncteur f_* sur les faisceaux d'ensembles commute à tout changement de base $Y' \to Y$.

En effet, on est ramené grâce à 5.2 à prouver que lorsque Y est strictement local, on a $H^q(X, F) = 0$ pour tout faisceau abélien sur X. Or on aura $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$, B étant une algèbre entière, et écrivant $B = \varinjlim B_i$, où B_i parcourt les sous-algèbres de **389**
type fini de B, (qui sont même finies sur A), on aura $X = \varprojlim_i X_i$, où $X_i = \operatorname{Spec} B_i$. En vertu de VII 5.13, on est ramené à prouver que $R^q f_*(F_i) = 0$ pour $q \neq 0$, F_i un faisceau abélien sur X_i, ce qui résulte de 5.5. La dernière assertion de 5.6 se prouve par la même méthode de réduction à 5.5.

Corollaire 5.7. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'immersion. Alors pour tout faisceau F sur X, le morphisme canonique

$$f^* f_*(F) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Comme f se factorise en le produit d'une immersion ouverte et d'une immersion fermée, et que 5.7 est trivial dans le cas d'une immersion ouverte (IV *n*° 3), on est ramené au cas où f est une immersion fermée. On est ramené à prouver que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme correspondant

$$(f^* f_*(F))_{\overline{x}} \longrightarrow F_{\overline{x}}$$

est bijectif, or par transitivité des fibres (3.4) le premier membre n'est autre que la fibre $f_*(F)_{\overline{x}}$, donc il faut vérifier que l'homomorphisme canonique

$$f_*(F)_{\overline{x}} \longrightarrow F_{\overline{x}}$$

est bijectif, ce qui résulte aussitôt de 5.5.

Remarque 5.8. Utilisant 5.5 et procédant encore comme dans 5.6, on prouve facilement que si $f : X \to Y$ est un morphisme entier, F un faisceau en groupes sur X (pas nécessairement commutatif), alors $R^1 f_*(F)$ est le faisceau final sur Y (comparer remarque 5.3).

6. Supports

390 Soit U un ouvert de Zariski du schéma X. Alors $I \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}}$, et en fait U est un sous-objet de l'objet final X de $X_{\text{ét}}$, donc définit un sous-objet $\widetilde{U}$ de l'objet final de $\widetilde{X_{\text{ét}}}$, i.e. un « ouvert » du topos étale $X_{\text{ét}}$ de X (IV 8.3).

Proposition 6.1. L'application précédente $U \mapsto \tilde{U}$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des ouverts (au sens de Zariski) de X, sur l'ensemble des ouverts du topos étale $\widetilde{X_{\text{ét}}}$.

Comme $X_{\text{ét}} \to \widetilde{X_{\text{ét}}}$ est pleinement fidèle, on voit aussitôt que l'application $U \mapsto \widetilde{U}$ conserve les structures d'ordre i.e. $(U \subset V) \Leftrightarrow (\widetilde{U} \subset \widetilde{V})$, en particulier l'application précédente est injective. Pour prouver qu'elle est surjective, considérons un sous-faisceau F du faisceau final $\widetilde{X}$, et considérons les objets de $X_{\text{ét}/F}$, i.e. les schémas étales X' sur X tels que $F(X') \neq \varnothing$. Comme $X' \to X$ est étale, c'est une application ouverte (EGA IV 2.4.6), en particulier son image (au sens ensembliste) $\operatorname{Im}(X')$ est ouverte. Soit U l'ouvert réunion des $\operatorname{Im}(X')$ $(X' \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}/F})$. Comme la famille des $X' \to U$ $(X' \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}/F})$ est surjective, donc couvrante, on conclut que $U \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}/F}$, donc $X_{\text{ét}/F'} = X_{\text{ét}/U}$, donc $F = U$, C.Q.F.D..

Compte tenu de 6.1, nous pouvons donc parler sans ambiguïté d'un « ouvert » de X, sans préciser si nous entendons cette notion au sens habituel de Zariski ou au sens de la topologie étale.

Corollaire 6.2. Soient U un ouvert de X, $j : U \to X$ l'immersion canonique, alors le foncteur

$$j^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{U_{\text{ét}}}$$

391 induit une équivalence de catégories

$$\widetilde{X_{\text{ét}}}/\widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{U_{\text{ét}}}.$$

En effet on vérifie aussitôt que pour tout site C où les $\varprojlim$ finies existent, et pour tout sous-objet U de l'objet final e de C, considérant le foncteur $j : C \to C_{/U}$ défini par $j(S) = S \times U$, j est un morphisme de sites et $j^* : \widetilde{C} \to \widetilde{C/U}$ induit une équivalence $\widetilde{C}/\widetilde{U} \to \widetilde{C/U}$. Il suffit alors de conjuguer ce fait général et le fait que $U_{\text{ét}}$ es canoniquement isomorphe à $X_{\text{ét}/U}$.

De façon imagée, on peut exprimer 6.2 en disant que les opérations de « s'induire sur un ouvert », au sens habituel des schémas d'une part, et au sens des topos de l'autre, sont compatibles. Voici une compatibilité analogue pour les opérations de « restriction à un fermé » :

Théorème 6.3. Soient X un schéma, Y un sous-schéma fermé de X, $U = X - Y$ muni de la structure induite, $i : Y \to X$ et $j : U \to X$ les immersions canoniques. Alors le foncteur

$$i_* : \widetilde{Y_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

est pleinement fidèle, et si $F \in \operatorname{Ob} \widetilde{X_{\text{ét}}}$, F est isomorphe à un faisceau de la forme $i_*(G)$ sss $j^*(F)$ est isomorphe au faisceau final $\widetilde{U}$ sur U.

Démonstration. Comme i_* et i^* sont adjoints l'un de l'autre, le fait que i_* soit pleinement fidèle équivaut aussi au fait que l'homomorphisme fonctoriel

$$i^*(i_*(G)) \longrightarrow G$$

est un isomorphisme, ce qui n'est autre que 5.7. D'autre part, si $G \in \operatorname{Ob} \widetilde{Y_{\text{ét}}}$, alors on **392**
vérifie trivialement grâce à 6.2 que $j^*(i_*(G))$ est le faisceau final sur U. Inversement, si $F \in \operatorname{Ob} \widetilde{X_{\text{ét}}}$ est tel que $j^*(F)$ soit le faisceau final, prouvons que F est isomorphe à un faisceau de la forme $i_*(G)$, ou ce qui revient au même, que l'homomorphisme canonique

$$G \longrightarrow i_* i^* G$$

est un isomorphisme. Or il suffit de vérifier encore que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme induit sur les fibres géométriques en $\overline{x}$ est un isomorphisme. Lorsque $x \in U$, cela n'est autre que l'hypothèse faite sur G. Lorsque $x \in Y$, par transitivité des fibres on est ramené à vérifier que l'homomorphisme sur les fibres en $\overline{x}$ induit par

$$i^*(G) \longrightarrow i^*(i_* i^*(G))$$

est un isomorphisme, or l'homomorphisme précédent est un isomorphisme d'après 5.7 appliqué à $F = i^* G$ et à i. Cela achève la démonstration de 6.3.

Corollaire 6.4. Le foncteur i_* induit une équivalence de la catégorie des faisceaux abéliens sur Y avec la catégorie des faisceaux abéliens sur X dont la restriction à $U = X - Y$ est nulle.

Conformément à l'usage courant nous identifierons donc souvent un faisceau abélien sur Y à un faisceau abélien sur X nul sur U.

6.5. En vertu de 6.1 nous savons donc (si X est un schéma) interpréter les « ouverts » du topos $\mathscr{E} = \widetilde{X_{\text{ét}}}$ comme ouverts U de X au sens habituel, et en vertu de 6.3
avec cette identification le « topos résiduel » $\mathscr{E}_{\complement} U$ de IV 3 est équivalent canoniquement **393**
au topos $\widetilde{Y_{\text{ét}}}$, où $Y = X - U$ est muni d'une structure induite quelconque, faisant de Y un schéma. Nous pouvons par suite appliquer à cette situation les résultats de IV 3., notamment la description IV 3.3 des faisceaux F sur X en terme des triplets (F', F'', u) où F' est un faisceau sur Y, F'' un faisceau sur U et u un homomorphisme de F' dans $i^* j_*(F')$. Nous utiliserons librement par la suite les notations $i^!$, $j_!$ de IV.3, qui désignent des foncteurs

$$j_! : \widetilde{(U_{\text{ét}})}_{\text{ab}} \longrightarrow \widetilde{(X_{\text{ét}})}_{\text{ab}},$$
$$i^! : \widetilde{(X_{\text{ét}})}_{\text{ab}} \longrightarrow \widetilde{(Y_{\text{ét}})}_{\text{ab}},$$

où l'indice « ab » dénote la catégorie des faisceaux abéliens. Ces foncteurs donnent lieu aux deux suites exactes IV 3.7.

6.6. Compte tenu des développements qui précédent et de la terminologie générale introduite dans IV 8.5, il y a lieu d'introduire, pour un faisceau abélien F sur X, ou une section φ d'un tel faisceau, la notion de support de F resp. de φ, comme étant le fermé (au sens habituel, i.e. de Zariski) complémentaire du plus grand ouvert sur lequel l'objet en question s'annule.

Dans la situation actuelle, il s'impose également de remplacer les notations générales V 4.3 $H^q(\mathscr{E}_{\complement U} F)$, $\mathscr{H}^q_{\complement U}(F)$ par les notations $H^q_Y(X,F)$, $\mathscr{H}^q_Y(F)$, le premier désignant un groupe abélien, le deuxième un faisceau abélien sur Y (ou encore un faisceau abélien sur X, nul sur U). Ainsi, on a $\mathscr{H}^q_Y = R^{q_y!}$ etc.

Je renvoie à V 6 pour les propriétés générales des foncteurs précédents.

7. Morphismes de spécialisation des foncteurs fibres

394 7.1. Nous avons vu au N° 4 comment on associe, à tout point géométrique ξ du schéma X, un x-schéma strictement local

$$\overline{X}(\xi) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\xi},$$

ne dépendant, en fait, que du point géométrique au-dessus de l'image x de ξ défini par la clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$ dans $\Omega = k(\xi)$. Nous nous restreindrons souvent par la suite aux points géométriques $\xi = \operatorname{Spec}\Omega$ algébriques séparables sur X, i.e. tels que Ω soit une clôture séparable de $k(x)$, i.e. $\xi = \overline{x}$. Appelons un X-schéma Z un localisé strict de X s'il est X-isomorphe à un schéma de la forme $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{X,\overline{x}}$, on voit donc que

$$\xi \mapsto \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{X,\xi} = \overline{X}(\xi)$$

est une équivalence de la catégorie des points géométriques algébriques séparables sur X, avec la catégories des X-schémas qui sont des localisés stricts de X, quand on prend comme morphismes dans l'une et l'autre catégorie les seuls isomorphismes.

Ce dernier énoncé n'est plus exact quand on prend comme morphismes tous les X-morphismes, car dans la seconds catégorie il peut y avoir des X-morphismes qui ne sont pas des isomorphismes. On pose alors la

Définition 7.2. Soient ξ, ξ' deux points géométriques du schéma X, on a appelle flèche de spécialisation de ξ' à ξ tout X-morphisme entre les localisés stricts correspondants

$$\overline{X}(\xi') \longrightarrow \overline{X}(\xi).$$

395 On dit que ξ est une spécialisation de ξ' ou que ξ' est une générisation de ξ, s'il existe une flèche de spécialisation de ξ' à ξ.

On notera que les flèches de spécialisation se composent de façon évidente, de sorte qu'en prenant pour morphismes les flèches de spécialisation, les points géométriques de X forment une catégorie, équivalente (ainsi que la sous-catégorie pleine formée des points géométriques algébriques et séparables sur X) à la sous-catégorie pleine de $(\mathrm{Sch})_{/X}$ formée des localisés stricts de X.

Lemme 7.3. Soient X un schéma, Z un X-schéma qui est isomorphe à une limite projective pseudo-filtrante de X-schémas étales X_i, avec des morphismes de transition affines (VII 5.1), ξ' un point géométrique de X, $Z' = \overline{X}(\xi')$ le localisé strict correspondant. Alors :

a) L'application de restriction

$$\operatorname{Hom}_X(Z',Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}_X(\xi',Z)$$

est bijective.

b) Pour que les deux membres soient non vides, il faut et il suffit que l'images x' de ξ' dans X soit dans celle de Z.
c) Soit T un Z-schéma, pour que T soit un localisé strict de Z, il faut et il suffit qu'il soit un localisé strict de X.

Démonstration.

a) on est ramené aussitôt au cas où Z est un des X_i, i.e. où Z est étale sur X, et par le changement de base $Z' \to X$ on peut supposer que $Z' \xrightarrow{\sim} X$, d'où la conclusion par 4.2 (ii).
b) On note que si x' est l'image d'un point z de Z, alors $k(z)$ est nécessairement une extension algébrique séparable de $k(x')$, donc il existe un $k(x')$-homomorphisme de cette dernière dans $k(\xi')$, d'où la conclusion.
c) La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur. **396**

On conclut de 7.2 et 7.3 :

Proposition 7.4. Soient ξ, ξ' deux points géométriques du schéma X. Alors l'application de restriction définit une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), \overline{X}(\xi))$ des flèches de spécialisation de ξ' dans ξ, avec l'ensemble des X-morphismes de ξ' dans $\overline{X}(\xi)$.

Corollaire 7.5. Pour que ξ soit une spécialisation de ξ', il faut et il suffit qu'il en soit de même pour les images x, x' de ξ, ξ' dans X, i.e. que x appartienne à l'adhérence de $\{x'\}$.

Comme $\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{X,\xi} \to \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{X,x}$ est fidèlement plat (4.4) il est surjectif, et il suffit donc d'appliquer la deuxième assertion de 7.3.

Corollaire 7.6. Pour tout schéma X, soit $\mathrm{Pt}(X)$ la catégorie des points géométriques sur X (ou encore, des points géométriques algébriques séparables sur X), les morphismes étant les flèches de spécialisation. Soit alors ξ un point géométrique d'un schéma X, $\overline{X}(\xi)$ le localisé strict correspondant, on a alors une équivalence des catégories

$$\mathrm{Pt}(\overline{X}(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pt}(X)_{/\xi},$$

obtenue en associant, à tout point géométrique ξ' de $\overline{X}(\xi)$, le point géométrique correspondant sur X, avec le morphismes de spécialisation dans ξ déduit du morphisme structural $\xi' \to \overline{X}(\xi)$ grâce à 7.4.

En d'autres termes, la donnée d'une générisation ξ' du point géométrique ξ équivaut essentiellement à la donnée d'une point géométrique de $\overline{X}(\xi)$. Notons d'ailleurs qu'en vertu de 7.3 c), l'homomorphisme correspondant $\overline{X}(\xi') \to \overline{X}(\xi)$ fait de $\overline{X}(\xi')$ le localisé **397**
strict de $\overline{X}(\xi)$, relativement à ξ'.

7.7. Interprétons maintenant, pour tout point géométrique ξ de X et tout faisceau F sur X, la fibre F_ξ comme étant $\Gamma(\overline{X}(\xi), \overline{F}(\xi))$, où $\overline{F}(\xi)$ est l'image inverse de F sur $\overline{X}(\xi)$ (4.8). Alors on voit que toute flèche de spécialisation

$$u : \xi' \longrightarrow \xi$$

induit un homomorphisme, fonctoriel en F :

$$u^* : F_\xi \longrightarrow F_{\xi'},$$

appelé homomorphisme de spécialisation associé à la flèche de spécialisation u. Il est évident, d'après la transitivité des images inverses de faisceaux, que l'on a pour une flèche de spécialisation composée :

$$(wu)^* = u^* w^*.$$

7.8. Si $\mathscr{E}$ est un topos, rappelons (IVXXX référence) qu'on a appelé « foncteur fibre », ou (par abus de langage) « point » du topos $\mathscr{E}$, tout morphisme de « topos final » (Ens) (isomorphe à la catégorie des faisceaux sur un espace réduit à un point !) dans $\mathscr{E}$, i.e. tout foncteur

$$\varphi = \mathscr{E} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

qui commute aux limites inductives quelconques, et aux limites projectives finies. Il y a lieu de considérer l'ensemble des foncteurs fibres de $\mathscr{E}$ comme l'ensemble des objets d'une sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om(\mathscr{E}, (\mathrm{Ens}))$, appelée catégorie des foncteurs fibres du topos E, dont l'opposée est appelée catégorie des points de $\mathscr{E}$, et notée $\mathrm{Pt}(E)$, cf. (IV 6.1).

398 Lorsque E est de la forme $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ où X est un schéma, nous avons défini dans 3.3 et 7.7 un foncteur

$$(*) \qquad \mathrm{Pt}(X) \longrightarrow \mathrm{Pt}(\widetilde{X_{\text{ét}}}),$$

où le premier membre est défini dans 7.6. Ceci posé, on a le

Théorème 7.9. Soit X un schéma. Le foncteur précédent $(*)$ est une équivalence de la catégorie des points géométriques sur X (avec comme morphismes les flèches de spécialisation) avec la catégorie des points du topos étale $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ (opposée de celle des foncteurs fibres sur $\widetilde{X_{\text{ét}}}$).

Comme ce théorème ne servira plus dans la suite du séminaire, nous nous bornons ici à une esquisse de démonstration, où nous nous permettrons certaines libertés avec les questions d'univers.

a) Le foncteur envisagé est pleinement fidèle. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, X_{\text{ét}}$, soit $\overset{\vee}{X} : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\mathrm{Ens})$ défini par

$$\overset{\vee}{X}(F) = \mathrm{Hom}(X, F) = F(X).$$

Notons que le foncteur fibre

$$\mathscr{E}_\xi : F \longrightarrow F_\xi$$

peut s'écrire

$$\mathscr{E}_\xi \simeq \varinjlim_i X_i^\vee,$$

où les X_i sont des schémas affines étales sur X, indexés par une certaine catégorie filtrante (cf. 4.3 et 4.5). On a donc pour tout foncteur $\varphi : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\mathrm{Ens})$:

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\xi, \varphi) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i^\vee, \varphi),$$

d'autre part il est bien connu que l'on a un isomorphisme bifonctoriel

$$\mathrm{Hom}(X_i^\vee, \varphi) \simeq \varphi(X_i).$$

399 Lorsque φ est de la forme $\mathscr{E}_\xi$, donc

$$\varphi \simeq \varinjlim_j X'^\vee_j,$$

on a donc une bijection naturelle

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\xi, \mathscr{E}_{\xi'}) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_X(X'_j, X_i).$$

D'autre part on a (dans la catégorie des schémas)

$$\overline{X}(\xi) = \varprojlim_i X_i, \quad \overline{X}(\xi') = \varprojlim_j X'_j,$$

d'où

$$\mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), \overline{X}(\xi)) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), X_i),$$

d'autre part, comme X_i est localement de présentation finie sur X, on a

$$\mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), X_i) \simeq \varinjlim_j \mathrm{Hom}_X(X_j, X_i),$$

d'où

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), \overline{X}(\xi)) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_X(X'_j, X_i).$$

La comparaison de $(*)$ et $(**)$ donne la conclusion voulue (moyennant une vérification de compatibilités, laissée au lecteur).

b) Le foncteur envisagé est essentiellement surjectif.

7.9.1. Remarquons d'abord que si C est un site où les $\varprojlim$ finies sont représentables, $\widetilde{C} = \mathscr{E}$ le topos correspondant, alors tout foncteur fibre φ sur $\mathscr{E}$ peut se représenter comme une « limite inductive filtrante » de foncteurs de la forme

$$\check{Y}(F) = F(Y) = \mathrm{Hom}(\widetilde{Y}, F), Y \in \mathrm{Ob}\, C,$$

(où $\widetilde{Y}$ est le faisceau associé à Y), de la façon suivante [33]. On considère la catégorie $C_{/\varphi}$ **400**
des couples (Y, ξ), avec $Y \in \mathrm{Ob}\, C$, $\xi \in \varphi(\widetilde{Y})$ (les morphismes se définissant de la façon évidente), et on note qu'on a un homomorphisme évident

$$(*) \qquad \varinjlim_{(Y,\xi)\in C^0_{/\varphi}} \check{Y} \longrightarrow \varphi$$

en remarquant que

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim_{C_\varphi} \check{Y},) \simeq \varprojlim_{C_{/\varphi}} \mathrm{Hom}(\check{Y}, \varphi) \simeq \varprojlim_{C_{/\varphi}} \varphi(\check{Y}).$$

Or on a un élément canonique dans $\varprojlim_{C_{/\varphi}} \varphi(\widetilde{Y})$, en associant à tout (Y, ξ) l'élément ξ de $\varphi(Y)$. Utilisant le fait que les $\varprojlim$ finies existent dans C, et que le foncteur $Y \mapsto \varphi(\widetilde{Y})$ y commute, on voit que dans $C_{/\varphi}$ les $\varprojlim$ finies existent ; a fortiori $C^0_{/\varphi}$ est filtrant. Utilisant que tout faisceau F est limite inductive des faisceaux de la forme $\widetilde{Y}$, et utilisant le fait que φ commute aux limites inductives, on conclut aisément que l'homomorphisme de foncteurs $(*)$ est bijectif, et donne donc la représentation annoncée.

7.9.2. Remarquons également que si $\mathscr{E}$ est un topos, Y un objet de $\mathscr{E}$, d'où un topos $\mathscr{E}_{/Y}$, alors la donnée d'un foncteur fibre φ pour $\mathscr{E}_{/Y}$ équivaut à la donnée d'un couple (φ, ξ), où φ est un foncteur fibre pour $\mathscr{E}$, et $\xi \in (Y)$. Au foncteur fibre $\psi : \mathscr{E}_{/Y} \to (\mathrm{Ens})$ on associe le couple (φ, ξ), où φ est le composé $Z \mapsto \varphi(Z) = \psi(Z \times Y)$, et où $\xi \in \varphi(Y) = \psi(Y \times Y)$ est l'image de l'unique élément de $\psi(Y)$ par le morphisme diagonal de $Y \times Y$.

7.9.3. Revenons maintenant au cas du site $C = \widetilde{X_{\text{ét}}}$, et soit $\varphi : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\text{Ens})$ un foncteur fibre sur le topos étale de X. Considérant la restriction de φ à la sous-catégorie pleine de $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ formée des ouverts de ce topos, ou ce qui revient au même (6.1) des ouverts U de X, on trouve une application **401**

$$\varphi_0 : \mathscr{U}(X) \longrightarrow \{0,1\}$$

commutant aux sup quelconques et aux inf finis. (On note que pour $u \in \mathscr{U}(X)$, $\varphi(U)$ est vide ou réduit à un point, et on prend $\varphi_0(U) = 0$ ou 1 suivant qu'on est dans l'un ou l'autre cas).

On voit facilement, grâce au fait que tout fermé irréductible de X a un point générique et un seul [33], que φ_0 est défini à l'aide d'un unique $x \in X$, par la condition

$$\varphi_0(U) = 1 \quad \text{sss} \quad x \in U,$$

i.e.

$$\varphi(U) = \varnothing \Leftrightarrow x \in U.$$

Soit $F \in \operatorname{Ob} \widetilde{X_{\text{ét}}}$, alors l'image de F dans le faisceau final X est un ouvert ; et comme

$$\varphi(F) \longrightarrow \varphi(U)$$

est surjectif, on voit que $\varphi(F) \neq \varnothing$ sss $\varphi(U) \neq \varnothing$, i.e. sss $x \in U$. Soit alors $C_{/\varphi}$ la catégorie des couples (X', ξ) où $X' \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}}$, et $\xi \in \varphi(X')$. On a signalé dans 7.9.1 que $C^0_{/\varphi}$ est filtrante connexe. De plus, grâce à 7.9.2 et à ce qui précède appliqué à X' au lieu de X, si $(X', \xi) \in \operatorname{Ob} X_{\text{ét}}$, il lui est associé un unique point $x' \in X'$, tel que pour un morphisme étale $X'' \to X'$, ξ est dans l'image de $\varphi(X'') \to \varphi(X')$ sss x' est dans celle de X''. On conclut de ceci que le schéma $\varprojlim$ des X' suivant la catégorie C des (X', ξ) existe et est un localisé strict Z de X, correspondant donc à point géométrique ξ et un
402 foncteur fibre $\mathscr{E}_\xi$. Pour tout faisceau F, on a alors

$$\mathscr{E}_\xi(F) \simeq \varinjlim_{C_\varphi}(F)(X').$$

Compte tenu de 7.9.1 on en conclut que φ est isomorphe à $\mathscr{E}_\xi$, ce qui achève la démonstration de 7.9.

8. Deux suites spectrales pour les morphismes entiers

Proposition 8.1. Soient $f : X \to Y$ un morphisme entier surjectif, F un faisceau abélien sur Y. Pour tout entier i, soit $\mathscr{H}^i(F)$ le préfaisceau sur $(\text{Sch})_{/Y}$ défini par

$$\mathscr{H}^i(F)(Z) = H^i(Z, F_Z),$$

où F_Z est l'image inverse de F sur Z. Alors il existe une suite spectrale (fonctorielle en F)

$$H^*(X, F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(X/Y, \mathscr{H}^q(F))$$

(« suite spectrale de descente »).

Bien entendu, le symbole $H^p(X/Y, G)$, pour un préfaisceau G sur $(\text{Sch})_{/Y}$, désigne le p.ème groupe de cohomologie de Čech relatif, défini à l'aide du complexe des $C^n(X/Y, G) = G(X^{n+1})$, où X^m désigne la puissance m. ième dans $(\text{Sch})_{/Y}$. Pour établir 8.1, soit $p_n : X^{n+1} \to Y$ la projection, et posons

$$A^n = p_{n*}(\mathscr{Z}_{X^{n+1}}),$$

[33] C'est un cas particulier de IV 6.8.3.

[33] i.e. X est *sobre* dans la terminologie de IV 4.2.1. L'assertion faite est un cas particulier de IV 4.2.3.

où $\mathscr{Z}_{X^{n+1}}$ désigne le faisceau constant $\mathscr{Z}$ sur X^{n+1}. Alors les A^n sont les composantes d'un faisceau abélien simplicial sur Y, donc d'un complexe de faisceaux abéliens A^* sur Y. Notons qu'on a un homomorphisme évident

$$(*) \qquad \mathscr{Z}_Y \longrightarrow A^0.$$

Ceci posé, on a le 403

Lemme 8.2. Le complexe (A^*) muni de l'homomorphisme $(*)$ est une résolution de $\mathscr{Z}_Y$. Plus généralement pour tout faisceau abélien F sur Y, $A^* \otimes_{\mathscr{Z}} F$ est une résolution de F.

Démonstration : On peut supposer Y affine, donc $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$, où B est une A algèbre entière. On aura $B = \varinjlim_i B_i$, où B_i parcourt les sous-algèbres de type fini donc finies de B, d'où $X = \varprojlim X_i$, où $X_i = \operatorname{Spec} B_i$. Utilisant VII 5.11, on voit que le complexe augmenté $A^*(X/Y)$ est alors la limite inductive des complexes augmentés $A^*(X_i/Y)$. Cela nous ramène au cas où f est fini. Il suffit de prouver que pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, le complexe $A^*_{\overline{y}}$ est une résolution de $\mathscr{Z}_{\overline{y}}$, et le reste après tensorisation par un F. Mais si $X_{\overline{y}}$ est la fibre de X en $\overline{y}$, il résulte de 5.5 que le complexe $A^*_{\overline{y}}$ n'est autre que le complexe analogue $A^*(X_{\overline{y}}/\overline{y})$. Cela nous ramène au cas où Y est le spectre d'un corps séparablement clos k. Utilisant 1.3 a) et b), on peut même supposer k algébriquement clos, et X réduit, donc X de la forme I_Y, où I est un ensemble fini. Mais alors le complexe $A^* \otimes F$ s'identifie au complexe de cochaînes trivial de l'ensemble d'indices I à coefficient dans $F_{\overline{y}}$, donc c'est bien une résolution de $F_{\overline{y}}$.

Nous obtenons donc, comme conséquence de 8.2, une suite spectrale

$$H^*(Y, F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(H^q(Y, A^* \otimes F)),$$

et il reste à expliciter le terme initial. Or on a un homomorphisme canonique 404

$$A^n \otimes F \longrightarrow p_{n_*} p_n^*(F),$$

et ce dernier est un isomorphisme, comme on voit encore par réduction au cas f fini et passage aux fibres. Utilisant 5.5, on en conclut

$$H^q(Y, A^n \otimes F) \simeq H^q(X^{n+1}, p_n^*(F)) \Longrightarrow \mathscr{H}^q(F)(X^{n+1}),$$

ce qui donne bien le terme initial annoncé dans 8.1.

Remarque 8.3. a) Lorsque l'on se donne un recouvrement localement fini de Y par des ensembles fermés Y_i, et qu'on pose $X = \coprod_i Y_i$ alors le morphisme canonique $f : X \to Y$ est fini, et la suite spectrale 8.1 a un terme initial qui s'explicite comme la cohomologie du complexe défini par les $H^q(Y_{i_0 \ldots i_p}, F | Y_{i_0 \ldots i_p})$, où $Y_{i_0 \ldots i_p} = Y_{i_0} \cap \ldots \cap Y_{i_p}$. C'est donc là l'analogue de la suite spectrale de Leray pour un recouvrement fermé localement fini d'un espace topologique ordinaire (TF Chapitre II 5.2.4). Cette dernière peut d'ailleurs se généraliser également en une suite spectrale relative à un morphisme « fini » i.e. propre à fibres finies, en procédant comme dans 8.1.

b) On notera l'analogie de la suite spectrale de 8.1 avec la suite spectrale de Leray d'un recouvrement (X_i) de Y (en l'occurrence par des X_i étales sur Y) ; cette dernière s'obtiendrait formellement en écrivant la suite spectrale 8.1 pour $X = \coprod_i X_i$. Il est probable en fait que ces deux suites spectrales admettent une généralisation commune, qui serait valable chaque fois qu'on aurait une famille de morphismes $(X_i \to Y)$, qui soit « famille de descente effective universelle » pour la catégorie fibrée des faisceaux étales sur un schéma de base variable (cf. $n°$ 405

9 ci-dessous). La question analogue se pose d'ailleurs en topologie ordinaire, à propos d'une généralisation commune des deux espèces de suites spectrales de Leray d'un recouvrement, supposé soit ouvert, soit fermé localement fini [33].

Proposition 8.4. Soient Y un schéma, π un groupe profini, $(\pi_i)_i$ le système projectif des groupes quotients finis discrets de π, $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif de revêtements principaux de Y, de groupes les π_i, les homomorphismes de transition $X_j \to X_i$ étant compatibles avec les homomorphismes $\pi_j \to \pi_i$ sur les groupes d'opérateurs, $X = \varprojlim X_i$ (cf. VII 5.1), de sorte que le groupe π opère sur le Y-schéma X, F un faisceau abélien sur Y. Alors on a une suite spectrale « de Hochschild-Serre » (fonctorielle en F)

$$H^*(Y,F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(\pi, \varinjlim_i H^q(X_i, F_{X_i})),$$

où F_{X_i} est l'image inverse de F sur X_i, et $H^p(\pi,-)$ désigne la cohomologie galoisienne.

Le terme E_2^{pq} écrit ici est également (par définition de $H^p(\pi,-)$ et transitivité des limites inductives) isomorphe à

$$E_2^{pq} = \varinjlim_i H^p(\pi_i, H^q(X_i, F_{X_i})),$$

ce qui nous montre qu'il suffit de trouver un système inductif de suites spectrales (dépendant de l'indice i)

$$H^*(Y,F) \Longleftarrow {}^iE_2^{pq} = H^p(\pi_i, H^q(X_i, F_{X_i})).$$

Cela nous ramène à définir la suite spectrale dans le cas où π est fini. Alors $f : X \to Y$
406 est un morphisme couvrant dans $Y_{\text{ét}}$, donc on peut écrire la suite spectrale de Leray de ce morphisme. Compte tenu des isomorphismes canoniques :

$$X^n \simeq X \overset{G}{\times} G^n,$$

un calcul bien connu montre alors que pour tout préfaisceau $\mathscr{H}$ sur $X_{\text{ét}}$, transformant somme en produits, $C^*(X/Y, \mathscr{H})$ n'est autre que le complexe des cochaînes homogènes de G à coefficients dans $\mathscr{H}(X)$, d'où la forme annoncés pour le terme initial.

Une variante de cette démonstration, évitant tout calcul, consiste à considérer $E \mapsto X \times_\pi E$ comme un morphisme du site des π-ensembles finis dans le site étale de Y, et à écrire la suite spectrale de Leray de ce morphisme. Enfin, lorsque π est fini, on peut également regarder la suite spectrale de Hochschild-Serre comme étant un cas particulier de 8.1 relativement au morphisme $f : X \to Y$.

Corollaire 8.5. Supposons Y quasi-compact et quasi-séparé, alors la suite spectrale de 8.4 s'écrit

$$H^*(Y,F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(\pi, H^q(X, F_X)).$$

En effet, en vertu de VII 5.8, on a alors des isomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^q(X_i, F_{X_i}) \simeq H^q(X, F_X).$$

Corollaire 8.6. Soient Y un schéma local hensélien de point fermé y, F un faisceau abélien sur Y, F_0 le faisceau induit sur $Y_0 = \operatorname{Spec}(k(y))$. Alors les homomorphismes canoniques

$$H^n(Y,F) \longrightarrow H^n(Y_0, F_0)$$

407 sont des isomorphismes.

[33]Depuis la rédaction de ces lignes, P. Deligne a fait une théorie générale des « suites spectrales de descente », cf. Exp. V bis.

Soit en effet $\bar{y}$ un point géométrique sur y, correspondant à une clôture séparable $k(y) = k(\bar{y})$ de $k(y)$; comme Y est hensélien, le localisé strict X de Y en $\bar{y}$ est la limite projective des revêtements étales galoisiens connexes $\bar{y}$-ponctués X_i, de sorte qu'on est sous les conditions d'application de 8.5. Comme $H^q(X, F_X) = 0$ pour $q > 0$ en vertu de 4.7, on en conclut des isomorphismes

$$H^n(Y, F) \xleftarrow{\sim} H^n(\pi, F(X)),$$

où π est le « groupe de Galois » de X sur Y, isomorphe à celui de $\overline{k(y)}$ sur $k = k(y)$. On trouve de même (ou par 2.3)

$$H^n(Y_0, F_0) \xleftarrow{\sim} H^n(\pi, F_0(X_0)),$$

où $X_0 = X \times_{Y_0} Y \simeq \mathrm{Spec}(k(\bar{y}))$. Or l'homomorphisme de restriction $F(X) \to F_0(X_0)$ est un isomorphisme en vertu de 4.8, d'où résulte aussitôt la conclusion 8.6.

9. Descente de faisceaux étales

Le présent numéro ne servira plus dans la suite de ce Séminaire, et peut être omis en première lecture.

Proposition 9.1. Soit $f : X' \to X$ un morphisme surjectif (resp. universellement **408**
submersif (SGA I IX 2.1)) de schémas. Alors le foncteur $f^* : X_{\text{ét}} \to X'_{\text{ét}}$ est fidèle et « conservatif » (cf. 3.6) (resp. induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ dans la catégorie des faisceaux sur $X'_{\text{ét}}$ munis d'une donnée de descente relativement à $f : X' \to X$).

Le premier point résulte aussitôt de la transitivité des foncteurs fibres (3.4) et de (3.7), le deuxième (qui s'énonce aussi en disant que f est un morphisme de descente relativement à la catégorie fibrée des faisceaux étales sur des schémas variables), signifie aussi que pour deux faisceaux F, G sur Y, le diagramme naturel

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}(F', G') \rightrightarrows \mathrm{Hom}(F'', G'')$$

est exact, où F' et G' (resp. F'' et G'') sont les images inverses de F et G sur X' (resp. sur $X'' = X' \times_X X'$). Prenant pour F le faisceau final, l'énoncé donne le

Corollaire 9.2. Soit $f : X' \to X$ un morphisme universellement submersif. Alors pour tout faisceau F sur X, le diagramme

$$\Gamma(X, F) \to \Gamma(X', F') \rightrightarrows \Gamma(X'', F'')$$

est exact, où $X'' = X' \times_X X'$, et où F', F'' sont les images inverses de F sur X', X''.

Nous prouverons 9.1 en utilisant le

Lemme 9.3. Supposons f universellement submersif. Soit F un faisceau sur X, dé-
signons par $S(F)$ l'ensemble des sous-faisceaux de X, et définissons de façon analogue **409**
$S(F')$, $S(F'')$. Alors le diagramme d'applications naturelles

$$S(F) \to S(F') \rightrightarrows S(F'')$$

est exact.

Démonstration. Le fait que $S(F) \to S(F')$ est injectif résulte aussitôt du fait que le foncteur f^* est conservatif ; car si F_i $(i = 1, 2)$ sont deux sous-faisceaux de F tels que $f^*(F_1) = f^*(F_2)$, alors les inclusions $F_3 = F_1 \cap F_2 \to F_i$ $(i = 1, 2)$ sont des isomorphismes, car elles deviennent telles après application du foncteur f^*, donc $F_1 = F_2$. Il reste à prouver que si G' est un sous-faisceau de F' tel que $\mathrm{pr}_1^*(G') = \mathrm{pr}_2^*(G')$, alors G' est l'image inverse d'un sous-faisceau de F. Notons que l'on peut trouver un épimorphisme $F_1 \to F$ dans $X_{\text{ét}}$, ou F_1 est représentable par un schéma étale sur X. Introduisons $F_2 = F_1 \times_F F_1$, et de même F_1', F_1'', F_2', F_2'', faisceaux donnant lieu à un diagramme d'ensembles

$$\begin{tikzcd} S(F) \arrow[r] \arrow[d] & S(F') \arrow[r] \arrow[d] & S(F'') \arrow[d] \\ S(F_1) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & S(F_1') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & S(F_1'') \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S(F_2) \arrow[r] & S(F_2') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & S(F_2''), \end{tikzcd}$$

dans lequel les colonnes sont exactes, grâce aux propriétés d'exactitude dans la catégorie des faisceaux sur X, X', X'' respectivement. Un diagram-chasing standard montre alors que, pour prouver que la première ligne est exacte, il suffit de le prouver pour les lignes 2 et 3. Or pour la ligne 2 cela résulte du fait que F_1 est représentable, $X' \to X$ univer-
410 sellement submersif, et de SGA 1 IX 2.3. D'autre part, F_2 est également représentable, car c'est un sous-faisceau de $F_1 \times_X F_1$ qui est représentable, et on applique 6.1. Donc la ligne 3 est aussi exacte, C.Q.F.D.

Prouvons maintenant 9.1, i.e. que tout morphisme $u' : F' \to G'$, compatible avec les données de descente sur F', G', u' provient d'un morphisme $u : F \to G$. Soit $H = F \times G$, donc $H' = F' \times G'$, $H'' = F'' \times G''$, alors le graphe de u' est un sous-faisceau Γ' de H', dont les deux images inverses sont égales au graphe d'un même morphisme $u'' : F'' \to G''$. Donc en vertu de 9.3. Γ' provient d'un sous-faisceau Γ de H. Je dis que Γ est le graphe d'un morphisme $u : F \to G$, i.e. que le morphisme $p : \Gamma \to F$ induit par pr_1 est un isomorphisme : en effet, il devient un isomorphisme après le changement de base $X' \to X$, et on applique la partie déjà prouvée de 9.1. Le morphisme $u : F \to G$ répond alors à la question, C.Q.F.D.

Théorème 9.4. Soit $f : X' \to X$ un morphisme surjectif de schémas. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

a) f est entier.
b) f est propre.
c) f est plat et localement de présentation finie [33].
d) X est discret (p.ex. le spectre d'un corps).

Alors f est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur (Sch) des faisceaux étales sur des schémas variables, i.e. le foncteur f^* induit une équivalence
411 de la catégorie des faisceaux sur X avec la catégorie des faisceaux sur X', munis d'une donnée de descente relativement à $f : X' \to X$.

9.4.1. Soit F' un faisceau sur X', muni d'une donnée de descente relativement à $f : X' \to X$. On définit alors un foncteur

$$G : X^0_{\text{ét}} \longrightarrow (\text{Ens})$$

par la formule

$$G(Y) = \operatorname{Ker}(F'(Y') \rightrightarrows F''(Y'')).$$

On constate aussitôt que G est un faisceau pour la topologie étale, d'autre part on a un homomorphisme canonique injectif $G \to f_*(F')$, d'où un homomorphisme $f^*(G) \to F'$, et ce dernier est évidemment compatible avec les données de descente. Il reste à

[33] Il est probable que cette deuxième hypothèse est en fait superflue.

examiner si cet homomorphisme est un isomorphisme. Noter que G est aussi définissable par l'exactitude de

$$G \to f_*(F') \rightrightarrows g_*(F''),$$

donc pour tout changement de base $Y \xrightarrow{h} X$ qui commute à la formation de $f_*(F')$ et $g_*(F'')$, $h^*(G) = G_Y$ s'identifie au faisceau « descendu » de $F'_{Y'}$ par $Y' \to Y$, et bien entendu l'homomorphisme ${f_Y}^*(G_Y) \to (F_Y)'$ est celui déduit de $f^*(G) \to F'$ par changement de base. Or supposons que le changement de base $f : Y = X' \to X$ commute à la formation de $f_*(F')$ et $g_*(F'')$, et notons que comme $Y' = X' \times_X X'$ a une section sur $Y' = X'$, donc $Y' \to Y$ est un morphisme de descente effective pour toute catégorie fibrés, en particulier pour $\mathscr{F}$, il s'ensuit que $f_Y^*(G_Y) \to (F_Y)'$ est un isomorphisme, donc $f^*(G) \to F'$ devient un isomorphisme après changement de base $Y' = X' \times_X X' \to X'$. Comme ce dernier a une section, $f^*(G) \to F'$ est un isomorphisme, donc la donnée de descente envisagée sur F' est effective. 412

9.4.2. Ceci prouve le théorème 9.4 dans le cas a), grâce à 5.6. Le cas b) résulte également du fait que si f est propre, alors f_* commute à tout changement de base $Y' \to Y$, (qui sera prouvé dans un exposé ultérieur (XII 5.1 (i))).

9.4.3. Dans le cas c), la question étant locale sur X on peut supposer X affine, et qu'il existe un schéma affine X'_1, de présentation finie, quasi fini et fidèlement plat sur X, et un X-morphisme $X'_1 \to X'$, ce qui nous ramène au cas où f est quasi-fini. Quitte à localiser encore sur X, au sens de la topologie étale cette fois, on voit qu'il existera un ouvert X'_1 de X' tel que $X'_1 \to X$ soit fini et surjectif, ce qui nous ramène au cas où f est fini et surjectif, déjà traité dans a).

9.4.4. Dans le cas d), on peut supposer (en se localisant sur X) que X est réduit à un seul point, et même compte tenu de 1.1, qu'il est spectre d'un corps k. De plus, f est universellement ouvert (EGA IV 2.4.9) donc on est sous les conditions de 9.1, et le raisonnement de 9.4.1 s'applique encore, en prenant un changement de base avec $Y = \operatorname{Spec} k$, où $k = k(x)$, pour un $x \in X$. Mais alors il est encore vrai que f_* commute au changement de base $Y \to X$, comme nous verrons ultérieurement (XVI 1.4 et 1.5).

Ceci achève la démonstration de 9.4.

EXPOSÉ IX

Faisceaux constructibles cohomologie d'une courbe algébrique

M. Artin

0. Introduction

1

On notera qu'à partir du présent exposé, contrairement aux exposés précédents et à la théorie cohomologique classique des espaces topologiques, nous sommes obligés, pour la validité des énoncés essentiels, de nous limiter aux faisceaux de torsion (et souvent même, plus précisément, aux faisceaux de torsion premiers aux caractéristiques résiduelles).

Signalons qu'en fait une théorie « raisonnable » de la cohomologie à coefficients entiers (ou même réels), pour les variétés sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, analogue à la théorie classique pour le cas $k = \mathbf{C}$, n'existe pas (comme l'a remarqué Serre). Plus précisément, il n'existe pas de foncteur contravariant H^1, défini disons sur la catégorie des schémas projectifs lisses sur le corps K alg. clos de car. $p > 0$, à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$ (ou un sous-corps de $\mathbf{R}$), « commutant aux produits », i.e. tel que $H^1(X \times Y) \xleftarrow{\sim} H^1(X) \times H^1(Y)$, et tel que $\dim H^1(X) = 2$ si X est une courbe connexe de genre 1. En effet, il s'ensuivrait que si X est une variété abélienne sur k, alors l'application $u \mapsto u^1$ de $\mathrm{End}(X)$ dans $\mathrm{End}(H^1(X))$ est additive, donc une représentation de l'anneau opposé de $\mathrm{End}(X)$. Mais en caractéristique p, il existe des courbes elliptiques X ayant comme anneau d'endomorphismes un ordre maximal A d'une algèbre de quaternions définie sur $\mathbf{Z}$ ([3], p.198), 2
et une telle algèbre n'a évidemment pas de représentation dans un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$, puisque $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ est un corps (le corps des quaternions).

1. Le sorite des faisceaux de torsion

Soient T un topos et F un faisceau abélien sur T. On peut multiplier par n dans F ($n \in \mathbf{Z}$ un nombre entier), cette multiplication étant induite par l'opération analogue dans (Ab). Notons ${}_nF$ le noyau de cette multiplication ; donc ${}_nF(X)$, pour $X \in \mathrm{Ob}\, T$, est le groupe des sections de $F(X)$ dont l'ordre divise n.

On désigne par $\mathbf{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.

Définition 1.1. Soit p un ensemble de nombres premiers. On dit que F est un faisceau de p-torsion, ou un p-faisceau, si le morphisme canonique

$$\varinjlim_n {}_nF \longrightarrow F \text{ est bijectif,}$$

n parcourant l'ensemble des entiers tels que $\mathrm{ass}\, n \subset p$, c'est-à-dire, tels que les nombres premiers divisant n soient dans p. Si $p = \mathbf{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, on dit simplement que F est de torsion.

Proposition 1.2. (i) F est de p-torsion si et seulement si F est le faisceau associé à un préfaisceau à valeurs dans des groupes abéliens de p-torsion ; on peut

prendre
$$P = \frac{\lim(\text{préf})}{\text{ass}\, n \subset p^n} {}_nF.$$

3 (ii) Si F est de p-torsion et si $X \in \operatorname{Ob} T$ est un objet quasi-compact[33], alors $F(X)$ est un groupe de p-torsion.

(iii) Si T est localement de type fini (VI 1.1), alors F est de p-torsion si et seulement si $F(X)$ est un groupe de p-torsion pour chaque $X \in \operatorname{Ob} T$ quasi-compact. Dans ce cas, on a
$$\varinjlim_{\text{ass}\, n \subset p} H^q(T/X; {}_nF) \xrightarrow{\sim} H^q(T/X; F)$$
pour chaque X quasi-compact et tout q.

(iv) Si $u : T \to T'$ est un morphisme de topos et si F' est de p-torsion sur T', alors l'image inverse u^*F est un faisceau de p-torsion sur T.

(v) Si $u : T \to T'$ est un morphisme de topos, avec T et T' localement de type fini et u quasi-compact*, et si F est un faisceau de p-torsion sur T, alors les $R^q u_* F'$ sont des faisceaux de p-torsion sur T pour tout q.

Démonstration :

(i) Évidemment, si un faisceau F est de p-torsion, F est le faisceau associé au préfaisceau P dont le groupe des sections $P(X)$ est le sous-groupe des éléments de p-torsion de $F(X)$. Inversement, soit $F = \underline{a}P$ (II) le faisceau associé à P, où P est à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens de p-torsion. De la suite exacte
$$0 \to {}_nP \to P \xrightarrow{n} P$$
on déduit une suite exacte
$$0 \to \underline{a}({}_nP) \to F \xrightarrow{n} F,$$
4 d'où $\underline{a}({}_nP) = {}_nF$. Comme le foncteur $\underline{a}$ commute aux limites inductives, on déduit de
$$\frac{\lim(\text{préf})}{\text{ass}\, n \subset p^n} {}_nP \xrightarrow{\sim} P$$
qu'on a aussi
$$\varinjlim_{\text{ass}\, n \subset p} {}_nF \xrightarrow{\sim} F.$$

(ii) Posons $P = \overrightarrow{\lim(\text{préf})_n} F$. Alors on a $P \subset F$, donc P est un préfaisceau séparé, et par suite
$$\underline{a}P(X) = \varinjlim(\ker(\prod_i P(X_i) \rightrightarrows)),$$
où comme d'habitude la limite est prise suivant les familles couvrantes $\{X_i \to X\}$. Mais comme X est quasi-compact, il suffit de prendre les familles couvrantes finies. Pour ces familles $\prod_i P(X_i)$ est de p-torsion ; donc le ker l'est aussi. Par suite $\underline{a}P(X) = F(X)$ est de p-torsion.

(iii) Pour vérifier que $\varinjlim {}_nF \to F$ est bijectif, il suffit de le faire pour les valeurs sur $X \in \operatorname{Ob} T$ pour chaque X d'une famille de générateurs. On est donc ramené à (ii) pour la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence de

(iv) Conséquence de (i) puisque $u^*(\underline{a}P') = \underline{a}(u \cdot P)$

[33]Un objet X d'un topos est dit quasi-compact si chaque famille couvrante $\{X_i \to X\}$ peut être majorée par une famille couvrante finie. Un morphisme u de topos est quasi-compact si l'image inverse de chaque objet quasi-compact est encore quasi-compacte.

(v) Conséquence facile de (iii).

On aura aussi besoin d'une variante non-abélienne. Mais il y a des problèmes techniques dans la définition (j'ignore s'ils sont sérieux), et on se contentera donc de donner une définition pour la topologie étale d'un schéma.

Définition 1.3. Soit p un ensemble de nombres premiers. On dit qu'un groupe G est 5
un ind-p-groupe si chaque sous-ensemble fini de G engendre un sous-groupe fini d'ordre n, avec ass $n \subset p$. Il revient au même de dire que les sous-groupes finie G_α d'ordre n_α, avec ass $n_\alpha \subset p$, forment un ensemble filtrant, et que $G = \varinjlim G_\alpha$. Si $p = \mathbf{P}$, on dit groupe ind-fini au lieu de ind-p-groupe.

On vérifie immédiatement la

Proposition 1.4. (i) Un sous-groupe ainsi qu'un quotient d'un ind p-groupe est encore un ind p-groupe.
(ii) Une limite inductive filtrante de ind-p-groupes est un ind-p-groupe.
(iii) Une limite projective finie de ind-p-groupes est un ind-p-groupe.

Définition 1.5. Soit X un schéma. On dit qu'un faisceau F de groupes sur X est un faisceau de ind p-groupes (resp. de groupes ind-finis) si pour chaque $U \to X$ étale, avec U quasi-compact, $F(U)$ est un ind p-groupe (resp. un groupe ind-fini).

Proposition 1.6. Soit F un faisceau de groupes sur le schéma X.
(i) F est un faisceau de ind-p-groupes si et seulement si pour chaque point géométrique ξ de X, la fibre F_ξ est un ind-p-groupe.
(ii) Si $f : X \to X'$ est un morphisme et si F' est un faisceau de ind-p-groupes sur X', f^*F' est un faisceau de ind-p-groupes.
(iii) Si $f : X \to X'$ est un morphisme quasi-compact et F est un faisceau de ind-p-groupes sur X, alors f_*F est un faisceau de ind-p-groupes.

Démonstration. (i) Supposons que F soit un faisceau de ind-p-groupes, et soit ξ un point géométrique de X. Alors $F = \varinjlim F(X')$, où X' parcourt un système pseudo-filtrant de 6
schémas étales sur X (VIII 3.9). Il est évident que les X' affines (donc quasi-compacts) forment un ensemble cofinal, et que par suite F est limite inductive de ind p-groupes, donc est un ind-p-groupe d'après 1.4 (ii). Inversement, supposons que pour chaque ξ la fibre F_ξ soit un ind-p-groupe et soit $U \to X$ étale, U quasi-compact. Soit $S \subset F(U)$ un sous-ensemble fini. Pour chaque point géométrique ξ de U, l'image de S dans F_ξ engendre un groupe fini. Comme un groupe fini est de présentation finie, on conclut aisément qu'il existe un U_ξ étale sur U, ξ-ponctué, tel que S engendre un groupe fini dans $F(U_\xi)$ (cf. VIII 4). Un nombre fini de tels U_ξ forment un recouvrement de U, soit $\{U_1, \dots, U_n\}$. Alors l'image de S dans $\prod F(U_i)$ engendre un sous-groupe fini, et comme $F(U) \subset \prod F(U_i)$, on a gagné.
L'assertion (ii) est triviale à partir de (i), et (iii) est immédiate.

2. Faisceaux constructibles

2.0. Soit T un topos. Rappelons qu'à chaque élément $S \in \mathrm{Ob(Ens)}$ on associe le faisceau S_T associé au préfaisceau P tel que $P(X) = S$ pour chaque $X \in \mathrm{Ob}(T)$. L'objet de T qui représente S_T est

$$\coprod_{s \in S} e = \text{“}\ S \times e\text{”},$$

e l'objet final de T. S_T est appelé faisceau constant, de valeur S (IV). On définit d'une manière évidente la notion de faisceau de groupes constant, de A-modules constant (A

un anneau), et de faisceau abélien constant, de valeur M. Un morphisme $f_T : S_T \to S'_T$ de faisceaux constants est dit constant s'il provient d'un morphisme d'ensembles $f : S \to S'$.

Un faisceau F est dit localement constant s'il existe un recouvrement $\{e_i \to e\}$ de
7 l'objet final tel que F devienne constant sur chaque e_i. On définit d'une façon analogue la notion de faisceau de groupes ou de A-modules localement constant, et de morphisme localement constant $f : F \to G$, si F et G sont des faisceaux localement constants. Enfin, un faisceau de groupes ou de A-modules localement constant est dit de type fini (resp. de présentation finie) si les valeurs locales sont des groupes ou des A-modules de type fini (resp. de présentation finie).

Lemme 2.1. (i) Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux d'ensembles localement constant sur T, et supposons que les valeurs locales de F soient des ensembles finis. Alors f est localement constant.

(ii) Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux de A-modules localement constants, avec F de type fini. Alors f est localement constant, et le noyau et conoyau de f sont localement constants.

(iii) Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux de A-modules (resp. de groupes), avec F' et F'' localement constants, F'' étant de présentation finie. Alors F est localement constant.

Démonstration de (i) et (ii). On se ramène sans peine au cas où F et G sont constants. Traitons (ii) : soit $F = M_T$, $G = N_T$ (M, N des A-modules), et soit $S \subset M$ un sous-ensemble fini de générateurs de M. Alors f est déterminé par sa restriction à S_T et f sera localement constant si $f|S_T$ l'est. On est donc réduit à (i) pour la première assertion de (ii), et la deuxième assertion est conséquence triviale de la première.

Il reste donc à démontrer (i). Supposons que $F = S_T$, $G = S'{}_T$ soient constants, et notons aussi par f le morphisme d'objets $f : S \times e \to S' \times e$ (notation comme ci-dessus). Soient $f_s : e \to S' \times e$ ($s' \in S$) les composants de f : puisque S est fini, il suffit évidemment de traiter le cas $f = f_s$, c'est-à-dire, où S est un ensemble d'un élément. Soit $X_{s'} \to e$ ($s' \in S'$) la famille des morphismes qui rendent cartésiens les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_{s'} \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[d, "i_{s'}"] \\ e \arrow[r, "f"] & S' \times e \end{tikzcd}$$

8 où $i_{s'} : e \to S' \times e$ est « l'inclusion » dans la s'–ième composante. La famille $\{i_{s'}\}$ est trivialement couvrante, donc $\{X_{s'} \to e\}$ l'est aussi. On vérifie immédiatement (puisque les sommes directes dans un topos sont disjointes) que f devient constant sur $X_{s'}$, et que par suite f est localement constant.

Démonstration de (iii). Traitons le cas des faisceaux de A-modules. On peut supposer F' et F'' constants, F'' de valeur M'' un A-module de présentation finie. Si M'' est libre, donc admet une base finie $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, alors les e_i définissent des sections de F'', donc se relèvent localement en des sections de F, ce qui montre que localement l'extension F de F'' par F' se scinde, ce qui prouve que F est localement isomorphe à $F' \times F''$, donc est localement constant. Dans le cas général, choisissant un homomorphisme surjectif $\varphi : L'' \to M''$, avec L'' libre de type fini ; le noyau R de φ est de type fini, et posant $L = L''_T \times_{M''_T} F = L''_T \times_{F''} F$; on voit d'une part que L est une extension de L''_T par G, donc localement constant d'après ce qui précède, d'autre part qu'on a une suite exacte $0 \to R_T \to L \to F \to 0$, ce qui grâce à (ii) implique que F est localement constant.

A partir de maintenant, on se borne aux topos étales des schémas.

Lemme 2.2. Soit X un schéma et F un faisceau sur X qui est localement constant. Alors F est représenté par un Y/X étale. Si de plus les fibres de F sont finies (resp. et non-vides), alors Y est un revêtement étale (resp. et surjectif).

Démonstration. Descente (SGA 1 IX 4.1 si F à fibres finies, SGA 3 X 5.4 dans le cas général).

Définition 2.3. Un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) est dit constructible si pour chaque ouvert affine $U \subset X$ il existe une décomposition de U en réunion d'un nombre fini de sous-schémas constructibles (EGA 0_{III} 9.1.2) localement fermés réduits U_i telle que le faisceau induit par F sur chaque U_i soit localement 9
constant, de valeur finie (resp. finie, resp. de présentation finie[33].

2.3.1. L'hypothèse de finitude sur les valeurs locales revient à dire que pour chaque point géométrique ξ, la fibre F_ξ est finie (resp. finie, resp. de présentation finie). Il s'ensuit immédiatement de 2.1 (i) qu'un faisceau de groupes F est constructible si et seulement si le faisceau d'ensembles sous-jacent à F est constructible.

On fera attention que si F est un faisceau abélien, il est constructible en tant que faisceau de groupes (ou encore, en tant que faisceau d'ensembles) si et seulement si il est constructible comme faisceau de $\mathbf{Z}$-modules, et si de plus ses fibres sont finies. Ainsi, $\mathbf{Z}_X$ est constructible comme $\mathbf{Z}$-module, mais non comme faisceau de groupes.

Proposition 2.4. (i) Soit X quasi-compact et quasi-séparé. Alors un faisceau (resp. faisceau de groupes, resp. faisceau de A-modules) est constructible si et seulement s'il existe une décomposition de X en réunion de parties localement fermées constructibles, telle que F devienne localement constant, et fini (resp. fini, resp. de présentation finie), sur chaque X_i.

(ii) Pour vérifier que F est constructible, il suffit de vérifier que $F|U_i$ est constructible pour les U_i d'un recouvrement ouvert donné de X.

(iii) Soit $F : Y \to X$ un morphisme. Alors f^*F est constructible si F l'est.

(iv) L'ensemble des points où la fibre d'un faisceau constructible est non vide (resp. non-nulle) est un sous-ensemble localement constructible (EGA 0_{III} 9.1.2). 10

(v) Soit X localement noethérien. Alors un faisceau d'ensembles (resp. ...) F sur X est constructible si et seulement si pour chaque $x \in X$, il existe un ouvert non-vide de l'adhérence $\overline{x}$ de x tel que F induise un faisceau localement constant de valeur finie (resp. ...) sur U.

Démonstration. Évidemment, si $f : Y \to X$ est un morphisme et s'il existe une décomposition de X en réunion de parties X_i localement fermées et constructibles, telles que F devienne localement constant sur chaque X_i, il en est de même de Y et f^*F (cf. EGA IV 1.8.2). Cela prouve l'implication $\Leftarrow$ de (i). Supposons maintenant que X soit quasi-compact et quasi-séparé et soit $\{U_i, \dots, U_n\}$ un recouvrement ouvert affine de X

[33]Lorsque A n'est pas supposé noethérien, il est préférable, pour les besoins de l'Algèbre Homologique, d'exiger ici, au lieu de la seule présentation finie pour le A-module M, qu'il ait une résolution gauche par des A-modules libres de type fini. La notion introduite dans (2.3) devrait alors prendre le nom : F est 1-constructible, (plus généralement, on définirait de façon évidente la n-constructibilité, pour tout entier $n \geq 0$). Nous allons provisoirement pour le présent exposé garder la terminologie sous la forme (2.3), qui est surtout raisonnable dans le cas où A est noethérien, où elle coïncide avec celle qu'on vient de signaler. Comparer SGA 6 I pour des notions de finitude dans des cas non noethériens.

tel que $F|U_i$ soit constructible pour chaque i. Pour trouver une décomposition de X comme dans (i), il suffit de le faire pour U_n et pour $Y = X - U_n$ (avec la structure induite réduite), U_n et Y étant constructibles dans X grâce à l'hypothèse « X quasi-séparé ». Or une décomposition existe pour U_n d'après la définition de la constructibilité, et Y est réunion de $n-1$ ouverts affines $V_i = Y \cap U_i$ ($i = 1, \ldots, n-1$) avec $F|V_i$ constructible, d'où le résultat (i) par récurrence sur n. Le même raisonnement démontre (ii) ; en effet, l'hypothèse implique que $F|U$ est constructible pour chaque ouvert affine U « assez petit », et on peut recouvrir un ouvert affine V arbitraire par un nombre fini de tels ouverts. L'assertion (ii) montre que la notion de constructibilité est locale sur X, et (iii), (iv) s'ensuivent immédiatement. L'implication $\Rightarrow$ de (v) est immédiate, et ne dépend pas de l'hypothèse noethérienne. Si X est noethérien on démontre l'implication $\Leftarrow$ par la « récurrence noethérienne » habituelle.

Proposition 2.5. Soit X quasi-compact et quasi-séparé, et F un faisceau de groupes ou de A-modules constructible sur X. Alors il existe une filtration finie de F dont les quotients successifs sont de la forme $i_!G$, où $i : U \to X$ est l'inclusion d'une partie localement fermée et constructible, et où G est localement constant et constructible sur U. Si X est noethérien, il existe une telle filtration, avec des U irréductibles.

11 Démonstration. D'après 2.4 (i), il existe une décomposition de X en réunion finie de parties localement fermées constructibles X_i telles que chaque $F|X_i$ soit localement constant et fini (resp. de présentation finie). Écrivons $X_i = U_i \cap \complement V_i$, où U_i et V_i sont des ouverts constructibles, et soit N le nombre d'ouverts de X dans la sous-topologie T engendrée par $\{U_i, V_i\}$. Raisonnons par récurrence sur N : si W est un élément non-vide minimal de T, il est évident que $F|W$ est localement constant et de présentation finie. Soit $i : W \to X$ le morphisme d'inclusion et $Y = X - W$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!i^*F \longrightarrow F \longrightarrow F|Y \longrightarrow 0,$$

et on se réduit ainsi à le même assertion pour Y et pour le faisceau $F|Y$, où on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Proposition 2.6. Supposons que A soit un anneau noethérien.

(i) Une limite projective (resp. inductive) finie de faisceaux de A-modules ou d'ensembles constructibles est constructible. En particulier, le noyau, le conoyau et l'image d'un morphisme de faisceaux de A-modules constructibles sont constructibles.

(i bis) Une limite projective finie de faisceaux d'ensembles (resp. de groupes) constructibles est constructible, et si $f : F \to G$ est un morphisme de faisceaux de groupes constructibles, le noyau, l'image, et le conoyau (si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe normal) sont constructibles. Une limite inductive finie de faisceaux d'ensembles constructibles est constructible.

(ii) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux de A-modules (resp. de groupes) avec M', M'' constructibles. Alors M est constructible.

(iii) Soit $M_1 \to M_2 \to M_3 \to M_4 \to M_5$ une suite exacte de faisceaux de A-modules. Alors si M_i est constructible pour $i = 1, 2, 4, 5$, il en est de même pour $i = 3$.

12 Démonstration. (i) Nous laissons les assertions ensemblistes et pour les groupes au lecteur. Pour le cas des faisceaux de A-modules, il suffit de démontrer que le noyau et le conoyau d'un morphisme $f : F \to G$ de faisceaux de A-modules constructibles sont constructibles. L'assertion est locale sur X, et on peut donc supposer X affine, donc quasi-compact et quasi-séparé. Alors on se réduit au cas où F et G sont localement

constants par 2.4. (i), et on termine en utilisant 2.1 (ii) et l'hypothèse noethérienne sur A. On prouve de façon analogue l'assertion (ii) en utilisant 2.1 (iii). L'assertion (iii) est immédiate à partir de (i) et (ii).

Proposition 2.7. Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, F un faisceau d'ensembles (resp. de A-modules). Pour que F soit constructible, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe au conoyau d'un couple de morphismes $H \rightrightarrows G$, où H et G sont des faisceaux d'ensembles représentables par des schémas étales de présentation finie sur X (resp. que F soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{A}_{V,X} \to \mathscr{A}_{U,X}$, où U et V sont deux schémas étales de présentation finie sur X).

La suffisance résulte facilement de 2.6 (i bis).

Supposons que F soit un faisceau d'ensembles constructibles. Utilisant l'existence des sommes infinies dans le site étale sur X, on voit que l'on peut trouver un épimorphisme $G \to F$, avec G représentable par un schéma étale sur X, que l'on peut de plus supposer somme de schémas affines G_i ($i \in I$), donc séparé sur S. Pour toute partie finie J de l'ensemble d'indices I, soit G_J la somme des G_i pour $i \in J$, et F_J son image dans F. Comme G_J et F sont constructibles, il en est de même de F_J (2.6 (i bis)), donc l'ensemble X_J des $x \in X$ tels que les fibres de F et F_J en un point géométrique de X sur x soient égales, est localement constructible 2.4 (iv)). Comme la famille des X_J est croissante et de réunion X, et que X est quasi-compact, l'un des X_J est égal à X (EGA IV 1.9.9). Cela montre, quitte à remplacer G par G_J, que l'on peut supposer G affine, donc séparé sur X, et quasi-compact sur X puisque X est quasi-séparé (EGA IV 1.2.4). Soit alors $H = G \times_F G$. C'est un sous-faisceau de $G \times_S G$ qui est représentable, donc est lui-même représentable (VIII 6.1). Comme G est de plus constructible (2.6 (i bis)), il ré- **13**
sulte encore de l'argument précédent qu'il est quasi-compact, donc (étant séparé sur X) de présentation finie sur X. Cela prouve la première assertion de 2.7, et la deuxième se prouve par la même méthode (NB il n'est pas nécessaire que A soit noethérien). Signalons en passant que la démonstration prouve aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2.7.1. Soient X un schéma, F un schéma étale sur X. Pour que le faisceau étale correspondant sur X soit constructible, il faut et il suffit que F soit de présentation finie sur X.

La proposition 2.7 nous sera surtout utile ici pour déduire certaines propriétés de passage à la limite pour les faisceaux constructibles :

Corollaire 2.7.2. Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors tout faisceau d'ensembles (resp. de ind-p-groupes, resp. de A-modules) sur X est limite inductive d'un système inductif filtrant de faisceaux d'ensembles (resp. ...) constructibles.

Si F est un faisceau d'ensembles, reprenons les notations de la démonstration de 2.7, et soit L l'ensemble des couples (J, H'), où J est une partie finie de I et H' une partie ouverte quasi-compacte de $H_J = G_J \times_F G_J$. On ordonne L de la façon évidente, et on constate que, puisque F est limite des F_J, et que chaque F_J est limite des $\mathrm{Coker}(H' \to G_J)$ pour les ouverts quasi-compacts H' de H_J, que F est limite inductive du système inductif des $F_\ell = \mathrm{Coker}(H' \to F_J)$ pour $\ell = (H', J) \in L$, d'où le cas ensembliste. Le cas des faisceaux de A-modules se traite essentiellement de la même façon, en commençant par représenter F comme conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{A}_{V,X} \to \mathscr{A}_{U,X}$, avec U, V schémas étales et séparés sur X. Le cas des ind-p-groupes demande un peu plus d'attention. Reprenant les notations précédentes, nous désignons par $L(G_J)$ le faisceau en groupes libre engendré par le faisceau d'ensembles G_J, par N_J le noyau de l'homomorphisme $L(G_J) \to F$ déduit de $G_J \to F$, par L l'ensemble des couples (J, N'), où

N' est un sous-faisceau d'ensembles de N_J qui est « quasi-compact » i.e. tel qu'il existe un épimorphisme $P \to N'$, avec P représentable par un X-schéma quasi-compact. On ordonne L en déclarant que (J, N') est plus petit que (J_1, N_1') si $J \subset J_1$ et si l'homo-
14 morphisme canonique $L(G_J) \to L(G_{J_1})$ applique N_1 dans N_1'. Il est immédiat que L est filtrant, et que l'on obtient un système inductif de faisceaux en groupes F_ℓ, indexé par L, en prenant, pour $\ell = (J, N')$, F_ℓ = faisceau en groupes quotient de $L(G_J)$ par le sous-faisceau en groupes invariant engendré par N'. Il est immédiat de plus que F est isomorphe à la limite inductive des F_ℓ, et il reste à prouver qu'il existe une partie L' de L, cofinale dans L, telle que pour $\ell \in L'$, F_ℓ soit un faisceau en p-groupes constructible. Pour ceci, il suffit de prouver que pour tout J, on peut trouver un sous-faisceau d'ensembles N' de N_J qui soit quasi-compact, contienne un sous-faisceau d'ensembles quasi-compact donné N_0', et soit tel que le F_ℓ correspondant soit un faisceau en p-groupes constructible. Notons d'abord qu'il suffit, pour ceci, que les fibres de F_ℓ soient des p-groupes finis : alors F_ℓ sera automatiquement constructible, comme le lecteur vérifiera sans peine. D'autre part, le lecteur pourra vérifier également que l'ensemble $X_{N'}$ des points x de X tels que la fibre de F_ℓ en un point géométrique au-dessus de x soit un p-groupe fini est localement constructible. De plus, les parties $X_{N'}$ de X sont fonction croissante de N', enfin leur réunion est X tout entier : ce dernier point résulte du fait que la limite inductive des F_ℓ, pour $\ell = (N', J)$ avec J fixé, est le sous-faisceau en groupes F_J de F engendré par le sous-faisceau d'ensembles F_J, qui est quasi-compact, donc $\overline{F_J}$ est à fibres des p-groupes finis. D'autre part, dans un groupe libre à un nombre fini de générateurs, donc s'il est représenté comme réunion filtrante de ses parties finies, l'une de celles-ci engendre tout le sous-groupe. De là résulte aisément que la réunion des $X_{N'}$ est bien X. Utilisant à nouveau (EGA IV 1.9.9) on trouve que un des $X_{N'}$ est égal à X, ce qui achève la démonstration de 2.7.2.

. Notons que la démonstration un peu pénible du cas des schémas en groupes met en évidence le manque d'un sorite commode pour les conditions de constructibilité pour des faisceaux en groupes à fibres pas nécessairement finies ; nous nous en excusons auprès du lecteur en l'invitant à combler au besoin cette lacune par ses propres moyens, et lui signalons en guise de consolation que dans 2.9 (iii) nous obtenons une démonstration plus simple lorsque X est noethérien.

15 Corollaire 2.7.3. Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-groupes finis, resp. de A-modules) constructible. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}(F, G)$, où G est un faisceau d'ensembles (resp. ...) variable, commute aux limites inductives en G. Dans le cas où F est un faisceau de A-modules, A étant noethérien, les foncteurs $\mathrm{Ext}^i(X\,; F, G)$ en le A-module G commutent également aux limites inductives.

Ceci résulte de 2.7 et (VII 3.3) par les arguments habituels, qui sont laissés au lecteur. De même, la conjonction de 2.7 et des résultats de (VII 5) donne aisément :

Corollaire 2.7.4. Soit I une catégorie filtrante, $i \mapsto X_i : I^0 \to (\mathrm{Sch})$ un foncteur qui transforme les flèches en morphismes affines et les objets en des schémas quasi-compacts et quasi-séparés. Pour tout schéma Y, soit $F_c(Y)$ la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de ind-p-groupes, resp. de A-modules) constructibles sur Y. Alors on a une équivalence de catégories

$$F_c(X) \xleftarrow{\approx} \varinjlim_i F_c(X_i),$$

où $X = \varprojlim_i X_i$ (VII 5) et où le deuxième membre désigne la catégorie $\varinjlim$ de catégories fibrées, définie dans En particulier, tout faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible sur X est isomorphe à l'image inverse d'un faisceau de même nature sur un des X_i.

Proposition 2.8. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif et localement de présentation finie, et soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur Y. Alors F est constructible si et seulement si $f^*(F)$ l'est.

Nous utiliserons le

Lemme 2.8.1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif et localement de présentation finie, avec Y quasi-compact et quasi-séparé. Alors il existe une partition finie de Y en des sous-schémas Y_i de présentation finie sur Y (en particulier chaque Y_i est constructible 16
dans X) et pour tout i, des morphismes finis surjectifs $Y_i'' \xrightarrow{g_i} Y_i' \xrightarrow{h_i} Y_i$, avec h_i étale et g_i localement libre (i.e. plat et de présentation finie, en plus de la condition g_i fini), et radiciel, et enfin un Y-morphisme $Y_i'' \to X$[33].

Utilisant le fait que Y est quasi-compact et quasi-séparé, on se ramène aisément au cas où Y est quasi-affine donc séparé (en utilisant un recouvrement ouvert affine fini $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de Y et considérant les $Y_i = U_i - U_i \cap \bigcup_{j<i} U_j$), puis au cas Y affine (par le même argument). Le schéma X est réunion d'ouverts affines X_i, et l'image T_i de X_i dans Y est constructible (EGA IV 1.8.4), la réunion des T_i est X puisque f est surjectif, d'où s'ensuit que X est réunion d'un nombre fini des T_i (EGA IV 1.9.9), de sorte que, remplaçant X par le schéma somme des X_i correspondants, on peut supposer X affine. Alors le procédé de passage à la limite standard (EGA IV 8 8.1.2 c)) nous permet de supposer de plus Y noethérien. La récurrence noethérienne habituelle, et le procédé de passage à la limite (EGA IV 8.1.2 a)) nous ramène au cas où Y est réduit au spectre d'un corps k. Comme alors $X \neq \varnothing$, il existe un point fermé x dans X, qui correspond à une extension finie k' de k, elle-même extension radicielle d'une extension séparable k_s' de k. On prendra alors $Y' = \operatorname{Spec}(k_s')$, $Y'' = \operatorname{Spec}(k')$, ce qui achève la démonstration de 2.8.1.

La nécessité dans 2.8 étant triviale (2.4 (iii)), prouvons la suffisance. On est alors ramené, par le lemme précédent, au cas où f est de la forme gh, où g et h satisfont aux conditions énoncées pour g_i, h_i dans le lemme. On peut donc supposer successivement, soit que f est fini radiciel, cas trivial par (VIII 1.1), soit que f est fini étale. Notons d'ailleurs que, utilisant l'hypothèse que $f^*(F)$ est constructible et la définition de la constructibilité, nous pouvions supposer (quitte à remplacer X par un X-préschéma $X' = \coprod_i X_i$ de présentation finie et à morphisme structural surjectif) que $f^*(F)$ est déjà localement constant. Mais lorsque f est étale et surjectif, cela implique que F est localement constant. Comme de plus les hypothèses faites sur les fibres de $f^*(F)$ restent valables pour celles de F, f étant surjectif, il s'ensuit bien que F est constructible, ce qui achève la démonstration de 2.8.

Proposition 2.9. Soient X un schéma noethérien, A un anneau noethérien, et p un 17
ensemble de nombres premiers.

(i) La catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de ind p-groupes, resp. de A-modules) sur X est localement noethérienne, c'est-à-dire, possède un ensemble de générateurs formé d'objets noethériens.

[33] Cet énoncé est aussi donné dans EGA IV 17.16.4.

(ii) Un faisceau F d'ensembles (resp. de ind p-groupes, resp. de A-modules) sur X est constructible si et seulement si il est noethérien. Si F est un faisceau de A-modules, alors F est constructible si et seulement si il est quotient d'une somme finie de faisceaux de la forme $A_{U/X}$, où $U \to X$ est étale et de type fini (notation de IV.2.4 : $A_{U/X} = A_U$).

(iii) Les sous-faisceaux constructibles d'un faisceau F d'ensembles (resp. ...) forment un système inductif, et F est limite inductive de ces sous-faisceaux.

Démonstration. On laisse l'assertion ensembliste au lecteur. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A-modules. Pour (i) il faut trouver un ensemble de générateurs dont les éléments sont des objets noethériens. Or les faisceaux de la forme $A_{U/X}$, $U \to X$ étale et de type fini forment un ensemble de générateurs dont on voit facilement qu'ils sont constructibles, et il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.10. Soit X noethérien. Alors tout A-Module constructible est noethérien.

Démonstration du lemme.

Par récurrence noethérienne nous supposons le lemme vrai pour chaque sous-schéma X' de X distinct de X. Prenons un ouvert non-vide X_0 de X tel que F induise un faisceau localement constant F_0 sur X_0.

Soit maintenant $\{F_i\}$, $i \in \mathbf{N}$ une suite croissante de sous-faisceaux de F_0. Comme pour un point géométrique P, générique pour une composante irréductible de X_0, la
18 fibre de F_0 en P est de type fini, la suite des fibres $(F_i)_P$ est stationnaire, et nous pouvons supposer qu'elle est constante. Or soit Q un point géométrique de X_0 spécialisation de P (VIII 7.2). Puisque F_0 est localement constant sur X_0, on voit immédiatement que le morphisme de spécialisation $F_{0_Q} \to F_{0_P}$ (VIII.7) est bijectif, donc $(F_i)_Q \to (F_i)_P$ est injectif pour chaque i.

Soient V/X étale et P-ponctué, et $s_1, \dots, s_n$ des sections $\in F_1(V)$ qui engendrent $(F_1)_P$. Alors les s_i engendrent $(F_i)_Q$ pour chaque i et chaque point géométrique Q spécialisation de P au-dessus de V. La suite de faisceaux F_i est donc constante dans un voisinage de l'image de P, disons dans $X' \neq \emptyset$. Soit $Y = X - X'$, il suffit donc de prouver que la suite des $F_i|Y$ est stationnaire, ce qui résulte de l'hypothèse de récurrence noethérienne.

Les assertions (ii) pour les A-modules sont maintenant immédiates : Comme les $A_{U/X}$ sont des générateurs noethériens, on a évidemment F noethérien $\Leftrightarrow$ F est quotient d'une somme finie de faisceaux $A_{U/X}$. Or $A_{U/X}$ est constructible, et par suite, compte tenu de 2.6, F noethérien $\Rightarrow$ F constructible ; l'implication inverse étant déjà établie (2.10), cela établit (ii). Enfin, l'assertion (iii) pour les A-modules est une propriété des catégories localement noethériennes (cf. [1], Ch. IV).

Traitons maintenant le cas des ind-p-groupes. Notons d'abord qu'un faisceau de groupes constructible F est certainement noethérien. En effet, puisque les fibres sont finies, on peut employer le même argument qu'avec les A-modules. On va maintenant démontrer l'assertion (iii) directement, ce qui impliquera (i) - en effet, cela démontrera que les faisceaux constructibles forment un ensemble de générateurs. De plus, un faisceau noethérien quelconque sera alors nécessairement constructible, d'où (ii).

Pour démontrer (iii), il suffit évidemment de démontrer qu'un sous-faisceau (en groupes) S d'un faisceau F de ind p-groupes engendré par un nombre fini de sections $s_i \in F(U_i)$,

$U_i \to X$ étale de type fini, est constructible [33]. (Puisqu'un faisceau constructible est noe- **19**
thérien, il est engendré par un nombre fini de sections.) Par récurrence noethérienne, on peut supposer que c'est vrai pour chaque sous-schéma fermé Y de X, distinct de X. Or la notion de sous-faisceau engendré par des sections commute avec l'image inverse de faisceaux ; en effet, soit $L_{U/X}$ le faisceau qui représente le foncteur $F \mapsto F(U)$ dans la catégorie des groupes. Alors si $f : Y \to X$, on a $f^*(L_{U/X}) = L_{L\times_X U/Y}$. Comme S est l'image de la somme des $L_{U_i/X}$, et comme f^* commute aux sommes, il est clair que f^*S est le sous-faisceau de f^*F engendré par les sections $f^*(S_i)$.

On peut donc supposer que S induit un faisceau constructible sur chaque fermé Y distinct de X, et il suffit ainsi (2.4 (i)) de démontrer que S induit un faisceau constructible sur un ouvert non-vide convenable de X. En remplaçant X par un ouvert assez petit, on peut supposer que chaque U_i est un revêtement étale de X. Il suffit de démontrer qu'alors S est localement constant, à fibres finies sur un ouvert non vide convenable. C'est une assertion locale sur X pour la topologie étale, et on peut donc supposer que chaque U_i est complètement décomposé, disons $U_i = \amalg_{n_i} X$ (somme de n_i copies de X). Soient s_{ij} $(j = 1, \dots, n_i)$ les sections de $F(X)$ telles que s_i $(s_{il}, \dots, s_{in_i})$. Évidemment, S n'est autre que le sous-faisceau de F engendré par les $s_{ij} \in F(X)$. Comme $F(X)$ est un ind p-groupe (1.5) les s_{ij} engendrent un sous-groupe fini 1.3. Donc on peut supposer que l'ensemble des s_i est un sous-groupe fini de $F(X)$, mais alors S est identique au faisceau d'ensembles engendré par les s_i, qui est constructible en vertu de 2.6 (i) comme faisceau d'ensembles, donc comme faisceau de groupes, C.Q.F.D.

Dans les deux propositions suivantes, nous donnons des critères pour qu'un faisceau soit localement constant, ou constructible, en utilisant les homomorphismes de spécialisation (VIII 7.7).

Proposition 2.11. Soient X un schéma, F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. de A-modules) constructible ; dans le cas ensembliste, on suppose de plus **20**
F à fibres finies. Soient $x \in X$, x un point géométrique sur x. Pour que F soit localement constant au voisinage de x, il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\overline{x}'$ générisation de $\overline{x}$, et toute flèche de spécialisation $\overline{x'} \to \overline{x}$ (VIII 7.2), l'homomorphisme de spécialisation (VIII 7.7) $F_{\overline{x}} \to F_{\overline{x'}}$ soit un isomorphisme.

Le cas d'un faisceau en groupes étant un cas particulier de celui d'un faisceau d'ensembles, nous nous contentons de traiter celui-ci ; le cas d'un faisceau de modules se traite de façon essentiellement identique. La nécessité de la condition étant triviale, nous nous bornons à établir la suffisance. Comme la fibre $I = F_{\overline{x}}$ est finie, quitte à remplacer X par un schéma X' étale sur X convenable, on peut supposer que l'on peut trouver un homomorphisme $u : I_X \to F$ du faisceau constant I_X dans F, induisant un isomorphisme pour les fibres en $\overline{x}$. Utilisant la constructibilité des deux faisceaux, et 2.6, on voit aisément que l'ensemble Z des points z de X tels que l'homomorphisme induit sur les fibres en un point géométrique $\overline{z}$ sur z soit bijective, est une partie localement constructible de X. L'hypothèse implique aussitôt qu'elle contient les générisations de x, donc (EGA IV 1.10.1) c'est un voisinage de x, ce qui prouve que F est localement constant (en l'occurrence, même constant) au voisinage de x, C.Q.F.D.

[33]Rappelons la définition de ce faisceau : soit $L_{U/X}$ le faisceau qui représente le foncteur $F \mapsto F(U)$ dans la catégorie des groupes. La section $s_i \in F(U_i)$ induit un morphisme $L_{U_i/X} \to F$, et S est l'image du morphisme somme $\amalg_i L_{U_i/X} \to F$. C'est le plus petit sous-faisceau qui « contient » les sections s_i.

Définition 2.12. [33] : Un schéma X est dit connexe par arcs si pour tout couple P, Q de points géométriques de X, il existe des points géométriques $P = P_0, \dots, P_n$; $Q_1, \dots, Q_n = Q$ et des spécialisations (VIII 7.2) $P_i \to Q_i$ et $P_{i-1} \to Q_i$ ($i = 1, \dots, n$). On dit que X est localement connexe par arcs (pour la topologie étale) si pour chaque $U \to X$ étale il existe un recouvrement étale $\{U_i \to U\}$ de U tel que U_i est connexe par arcs pour chaque i.

On vérifie immédiatement qu'on préschéma localement noethérien est localement connexe par arcs.

21 Proposition 2.13. (i) Soit X localement connexe par arcs et soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) sur X. Supposons que les fibres de F sont finies (resp. finies, resp. de présentation finie). Alors F est localement constant si et seulement si pour toute spécialisation $P \to Q$ de points géométriques, le morphisme de spécialisation (VIII 7.7) $F_Q \to F_P$ est bijectif.

(ii) Supposons que X soit localement noethérien et que les fibres de F soient finies (resp. finies, resp. de présentation finie). Alors, si pour toute spécialisation $P \to Q$, le morphisme de spécialisation $F_Q \to F_P$ est injectif, F est constructible.

(iii) Supposons que X soit localement noethérien et que les fibres du faisceau d'ensembles F soient finies. Soit $c : X \to \mathbf{N}$ la fonction qui à $x \in X$ associe le nombre d'éléments de la fibre $F_{\overline{x}}$ de F en un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x. Alors F est constructible si et seulement si c est une fonction constructible i.e. , si et seulement si $c^{-1}(n)$ est constructible pour chaque $n \in \mathbf{N}$.

Démonstration.

(i) Soit P un point géométrique de X. On va trouver un voisinage étale de P, c'est-à-dire, un $U \to X$ étale P-ponctué, tel que F devienne constant sur U. Soit V' un voisinage étale de P tel que $F(V) \to F_P$ soit surjectif. Un tel V' existe d'après l'hypothèse de finitude. Soit $U \to V'$ un voisinage étale de P dans V', tel que U soit connexe par arcs. Alors $F(U) \to F_P$ est encore surjectif. Choisissons un sous-ensemble $S \subset F(U)$ qui s'envoie bijectivement sur F_P. Si F est un faisceau de groupes (resp. de A-modules), on voit facilement qu'on peut, en changeant au besoin U, trouver un tel ensemble qui soit de plus un sous-groupe (resp. sous-module) de $F(U)$. On déduit un morphisme $S_U \to F|U$, où S_U est le faisceau constant à valeur S. On a

$$(S_U)_P \xrightarrow{\sim} F_P.$$

22 Puisque chaque morphisme de spécialisation sur les fibres de F (resp. S_U) est bijectif, et puisque U est connexe par arc, il s'ensuit que $S_U \xrightarrow{\sim} F|U$, d'où le résultat.

(ii) L'assertion est locale, et on peut donc supposer X noethérien. Soit P un point géométrique au-dessus d'un point maximal de X. Il existe un voisinage étale irréductible, donc connexe par arcs, $U \to X$ de P tel que $F(U)$ s'envoie surjectivement sur F_P. Il s'envoie alors surjectivement sur F_Q pour chaque point géométrique Q de V, ou ce qui revient au même, pour chaque point géométrique de l'image U de V dans X, car un tel point est spécialisation de P et $F_Q \to F_P$ est injectif. Donc chaque morphisme de spécialisation dans U est bijectif, donc $F|U$ est localement constant. Par récurrence noethérienne on peut supposer que $F|X - U$ est constructible, d'où le résultat.

[33] La terminologie est due à S. Lubkin.

(iii) Il suffit évidemment de traiter le cas où la fonction c est constante. Soit $V \to X$ un voisinage étale d'un point géométrique P au-dessus d'un point maximal de X, tel que $F(V)$ s'envoie surjectivement sur F_P. Soit S un sous-ensemble de $F(V)$ tel que $S \xrightarrow{\sim} F_P$. Alors on a, pour le faisceau constant S_V et pour chaque spécialisation $P \to Q$ de points géométriques, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (S_V)_P \arrow[r, "\sim"] & F_P \\ (S_V)_Q \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & F_Q \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

Comme $c(F_Q) = c(F_P)$, la flèche $F_Q \to F_P$ est bijective, donc F est localement constant dans un voisinage de P d'après (i). Par récurrence noethérienne, on a gagné.

Le résultat (ii) suivant aura une utilité technique dans la suite ; il permettra de réduire certaines vérifications au cas d'un faisceau constant.

Proposition 2.14. Soit X un schéma. 23

(i) Pour tout morphisme fini et de présentation finie $f : X' \to X$, et tout faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. de A-modules) constructible sur X', $f_*(F)$ est constructible.

(ii) Supposons X quasi-compact et quasi-séparé, et soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible sur X. Alors on peut trouver une famille finie $(p_i : X'_i \to X_i)$ de morphismes finis, pour tout i, un faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible constant C_i sur X'_i, et un monomorphisme

$$F \hookrightarrow \prod_i p_{i*}(C_i).$$

Prouvons d'abord (i). Par définition, on peut supposer X affine, et utilisant alors 2.7.4, le procédé de passage à la limite standard nous ramène au cas où X est noethérien. Un nouveau passage à la limite, utilisant encore 2.7.4 et de plus 2.4. (v), nous ramène au cas où X est le spectre d'un corps. Alors la conclusion se réduit à l'assertion correspondante sur la fibre de $f_*(F)$ en un point géométrique sur X, laquelle résulte immédiatement de (VIII 5.5, 5.8).

Prouvons (ii). En vertu de 2.4 (i), il existe une partition de X en sous-schémas Y_i, avec des morphismes d'inclusion $u_i : Y_i \to X$ de présentation finie, tels que la restriction F_i de F à chaque Y_i soit un faisceau localement constant. Il est alors immédiat que les homomorphismes canoniques $F \to u_{i*}(F_i)$ définissent un homomorphisme $F \to \prod_i u_{i*}(F_i)$ qui est un monomorphisme.

On pouvait même s'arranger dans la construction précédente pour que chaque F_i soit, non seulement localement constant, mais de plus isotrivial, i.e. qu'il existe un morphisme étale fini surjectif $q_i : Y'_i \to Y_i$ tel que $q_i^*(F_i)$ soit un faisceau constant sur Y'_i, soit $C_{iY'_i}$. Cela résulte par exemple aisément de la définition de 2.8.1 et de (VIII 1.1). D'autre part, il résulte du « Main Theorem » sous la forme (EGA IV 8.12.6) qu'il existe 24
un morphisme fini $p_i : Z_i \to X$ et une immersion ouverte $v_i : Y'_i \to Z_i$ de X-schémas.

Comme F_i se plonge dans $q_{i*}(q_i^*(F_i)) = q_{i*}(C_{iY'_i})$, F se plonge dans le produit des $u_{i*}(q_{i*}(C_{iY'_i})) = p_{i*}(v_{i*}(C_{iY'_i}))$. Si tout Z_i est normal, alors le lemme (2.14.1) ci-dessous implique que $v_{i*}(C_{iY'_i}) \simeq C_{iZ_i}$, donc F se plonge dans le produit des $p_{i*}(C_{iZ_i})$, et on a terminé. Dans le cas général, introduisons le normalisé $\overline{Z}_i$ de Z_i, l'image inverse $\overline{Y}'_i$ de

Y_i' dans $\overline{Z}_i$, l'immersion $\overline{v}_i : \overline{Y}_i' \to \overline{Z}_i$. On voit aussitôt que $\overline{Y}_i'$ contient les points maximaux de $\overline{Z}_i$, donc est dense dans $\overline{Z}_i$. Si $r_i : \overline{Z}_i \to Z_i$ et $s_i : \overline{Y}_i' \to Y_i'$ sont les projections, comme cette dernière est surjective, il s'ensuit que $C_{iY_i'}$ se plonge dans $s_{i*}(C_{i\overline{Y}_i'})$, dons $v_{i*}(C_{iY_i'})$ se plonge dans $v_{i*}(s_{i*}(C_{i\overline{Y}_i'})) = r_{i*}(\overline{v}_{i*}(C_{i\overline{Y}_i'}))$, qui est isomorphe à $r_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$ en vertu de (2.14.1) ci-dessous, donc F se plonge dans le produit des $p_{i*}(r_{i*}(C_{\overline{Z}_i})) = t_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$, où $t_i = p_i r_i$ est la projection canonique $\overline{Z}_i \to X$. Lorsque ce morphisme est fini pour tout i, on a donc terminé. Dans le cas général, on peut dire seulement que $\overline{Z}_i$ est entier sur X, donc de la forme $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}_i)$, où $\mathscr{A}_i$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-Algèbres, qui est entier sur $\mathscr{O}_X$. Utilisant (EGA IV 1.7.7), on voit que $\mathscr{A}_i$ est limite inductive de ses sous-Algèbres $\mathscr{A}_{i,j}$ finies sur X, donc $\overline{Z}_i$ est limite projective (VII 5) des préschémas $Z_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$, finis sur X. Appliquant (VII 5.11), on trouve que $t_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$ est limite inductive des $t_{ij^*}(C_{iZ_{ij}})$ où $t_{ij} : Z_{ij} \to X$ est la projection canonique. En vertu de (2.7.3), l'homomorphisme $F \to t_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$ se factorise donc par un homomorphisme $F \to t_{ij*}(C_{iZ_{ij}})$, pour un $j = j(i)$ convenable. On pose maintenant $X_i' = Z_{i,j(i)}$, et on trouve un plongement comme annoncé dans 2.14. Il reste à prouver le

LEMME 2.14.1. Soient X un schéma géométriquement unibranche (par exemple normal), $i : U \to X$ une immersion ouverte quasi-compacte. Alors l'adhérence Z de U,
25 munie de la structure réduite induite, est également géométriquement unibranche, plus précisément, pour tout $z \in Z$, on a $\mathscr{O}_{Z,z} \xleftarrow{\sim} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{red}},z}$. Supposons d'autre part i dominant, et soit C un ensemble, C_U le faisceau constant sur U défini par C. Alors l'homomorphisme naturel $C_X \to i_*(C_U)$ est un isomorphisme. Mêmes conclusions si on remplace l'immersion ouverte i par une inclusion $i : x \to X$, où x est un point maximal de X.

Utilisant (EGA IV 2.3.11), on est ramené pour la première assertion au cas où X est local, de point fermé z, mais alors $X_{\mathrm{réd}}$ est intègre et U non vide, donc $Z = X_{\mathrm{réd}}$ et l'assertion est évidente (il suffisait donc, au lieu de X géométriquement unibranche, de supposer ici que les anneaux locaux de $X_{\mathrm{réd}}$ sont intègres). Pour la deuxième assertion, regardant fibre par fibre, on se ramène grâce à (VIII 5.3) loc. cit. au cas où X est strictement local, et à prouver alors que $H^0(X, C_X) \to H^0(U, C_U)$ est bijectif. Or ici encore, X est irréductible, et U en est un ouvert non vide donc irréductible, et les deux membres de l'application précédente s'identifient à C, d'où la conclusion voulue. (On a utilisé ici la notion « géométriquement unibranche » sous la forme de (EGA IV 18.8.14), comme signifiant que les anneaux localisés stricts de $X_{\mathrm{réd}}$ sont intègres). Le cas de l'inclusion d'un point maximal (énoncé ici pour la commodité de références futures) se traite exactement de la même façon.

REMARQUES 2.14.2. Lorsque X est noethérien, la démonstration donnée (ou une déduction immédiate) montre que dans 2.14 (ii), on peut supposer les X_i' intègres ; si de plus on suppose X universellement japonais, i.e. les anneaux de ses ouverts affines universellement japonais (EGA 0_{IV} 23.1.1, IV 7.7.2), on peut de plus supposer les X_i' normaux.

3. Théories de Kummer et d'Artin-Schreier

26

3.0. On va noter $(\mathbf{G})_X$ le faisceau représenté par le groupe multiplicatif $\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_X[t, t^{-1}]$ sur X. Donc pour $U \to X$ étale, les sections de $(\mathbf{G}_m)_X$ sur U sont les éléments inversibles $\Gamma(U, \mathscr{O}_U^*)$ de $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Le noyau de la puissance n-ième dans $(\mathbf{G}_m)_X$ est le « faisceau des racines n-ièmes de l'unité », noté $(\boldsymbol{\mu}_n)_X$ est le « faisceau des racines n-ièmes de l'unité », noté $(\boldsymbol{\mu}_n)_X$. On a donc une suite exacte

$$0 \to (\boldsymbol{\mu}_n)_X \to (\mathbf{G}_m)_X \xrightarrow{n} (\mathbf{G}_m)_X. \tag{3.1}$$

Si n est inversible sur X (c'est-à-dire, si n est premier à chaque caractéristique résiduelle de X), la puissance n-ième est un morphisme surjectif pour les faisceaux :

Théorie de Kummer 3.2. On a la suite exacte

$$0 \to (\boldsymbol{\mu}_n)_X \to (\mathbf{G}_m)_X \xrightarrow{n} (\mathbf{G}_m)_X \to 0$$

si $n \in \mathbf{N}$ est inversible sur X.

En effet, soit $u \in (\mathbf{G}_m)_X(U)$, $U \to X$ étale. Il faut trouver un recouvrement étale $\{U_i \to U\}$ de U tel que u induise une puissance n-ième sur chaque U_i. Puisque n est inversible sur U, l'équation

$$T^n - u = 0$$

est « séparable » sur U, i.e. ,

$$U' = \operatorname{Spec} O_U[T]/(T^n - u)$$

est étale au-dessus de U. Comme $U' \to U$ est surjectif, il est couvrant et u induit une puissance n-ième sur U', on a fini.

Signalons que lorsque n est inversible sur X, $(\boldsymbol{\mu}_n)_X$ est un faisceau localement constant, 27
en fait localement isomorphe au faisceau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_X$, et est constant dans des cas importants. La théorie de Kummer donne donc des renseignements sur la cohomologie de X à valeurs dans certains faisceaux constants. En fait, on a par définition

$$H^0(X, (\mathbf{G}_m)_X) = \Gamma(X, O_X^*),$$

et pour la dimension 1 on a le

Théorème 3.3. (« théorème 90 de Hilbert ») : On a un isomorphisme

$$H^1(X, (\mathbf{G}_m)_X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} X,$$

où Pic X est le groupe des classes de faisceaux inversibles sur X.

Démonstration. Cela veut dire que le morphisme canonique

$$H^1(X_{\text{zar}}, (\mathbf{G}_m)_X) \longrightarrow H^1(X_{\text{et}}, (\mathbf{G}_m)_X)$$

est bijectif, ce qui revient au même que de dire que

$$R^1\epsilon_*(\mathbf{G}_m)_X = O$$

où ϵ_* est l'image directe pour le morphisme de sites évident $\epsilon : X_{\text{et}} \to X_{\text{zar}}$ (VIII 4). On est donc réduit au cas où X est affine. Comme on peut calculer H^1 par Čech (V 2.5) et comme il suffit pour un X quasi-compact de prendre des recouvrements quasi-compacts, c'est une conséquence immédiate de la théorie de descente pour les faisceaux (cf. EGA 190, ou SGA VIII 1).

3.3.1. Supposons X noethérien et sans composante immergée et soient x_j les points maximaux de X. Soit R_j l'anneau artinien local de X en x_j, et i_j : Spec $R_j \to X$ le morphisme d'inclusion. On a une injection canonique 28

$$(\mathbf{G}_m)_X \longrightarrow \prod_j i_{j*}(\mathbf{G}_m)_{\operatorname{Spec} R_j}$$

de faisceaux sur X_{et} (resp. X_{zar}). Le conoyau D est appelé le faisceau dés diviseurs de Cartier sur X_{et} (resp. X_{zar})[33].

[33]Dans EGA IV 21, on dit simplement « diviseurs » au lieu de « diviseurs de Cartier ».

Corollaire 3.4. Soit X noethérien et sans composante immergée, soit $\epsilon : X_{\text{ét}} \to X_{\text{zar}}$ le morphisme de sites canonique, et soit D le faisceau des diviseurs de Cartier sur X_{et}. Alors $\epsilon_* D$ est le faisceau D_{zar} des diviseurs de Cartier sur X_{zar}, et on a en particulier :

$$H^0(X_{\text{et}}, D) \approx H^0(X_{\text{zar}}, D_{\text{zar}}).$$

Démonstration. Si l'on applique ϵ_* à la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{G}_m)_X \longrightarrow \prod_j i_{j^*}(\mathbf{G}_m)_{\operatorname{Spec} R_j} \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

on trouve une suite exacte puisque $R^1\epsilon_*(\mathbf{G}_m)_X = 0$ (3.3), d'où la première assertion.

Dans le cas où X admet une caractéristique $p \neq 0$, le résultat suivant remplacera parfois 3.2 pour l'étude des coefficients de p-torsion :

Théorie d'Artin-Schreier 3.5. On a la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_X \to \mathscr{O}_X \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathscr{O}_X \to 0,$$

si X est de caractéristique $p > 0$, où $\mathfrak{p}$ est le morphisme de groupes additifs défini par $\mathfrak{p}(f) = f^p - f$.

Le noyau de $\mathfrak{p}$ est le faisceau des sections de O_X qui sont localement dans le corps
29 premier, donc est in faisceau constant. Le morphisme $\mathfrak{p}$ est surjectif pour la topologie étale parce que l'équation $T^p - T - a$ ($a \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$) est toujours « séparable » en caractéristique p, i.e. définit un revêtement étale de U. Pour appliquer cette suite exacte on utilisera bien entendu (VII 4.2).

Proposition 3.6. (i) Soit X un schéma et $i : x \to X$ l'inclusion d'un point. Alors

$$H^1(X, i_*(\mathbf{Z})_x) = 0$$

où $(\mathbf{Z})_x$ est le « faisceau constant » (cf. 2.0) de valeur $\mathbf{Z}$.

(ii) Si X est irréductible et si pour chaque point géométrique $\overline{x}$ de X le localisé strict $X_{\overline{x}}$ de X en $\overline{x}$ est irréductible (on devrait dire « X est géométriquement unibranche » cf. EGA IV 18.8.14) alors on a

$$H^i(X, \mathbf{Z}_x) = 0.$$

Démonstration.

(i) De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q i_*(\mathbf{Z})_x) \Longrightarrow H^{p+q}(x, (\mathbf{Z})_x)$$

on déduit une injection $H^1(X, i_*(\mathbf{Z})_x) \to H^1(x, (\mathbf{Z})_x)$. Or puisque $x = \operatorname{Spec} k(x)$ est le spectre d'un corps, il est bien connu que $H^1(x, (\mathbf{Z})_x) = 0$ (cela résulte du fait que $H^q(x, F)(q > 0)$ est de torsion en tout cas (cf. VII 2.2 et CG), et des suites exactes $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n \to 0$), d'où le résultat.

(ii) Soit $i : x \to X$ l'inclusion du point générique de X. On voit immédiatement que sous les conditions de (ii) le morphisme canonique $(\mathbf{Z})_X \to i_*(\mathbf{Z})_x$ est bijectif (la réciproque étant d'ailleurs vraie également !), et (ii) est ainsi réduit à (i).

30 Remarques 3.7. Dans 3.6 (i) et (ii) on peut remplacer $\mathbf{Z}$ par n'importe quel groupe abélien sans torsion. D'autre part, (ii) devient faux si on y abandonne l'hypothèse que X est géométriquement unibranche, comme on voit par exemple en prenant pour X une courbe algébrique sur un corps K, admettant un point double ordinaire (faire le calcul de $H^1(X, \mathbf{Z})$ dans ce cas !).

4. Cas d'une courbe algébrique

4.0. Soit X un schéma noethérien de dimension 1. Soient $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur X, et $i : \operatorname{Spec} R(X) \to X$ le morphisme d'inclusion. L'anneau $R(X)$ est artinien, produit des anneaux locaux de X aux points maximaux, et on peut utiliser les résultats de (VIII 2).

Soit F un faisceau abélien sur $\operatorname{Spec} R(X)$ et considérons les faisceaux $R^q i_* F$, $q > 0$, sur X. Il résulte aussitôt de VIII 5.2 que la fibre de $R^q i_* F$ en un point géométrique au-dessus d'un point maximal de X est nulle. Puisque X est de dimension 1, un tel faisceau est de nature très spéciale :

Lemme 4.1. Soient X noethérien et F un faisceau sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes (on appellera un faisceau satisfaisant à ces conditions un « skyscraper sheaf ») :

(i) Le fibre de F, en tout point géométrique $\overline{x}$ de X qui est au-dessus d'un point non-fermé $x \in X$, est nulle.
(ii) Chaque section $s \in F(X')$ ($X' \to X$ étale de type fini) est nulle, sauf en un nombre fini de points fermés de X.
(iii) On a $F \approx \oplus_x i_{x^*} i_*{}^* F$, où x parcourt l'ensemble des points fermés de X et où $i_x : x \to X$ est l'inclusion.

Démonstration. Supposons que (i) soit vrai, et soit $z \in F(X')$ ($X' \to X$ étale de type 31
fini). Alors le support de z (VIII 6.6) est une partie fermée de X' formée de points fermés, donc finie (X' étant noethérien), d'où (i) ⇒ (ii). L'implication (ii) ⇒ (i) résulte du calcul des fibres (VIII 3.9), et (iii) implique (i), car pour toute famille (G_x) de faisceaux sur les points fermés x de X, le faisceau $F = \oplus i_{x^*}(G_x)$ sur X satisfait (i), comme il résulte de fait que les foncteurs fibres commutent aux sommes directes, et que le support de $i_{x^*}(G_x)$ est évidemment contenu dans $\{x\}$.

Il reste à démontrer que (ii) implique (iii). Considérons le morphisme canonique

$$F \longrightarrow \prod_x i_{x^*} i_x{}^* F,$$

x parcourant l'ensemble des points fermés de X. D'après (ii), il se factorise par

$$F \longrightarrow \bigoplus_x i_{x^*} i_x{}^* F,$$

ce qui donne le morphisme cherché. Nous laissons au lecteur la vérification du fait qu'il est bijectif.

4.1.1. Appliquons le lemme au faisceau $R^q i_* F$ introduit plus haut : On a

$$R^q i_* F \xrightarrow{\sim} \bigoplus_x i_{x*} i_x * (R^q i_* F)$$

(x parcourant l'ensemble des points fermés de X). Or d'après (VIII 5) la fibre de $R^q i_* F$ en un point géométrique $\overline{x}$ de X est

$$(R^q i_* F)_{\overline{x}} \simeq H^q(\operatorname{Spec} R(X_{\overline{x}}), F)$$

où $R(X_{\overline{x}}) \simeq R(X) \otimes_{O_X} O_{X_{\overline{x}}}$, $X_{\overline{x}}$ étant le localisé strict de X en $\overline{x}$ (VIII 4), et où on dénote 32
aussi par F le faisceau induit par F sur $\operatorname{Spec} R(X_{\overline{x}})$. Supposons maintenant que le corps résiduel de tout point fermé x de X soit séparablement clos. On aura donc (cf. aussi (VI.

1))

$$\begin{aligned}
H^p(X, R^q i_* F) &\simeq H^p(X, \bigoplus_x i_{x*} i_x * (R^q i_* F)) \\
&\simeq \bigoplus_x H^p(X, i_{x*} i_x * (R^q i_* F)) \\
&\simeq \bigoplus_x H^p(x, i_x * (R^q i_* F)) \\
&\simeq \begin{cases} \bigoplus_x H^q(\operatorname{Spec} R(X_x), F) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve le

Corollaire 4.2. Soient X un schéma noethérien de dimension 1, tel que pour tout point fermé x de X, le corps résiduel $k(x)$ soit séparablement clos. Soit F un faisceau abélien, sur $\operatorname{Spec} R(X)$ (où $R(X)$ = anneau des fonctions rationnelles sur X). Considérons la suite spectrale de Leray ( ).

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q i_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} R(X), F).$$

On a

$$\begin{aligned}
&E^{pq} = 0 \text{ si } p \text{ et } q > 0, \\
&E_2^{0q} = \bigoplus_x H^q(\operatorname{Spec} R(X_x), F) \text{ si } q > 0,
\end{aligned}$$

où x parcourt l'ensemble des points fermés de X, et où X_x est le localisé strict de X au point x.

33 La suite spectrale donne donc une suite exacte

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow H^1(X, i_* F) \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} R(X), F) \longrightarrow \bigoplus_x H^1(\operatorname{Spec} R(X_x), F) \\
&\longrightarrow H^2(X, i_* F) \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} R(X), F) \longrightarrow \bigoplus_x H^2(\operatorname{Spec} R(X_x), F) \\
&\longrightarrow \dots
\end{aligned}$$

4.3. Supposons maintenant que de plus la ℓ-dimension cohomologique de $\operatorname{Spec} R(X)$, pour un nombre premier ℓ donné, soit au plus égale à 1 (c'est-à-dire qu'on ait $H^q(\operatorname{Spec} R(X), F) = 0, q > 1$, pour chaque faisceau F de ℓ-torsion sur $\operatorname{Spec} R(X)$). Soient $K^1, \dots, K^m$ les corps résiduels de l'anneau artinien $R(X)$, i.e. les corps résiduels des points maximaux de X. Tenant compte du dictionnaire (VIII 2) la ℓ-dimension cohomologique de $\operatorname{Spec} R(X)$ est

$$\operatorname{cd}_\ell(\operatorname{Spec} R(X)) = \sup_i \{\operatorname{cd}_\ell(G(\overline{K}^i/K^i))\},$$

où $\operatorname{cd}_\ell(G)$ est la ℓ-dimension cohomologique du groupe profini G [cf. CG].

Chaque corps résiduel K_x de $R(\overline{X}(x))$, pour un localisé strict $\overline{X}(x)$ de X, s'identifie évidemment à une extension séparable (infinie) d'un des K^i, d'où

$$\operatorname{cd}_\ell(G(\overline{K}_x/K_x)) \leq \operatorname{cd}_\ell(G(\overline{K}^i/K^i))$$

d'après (CG II 4.1, Prop. 10). Donc la ℓ-dimension cohomologique $\operatorname{cd}_\ell(\operatorname{Spec} R(\overline{X}(x)))$ est aussi ≤ 1.

En appliquant la suite exacte de 4.2 à un F de ℓ-torsion, on trouve

$$(4.3.1)\quad \begin{cases} 0 \to H^1(X, i_* F) \to H^1(\mathrm{Spec}\, R(X), F) \to \\ \quad \bigoplus_x H^1(\mathrm{Spec}\, R(\overline{x}(x)), F) \to H^2(X, i_* F) \to 0, \\ H^q(X, i_* F) = 0 \text{ pour } q > 2. \end{cases}$$

Remarquons que l'hypothèse que $\mathrm{cd}_\ell(\mathrm{Spec}\, R(X))$ soit ≤ 1 est satisfait si X est une 34
courbe algébrique sur un corps séparablement clos. (Théorème de Tsen [6, th. 4.3]). Des suites exactes analogues ont été étudiées dans ce cas par Ogg[2] et Šafarevic.

4.4. Supposons que ℓ soit inversible sur X et prenons $F = (\mathbf{G}_m)R(X)$. Appliquant 3.3 et [CG, chap. I. prop. 12], on trouve, toujours sous l'hypothèse que $\mathrm{cd}_\ell(\mathrm{Spec}\, R(X)) \leq 1$.

$$(4.4.1)\quad \begin{cases} H^1(\mathrm{Spec}\, R(X), \mathbf{G}_m) = 0 \\ H^q(\mathrm{Spec}\, R(X), \mathbf{G}_m) \underset{\ell}{=} 0 \quad q \geq 2, \end{cases}$$

où le ℓ sous l'égalité veut dire que le groupe du premier membre, qui est de torsion en tout cas, n'a pas de ℓ-torsion.

On a le même résultat si on remplace $R(X)$ par $R(\overline{X}(x))$. Puisque le faisceau $\mathbf{G}_m$ sur Spec $R(X)$ induit évidemment de faisceau $\mathbf{G}_m$ sur Spec $R(\overline{X}(x))$, on déduit de 4.2

$$(4.4.2)\quad \begin{cases} H^1(X, i_*(\mathbf{G}_m)_{R(X)}) = 0 \\ H^q(X, i_*(\mathbf{G}_m)_{R(X)}) \underset{\ell}{=} 0, \text{ si } q > 1. \end{cases}$$

Or pour tout faisceau F sur X, on voit grâce à 4.1 que le noyau P et conoyau Q de l'homomorphisme canonique $F \to i_* i^* F$ sont des « faisceaux gratte-ciel », donc (comme les corps résiduels en les points fermés de X sont supposés séparablement clos) on a $H^i(X, P) = H^i(X, Q) = 0$ pour $i > 0$, ce qui implique aussitôt, par la suite exacte de cohomologie, que

$$H^i(X, F) \longrightarrow H^i(X, i_* i^* F)$$

est un isomorphisme pour $i \geq 2$. Compte tenu de (4.4.2) on en conclut la relation 35

$$(4.5)\quad H^i(X, \mathbf{G}_m) \underset{\ell}{=} 0 \text{ pour } i \geq 2,$$

valable lorsque X est un préschéma noethérien de dimension 1, satisfaisant à $\mathrm{cd}_\ell(R(X)) \leq 1$, et dont les corps résiduels en les points fermés sont séparablement clos. Compte tenu de la théorie de Kummer (3.2) et de (3.3) on en conclut le

Théorème 4.6. *Soient X noethérien de dimension 1, n un entier qui est inversible sur X, supposons que $\mathrm{cd}_\ell(R(X)) \leq 1$ pour chaque nombre premier ℓ qui divise n, et que pour tout point fermé x de X, le corps résiduel $k(x)$ soit séparablement clos. Alors on a*

$$H^q(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) = 0 \text{ si } q > 2,$$

et la cohomologie pour $q \leq 2$ est donnée par la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) \to \Gamma(X, 0_X^*) \xrightarrow{n} (X, O_X^*) \to \\ H^1(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) \to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}\, X \to H^2(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) \to 0. \end{aligned}$$

Corollaire 4.7. Soit X une courbe complète connexe sur un corps séparablement clos k, de caractéristique première à n. Alors on a

$H^0(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) \simeq \boldsymbol{\mu}_n(k)$,

$H^1(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) \simeq {}_n(\operatorname{Pic} X)$ = ensemble des éléments de $\operatorname{Pic} X$ dont l'ordre divise n,

$H^2(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) \simeq (\operatorname{Pic} X)/n \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^c$,

36 où c est l'ensemble des composantes irréductibles de X.

Pour la dernière assertion, « rappelons » que le « schéma de Picard » [TDTE V] d'un tel $X/\operatorname{Spec} k$ admet une décomposition

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \operatorname{Pic}_{X/k} \longrightarrow \mathbf{Z}^c \longrightarrow 0 \tag{4.8}$$

où A est un groupe algébrique connexe sur $\operatorname{Spec} k$. Or l'application « multiplication par n » dans un tel A est étale, donc surjectif pour les points à valeurs dans k. Il s'ensuit qu'on a

$${}_n(\operatorname{Pic} X) \approx {}_n(A(k))$$

et

$$(\operatorname{Pic} X)/n \approx (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^c.$$

Si X est lisse sur $\operatorname{Spec} k$, de sorte que la jacobienne A est une variété abélienne, le groupe ${}_n(\operatorname{Pic} X)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/n)^{2g}$, où g est le genre de X. Bien entendu, on a aussi $\boldsymbol{\mu}_n(k) \approx \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, donc les rangs des groupes de cohomologie en tant que $\mathbf{Z}/n$-modules sont 1, $2g$, 1, ce qui est le résultat auquel on devait s'attendre.

5. La méthode de la trace

5.1. Soit X un schéma, $f : X' \to X$ un revêtement étale, et F un faisceau sur X. Alors les formules d'adjonction donnent un morphisme de restriction

$$F \xrightarrow{\text{res}} f_* f^* F.$$

Comme f est fini, on a $H^q(X, f_* f^* F) \simeq H^q(X', f^* F)$ d'où un morphisme, appelé également restriction :

$$H^q(X, F) \xrightarrow{\text{res}} H^q(X', f^* F), \tag{5.1.1}$$

37 qui est d'ailleurs le morphisme évident. Mais dans le cas f étale on a aussi un autre morphisme, appelé morphisme trace

$$f_* f^* F \xrightarrow{\text{tr}} F, \tag{5.1.2}$$

qui donne des morphismes sur la cohomologie

$$H^q(X', f^* F) \xrightarrow{\text{tr}} H^q(X, F). \tag{5.1.3}$$

Le morphisme trace est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

(i) Il est de caractère local pour la topologie étale.
(ii) Si X' est somme disjointe de d copies de X, de sorte que $f_* f^* F \simeq F^d$, la trace est l'application somme $F^d \to F$.

L'unicité est triviale à partir de (i), (ii) puisque tout revêtement étale est localement constant. Ayant l'unicité, l'existence s'ensuit par l'argument usuel de descente.

De (ii) on déduit la formule suivante :

(5.1.4) $\operatorname{tr} \circ \operatorname{res} : F \longrightarrow F$ est la multiplication par le degré local de f.

Si le degré est une constante d, on en déduit que le morphisme $\mathrm{tr} \circ \mathrm{res} : H^q(X, F) \to H^q(X, F)$ est la multiplication par d.

Corollaire 5.2. Soit $f : X' \to X$ un revêtement étale de degré constant d. Si F est un faisceau de r-torsion sur X avec $(r, d) = 1$, alors $H^q(X', f^*F) = 0$ implique que $H^q(X, F) = 0$.

En effet, la multiplication par d induit un isomorphisme de F, donc un isomorphisme sur la cohomologie. Si ce dernier isomorphisme se factorise par zéro, on a $H^q(X, F) = 0$. **38**

5.2.1. Soient maintenant $i : U \to X$ une immersion, $f : U' \to U$ un revêtement étale de degré d, et supposons f induit par un morphisme fini $g : X' \to X$ par changement de base, i.e. on a alors le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Soit F un faisceau sur U. On a

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & f_* f^* F \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & F, \end{tikzcd}$$

donc, comme $i_* f_* = g_* i'_*$,

(5.3)
$$\begin{tikzcd} i_* F \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & g_* i'_* f^* F \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & i_* F, \end{tikzcd}$$

et comme $i_! f_* \simeq g_* i'_!$ (résulte p.ex. de (VIII 5.5)),

(5.4)
$$\begin{tikzcd} i_! F \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & g_* i'_! f^* F \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & i_! F, \end{tikzcd}$$

d'où

(5.3′)
$$\begin{tikzcd} H^q(X, i_* F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d'"'] & H^q(X', i'_* f^* F) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H^q(X, i_* F) \end{tikzcd}$$

et **39**

(5.4′)
$$\begin{tikzcd} H^q(X, i_! F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & H^q(X', i'_! f^* F) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H^q(X, i_! F); \end{tikzcd}$$

On déduit de (5.4) les corollaires suivants :

Proposition 5.5. Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\ell \in \mathbf{P}$, et soit H un foncteur semi-exact à valeurs dans (Ab), défini sur la catégorie des ℓ-faisceaux sur X, et compatible avec les limites inductives filtrantes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $H = 0$.

(ii) $H(f_* i_!(\mathbf{Z}/\ell)) = 0$ pour chaque $f : Y \to X$ fini, et chaque ouvert $i : U \to Y$ de Y, tel que U soit de présentation finie sur X. Si X est noethérien, on peut même se borner à prendre Y intègre.

Démonstration. D'après 2.7.2 et 2.5 il suffit de vérifier $H(F) = 0$ pour F de la forme $F = i, G$, où $i : U \to X$ est l'inclusion d'un sous-schéma de X de présentation finie sur X, et où G est un ℓ faisceau localement constant « isotrivial » sur U. Soit $U'' \to U$ un revêtement principal, de groupe g ; tel que g devienne constant sur U''. Soit A le ℓ-groupe des valeurs de G sur U''. Le groupe g opère sur A, et cette opération détermine la structure de G. Soit h un ℓ-sous-groupe de Sylow de g, et soit $U' = U''/h$ le revêtement de U correspondant à h. Le degré d de U' sur U est premier à ℓ. Prenons un prolongement de $f : U' \to U$ en un morphisme fini $g : X' \to X$, qui existe toujours (EGA IV 8.12.6), et soit $i' : U' \to X'$ l'inclusion. En appliquant (5.4) et le fait que d est premier à ℓ, on se réduit à démontrer que $H(g_* i'_! f^* G) = 0$.

40 Or il est bien connu que le seul groupe abélien de ℓ-torsion qui est simple pour une opération d'un ℓ groupe h est $\mathbf{Z}/\ell$ avec opération triviale, et il s'ensuit qu'il existe une filtration de A en tant que h-module, dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbf{Z}/\ell$ avec opération triviale. Cette filtration donne une filtration correspondante de $f^* G$, et il suffit donc, pour démontrer que $H(g_* i'_! f^* G) = 0$ de démontrer que $H(g_* i'_! \mathbf{Z}/r) = 0$, d'où le résultat.

Proposition 5.6. Soient X un schéma noethérien, $\ell \in \mathbf{P}$, et φ une fonction à valeurs dans $\mathbf{N}$, définie sur l'ensemble des schémas intègres finis sur X. Supposons que $\varphi(Y_1) \leq \varphi(Y_2)$ chaque fois qu'il existe un X-morphisme $Y_1 \to Y_2$, et que l'inégalité est stricte si Y_1 est un sous-schéma fermé de Y_2, distinct de Y_2. Pour tout Y fini sur X, posons $(Y) = \operatorname{Sup}(Y_i)$, où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y, munis de la structure induit réduite. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour chaque Y fini sur X et chaque ℓ-faisceau F sur Y on a $H^q(Y, F) = 0$ si $q > \varphi(\operatorname{Supp} F)$.

(ii) Pour chaque Y intègre fini sur X on a $H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $q > \varphi(Y)$.

Démonstration. Supposons que (ii) soit vrai. On peut appliquer la proposition précédente à chaque H^q, tenant compte que la cohomologie commute aux limites inductives et aux images directes par morphismes finis, et on se réduit ainsi pour la vérification de (i) au cas Y intègre fini sur X, et F de la forme $i_!(\mathbf{Z}/\ell)_U$, où $i : U \to X$ est un ouvert non-vide.

Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!(\mathbf{Z}/\ell)_U \longrightarrow (\mathbf{Z}/\ell)_Y \longrightarrow (\mathbf{Z}/\ell)_Z \longrightarrow 0$$

41 où $Z = Y - U$ donc $Z \neq Y$. Faisant une récurrence sur la valeur de φ, nous pouvons supposer que $H^q(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ pour $q > \varphi(Y) - 1$, d'où $H^q(Y, i_!(\mathbf{Z}/\ell)) = 0$ pour $q > \varphi(Y)$ grâce à la suite exacte de cohomologie.

Corollaire 5.7. Soit X une courbe algébrique sur un corps k séparablement clos et de caractéristique différente de ℓ, $\ell \in \mathbf{P}$. Alors la cohomologie de X dans un faisceau F de ℓ-torsion est nulle en dimension > 2. Si X est affine, la cohomologie est nulle en dimension > 1.

Posons, pour Y fini intègre sur X, $\varphi(Y) = 2 \dim Y$ (resp. $\varphi(Y) = \dim Y$ si X, donc Y, est affine). D'après 7.6 il suffit de démontrer que $H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $q > \varphi(Y)$, or c'est trivial si $\dim Y = 0$. Il reste donc à démontrer que $H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $q > 2$ (resp. si $q > 1$

dans le cas affine) pour une courbe intègre Y. Puisque $(\mathbf{Z}/\ell)_Y \simeq (\boldsymbol{\mu}_\ell)_Y$, c'est conséquence de 4.6 pour $q > 2$.

Supposons X affine. Puisque les extensions radicielles n'affectent pas la cohomologie (VIII 1.1), on se réduit au cas où k est algébriquement clos. Soit $f : X' \to X$ la normalisation de X, qui est un morphisme fini et un isomorphisme en dehors d'un ensemble fini de points, disons S. On a une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/n)_X \longrightarrow f_*(\mathbf{Z}/n)_{X'} \longrightarrow \epsilon \longrightarrow 0,$$

où ϵ est concentré sur S, donc où $H^q(X, \epsilon) = 0$ pour $q > 0$. On se ramène par (VIII 5.6) à démontrer que

$$H^q(X, f_*(\mathbf{Z}/n)_{X'}) \simeq H^q(X', \mathbf{Z}/n) = 0$$

si $q > 1$, c'est-à-dire, au cas X normale. On peut aussi évidemment supposer X connexe. Soit $i : X \to \overline{X}$ une immersion ouverte avec $\overline{X}$ complète et non-singulière. Puisque X est affine, il manque au moins un point de $\overline{X}$, et on voit immédiatement que par suite le morphisme

$$A(k) \longrightarrow \operatorname{Pic} X$$

est surjectif, où A est la Jacobienne de $\overline{X}$ (cf. (4.8)). Puisque $A(k)$ est divisible par $\ell \neq$ **42**
car k, il en est de même de Pic X, d'où $H^2(X, \boldsymbol{\mu}_\ell) = 0$ par 4.6, C.Q.F.D.

Remarque 5.8. Signalons, pour référence ultérieure, que le raisonnement de 5.5 établit en fait le résultat suivant : Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, ℓ un nombre premier, C une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des faisceaux abéliens de ℓ-torsion constructibles, stable par facteurs directs et par extensions. Supposons que pour chaque morphisme fini $f : Y \to X$ et chaque ouvert $i : U \to Y$ de Y qui est de présentation finie sur X, on ait $f_*(i_!(\mathscr{Z}/\ell\mathscr{Z})_U) \in C$. Alors C contient tous les faisceaux constructibles de ℓ-torsion.

Bibliographie

[1] Gabriel, P. Des Catégories Abéliennes, Thèse, Paris (1962).
[2] Ogg, A. Cohomology of abelian varieties over functions fields, Annals of Math. Vol. 76, No. 2 (1962).
[3] Deuring, M. Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Hamb. Abh. Bol. 13 (1940) p. 197.
[4] Grothendieck, A. Fondements de la Géométrie Algébrique, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie, Paris 5ème. (*Cité* FGA).
[5] Serre, J.P. Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes *n*° 5, (Springer) (*Cité* CG).
[6] Douady, A. Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus, Séminaire Bourbaki, exp. 189.

EXPOSÉ X

Dimension cohomologique : premier résultats

M. Artin

1. Introduction 43

Dans cet exposé on convient, sauf mention expresse du contraire, que « faisceau » signifie « faisceau abélien ».

Soient X un schéma et $\ell \in \mathbf{P}$. « Rappelons » qu'on appelle ℓ-dimension cohomologique de X le plus grand entier $\operatorname{cd}_\ell X = n$ (ou $= \infty$ si ce nombre n'existe pas) tel que $H^n(X, F) \neq 0$ pour au moins un faisceau de ℓ-torsion F sur X. Si $X = \operatorname{Spec} A$, nous écrivons $\operatorname{cd}_\ell A = \operatorname{cd}_\ell \operatorname{Spec} A$. Tenant compte du dictionnaire (VIII 2) on retrouve ainsi la notion « classique » de [CG] dans le cas où $A = k$ est un corps. Comme on a évidemment la formule

$$\operatorname{cd}_\ell(\coprod_i X_i) = \sup_i \operatorname{cd}_\ell X_i$$

on peut, de façon évidente, étendre la théorie classique à un anneau artinien quelconque. 44
Cette théorie est exposée dans (CG) = « Cohomologie galoisienne » de Serre. Nous y apporterons quelques précisions dans le n° 2.

Prenons par exemple le cas d'une variété X algébrique irréductible, de dimension n, sur un corps séparablement clos k, et fixons $\ell \neq \operatorname{car} k$. Un théorème qu'on trouvera dans le n° 4 donne pour la dimension cohomologique la majoration $2n$, qui est la dimension « véritable » de X (suggérée par l'analogie topologique dans le cas où $k = \mathbf{C}$). Ce résultat est assez élémentaire à partir de la théorie pour les corps, et en fait la majoration par $2n$ peut être améliorée sauf dans le cas où X est complète : il existe une autre majoration, $2n - 1$, qui est vraie chaque fois que dans X il « manque au moins un point ». Cette dernière est la bonne « majoration stable », dans le sens que chaque X de dimension n contient un ouvert de dimension cohomologique $2n - 1$. Une troisième majoration est obtenue pour une variété affine, où on obtient n comme dimension cohomologique. C'est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz pour les sections hyperplanes. Ces deux dernières assertions sont plus profondes et ne pourront être démontrées que plus tard (XIV).

Notons que la dimension cohomologique n'est pas une notion locale (contrairement à ce qui a lieu pour les espaces paracompacts). Par exemple un anneau hensélien à corps résiduel séparablement clos est de dimension cohomologique nulle, mais si on enlève le point fermé, on peut obtenir un nombre arbitrairement grand, savoir $2n - 1$ si $n = \dim A$ dans les cas les plus importants ; ce qui est également en accord avec l'analogie topologique fournie par la cohomologie de $U - \{x\}$, où U est un petit voisinage ouvert d'un point x d'un espace analytique complexe.

2. Résultats auxiliaires sur un corps 45

On a le suivant

Théorème 2.1. Soit k'/k une extension de type fini d'un corps k, et soit $\ell \in \mathbf{P}$. Alors

$$\mathrm{cd}_\ell\, k' \leqq \mathrm{cd}_\ell\, k + \deg.\mathrm{tr}.(k'/k),$$

Si l'inégalité stricte est vraie et si $\ell \neq \mathrm{car}\, k$, alors $\ell = 2$, k est ordonnable, et k' n'est pas ordonnable (i.e. -1 est une somme de carrés dans k').

Rappelons que lorsque $\ell = \mathrm{car}\, k$ on a $\mathrm{cd}_\ell\, k' \leqq 1$ (CG II 2.2) donc la question d'égalité dans 2.1 ne se pose guère. De plus, on a $\mathrm{cd}_2\, k = \infty$ si k est ordonnable. En effet la clôture algébrique $\overline{k}$ de k contient une sous-extension $\widetilde{k}$ (un sous-corps maximal ordonné de $\overline{k}$) avec $[\overline{k} : \widetilde{k}] = 2$. Évidemment, $\mathrm{cd}_2\, \widetilde{k} = \infty$, et $\mathrm{cd}_2\, \widetilde{k} \leqq \mathrm{cd}_2\, k$ d'après (CG I Prop. 14).

Démonstration. C'est presque tout bien connu. L'inégalité, ainsi que l'égalité si $\mathrm{cd}_\ell\, k < \infty$, sont des résultats de Tate (CG II 4.1.2). Il reste à démontrer que $\mathrm{cd}_\ell\, k' < \infty$ et $\mathrm{cd}_\ell\, k = \infty$ impliquent k ordonnable et $\ell = 2$, et il suffit de traiter les deux cas suivants :

a) $[k' : k] < \infty$,

b) $k' = k(x)$ avec x transcendant sur k.

Dans le cas a) on peut supposer k'/k séparable. Alors le groupe de Galois $H = G(\overline{k}/k')$ est un sous-groupe ouvert de $G = G(\overline{k}/k)$ et d'après un résultat de Serre [5] on a $\mathrm{cd}_\ell\, H = \mathrm{cd}_\ell\, G$ sauf si G contient un élément d'ordre ℓ. Comme un corps algébriquement clos $\overline{k}$ ne peut pas avoir un sous-corps $\widetilde{k}$ d'indice fini sauf si $\ell = 2$ et $\widetilde{k}$ est ordonnable [7], on trouve le résultat.

46 Traitons le cas b). Soit R le hensélisé de Spec $k[x]$ au point $x = 0$, qui est un anneau de valuation discrète, et soit K le corps des fractions de R. Alors $\mathrm{cd}_\ell\, k(x) < \infty$ implique $\mathrm{cd}_\ell\, K < \infty$. Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{cd}_\ell\, K < \infty$ implique $\mathrm{cd}_\ell\, k < \infty$, ce qui est conséquence du théorème suivant :

Théorème 2.2. [33]. Soit R un anneau de valuation discrète hensélien, à corps de fractions K et corps résiduel k. Soit $\ell \in \mathbf{P}$. On a

$$\mathrm{cd}_\ell\, K = \mathrm{cd}_\ell\, k + 1$$

dans les deux situations suivantes :

(i) $\ell \neq \mathrm{car}\, k$.

(ii) $\ell \neq \mathrm{car}\, K$, k parfait, et $\mathrm{cd}_\ell\, k < \infty$.

Remarque. Naturellement, si $\ell = \mathrm{car}\, K$ on a $\mathrm{cd}_\ell\, K \leq 1$ en tous cas (CG II 2.2). Il reste donc à étudier la relation de $\mathrm{cd}_\ell\, K$ avec, peut-être, le module des différentielles absolues Ω^1_k (EGA IV 20.4.3), dans le cas d'inégales caractéristiques lorsque $\mathrm{car}\, k = \ell$, k non parfait.[34]

Démonstration du théorème. Comme pour le théorème (2.1), la plupart est due à Tate. Le cas (ii) est traité explicitement dans (CG II Prop. 12) si R est complet, et on se réduit à ce cas au moyen du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. Soit R un anneau de valuation discrète hensélien, à corps des fractions K, et soit $\widehat{K}$ le corps des fractions du complété $\widehat{R}$ de R. Alors

$$G(\overline{\widehat{K}}/\widehat{K}) \simeq G(\overline{K}/K).$$

47 Démonstration. Cela veut dire que le foncteur $L \mapsto \widehat{L} = L \otimes_K \widehat{K}$ de la catégorie des K-algèbres étales dans la catégorie des $\widehat{K}$-algèbres étales est une équivalence. Or chaque algèbre étale $\widehat{K}'$ de $\widehat{K}$ est induite par une algèbre étale convenable K' de K. En effet,

[33] Ce théorème a été démontré récemment par Ax [1].

[34] N.D.E. : Citer travail de Katô XXX

si $\widehat{K}' = \widehat{K}[\alpha]$ où α satisfait à l'équation irréductible séparable $f(T) = 0$ à coefficients dans $\widehat{R}$, il suffit de prendre pour K' l'algèbre $K[\alpha_0]$, où α_0 est racine d'une équation $f_0(T) = 0$ à coefficients dans R avec $f_0 \equiv f(\widehat{m}^N)$, N grand et $\widehat{m}$ l'idéal maximal de $\widehat{R}$. C'est l'application de la « méthode de Newton » habituelle (Bourbaki, Alg. Comm. III 4.5). Il reste à démontrer que le foncteur est pleinement fidèle (il est évidemment fidèle), et il revient au même de démontrer que si K' est un corps, il en est de même de $\widehat{K}'$. Soit R' le normalisé de R dans K', qui est fini sur R puisque K'/K est séparable. L'anneau R' est un anneau de valuation discrète, et le complété de R' est $\widehat{R}' = R' \otimes_R \widehat{R}$. Donc $\widehat{R}'$ est un anneau de valuation discrète, et comme K' en est l'anneau total des fractions, il est bien un corps.

Traitons l'assertion (i) de 2.2. Si $\operatorname{cd}_\ell k < \infty$ on est encore ramené par 2.2.1 à (CG II Prop. 12) (l'hypothèse faite dans l'énoncé de cette proposition que k soit parfait n'est utilisée dans la démonstration que dans le cas de caractéristique résiduelle ℓ). Il reste donc à démontrer que $\operatorname{cd}_\ell K < \infty$ implique $\operatorname{cd}_\ell k < \infty$.

Soit $\overline{G} = G(\bar{k}/k) = G(\widetilde{K}/K)$ où $\widetilde{K}$ est l'extension non ramifiée maximale de K (i.e. le corps des fractions de l'anneau de valuation discrète $\widetilde{R}$, à corps résiduel séparablement clos, hensélisé strict de R), $G = G(\overline{K}/K)$, $H = G(\overline{K}/\widetilde{K})$, donc $\overline{G} = G/H$. Soit $\overline{G}' \subset \overline{G}$ un ℓ-sous-groupe de Sylow, et soient k'/k, K'/K les extensions correspondant à $\overline{G}'$. On a $\operatorname{cd}_\ell k < \infty$ si et seulement si $\operatorname{cd}_\ell k' < \infty$ (CG I Prop. 14), donc en remplaçant R par son normalisé dans K', on se réduit au cas où $\overline{G}$ est un ℓ-groupe. Il suffit alors de démontrer que si $\operatorname{cd}_\ell G < \infty$, alors $H^N(\overline{G}, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ pour N assez grand (CG I Prop. 20).

On a $\operatorname{cd}_\ell H = 1$ d'après la partie de i) déjà démontrée, appliquée à $\widetilde{R}$. De plus, on a 48

$$H^1(H, \boldsymbol{\mu}_\ell) = H^1(\operatorname{Spec} \widetilde{K}, \boldsymbol{\mu}_\ell) = \widetilde{K}^*/\widetilde{K}^{*\ell} = \mathbf{Z}/\ell. \tag{2.2.2}$$

En effet, $H^1(\operatorname{Spec} \widetilde{K}, \boldsymbol{\mu}_\ell) = \widetilde{K}^*/\widetilde{K}^{*\ell}$ d'après la théorie de Kummer IX 3.2. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \widetilde{R}^* \longrightarrow \widetilde{K}^* \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

et $\widetilde{R}^*$ est divisible par ℓ puisque $\widetilde{R}$ est strictement local et ℓ inversible dans $\widetilde{R}$, d'où (2.2.2).

Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(\overline{G}, H^q(H, \boldsymbol{\mu}_\ell)) \Longrightarrow H^{p+q}(G, \boldsymbol{\mu}_\ell).$$

On a $E_2^{pq} = 0$ si $q > 1$. Si de plus $\operatorname{cd}_\ell G < \infty$, le morphisme « cobord »

$$H^{n-1}(\overline{G}, H^1(H, \boldsymbol{\mu}_\ell)) \longrightarrow H^{n+1}(G, \boldsymbol{\mu}_\ell)$$

doit être bijectif pour n assez grand, et il faut démontrer qu'alors

$$H^{n-1}(\overline{G}, H^1(H, \boldsymbol{\mu}_\ell)) = H^{n-1}(\overline{G}, \mathbf{Z}/\ell) = 0.$$

Posons $R' = R[x']$ avec $x'^\ell = x$, x le paramètre local de R, et soient K' le corps des fractions de R', $G' = G(\overline{K}/K')$, etc. Le corps résiduel de R' est k, puisque nous avons supposé $\overline{G}$ un ℓ-groupe, donc que les racines ℓ-ièmes de l'unité sont dans K. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
H' \arrow[r] \arrow[d, hook] & G' \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{G} \\
H \arrow[r] & G \arrow[r] & \overline{G},
\end{tikzcd}$$

d'où un morphisme de suites spectrales de Hochschild-Serre, qui donne un diagramme 49 commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(\overline{G}, H^1(H', \boldsymbol{\mu}_l)) \arrow[dr] & \\
& H^{n+1}(G, \boldsymbol{\mu}_l) \\
H^{n-1}(\overline{G}, H^1(H, \boldsymbol{\mu}_l)) \arrow[uu, "\varepsilon"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} .$$

Comme $\mathrm{cd}_\ell\, G < \infty$ implique $\mathrm{cd}_\ell\, G' < \infty$, tous les morphismes dans ce diagramme sont des isomorphismes pour n grand. Mais le morphisme

$$\mathbf{Z}/r = H^1(H, \boldsymbol{\mu}_\ell) \longrightarrow H^1(H', \boldsymbol{\mu}_\ell) = \mathbf{Z}/\ell$$

qui induit la flèche ϵ est évidemment nul, donc $H^{n-1}(\overline{G}, \mathbf{Z}/\ell) = 0$, C.Q.F.D.

Théorème 2.3. Soient A un anneau noethérien hensélien de dimension 1, et $\ell \in \mathbf{P}$ inversible dans A. Soient k le corps résiduel de A et $R(A)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur Spec A. On a

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(A) \leq \mathrm{cd}_\ell\, k + 1,$$

et l'égalité est vraie si $\ell \neq 2$ ou si k n'est pas ordonnable.

Démonstration. En remplaçant A par A/P pour un idéal premier minimal P de A et en appliquant VIII 1 on voit qu'on peut supposer A intègre. Soient K son corps des fractions, R son normalisé, qui est local et hensélien, donc un anneau de valuation discrète (il est noethérien d'après Krull-Akizuki (Bourbaki, Alg. Comm. Chap. 7, § 2, prop. 5)) et soit k' le corps résiduel de R. Il est connu que $[k' : k] < \infty$ (loc. cit.). Or K est le corps des fractions de R et on a donc

$$\mathrm{cd}_\ell\, K = \mathrm{cd}_\ell\, k' + 1 \leq \mathrm{cd}_\ell\, k + 1$$

50 d'après 2.2, avec l'égalité sous la dernière hypothèse de 2.3, d'après 2.1.

Exemple. L'égalité n'est pas vraie pour $\ell = 2$, A étant le hensélisé à l'origine de $\mathbf{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$.

Corollaire 2.4. Soit A un anneau local noethérien à corps résiduel k, et soit $\ell \in \mathbf{P}$ inversible dans A. Supposons que $\ell \neq 2$ ou qu'aucun corps résiduel de Spec A ne soit ordonnable. Alors on a

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(A) \geq \mathrm{cd}_\ell\, k + \dim A,$$

où $R(A)$ est l'anneau des fonctions rationnelles sur Spec A.

Démonstration. On peut supposer A intègre, de corps des fractions $R(A) = K$. Soit $x \in \mathfrak{m}_A$. Alors $\dim A/(x) = \dim A - 1$. Par récurrence sur $\dim A$, on a

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(A/(x)) \geq \mathrm{cd}_\ell\, k + \dim A - 1.$$

Soit k' un corps résiduel de $R(A/(x))$ tel que $\mathrm{cd}_\ell\, k' = \mathrm{cd}_\ell\, R(A/(x))$ (cf. VIII 1), et soit P l'idéal premier, noyau de $A \to k'$. L'anneau A_P est de dimension 1. Il suffit donc de démontrer le corollaire pour l'anneau local A_P, c'est-à-dire, on est réduit au cas où $\dim A = 1$. Soit $\widetilde{A}$ le hensélisé de A. Chaque corps résiduel de $R(\widetilde{A})$ s'identifie à une extension séparable de $R(\widetilde{A}) = K$, et on a donc

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(A) = \mathrm{cd}_\ell\, K \geq \mathrm{cd}_\ell\, R(\widetilde{A}).$$

On est ainsi ramené au cas où A est de dimension 1 et hensélien, ce qui est conséquence de 2.3.

Corollaire 2.5. Soit X un schéma noethérien et soit $\ell \in \mathbf{P}$ inversible sur X. Alors 51

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(X) \geq \dim X.$$

En effet, soit $x \in X$ un point tel que $\dim X = \dim \mathscr{O}_{X,x}$ (ou tel que $\dim \mathscr{O}_{X,x}$ est très grand si $\dim X = \infty$). Soit A le hensélisé strict de $\mathscr{O}_{X,x}$. Alors on a $\mathrm{cd}_\ell\, R(X) \geq \mathrm{cd}_\ell\, R(\mathscr{O}_{X,x}) \geq \mathrm{cd}_\ell\, R(A)$ d'après le raisonnement habituel. De plus, $\dim A = \dim X$ (resp. est très grand). Si $\ell = 2$, et si ℓ est inversible sur X, alors l'équation $T^2 + 1 = 0$ est séparable sur A, donc -1 est un carré dans A parce que A est strictement local, donc les corps résiduels de A sont non ordonnables. Donc les hypothèses de 2.4 sont satisfaites pour A en tout cas, et on a $\mathrm{cd}_\ell\, R(A) \geq \dim A$, d'où le résultat.

3. Corps des fractions d'un anneau strictement local

3.0. Nous aurons un besoin essentiel, pour les numéros suivants, de la connaissance de $\mathrm{cd}_\ell\, R(A)$, où A est un anneau strictement local, c'est-à-dire hensélien à corps résiduel séparablement clos. Malheureusement on ne connaît pas $\mathrm{cd}_\ell\, R(A)$ dans le cas général, par exemple si $A = \widehat{\mathbf{Z}}_p[[x]] (p \neq \ell)$.

On conjecture[35] cependant que si A est noethérien et ℓ est inversible dans A, on a

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(A) = \dim A \quad (\ell \text{ inversible dans } A), \tag{3.1}$$

du moins dans les cas les plus importants, par exemple si A est un anneau excellent (EGA IV 7.8.2).

Notons que si $\dim A = 1$, (3.1) est vrai d'après 2.3. De plus, on a l'inégalité $\geq$ d'après 2.5 en tout cas. Nous démontrerons plus tard (XIX) que (3.1) est aussi vrai si A est excellent de caractéristique résiduelle nulle, en utilisant la résolution des singularités [3]. 52
Ici nous démontrerons (3.1) seulement dans le cas facile 3.2. ci-dessous.

Naturellement on a $\mathrm{cd}_\ell\, R(A) \leq 1$ si A est de caractéristique ℓ, donc ce cas est trivial. Il reste de plus à analyser le cas d'inégales caractéristiques, avec caractéristique résiduelle ℓ, et on ne s'attend pas à ce que (3.1) soit vrai dans ce cas-là. Il faudra certainement tenir compte du rang du module Ω^1_k (k le corps résiduel), i.e. du degré $[k : k^\ell]$.[36]

Proposition 3.2. Soit X un préschéma de type fini sur le spectre d'un corps k ou sur le spectre d'un anneau de valuation discrète R, et soit $\ell \in \mathbf{P}$ inversible dans k (resp. R). Alors 3.1 est vrai pour chaque anneau A qui est un localisé strict de X.

Démonstration. Prenons X intègre (on se réduit à ce cas comme d'habitude), et soit $n = \dim X$.

Supposons que X soit défini sur un corps séparablement clos k. Alors pour chaque anneau A qui est un localisé strict de X en un point fermé, on a $\dim A = n$. Comme chaque corps résiduel K de $R(A)$ s'identifie à une extension algébrique de $R(X)$ et comme

$$\deg.\mathrm{tr}.(R(X)/k) = \dim X = n,$$

on a $\mathrm{cd}_\ell\, K \leq n$ d'après 2.1, d'où $\mathrm{cd}_\ell\, R(A) \leq n$. L'inégalité opposée est conséquence de 2.5.

Supposons maintenant que X soit de type fini sur $\mathrm{Spec}\, R$, R un anneau de valuation discrète, et soit A le localisé strict de X en un point x. Si x n'est pas au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}\, R$, on se réduit immédiatement au cas où X est de type fini sur un corps (en localisant R). On peut aussi pour la même raison supposer que le morphisme $X \to \mathrm{Spec}\, R$ est dominant.

[35] N.D.E. : Démontré par O. Gabber XXX

[36] N.D.E. : Voir [Gabber-Orgogozo] XXX

53 Supposons pour l'instant que de plus R est un anneau de valuation discrète strictement local et que le point x est fermé dans X. Alors on a $\dim A = \dim X = n$ (EGA IV 5.6.5). Comme chaque corps résiduel K de $R(A)$ s'identifie à une extension séparable de $R(X)$ on a

$$\mathrm{cd}_\ell\, R(A) \leq \mathrm{cd}_\ell\, R(X) \leq \mathrm{cd}_\ell\, L + \deg.\mathrm{tr}.(R(X)/L) = 1 + (n-1) = n$$

d'après 2.1 et 2.2, où L est le corps des fractions de R, d'où le résultat dans ce cas, compte tenu de 2.5.

On déduit le cas général de ces cas particuliers au moyen du lemme suivant :

Lemme 3.3. (i) Soit X de type fini sur le spectre d'un corps k et soit A un anneau localisé strict de X en un point x. Alors il existe un corps k' séparablement clos, un schéma X' de type fini sur $\operatorname{Spec} k'$, et un point x' fermé dans X' tel que A soit isomorphe à un anneau localisé strict de X' en x'.

(ii) Soit X de type fini sur $\operatorname{Spec} R$, R un anneau de valuation discrète, soit x un point de X au-dessus du point fermé de $\operatorname{Spec} R$ et soit A un localisé strict de X en x. Il existe un anneau de valuation discrète strictement local R', un schéma X' de type fini sur $\operatorname{Spec} R'$, et un point fermé x' de X' au-dessus du point fermé de $\operatorname{Spec} R'$, tel que A soit isomorphe à un localisé strict de X' en x'.

Démonstration.

(i) On peut prendre X affine.

Soit Y l'adhérence de x dans X, avec la structure induite réduite, et soit $d = \dim Y$. Par le lemme de normalisation ([2] Chap. V § 3 n° 1), il existe un morphisme

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} k[y_1, \ldots, y_d] = T$$

54 induisant un morphisme fini $Y \to T$. Par suite l'anneau localisé strict de $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe au localisé strict de $\mathcal{O}_{X',x'}$, où $X' = X \times_T \operatorname{Spec} \overline{R(T)}$, et où x' est un point fermé dans X'.

(ii) Ce cas se traite d'une façon analogue. On peut supposer X affine, d'anneau A. Soit Y l'adhérence de x dans X avec la structure induite réduite, qui est un sous-schéma fermé de la fibre fermée X_0 de X sur $\operatorname{Spec} R$, et soit $d = \dim Y$. Alors, en relevant les éléments $y_1, \ldots, y_d$ de $A \otimes_R k$ envisagés dans (i) en des éléments de A, on trouve un morphisme

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} R[y_1, \ldots, y_d] = T$$

induisant un morphisme fini $Y \to T_0$. Soit R' le localisé strict de $R[y_1, \ldots, y_d] = B$ en l'idéal premier $\mathfrak{m}B$. Alors R' est un anneau de valuation discrète strictement local, et on peut prendre $X' = X \times_T \operatorname{Spec} R'$, et x' un point fermé de X' au-dessus de x.

4. Dimension cohomologique : cas ℓ inversible dans $\mathcal{O}_X$

Théorème 4.1. Soit X un schéma noethérien, $\ell \in \mathbf{P}$, et φ une fonction sur X, à valeurs dans $\mathbf{N}$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Pour chaque $x \in X$, $\mathrm{cd}_\ell\, k(x) \leq \varphi(x)$.

(ii) Soit $x \in X$ et $y \in Y =$ adhérence de x, $y \neq x$. Soit K l'anneau des fonctions rationnelles d'un localisé strict de Y au-dessus de y. On a $\mathrm{cd}_\ell\, K < \varphi(x) - \varphi(y)$.

Alors pour chaque faisceau de ℓ-torsion F sur X on a

$$H^q(X, F) = 0$$

si
$$q > \varphi(F) \underset{\text{déf}}{=} \operatorname{Sup}\{\varphi(x) \mid x \in X, F_{\overline{x}} \neq 0\}.$$

Démonstration. Les hypothèses seront aussi vérifiées pour la fonction restriction de φ à un sous-préschéma quelconque de X, donc par récurrence noethérienne nous pouvons supposer le théorème vrai pour chaque sous-préschéma fermé de X distinct de X. Soit F donné et écrivons $F = \varinjlim F_i$ où les F_i sont les sous-faisceaux constructibles de F (IX 2.9 (iii)). 55

Pour chaque F_i, l'ensemble des $x \in X$ tels que $F_x \neq 0$ est constructible dans X, et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à chaque F_i dont le support n'est pas dense. On voit ainsi que l'hypothèse de récurrence implique en fait que le théorème est vrai pour chaque F qui est nul en au moins un des points maximaux de X. Nous allons donc supposer que F ne satisfait pas à cette condition.

Soit maintenant i : Spec $R(X) \to X$ l'inclusion, où $R(X)$ est l'anneau des fonctions rationnelles de X, et considérons la suite exacte suivante, où K et C sont définis comme noyau et conoyau respectivement :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Ici K et C sont nuls en chaque point maximal de X, donc d'après (ii), $\varphi(K)$ (resp. $\varphi(C)$) est strictement plus petit que $n = \varphi(F)$, d'où $H^q(X, K) = H^q(X, C) = 0$ pour $q \geq n$. Donc, pour démontrer $H^q(X, F) = 0$ pour $q > n$, il suffit, grâce aux suites exactes de cohomologie, de démontrer $H^q(X, i_* i^* F) = 0$, donc nous pouvons supposer que F est de la forme $i_* G$, pour un ℓ-faisceau convenable G sur Spec $R(X)$.

Examinons la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q i_* G) \Longrightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} R(X), G).$$

Or $R(X)_{\text{réd}}$ est produit des corps $k(x)$ pour x maximal dans X, donc $\operatorname{cd}_\ell R(X) \leq n$ d'après (i), donc l'aboutissement de la suite spectrale est nul en dimension strictement supérieure à n. Nous voulons démontrer que $E_2^{p0} = 0$ pour $p > n$. En examinant la suite spectrale, on voit qu'il suffit de démontrer que $E_2^{pq} = 0$ si $q > 0$ et si $p > n - q - 1$. Donc, par récurrence, il suffit de démontrer que $\varphi(R^q i_* G) < n - q$ pour $q > 0$. Mais d'après VIII 5.2 la fibre de $R^q i_* G$ en un point géométrique $\overline{y}$ au-dessus d'un point $y \in X$ n'est autre que $H^q(\operatorname{Spec} K, G_K)$, où K est l'anneau des fonctions rationnelles du localisé strict de X en $\overline{y}$, et G_K est le faisceau induit sur Spec K. On a $\operatorname{cd}_\ell K < n - \varphi(y)$ d'après (ii), d'où $(R^q i_* G)_{\overline{y}} = 0$ si $q \geq n - \varphi(y)$, ce qui donne le résultat cherché. 56

Corollaire 4.2. Soient X un schéma noethérien, $\ell \in \mathbf{P}$, $n \in \mathbf{N}$, et supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour chaque point y de X de codimension c, on a $\operatorname{cd}_\ell k(y) \leq n - 2c$.

(ii) Pour chaque anneau A, localisé strict d'un sous-schéma fermé irréductible Y de X, on a $\operatorname{cd}_\ell R(A) \leq \dim A$.

Alors

$$\operatorname{cd}_\ell X \leq n.$$

Plus précisément, si F est un ℓ-faisceau qui est nul en chaque point y de codimension $< s$, on a

$$H^q(X, F) = 0 \text{ si } q > n - 2s.$$

En effet, on peut prendre $\varphi(y) = n - 2\operatorname{codim} y$ et appliquer 4.1, dont la condition (i) (resp. (ii)) résulte de la condition correspondante de (i) (resp. (ii)) de (4.2), compte tenu pour (ii) de l'inégalité $\dim \mathscr{O}_{Y,y} + \dim \mathscr{O}_{X,x} \leq \dim \mathscr{O}_{X,y}$.

Corollaire 4.3. Soit X de type fini et de dimension n sur un corps k et soit $\ell \neq \operatorname{car} k$. Alors $\operatorname{cd}_\ell X \leq 2n + \operatorname{cd}_\ell k$.

57 On applique le corollaire précédent, en y remplaçant n par $2n + cd_\ell k$, et utilisant 2.1 et 3.2 pour vérifier les conditions (i) et (ii) de 4.2, et tenant compte pour (i) de l'inégalité

$$\deg.\operatorname{tr}.K(y)/k + \dim \mathscr{O}_{X,y} \leq \dim X.$$

Corollaire 4.4. Soit X noethérien, et $\ell \in \mathbf{P}$ inversible sur X. Supposons que la condition (ii) de 4.2 est satisfaite, et que de plus $\ell \neq 2$ ou qu'aucun corps résiduel de X ne soit ordonnable. Alors on a

$$\operatorname{cd}_\ell X \leq \operatorname{cd}_\ell R(X) + \dim X \leq 2\operatorname{cd}_\ell R(X).$$

On pose $n = \operatorname{cd}_\ell R(X) + \dim X$ dans 4.2, et on applique 2.4, qui implique la condition (i) de 4.2, car

$$\operatorname{cd}_\ell k(y) \leq \operatorname{cd}_\ell R(\mathscr{O}_{X,y}) - \dim \mathscr{O}_{X,y} \leq \operatorname{cd}_\ell R(X) - \dim \mathscr{O}_{X,y} \leq n - 2\dim \mathscr{O}_{X,y}.$$

La deuxième inégalité dans 4.4 résulte de 2.5.

Exemple 4.5. L'hypothèse inélégante sur les corps résiduels faite dans 4.4, est nécessaire, comme on voit avec $X = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2)$, où toutes les autres conditions sont satisfaites, avec $\dim X = \operatorname{cd}_\ell R(X) = \ell = 2$, mais le faisceau $\mathbf{Z}/2$ concentré au point $(0,0,0)$ a une cohomologie non nulle en chaque dimension, donc $\operatorname{cd}_\ell X = +\infty$.

4.6. On est tenté aussi d'essayer dans 4.2 de mettre des hypothèses seulement sur les points fermés de X, mais ce n'est pas possible. Par exemple il existe des anneaux de valuation discrète à corps résiduel algébriquement clos et à corps de fonctions ayant une dimension cohomologique arbitrairement grande [36]. Le spectre d'un tel anneau aura aussi une dimension cohomologique très grande.

5. Dimension cohomologique : cas $\ell = p$

58

5.0. En utilisant la théorie d'Artin-Schreier (IX 3.5) on obtient une meilleure majoration que 4.3 pour la p-dimension cohomologique d'un schéma X de caractéristique p. Soit $\operatorname{cdqc} X$ le plus grand nombre n tel que $H^n(X,F) \neq 0$ pour au moins un faisceau de Modules F quasi-cohérent sur X (au sens de Zariski). On a le

Théorème 5.1. Soit X un schéma noethérien de caractéristique $p > 0$. Alors

$$\operatorname{cd}_p X \leq \operatorname{cdqc} X + 1.$$

En particulier, la p-dimension cohomologique d'un schéma noethérien affine X de caractéristique $p > 0$ est au plus égale à 1.

Démonstration. Appliquons IX 5.5 :

Tenant compte du fait que les $R^q f_* F$, $q > 0$, sont nuls pour un morphisme f fini et pour un faisceau abélien F (VIII 5.5) (resp. un faisceau F quasi-cohérent), on se ramène

[36] Pour s'en convaincre, il suffit de noter que si X est un schéma algébrique lisse sur un corps k, admettant un point $x \in X(k)$, alors on peut trouver un « arc de courbe formel » passant par x dont « l'enveloppe algébrique » soit X, et dont le corps des fonctions contient donc celui K de X, et y induit une valuation discrète dont le corps résiduel est k.

à démontrer que $H^q(X, i_!(\mathbf{Z}/p)_U) = 0$ pour $i : U \to X$ une immersion ouverte et pour $q >$ cdqc X.

Or soit Y un sous-préschéma fermé de X de support $X - U$ et soit J le faisceau cohérent d'idéaux définissant Y. Le morphisme $p : f \mapsto f^p - f$ (IX 3.5) induit un morphisme $J \to J$. En examinant la suite exacte IX 3.5 et la suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!(\mathbf{Z}/p)_U \longrightarrow (\mathbf{Z}/p)_X \longrightarrow (\mathbf{Z}/p)_Y \longrightarrow 0,$$

on voit qu'on a en fait une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow i_!(\mathbf{Z}/p)_U \longrightarrow J \longrightarrow J \longrightarrow 0.$$

Puisque J est cohérent on a $H^q(X, J) = 0$ pour $q >$ cdqc X, d'où le résultat par la suite exacte de cohomologie. 59

Pour un schéma quasi-projectif sur un corps k séparablement clos, on peut réduire cette majoration dans certain cas de 1. On a en fait

Corollaire 5.2. Soit X un schéma de type fini sur un corps k de caractéristique $p > 0$. On a

$$\mathrm{cd}_p X \leq \dim X + 1,$$

et si k est séparablement clos et X quasi-projectif [36], on a

$$\mathrm{cd}_p X \leq \dim X.$$

En effet, la première assertion est claire, puisque cdqc $X \leq \dim X$ ([6] 4.15.2). Traitons la deuxième : Pour un tel X, les groupes de cohomologie $H^n(X, F)$ ($n = \dim X$), pour un faisceau cohérent F, sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k. Soit $V = H^n(X, J)$, où J est le faisceau d'idéaux qui figure dans la suite exacte $(*)$. Le morphisme $\varphi : V \to V$ déduit de $(*)$ est évidemment de la forme $\varphi = \epsilon - \mathrm{id}$ où ϵ satisfait à $\epsilon(rv) = r^p\epsilon(V)$ pour $r \in k$ et $v \in V$. La jacobienne de l'application Φ du schéma affine déduit de Φ est donc $-I$, où I est la matrice identique. Par suite Φ est étale, donc surjectif parce que additif, et il s'ensuit que Φ est surjectif puisque k est séparablement clos, d'où aussitôt la conclusion.

6. Dimension cohomologique pour un préschéma de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$

60

Proposition 6.1. Soit X quasi-fini au-dessus de Spec $\mathbf{Z}$. Supposons que $\ell \neq 2$ ou que chaque corps résiduel de X de caractéristique zéro est totalement imaginaire. Alors $\mathrm{cd}_\ell X \leq 3$.

C'est une conséquence du théorème 2.2 (ii), du corollaire 4.2 et du fait qu'un corps de nombres (totalement imaginaire si $\ell = 2$) est de ℓ-dimension cohomologique ≤ 2 (CG II 4.4).

Une conséquence de la théorie du corps de classes est qu'on a l'égalité si le morphisme $X \to$ Spec $\mathbf{Z}$ est propre et surjectif.

Malheureusement les résultats du *n*° 4 ne s'appliquent pas tels quels si X est seulement de type fini sur Spec $\mathbf{Z}$, parce que l'hypothèse (ii) de (4.2) n'est pas en général vérifiée pour les anneaux locaux de caractéristique résiduelle ℓ. On doit donc utiliser le résultat (5.1) pour obtenir la bonne majoration ; on va maintenant se payer pour le théorème (5.1).

[36] Utilisant le lemme de Chow, il est facile de remplacer la condition « X quasi-projectif » par « X séparé ».

Théorème 6.2. Soit X de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, et soit $\ell \in \mathbf{P}$. Supposons, si $\ell = 2$, qu'aucun corps résiduel de X n'est ordonnable. Alors

$$\operatorname{cd}_\ell X \leq 2\dim X + 1.$$

Plus précisément, soit F un faisceau de ℓ-torsion tel que pour tout point x de X tel que $F_{\overline{x}} \neq 0$, on ait

$$\dim\{\overline{x}\} \leq \begin{cases} (N-1)/2 & \text{si} \quad \ell \neq \operatorname{car} k(x) \\ N-1 & \text{si} \quad \ell = \operatorname{car} k(x) \end{cases}$$

($\{\overline{x}\}$ est l'adhérence de $\{x\}$) ; alors

$$H^p(X, F) = 0 \text{ si } p > N.$$

61 Démonstration. Par récurrence sur X, nous pouvons supposer le théorème vrai pour chaque sous-préschéma fermé distinct de X. Si F est comme dans l'énoncé et si on écrit $F = \varinjlim F_i$ où les F_i sont les sous-faisceaux constructibles de F (IX 2.9 (iii)), chaque F_i vérifie aussi les mêmes hypothèses. Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque F est constructible.

Or dans ce cas l'ensemble E des $x \in X$ tels que $F_{\overline{x}} \neq 0$ est un sous-ensemble constructible, et l'hypothèse de récurrence implique que le théorème est vrai pour chaque F tel que E ne soit pas dense. De plus, le théorème est une conséquence de 5.1 pour un faisceau concentré sur la fibre de X en le point (ℓ) de $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, et de 4.3 pour un faisceau concentré sur la fibre en (p), où $p \neq \ell$, compte tenu que $\operatorname{cd}_\ell \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = 1$ (CG II 2.2).

Prenons X réduit, et soit $X = X_0 \cup X_1$ où X_1 est le sous-ensemble fermé, réunion des composantes irréductibles de X de caractéristique ℓ, et où X_0 est la réunion des autres composantes irréductibles, X_0 et X_1 étant munis des structures induites réduites. Soient $j_\nu : X_\nu \to X$ les inclusions et soit $d_\nu = \dim X_\nu$, et $N = \sup\{2d_0 + 1, d_1 + 1\}$. Pour tout F constructible sur X on a une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow F \longrightarrow {j_0}_* j_0^* F \oplus {j_1}_* j_1^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où C est concentré sur $X_0 \cap X_1$, qui est de caractéristique ℓ et de dimension $\leq d_1 - 1$. Il s'ensuit que

$$H^q(X, C) = 0 \text{ si } q > N - 1,$$

car en vertu de 5.1 on a $\operatorname{cd}_\ell(X_0 \cap X_1) \leq \dim(X_0 \cap X_1) + 1 \leq d_1 \leq N - 1$. En examinant la suite exacte de cohomologie relative de $(*)$, on se ramène au cas $X = X_0$ ou $X = X_1$, et ce dernier est conséquence de 5.1, comme on l'a déjà signalé.

62 Supposons donc que chaque point maximal de X est de caractéristique différente de ℓ, et soient $i_\nu : x_\nu \to X$ les inclusions des points maximaux. En examinant la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow \bigoplus_\nu i_{\nu *} i_\nu^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

on se réduit par récurrence au cas $F = i_{\nu *} i_\nu^* F$, c'est-à-dire F de la forme $i_* G$ pour un faisceau G convenable sur $\operatorname{Spec} k(x)$, x un point de X. On peut donc supposer X irréductible et réduit, à point générique x, et que la caractéristique de $k(x)$ est zéro d'après 4.3.

Examinons la suite spectrale

$$(**) \qquad H^p(X, R^q i_* G) \Longrightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} k(x), G).$$

Soit $s = \dim X$. Il nous faut démontrer que

$$(+) \qquad E_2^{p0} = 0 \text{ pour } p > 2s + 1.$$

Or $k(x)[i]$ est de degré de transcendance $s-1$ au-dessus de $\mathbf{Q}[i]$ qui est un corps de dimension cohomologique 2. Puisque $k(x)$ n'est pas ordonnable si $\ell = 2$, il s'ensuit de 2.1 qu'on a $\mathrm{cd}_\ell\, k(x) = s+1$. Ça implique que le but de la suite spectrale est nul pour $n > s+1$. Il suffit donc pour (+) de démontrer que dans (∗∗) on a

$$(++) \qquad E_2^{pq} = 0 \text{ si } p > 2s - q \text{ et } q > 0.$$

Soit y un point de X et K l'anneau des fractions d'un localisé strict en un point géométrique $\tilde{y}$ de X au-dessus de y. Alors K est produit direct de corps dont chacun est de degré de transcendance $s-1$ sur un localisé strict de $\mathbf{Z}$, et on a donc, d'après 2.1 et 2.2, $\mathrm{cd}_\ell\, K \leq s$. De plus on peut appliquer 3.2 si la caractéristique résiduelle de y n'est pas ℓ. On a donc

$$('') \qquad (R^q i_* G)_{\tilde{y}} = 0 \begin{cases} \text{si } q > \operatorname{codim} y, \text{ i.e. } \dim \overline{y} > s-q, \text{ et } \ell \neq \operatorname{car} k(y), \\ \text{ou si } q > s \text{ en tout cas.} \end{cases}$$

En particulier on a $E_2^{pq} = 0$ si $q > s$. Pour vérifier (++) dans le cas $0 < q \leq s$, on applique **63**
l'hypothèse de récurrence aux faisceaux $R^q i_*(G)$.

D'après l'énoncé et (″), il faut poser $N' = 2s - q$ et vérifier les deux inégalités

$$s - q \leq (N'-1)_{/2}$$
$$s - 1 = \dim X_\ell \leq N' - 1,$$

où X_ℓ est la fibre de X au-dessus du point (ℓ) de Spec $\mathbf{Z}$. Elles sont bien vraies si $0 < q \leq s$. C.Q.F.D.

Bibliographie

[1] Ax, J. Proof of some conjectures of Serre on cohomological dimension, Proc. Amer. Math. Society 16 (1965) 1214-1221.

[2] Bourbaki, N. Algèbre commutative, Paris (1960)

[3] Hironaka, H. Resolution of singularities of an algebraic surface over a field of characteristic zero, Annals of Math. Vol. 79, No. 1, 2 (1964)

[4] Nagata, M. Local Rings, New York (1962)

[5] Serre, J-P. Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, Topology Vol. 3, p. 413 (1965)

[6] Godement, R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris (1958).

[7] E. Artin et A. Schreier - Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, Hamb. Abh. 5 (1927) pp. 225-231.

[8] Serre, J.P. Cohomologie galoisienne, Lecture Notes *n*° 5 (Springer).

EXPOSÉ XI

Comparaison avec la cohomologie classique : cas d'un schema lisse

M. Artin

1. Introduction

64

Dans le n° 4 nous démontrerons que la cohomologie étale à valeurs dans un faisceau localement constant de torsion coïncide avec la cohomologie classique pour un schéma X lisse sur Spec $\mathbf{C}$. La démonstration, qui est essentiellement celle donnée dans [1], est élémentaire à partir du théorème de Grauert rappelé plus bas (4.3 (iii)), qui dit que chaque revêtement fini de $X(\mathbf{C})$ provient d'un revêtement étale de X ; c'est pourquoi on la donne ici, bien qu'on prouvera un résultat plus complet plus tard, en utilisant le théorème de résolution des singularités de Hironaka [3] [36]. De plus, les bons voisinages construits dans la section 3 pourraient être utiles dans d'autres situations. 65

Notons qu'il n'est pas vrai que la cohomologie étale et la cohomologie classique coïncident pour les faisceaux qui ne sont pas de torsion. Par exemple, on a $H^1(X_{\text{et}}, \mathbf{Z}) = 0$ pour tout schéma normal X (IX 3.6 (ii)), mais la cohomologie classique n'est pas nécessairement nulle.

2. Existence de sections hyperplanes assez générales

Le résultat suivant est classique mais on manque de référence (en attendant EGA V) :

Théorème 2.1. Soit k un corps et $V \subset \mathbf{P}^n_k$ un schéma algébrique projectif purement de dimension r. Soit V' le sous-schéma ouvert des points de V lisses sur Spec k et soit P un point rationnel de $\mathbf{P}^n$. Alors :

(i) Un sous-espace linéaire « assez général » L de dimension donnée d de $\mathbf{P}^n$ coupe V transversalement en chaque point de $L \cap V'$.

(ii) Soit $\{H_1, \dots, H_s\}$ $(s \leq r)$ un système d'hyperplans de degré $d \geq 2$ passant par P et soit $Y = H_1 \cap \ldots \cap H_s$. Si $\{H_1, \dots, H_s\}$ est assez général, alors Y coupe V transversalement en chaque point de $Y \cap V'$.

La locution « pour un sous-espace linéaire assez général » veut dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense U de la grassmannienne qui paramétrise les sous-espaces linéaires de dimension d, tel que l'assertion envisagée sur L soit vraie chaque fois que le paramètre de L est dans U. Cela n'implique donc pas qu'il existe un tel L (défini sur k), si k n'est pas défini. De même, les hyperplans de degré d passant par P sont paramétrisés 66
par un espace projectif $\mathbf{P}^N$, et la locution « pour $\{H_1, \dots, H_s\}$ assez général » veut dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense U de $(\mathbf{P}^N)^s$ tel que l'assertion envisagée soit vraie chaque fois que le paramètre de $(H_1, \dots, H_s)$ est dans U.

[36] Notons d'ailleurs que la résolution des singularités de Hironaka permet également de donner une démonstration très simple du résultat de Grauert, et à ce titre peut être considérée comme étant de toutes façons à la base des théorèmes de comparaison. Voir à ce sujet l'exposé de Mme M. Raynaud dans SGA 1 XII (North Holland Pub. Cie).

Démonstration (i) : Par récurrence on est ramené immédiatement au cas où L est un hyperplan. Soit (V'_ν) un recouvrement fini ouvert de V'. Si l'assertion (i) est vraie quand on remplace le symbole V' par V'_ν quel que soit ν, c'est aussi vrai pour V', parce que l'intersection d'un nombre fini de sous-ensemble ouverts denses est également ouvert et dense. On peut donc remplacer la situation par un schéma algébrique affine, disons $V \subset \mathbf{E}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$. L'hyperplan L sera l'ensemble des zéros d'une équation linéaire

$$\ell(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Rappelons qu'un schéma lisse est localement intersection complète. On peut donc remplacer V' par un sous-ensemble ouvert de points de V tel qu'il existe des polynômes $f_1(x), \ldots, f_{n-r}(x)$ qui s'annulent sur V et des indices $1 \leq j_\nu \leq n$ $(\nu = 1, \ldots, n-r)$ tels que le déterminant

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_\nu}}\right| \qquad (i, \nu = 1, \ldots, n-r)$$

soit inversible. Disons $j_\nu = \nu$ $(\nu = 1, \ldots, n-r)$. Alors on peut résoudre les équations

$$y_j = \sum_{i=1}^{n-r} \quad c_i \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

67 pour c_i comme fonction rationnelle des variables x_i, y_j $(i = 1, \ldots, n-r\,; j = 1, \ldots, n)$, et ces fonctions $c_i(x, y)$ sont définies en chaque point de V'.

Or dire que L coupe V transversalement en un point Q de V' revient à dire que la valeur de la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_n} \\ a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

en Q est de rang $n - r + 1$. Donc pour que L coupe V transversalement en chaque point de V' il faut et suffit que le système des $r + 1$ équations

$$a_j = \sum_{i=1}^{n-r} c_i(x, a) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (j = n - r + 1, \ldots, n)$$

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

n'ait aucune solution sur V'. Une telle condition est évidemment constructible en (a) : Soit $X = V' \times A$, où A est l'espace affine de coordonnées $a_0, \ldots, a_n$, et soit $Y \subset X$ le sous-ensemble fermé des solutions de ces équations. La condition est que la fibre de
68 Y/A soit vide, ce qui est bien une condition constructible (EGA IV 9.5.1). Il suffit donc de vérifier que la fibre au-dessus du point générique de A est vide, ce qui se voit immédiatement sur la forme des équations. Ceci achève la démonstration de (i). (ii) : Considérons l'application rationnelle $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ donnée par le système linéaire des hyperplans de degré d $(d \geq 2)$ passant par P. Il est bien connu (et on le vérifie aisément) que c'est un « éclatement » de P, donc donne une immersion localement fermée

$$f : \mathbf{P}^n - \{P\} \longrightarrow \mathbf{P}^N.$$

Soit $V'' = V' - (\{P\} \cap V')$, $\overline{V}'' = F(V'')$ et soit L_i l'hyperplan de $\mathbf{P}^N$ correspondant aux hyperplans H_i $(i = 1, \ldots, s)$. Alors V'' est isomorphe à $\overline{V}''$, et d'après la définition de f, dire que Y coupe V'' transversalement revient à dire que $L_1 \cap \ldots \cap L_s$ coupe $\overline{V}''$

transversalement. En posant $\overline{V}$ = adhérence de $\overline{V}''$, on est ramené à l'assertion (i) pour $\overline{V}$, qui implique (ii) avec V'' au lieu de V'. Il reste donc à considérer le point P, si c'est un point lisse de V. Mais il est évident que si $\{H_1, \dots, H_s\}$ est assez général et P est lisse sur V, alors Y coupe V transversalement en P, d'où le résultat.

3. Construction des bons voisinages

Définition 3.1. On appelle fibration élémentaire un morphisme de schémas $f : X \to S$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] & Y \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes : 69

(i) j est une immersion ouverte dense dans chaque fibre, et $X = \overline{X} - Y$.
(ii) $\overline{f}$ est lisse et projectif, à fibres géométriques irréductibles et de dimension 1.
(iii) g est un revêtement étale, et chaque fibre de g est non-vide.

On vérifie facilement qu'un tel plongement de X est unique s'il existe, à isomorphisme canonique près.

Définition 3.2. On appelle bon voisinage relatif à S un S-schéma X tel qu'il existe des S-schémas
$$X = X_n, \dots, X_0 = S$$
et des fibrations élémentaires $f_i : X_i \to X_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.

Proposition 3.3. [36] Soit k un corps algébriquement clos, $X/\operatorname{Spec} k$ un schéma lisse, et $x \in X$ un point rationnel. Il existe un ouvert de X contenant x qui est un bon voisinage (relatif à $\operatorname{Spec} k$).

Démonstration. Prenons X irréductible. Par récurrence sur $\dim X = n$, il suffit de trouver un voisinage U de x dans X et une fibration élémentaire $f : U \to V$, avec V lisse et de dimension $n-1$. En effet, il existera un voisinage V' de $v = f(x)$ qui est un bon voisinage, et on pourra prendre $U' = U \cap V'$ comme bon voisinage de x.

On peut supposer $X \subset \mathbf{E}^r$ affine. Soit X_0 l'adhérence de X dans $\mathbf{P}^r$. Soit $\overline{X}$ le normalisé de X_0 et $Y = \overline{X} - X$, avec la structure induite réduite. Soit de plus $S \subset \overline{X}$ le 70
sous-ensemble fermé des points singuliers. On a $S \subset Y$ et
$$\begin{aligned}
\dim \overline{X} &= \dim X = n,\\
\dim Y &= n-1,\\
\dim S &\leq n-2.
\end{aligned}$$

Plongeons $\overline{X}$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$, au moyen d'un faisceau inversible L qui soit de la forme $M^{\otimes r}$ avec M très ample et $r \geq 2$. Il existe alors des hyperplans $H_1, \dots, H_{n-1}$ de $\mathbf{P}^N$, où H_i est l'ensemble des zéros de
$$\sum_{\nu=0}^{N} a_{i\nu} x_\nu = 0,$$

[36] Ce résultat s'étend sans difficulté à une assertion semi-locale.

qui contiennent x et tels que l'intersection $L = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$ soit de dimension $N-n+1$ et coupe $\overline{X}$ et Y transversalement (2.1). L'intersection $\overline{X} \cap L$ est une courbe lisse et connexe (cela résulte du théorème de Bertini), et $Y \cap L$ est de dimension 0. Choisissons de plus un autre hyperplan

$$H_0 \, : \, \sum_{\nu=0}^{N} a_{0\nu} x_\nu = 0$$

tel que H_0 coupe $X \cap L$ transversalement et $H_0 \cap Y \cap L = \varnothing$.

Considérons la projection $\mathbf{P}^N \to \mathbf{P}^{n-1}$ obtenue en « introduisant les coordonnées projectives »

$$y_i = \sum_{\nu=0}^{N} a_{i_\nu} x_\nu .$$

C'est une application rationnelle définie en dehors du centre de projection $C = H_0 \cap \ldots \cap H_{n-1}$. Soit $\epsilon \, : \, P' \to \mathbf{P}^N$ l'éclatement de C, tel qu'on ait un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}^N \arrow[dr] & & P' \arrow[ll, "\epsilon"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbf{P}^{n-1} & \end{tikzcd}$$

71 où π est un morphisme. Soit $\overline{X}' \subset P'$ l'image inverse « propre » de $\overline{X}$, c'est-à-dire, l'adhérence de $\epsilon^{-1}(\overline{X} - (\overline{X} \cap C))$. Puisque par hypothèse C coupe $\overline{X}$ transversalement, le morphisme $\overline{X}' \to \overline{X}$ est un éclatement de l'ensemble fini $\overline{X} \cap C$. Soient $X' = X - \overline{X} \cap C$, qui s'identifie aussi à un sous-schéma ouvert de $\overline{X}'$, et $Y' = \overline{X}' - X'$ le sous-schéma fermé avec la structure induite réduite. On a un diagramme $\mathbf{D}$ de morphismes

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f'"'] & \overline{X}' \arrow[d, "\overline{f}'"] & Y' \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g'"] \\ & \mathbf{P}^{n-1} & \end{tikzcd} ,$$

et je dis qu'il existe un voisinage V de $v = f'(x)$ tel que la restriction de $\mathbf{D}$ à V satisfasse aux conditions (i), (ii), (iii) de (3.1), donc que $f'_{|V}$ soit une fibration élémentaire. Cela achèvera la démonstration.

La condition (i) sera triviale. Pour (ii), notons que $\overline{X} \cap L$ est une courbe lisse par hypothèse, et on voit immédiatement qu'on a un morphisme biunivoque $\overline{f}'^{-1}(v) \to \overline{X} \cap L$ induit par ϵ. Donc $\left(\overline{f}'^{-1}(v)\right)_{\text{red}} \to \overline{X} \cap L$ est bijectif. Pour vérifier que $\overline{f}'$ est lisse au-dessus d'un voisinage de v, il suffit par le lemme de Hironaka (SGA 1 II 2.6 [36]) de vérifier qu'il est lisse au point générique de $\overline{f}'^{-1}(v)$. En ce point, $\overline{X}'$ est isomorphe à $\overline{X}$, et le morphisme est lisse parce que L coupe $\overline{X}$ transversalement.

Il reste à démontrer que g' est étale dans un voisinage de v (puisque Y est de dimension $n-1$, il est évident que chaque fibre de g' est non-vide). On a $Y' = \epsilon^{-1}(Y) \amalg D_1 \amalg \ldots \amalg D_r$, où $\overline{X} \cap C = \{P_1, \ldots, P_r\}$ et D_i est l'éclatement de P_i dans $\overline{X}$. Chaque D_i s'identifie à $\epsilon^{-1}(P_i)$, et s'envoie isomorphiquement sur $\mathbf{P}^{n-1}$ est définie en chaque point
72

[36]et EGA IV 5.12.10.

de Y, et le morphisme induit sur Y n'est autre que $g'_{|\epsilon^{-1}(Y)}$. Il est étale au-dessus de v, car L coupe Y transversalement, donc g' est étale au-dessus de v.

4. Le théorème de comparaison

4.0. Soit X un schéma localement de type fini sur Spec $\mathbf{C}$ et considérons la topologie usuelle sur l'espace $X(\mathbf{C})$ des points rationnels de X. On va noter par X_{cl} le site des isomorphismes locaux $f : U \to X(\mathbf{C})$, c'est-à-dire, des morphismes f d'espaces topologiques ayant la propriété suivante :

Pour chaque $x \in U$ il existe un voisinage ouvert U_x tel que $f_{|U_x}$ est un homéomorphisme de U_x sur un voisinage ouvert de $f(x)$.

Une famille $\{U_\nu \to U\}$ de morphismes de X_{cl} est dite couvrante si U est la réunion des images des U_ν.

Puisqu'une immersion ouverte est un isomorphisme local, on a un morphisme (inclusion) de sites (IV) [36]

$$\delta : X_{\mathrm{cl}} \longrightarrow X(\mathbf{C}) \qquad (*). \tag{4.1}$$

Or pour chaque isomorphisme local $U \to X(\mathbf{C})$ il existe d'après la définition un « recouvrement » de U par des ouverts de $X(\mathbf{C})$, et on déduit de ( ) que les topos associés aux deux sites sont équivalents (par δ_*). En particulier on peut remplacer $X(\mathbf{C})$ par X_{cl} pour le calcul de la cohomologie usuelle.

Soit maintenant $f : X' \to X$ un morphisme étale de schémas. Alors $f(\mathbf{C}) : X'(\mathbf{C}) \to X(\mathbf{C})$ est un isomorphisme local. Cela résulte immédiatement du critère jaco- **73**
bien (SGA 1 II 4.10) et du théorème des fonctions implicites. Le foncteur $X' \mapsto X'(\mathbf{C})$ donne donc un morphisme de sites

$$\epsilon : X_{\mathrm{cl}} \longrightarrow X_{\mathrm{et}}, \tag{4.2}$$

où X_{et} est le site étale.

Rappelons les résultats suivants [36] :

Théorème 4.3. (i) X est connexe et non-vide si et seulement si $X(\mathbf{C})$ est connexe et non-vide.
(ii) Le foncteur ϵ est pleinement fidèle.
(iii) (« Théorème de Grauert-Remmert »). Le foncteur ϵ induit une équivalence de la catégorie des revêtements finis de $X(\mathbf{C})$, muni de sa topologie habituelle d'espace localement compact, avec la catégorie des revêtements étales de X.

Nous accepterons (i) comme connu. Il résulte par exemple de (GAGA) [4]. L'assertion (ii) résulte facilement de (i). En effet, pour vérifier l'assertion de surjectivité contenue dans (ii), soit $\varphi : X'(\mathbf{C}) \to X''(\mathbf{C})$ un $X(\mathbf{C})$-morphisme. On peut supposer tous les schémas connexes et affines, donc séparés. Alors le graphe Γ de φ est une composante connexe de $X' \times_X X''(\mathbf{C})$, d'où $\Gamma = Y(\mathbf{C})$ pour une certaine composante connexe Y de $X' \times_X X''$, par (i). Alors Y est le graphe d'un morphisme $f : X' \to X''$ qui induit φ, i.e. la projection $Y \to X'$ est un isomorphisme : en effet $Y(\mathbf{C}) \to X(\mathbf{C})$ est un isomorphisme, d'où on tire facilement qu'il en est de même de $Y \to X'$ (qui est étale, radiciel, surjectif !). Pour (iii) tout revient d'après (ii) à démontrer que chaque revêtement fini de $X(\mathbf{C})$ est de la forme $X'(\mathbf{C})$ où $X' \to X$ est étale. **74**

[36] Plus précisément, l'inclusion de catégories Ouv$(X(\mathbf{C})) \to X_{\mathrm{cl}}$ définit un morphisme de sites (4.1) en sens inverse.

[36] Qui figurent dans l'exposé cité en note de bas de page, p. 2.

Pour cela, on se réduit immédiatement par descente (SGA 1 IX 4.7) au cas X connexe et normal. Le problème est local sur X (pour la topologie de Zariski), et on peut donc supposer X affine. Soient $f : X \to \mathbf{E}^n$ un morphisme fini, et $T' \to X(\mathbf{C})$ un revêtement fini connexe. On constate immédiatement que le morphisme composé $\eta' : T' \to \mathbf{E}^n(\mathbf{C})$ est un « revêtement analytique » dans le sens de ([2] § 2, Def. 3). D'après ([2] § 2, Satz 8) s'étend à un « revêtement analytique » $\eta : T \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, et il suffit de démontrer que η est induite par un morphisme de schémas $f : Y \to \mathbf{P}^n$ convenable, avec Y normal. Or le théorème fondamental ([2] § 13 Satz 42) affirme qu'il y a une structure canonique analytique normale sur T telle que η induise un morphisme d'espaces analytiques. Puisque alors η est un morphisme fini, l'image directe du faisceau structural sur T est un faisceau $\mathfrak{a}$ d'algèbres analytiques cohérentes sur $\mathbf{P}^n$. Il résulte de GAGA [4] que $\mathfrak{a}$ est le faisceau analytique associé à un faisceau algébrique A sur $\mathbf{P}^n$, et on prend $Y = \operatorname{Spec} A$.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.4. Soit X un schéma lisse sur Spec $\mathbf{C}$.

(i) Il y a une équivalence entre la catégorie des faisceaux de torsion localement constants constructibles sur X_{et} et la catégorie des faisceaux de torsion localement constants, à fibres finies, sur X_{cl}, l'équivalence étant donnée par les foncteurs quasi-inverses $_*$ et *.

(ii) Soit F un faisceau de torsion localement constant, à fibres finies, sur X_{cl}, et notons aussi par F le faisceau $\epsilon_* F$ induit sur X_{et}. Alors

$$R^q \epsilon_* F = 0 \quad \text{si } q > 0.$$

75 (iii) Avec les notations de (i), le morphisme canonique

$$H^q(X_{\mathrm{et}}, F) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{cl}}, F)$$

est bijectif pour chaque q. En particulier,

$$H^q(X_{\mathrm{et}}, \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{\mathrm{cl}}, \mathbf{Z}/n)$$

pour chaque q.

Démonstration. Pour (i), notons que les faisceaux en question sont ceux qui sont représentables par des revêtements étales de X (resp. par des revêtements finis de $X(\mathbf{C})$). Puisqu'il y a une équivalence entre les catégories de ces revêtements (4.3), l'assertion (i) en résulte immédiatement. L'isomorphisme de (iii) est conséquence de (ii) et de la suite spectrale de Leray V 5.2 pour ϵ. Il reste donc à démontrer (ii).

Or $R^q \epsilon_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathscr{R}^q F$, où $(\mathscr{R}^q F)(X') = H^q(X'_{\mathrm{cl}}, F)$ pour $X' \to X$ étale. Pour démontrer que $R^q \epsilon_* F = 0$ si $q > 0$, on doit donc démontrer le suivant :

Lemme 4.5. Soit $\xi \in H^q(X_{\mathrm{cl}}, F)$ et $x \in X_{\mathrm{cl}} = X(\mathbf{C})$. Il existe un morphisme étale $X' \to X$ dont l'image contient x et tel que l'image de ξ dans $H^q(X'_{\mathrm{cl}}, F)$ soit nulle.

Démonstration du lemme. Récurrence sur $n = \dim X$; le problème est local sur X pour la topologie étale, et on peut donc supposer F constant, et par dévissage on peut même supposer que $F = \mathbf{Z}/n$. De plus, en remplaçant X par un voisinage ouvert de Zariski de x, on peut (3.3) supposer que X admet une fibration élémentaire (3.1) $f :$
76 $X \to S$. Reprenons les notations de (3.1) : par calcul direct, on voit que $R^q j_* F = 0$ si $q > 1$, que $R^1 j_{\mathrm{cl}*} F$ est l'extension par 0 d'un faisceau constant sur Y_{cl}, et enfin que $j_{\mathrm{cl}*} F$ est le faisceau constant $\mathbf{Z}/n$ sur $\overline{X}$. De plus, on peut calculer $R^q \overline{f}_{\mathrm{cl}*}(j_{\mathrm{cl}*} F)$ fibre par fibre. De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = R^p \overline{f}_{\mathrm{cl}*}(R^q j_{\mathrm{cl}*} F) \Longrightarrow R^{p+q} f_{\mathrm{cl}*} F$$

on déduit qu'on peut de même calculer $R^{p+q}f_{\mathrm{cl}*}F$ fibre par fibre, et donc que

$R^0 f_{\mathrm{cl}*}\mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n$,

$R^1 f_{\mathrm{cl}*}\mathbf{Z}/n$ est un faisceau localement constant de torsion sur S_{cl},

$R^q f_{\mathrm{cl}*}\mathbf{Z}/n = 0$ si $q > 1$.

La suite spectrale de Leray

$E_2^{pq} = H^p(S_{\mathrm{cl}}, R^q f_{\mathrm{cl}*}F) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{\mathrm{cl}}, F)$

se réduit ainsi à la suite exacte

$$(*) \qquad \dots \longrightarrow H^q(S_{\mathrm{cl}}, f_{\mathrm{cl}*}F) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{cl}}, F) \longrightarrow H^{q-1}(S_{\mathrm{cl}}, R^1 f_{\mathrm{cl}*}F) \longrightarrow$$

Soit s l'image de x dans S. Par hypothèse de récurrence et grâce à (i), il existe pour chaque classe $\eta \in H^q(S_{\mathrm{cl}}, G)$ (G localement constant de torsion, à fibres finies) un « voisinage étale » $S' \to S$ de s tel que l'image de η dans $H^q(S'_{\mathrm{cl}}, G)$ soit nul. Or les foncteurs $R^q f_{\mathrm{cl}*}$ commutent évidemment aux changements de base étales, et si $S' \to S$ est un voisinage étale de s, alors $X' = X \times_S S' \to X$ est un voisinage étale de x. Lorsque $q \geq 1$ on termine donc grâce à la suite exacte $(*)$ en prenant d'abord $G = R^1 f_{\mathrm{cl}*}F$ et ensuite 77
$G = f_{\mathrm{cl}*}F$. Lorsque $q = 1$, on note que $H^1(X_{\mathrm{cl}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ (resp. $H^1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$) classifie les revêtements étales principaux de X_{cl} (resp. X), de groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, donc en vertu de 4.3 (iii) l'application $H^1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to H^1(X_{\mathrm{cl}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est bijective, d'où aussitôt le résultat d'effacement 4.5 pour $q = 1$.

Variante 4.6. On peut aussi démontrer (4.5) de la manière élégante suivante, due à Serre : on remarque qu'un bon voisinage (3.2) connexe X satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $\pi_n(X(\mathbf{C})) = 0$ si $n > 1$.

(ii) $\pi_1(X(\mathbf{C}))$ est une extension successive de groupes libres de type fini.

En effet, si $X \to S$ est une fibration élémentaire où S est un bon voisinage, on peut supposer (i) et (ii) vrais pour S par récurrence. Or $X(\mathbf{C}) \to S(\mathbf{C})$ est un espace fibré localement trivial, comme on voit aisément, à fibres isomorphes à $X_0(\mathbf{C})$, où X_0 est une fibre arbitraire de X/S. Or X_0 est une courbe non-singulière connexe non complète et il est bien connu que cela implique que $\pi_n(X_0(\mathbf{C})) = 0$ si $n > 1$, et que $\pi_1(X_0(\mathbf{C}))$ est un groupe libre. Alors (i) et (ii) sont des conséquences de la suite exacte d'homotopie

$$\longrightarrow \pi_0(X_0(\mathbf{C})) \longrightarrow \pi_n(X(\mathbf{C})) \longrightarrow \pi_n(S(\mathbf{C})) \longrightarrow \dots$$

Donc $X(\mathbf{C})$ est un espace $K(\pi, 1)$, et cela implique que chaque classe de cohomologie $\xi \in H^n(X(\mathbf{C}), F)$ devient nulle sur le revêtement universel de $X(\mathbf{C})$. Il suffit de démontrer que ξ devient nulle déjà sur un revêtement fini X' de X, ce qui revient au même que de démontrer que $\pi_1 = \pi_1(X(\mathbf{C}))$ est un bon groupe (cf. CG 1 16), c'est-à-dire que 78
le morphisme de π_1 dans son complété $\pi_1 = \varprojlim_N \pi_1/N$ (où N parcourt l'ensemble des sous-groupes invariants de π_1 d'indice fini) induit une bijection.

$$H^q(\hat{\pi}_1, M) \xrightarrow{\sim} H^q(\pi_1, M)$$

pour tout π_1-module fini M continu (où le symbole de gauche est la cohomologie de $\hat{\pi}_1$ en tant que groupe profini). Or une extension successive de groupes libres de type fini est un bon groupe (cf. CG I p. 15-16, exc. 1,2), d'où le résultat.

Bibliographie

[1] GIRAUD J., « Analysis Situs », Séminaire Bourbaki, Exposé n° 256.
[2] GRAUERT H et REMMERT R., « Komplexe Räume », Math, Ann. Bd. 136, p. 245 (1958).
[3] HIRONAKA H., « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero » Annals of Math. Vol. 39, n° 1, 2 (1964).
[4] SERRE J.P., « Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique », Annales de l'Institut Fourier, t. VI, p. 1-12 (1956).

EXPOSÉ XII

Théorème de changement de base pour un morphisme propre

M. Artin

1. Introduction 79

Nous donnons dans cet exposé le théorème fondamental qui dit, sous une forme un peu plus précise, que pour un morphisme propre $f : X \to Y$ de schémas, et pour un faisceau abélien F de torsion sur X, la fibre de $R^q f_* F$ en un point géométrique de Y est isomorphe à la cohomologie $H^q(X_\xi, F|X_\xi)$ de la fibre X_ξ.

Rappelons que pour un morphisme propre d'espaces paracompacts le résultat analogue est bien connu (GODEMENT II 4.11) et facile. Il est beaucoup plus délicat dans le cas des schémas. Par exemple, l'hypothèse que F soit de torsion est bien nécessaire, contrairement à ce qui se passe pour les espaces paracompacts.

La démonstration se fait en plusieurs étapes : on se réduit par des méthodes de dévissage plus ou moins formelles au cas où Y est noethérien, où la dimension relative de f est ≤ 1, et où le faisceau F est constant. Pour traiter ce cas particulier, on se sert du théorème de spécialisation pour le groupe fondamental (5.9) qui est une variante non-abélienne du théorème énoncé plus haut, et qu'on peut démontrer directement dans le cas particulier envisagé (XIII 2).

2. Un exemple 80

Montrons que l'hypothèse que F soit de torsion est nécessaire : Soit X une surface non singulière sur un corps k algébriquement clos, Y une courbe non singulière sur k, et $f : X \to Y$ un morphisme propre dont la fibre générique est lisse et la fibre géométrique en le point géométrique $\overline{y}$ de Y a un point double ordinaire, et est irréductible. Soit F le faisceau constant $\mathbf{Z}_X$.

Rappelons le fait suivant : pour un point quelconque z d'un schéma Z, soit $i : z \to Z$ l'inclusion. On a $H^1(Z, i_* \mathbf{Z}_z) = 0$ (IX 3.6 (i)). Or puisque X est normal donc unibranche, il s'ensuit que $\mathbf{Z}_X \simeq i_* \mathbf{Z}_x$, où $i : x \to X$ est l'inclusion du point générique. Donc $H^1(X, \mathbf{Z}_X) = 0$ et de même $R^1 f_* \mathbf{Z}_X = 0$. Mais je dis que pour la fibre géométrique $X_\circ$ de X/Y avec le point double ordinaire on a $H^1(X_\circ, \mathbf{Z}_{X_\circ}) \simeq \mathbf{Z}$[36], ce qui donne le contre-exemple, puisque $\mathbf{Z}_{X_\circ} \simeq \mathbf{Z}_X | X_\circ$.

Soit $i_\circ : x_\circ \to X_\circ$ l'inclusion du point générique de $X_\circ$, et soit Q le point singulier de $X_\circ$. La courbe $X_\circ$ a deux « branches » en Q et il s'ensuit que la fibre de $i_{\circ *}(\mathbf{Z}_{x_\circ})$ au point Q est isomorphe à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. En dehors de Q la courbe $X_\circ$ est normale et donc $i_{\circ *}(\mathbf{Z}_{x_\circ}) \simeq \mathbf{Z}_{X_\circ}$ dans $X_\circ - Q$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{X_\circ} \longrightarrow i_{\circ *}(\mathbf{Z}_{x_\circ}) \longrightarrow (\mathbf{Z})_Q \longrightarrow 0,$$

où le dernier membre est l'extension par 0 du faisceau $\mathbf{Z}$ au point Q. Tous les trois membres ont un H° isomorphe à $\mathbf{Z}$, et $H^1(X_\circ, i_{\circ *}(\mathbf{Z}_{x_\circ})) = 0$, d'où $H^1(X_\circ, \mathbf{Z}_{X_\circ}) = \mathbf{Z}$ 81
par la suite exacte de cohomologie.

[36]Comparer, du point de vue Π_1, avec SGA 3 X (6, Exemples) et (1.6).

3. Rappels sur le H^1 non-abélien

On va indiquer brièvement quelques résultats sur la cohomologie non-abélienne dont nous aurons besoin dans la suite. Nous omettrons la plupart des démonstrations, bien connues dans divers cas particuliers, et qu'on trouvera dans la thèse de GIRAUD [1].

Soient X un schéma, et F un faisceau en groupes sur X. Pour chaque X'/X étale, on définit un ensemble pointé $H^1(X', F)$, fonctoriel covariant en F et contravariant en X'. Le H^1 commute aux produits finis de faisceaux. Si $f : X \to Y$ est un morphisme, on définit un faisceau d'ensembles pointés (c'est-à-dire, avec section distinguée) $R^1 f_* F$. C'est le faisceau associé au préfaisceau (d'ensembles pointés) $\mathscr{R}^1 F$, qui, à chaque Y'/Y étale, associe l'ensemble $H^1(X \times_Y Y', F)$.

On a les suites exactes de cohomologie habituelles, dont nous nous contenterons d'indiquer une :

PROPOSITION 3.1. Soit $0 \to F \xrightarrow{u} G$ une injection de faisceaux de groupes, et soit $C = G/F$ le faisceau d'ensembles homogènes sous G. On a une suite exacte de faisceaux d'ensembles pointés

$$0 \to f_*F \to f_*G \to f_*C \xrightarrow{\partial} R^1 f_*F \xrightarrow{u^1} R^1 f_*G.$$

Bien entendu, cette suite exacte est obtenue en passant à la suite de faisceaux associée à la suite exacte de préfaisceaux dont la valeur pour Y'/Y étale est

$$0 \to F(X') \to G(X') \to C(X') \xrightarrow{\partial} H^1(X', F) \to H^1(X', G),$$

82 où $X' = X \times_Y Y'$. La relation d'équivalence induite par ∂ est celle donnée par l'opération de f_*G sur F_*C. On peut comme d'habitude expliciter la relation d'équivalence induite par u^1 grâce à la notion de « torsion » [1].

PROPOSITION 3.2. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de schémas. On a une suite exacte pour chaque Z'/Z étale, posant $Y' = Y \times_Z Z'$, $X' = X \times_X Z'$:

$$0 \longrightarrow H^1(Y', f_*F) \longrightarrow H^1(X', F) \longrightarrow H^\circ(Y', R^1 f_*F),$$

d'où en passant aux faisceaux associés, une suite exacte de faisceaux pointés sur Z :

$$0 \longrightarrow (R^1 g_*) f_*F \longrightarrow R^1(gf)_*F \longrightarrow f_*(R^1 g_*)F.$$

PROPOSITION 3.3. La famille des foncteurs de la forme $H^1(X', F)$, pour X' étale sur X, et de la forme $R^1 f_*F$, pour un morphisme quelconque $f : X \to Y$, est effaçable, c'est-à-dire il existe une injection $F \xrightarrow{u} G$ tel que les morphismes induits $H^1(X', F) \to H^1(X', G)$ et $R^1 f_*F \to R^1 f_*G$ soient tous nuls. Plus précisément, il existe une injection $F \xrightarrow{u} G$ tel que chacun des ensembles $H^1(X', G)$, avec X' étale sur X, et chacun des faisceaux pointés $R^1 f_*G$, soient nuls. Si X est noethérien et F est un faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes constructible, alors il existe une telle injection, où de plus G est un faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes.

Démonstration. La première assertion est sans doute vraie dans un topos quelconque, mais pour la topologie étale, il est commode de faire l'effacement avec la « résolution de Godement »

$$F \longrightarrow G = \prod_{x \in X} i_{x*} i_x{}^* F, \tag{3.4}$$

83 où x parcourt l'ensemble des points de X et où $i_x : \overline{x} \to X$ est un point géométrique

de X au-dessus de x. Notons que pour X'/X étale, on a

$$G(X') = \prod_{x\in X}(i_x{}^*F)(X'\times_X \overline{x}) = \prod_{x\in X}(\prod_{\overline{x}'/\overline{x}} F_{\overline{x}'}),$$

où les $\overline{x}'$ sont des points géométriques de X'. Or il est clair que pour chaque point de X' il y a au moins un $\overline{x}'$ au-dessus, d'où $F(X') \subset G(X')$ (VIII 3), donc $F \subset G$. D'autre part, un $\overline{u}/\overline{x}$ étale quelconque est somme de spectres de corps séparablement clos, d'où $H^1(\overline{u}, \overline{G}) = 0$, quel que soit le faisceau $\overline{G}$ sur $\overline{x}$. Il résulte alors de 3.2 que $H^1(X', i_{x*}i_x{}^*F) = 0$ pour chaque X'/X étale, d'où (puisque H^1 commute aux produits) $H^1(X', G) = 0$, donc de même $R^1 f_* G = 0$ pour tout $f : X \to Y$, grâce à la description de $R^1 f_*(G)$ comme faisceau associé au préfaisceau $Y' \mapsto H^1(X\times_Y Y', G)$.

Supposons maintenant que de plus F est constructible et X noethérien. Alors on voit immédiatement qu'il existe un ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X tel que le morphisme

$$F \longrightarrow \prod_{1\leq i\leq n} i_{x*}i_x{}^*F$$

soit déjà injectif. Le faisceau $i_{x*}i_*{}^*F$ est un faisceau de groupes ind-fini (IX 1.5), donc le produit fini l'est aussi (IX 1.4 et IX 1.6 (iii)). En remplaçant G par ce faisceau, on obtient la dernière assertion.

3.5. Comme dans le cas de la cohomologie abélienne (traité dans V 2.4), on peut calculer le H^1 par le procédé de ČECH [1].

4. Le morphisme de changement de base 84

Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de morphisme de schémas. On en déduit un morphisme de foncteur $\varphi = \varphi_g$

$$g^* f_* \xrightarrow{\varphi} f'_* g'^* \tag{4.1}$$

de la manière suivante : donner un tel morphisme équivaut à donner un morphisme de foncteurs

$$f_* \longrightarrow g_* f'{}_* g'^*, \tag{4.1 adj}$$

parce que g_* et g^* sont adjoints. Nous prenons pour ce morphisme le morphisme

$$f_* \xrightarrow{(\mathrm{id}\to g'{}_* g'^*)} f_* g'{}_* g'^* = g_* f'{}_* g'^*,$$

en tenant compte que

$$g_* f'{}_* = (gf')_* = (fg')_* = f_* g'{}_*.$$

Notons qu'il y a un autre candidat pour (4.1). En effet, donner un tel morphisme équivaut à donner

$$f'^* g^* f_* \longrightarrow g'^*$$

et on peut prendre

$$f'^* g^* f_* \simeq g'^* f^* f_* \xrightarrow{(f^* f_* \to \mathrm{id})} g'^*.$$

85 J'ignore si ces deux choix coïncident toujours [36], et en tout cas nous nous servirons uniquement du premier. Nous l'appelons morphisme de changement de base.

En restreignant (4.1)) aux faisceaux abéliens (resp. de groupes on déduit un morphisme $\varphi^q = \varphi^g g$ pour chaque $q \geq 0$ (resp. pour $q = 0, 1$) :

$$g^*(R^q f_*) \xrightarrow{\varphi^q} (R^q f'_*)g'^*. \tag{4.2}$$

En effet, cela revient au même que de donner

$$(R^q f_*) \longrightarrow g_*(R^q f'_*)g'^*, \tag{4.2 adj}$$

et on a des morphismes « évidents »

$$\begin{aligned}(R^q f_*) \xrightarrow{a} (R^q f_*)g'_*g'^* \xrightarrow{b} R^{q'} f g')_* g'^* =\\ = (R^q(gf')_* g'^* \xrightarrow{c} g^*(R^q f'_*)g'^*.\end{aligned}$$

Remarque 4.3. Supposons que g (donc g') soit une immersion fermée. Alors les morphismes b et c ci-dessus sont des isomorphismes (VIII 5.7). Il suit que (4.2) n'est autre essentiellement que le morphisme a ci-dessus, qui est défini en appliquant $R^q f_*$ au morphisme canonique $F \to g'_* g'^* F$.

Proposition 4.4. (Composition des morphismes de changement de base).

(i) Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & X'' \arrow[l, "h'"'] \arrow[d, "f''"] \\ S & S' \arrow[l, "g"] & S'' \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

86 un diagramme cartésien de morphismes de schémas. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} (gh)^* f_* \arrow[rr, "gh"] \arrow[d, "\wr"] & & f''_*(g'h')^* \arrow[d, "\wr"] \\ h^* g^* f_* \arrow[r, "h^*{}_* g"] & h^* f'_* g'^* \arrow[r, "h * g'^*"] & f''_* h'^* g'^* \end{tikzcd}$$

et le diagramme avec f_*, f'_*, f''_* remplacé par $R^q f_*$, $R^q f'_*$, $R^q f''_*$ l'est aussi, dans les domaines de définition naturels des foncteurs en question (cf. n° 3).

(ii) Soit

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "e"'] & Y' \arrow[l, "g''"'] \arrow[d, "e'"] \\ X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

[36] Mr. Deligne a résolu par l'affirmative cette perplexité, dans un contexte sensiblement plus général, cf. Exp. XVII.

un diagramme cartésien de morphismes de schémas. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} g^*(fe)_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & (f'e')_* g''^* \arrow[d, equal] \\ g^* f_* e_* \arrow[r] & f'_* g'^* e_* \arrow[r] & f'_* e'_* g''^*, \end{tikzcd}$$

où les trois flèches horizontales proviennent des homomorphismes de changement de base pour fe, f et e respectivement.

Dans le cas abélien, les morphismes de changement de base pour fe sont induits par un morphisme de suites spectrales

$$\begin{tikzcd} E_2^{p,q} = g^*(R^q f_*)(R^q e_*)F \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\varphi"'] & g^* R^{p+q}(fe)_* F \arrow[d, "\varphi"'] \\ (R^p f'_*)(R^q e'_*) g''^* F \arrow[r, Rightarrow] & R^{p+q}(f'e')_* g'^* F \end{tikzcd}$$

qui, pour les termes initiaux, est induit par les morphismes de changement de base pour e et f ; et pour un faisceau de groupes, on a un morphisme de suites exactes **87**

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & g^*(R^1 f_*)e_* F \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & g^* R^1(fe)_* F \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & g^* f_*(R^1 e_*)F \arrow[d, "\varphi"] \\ 0 \arrow[r] & ((R^1 f'_*)e'_* g''^* F) \arrow[r] & R^1(f'e')_* g''^* F \arrow[r] & f'_*(R^1 e'_*) g''^* F \end{tikzcd}$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

5. Énoncé du théorème principal et de quelques variantes

Le théorème est le suivant :

Théorème 5.1. (Théorème de changement de base pour un morphisme propre). Soit

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & S' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de schémas, avec f propre.

(i) Soit F un faisceau d'ensembles sur X. Alors le morphisme (4.1)

$$\varphi : g^* f_* F \longrightarrow {f'}_* g'^* F$$

est bijectif.

(ii) Soit f un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) sur X. Alors le morphisme (4.2) **88**

$$\varphi^1 : g^*(R^1 f_*)F \to (R^1 {f'}_*) g'^* F$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) Soit F un faisceau abélien de torsion sur X. Alors le morphisme (4.2)

$$\varphi^q : g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q {f'}_*) {g'}^* F$$

est bijectif pour chaque $q \geq 0$.

On va d'abord énoncer des conséquences immédiates du théorème. Si $S' = \xi$ est un point géométrique de S, de sorte qu'un faisceau sur ξ est déterminé par ses sections globales, on a $H^\circ(\xi, R^q {f'}_* G) = H^q(X', G)$ pour chaque faisceau G sur X, d'où le corollaire suivant (qui est d'ailleurs essentiellement équivalent à (5.1)) :

Corollaire 5.2. Soient $f : X \to S$ propre, $\xi \to S$ un point géométrique, et X_ξ la fibre de f au point ξ.

(i) Si F est un faisceau d'ensembles sur X, le morphisme canonique de changement de base

$$(f_* F)_\xi \longrightarrow H^\circ(X_\xi, F|X_\xi)$$

est bijectif.

(ii) Si F est un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) le morphisme de changement de base

$$R^1 f_*(F)_\xi \longrightarrow H^1(X_\xi, F|X_\xi)$$

est injectif (resp. bijectif).

89 (iii) Si F est un faisceau abélien de torsion, alors pour chaque $q \geq 0$ le morphisme de changement de base

$$(R^q f_*)F_\xi \longrightarrow H^q(X_\xi, F|X_\xi)$$

est bijectif.

Tenant compte de (X 4.3) et (X 5.2), on trouve :

Corollaire 5.3. Sous les conditions de (X 5.2), soit n la dimension de la fibre X_ξ. Alors pour chaque faisceau abélien de torsion F sur X, la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ est nulle pour $q > 2n$. Si F est un faisceau de p-torsion (p la caractéristique de ξ), alors la fibre de $R^q f_*(F)$ en ξ est nulle pour $q > n$.

Rappelons qu'on dit que la dimension relative de X/S est $\leq n$ si la dimension de chaque fibre est $\leq n$. On a donc

Corollaire 5.3 bis. Soit $f : X \to S$ propre et X/S de dimension relative $\leq n$. Alors $R^q f_* F = 0$ si $q > 2n$ pour chaque faisceau abélien F de torsion sur X. Si S est de caractéristique p, et si F est un faisceau abélien de p-torsion, alors $R^q f_* F = 0$ si $q > n$.

En appliquant (5.1) a un morphisme de spectres de corps séparablement clos, on obtient

Corollaire 5.4. (Invariance de la cohomologie par changement de corps de base dans le cas propre). Soient $k \subset K$ des corps séparablement clos et X un schéma propre sur $\operatorname{Spec} k$. Soit $X' = X_K$. Soit F un faisceau sur X et F' le faisceau image inverse sur X'. Alors

(i) $H^\circ(X, F) \xrightarrow{\sim} H^\circ(X', F')$.

90 (ii) Si F est un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis)

$$H^1(X, F) \xrightarrow{\sim} H^1(X', F')$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) Si F est un faisceau abélien de torsion,

$$H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X',F')$$

pour tout q.

Une variante légèrement différente de (5.2) est la suivante :

Corollaire 5.5. Soit S le spectre d'un anneau hensélien et soit $S' = s_\circ$ le point fermé. Soit $f : X \to S$ propre. Posons $X_\circ = X'$, $F_\circ = g'^*F$. Alors on a :

(i) $H^\circ(X,F) \xrightarrow{\sim} H^\circ(X_\circ, F_\circ)$
pour tout faisceau d'ensembles F.

(ii) $H^1(X,F) \to H^1(X_\circ, F_\circ)$
est injectif (resp. bijectif) pour tout faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) F.

(iii) $H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_\circ, F_\circ)$
pour tout faisceau abélien de torsion F, et tout q.

En effet, cet énoncé n'est qu'un cas particulier de (5.2) si S est strictement local. Supposons que (5.2) soit connu. Soit $\overline{S}$ le localisé strict de S, $\overline{s}$ le point fermé de $\overline{S}$, et G le groupe de Galois de $\overline{S}/S$ (qui est aussi le groupe de Galois de $\overline{s}/s_\circ$). Alors G opère sur les fibres des R^q, et on a (avec des notations évidentes)

$$H^\circ(X,F) \simeq H^\circ(\overline{X},\overline{F})^G$$
$$H^\circ(X_\circ,F_\circ) \simeq H^\circ(\overline{X}_\circ,\overline{F}_\circ)^G$$

pour un faisceau d'ensembles F, d'où (i) puisque $H^\circ(\overline{X},\overline{F}) \xrightarrow{\sim} H^\circ(\overline{X}_\circ,\overline{F}_\circ)$et que l'iso- 91
morphisme commute évidemment avec l'opération de G.

Si F est un faisceau de groupes, on définit aisément un morphisme de suites exactes d'ensembles pointés

(5.5.1)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(G, H^0(\overline{X},\overline{F})) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,F) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\overline{X},\overline{F})^G \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^1(G, H^0(\overline{X}_0,\overline{F}_0)) \arrow[r] & H^1(X_0,F_0) \arrow[r] & H^1(\overline{X}_0,\overline{F}_0)^G, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes d'après (5.2). Soient α, $\beta \in H^1(X,F)$ des classes qui ont même image dans $H^\circ(X_\circ,F_\circ)$, et soit F^α le faisceau obtenu en tordant F à l'aide de α [1]. Soit β' la classe $H^1(X,F^\alpha)$ correspondant à β. Alors, puisque la classe α' correspondant à α est nulle, l'image de β' dans $H^1(X_\circ,(F^\alpha)_\circ)$ est nulle.

Examinons le diagramme déduit de (5.5.1) en remplaçant F par F^α : on trouve que l'image de β' dans $H^\circ(\overline{X},\overline{F}^\alpha)^G$ est nulle, donc que β' est image d'un élément de $H^1(G,H^\circ(\overline{X},\overline{F}))$, et que cet élément doit être nul. Donc β' est nul, i.e. $\beta' = \alpha'$, d'où $\beta = \alpha$. Cela donne l'injectivité du morphisme de (ii).

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes ind-finis, et démontrons la surjectivité de la flèche (ii). Or il suffit de démontrer que le foncteur $F \mapsto H^1(X_\circ,F_\circ)$ est effaçable. En effet, soit $0 \to F \xrightarrow{u} G$ une injection qui efface ce foncteur. Soit $C = G/F$.

On a un morphisme de suites exactes (4.4)

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,C) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,F) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"'] & H^1(X,G) \arrow[d] \\
H^0(X_0,C_0) \arrow[r] & H^1(X_0,F_0) \arrow[r, "u_0^1"] & H^1(X_0,G_0)
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $u_\circ^1$ est nul, ce qui implique bien la surjectivité de ϵ.

92 Démontrons que le foncteur $F \mapsto H^1(X_\circ, F_\circ)$ est effaçable pour les faisceaux F de groupes ind-finis. Soit $F \xrightarrow{u} C$ la « résolution de Godement » (3.4). On a

$$H^1(G, H^\circ(\overline{X}_\circ, \overline{C}_\circ)) \simeq H^1(G, H^\circ(\overline{X}, \overline{C})) \subset H^1(X, C) = 0.$$

De plus, on a le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\overline{X},\overline{F}) \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d] & H^1(\overline{X}_0,\overline{F}_0) \arrow[d] \\
0 = H^1(\overline{X},\overline{C}) \arrow[r] & H^1(\overline{X}_0,\overline{C}_0)
\end{tikzcd}$$

(puisque $H^1(\overline{X},\overline{G}) = \varinjlim H^1(X',C) = 0$, X'/X étale), donc est nul. On a donc un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(G, H^0(\overline{X}_0,\overline{F}_0)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X_0,F_0) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H^1(\overline{X}_0,\overline{F}_0)^G \arrow[d, "\alpha^G"] \\
 & 0 \arrow[r] & H^1(X_0,G_0) \arrow[r] & H^1(\overline{X}_0,\overline{G}_0)^G
\end{tikzcd}$$

où α^G est nul, ce qui implique que β est également nul, d'où l'effaçabilité.

Démontrons enfin l'assertion (iii) de (5.5) : On a un morphisme de suites spectrales

$$\begin{tikzcd}
E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(\overline{X},\overline{F}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H^n(X,F) \arrow[d, "\varphi"] \\
H^p(G, H^q, \overline{X}_0, \overline{F}_0)) \arrow[r, Rightarrow] & H^n(\overline{X}_0,\overline{F}_0)
\end{tikzcd} \quad .$$

D'après (5.2), les morphismes $H^q(\overline{X},\overline{F}) \to H^q(\overline{X}_\circ,\overline{F}_\circ)$ sont des isomorphismes. Cela implique que φ est un isomorphisme pour $E_2^{p,q}$, donc pour les aboutissements, d'où le résultat, C.Q.F.D.

93 5.6. Examinons (5.5) (i) et (ii) dans le cas où F est constant : Soit $F = S_X$ un faisceau d'ensembles constant sur le schéma X, de valeur T. Alors $F(X)$ n'est autre que l'ensemble des applications localement constantes de X dans T. Si $X_\circ$ est un sous-schéma de X, et si T a au moins deux éléments, on en conclut que $F(X) \to F(X_\circ)$ est bijectif si et seulement si l'application $U \mapsto U_\circ = U \cap X_\circ$ de l'ensemble $\Theta(X)$ des parties à la fois ouvertes et fermées de X dans l'ensemble analogue $\Theta(X_\circ)$ est bijective. Si l'ensemble $\Pi_\circ(X_\circ)$ des composantes connexes de $X_\circ$ est fini, cela revient au même que de dire que l'application $\Pi_\circ(X_\circ) \to \Pi_\circ(X)$ est bijective. Ainsi, (5.5) (i) peut aussi se reformuler de la façon suivante (compte tenu que dans ce cas $X_\circ$ est de type fini sur un corps, donc est noethérien, donc $\Pi_\circ(X_\circ)$ est fini) :

Corollaire 5.7. *Soient S le spectre d'un anneau hensélien, $s_\circ$ son point fermé. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et $X_\circ$ la fibre fermée de X/S. Alors l'application $\Pi_\circ(X) \to \Pi_\circ(X_\circ)$ induite par $X_\circ \to X$ est bijective.*

(En particulier, cela implique que l'ensemble $\Pi_\circ(X)$ est fini). Nous allons démontrer directement (5.7) dans le cas noethérien :

Lemme 5.8. L'énoncé (5.7) est vrai si S est noethérien [36].

Démonstration. Dans le cas noethérien, $\Pi_\circ(X)$ est certainement fini, et en remplaçant X par une composante connexe on peut supposer que $\Pi_\circ(X)$ est un ensemble à un élément, c'est-à-dire que X est connexe et non-vide. Il faut démontrer qu'alors $X_\circ$ est également connexe et non-vide. Or l'image de X dans S est fermée puisque f est propre et non-vide car X est non-vide, donc contient $S_\circ$, ce qui explique que $X_\circ$ est non-vide. Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & S' \arrow[dl, "\pi"] \\ S & \end{tikzcd}$$

la factorisation de Stein de f (EGA III 4.3.3) de sorte que S'/S est fini et S' est connexe. **94**
On sait que chaque fibre de f' est connexe non-vide, et l'espace sous-jacent à $X_\circ$ est la réunion des espaces sous-jacents aux fibres fermées de S'. Tout revient donc à démontrer que S' est le spectre d'un anneau local. Mais puisque S est hensélien, l'anneau A' de S' est produit d'anneaux locaux (VII 4.1 (i)), donc A' est local puisque S' est connexe, ce qui prouve 5.8.

5.9.0. Supposons maintenant que $F = G_X$ est un faisceau constant de groupes, de valeur G, où G est un groupe fini. Alors $H^1(X, G_X)$ classifie les revêtements principaux galoisiens de X, de groupe G (VII 2.1)). Le corollaire 5.5 (ii) dit que le morphisme $X_\circ \to X$ induit une bijection entre les ensembles de classes de ces revêtements. Il s'ensuit donc, de la définition des Π_1, que 5.5 (ii) pour les faisceaux de groupes finis constants (en présence de (i)) équivaut à :

Théorème 5.9. (Théorème de spécialisation pour le groupe fondamental). Avec les notations de (5.5), supposons X connexe non-vide. Alors $X_\circ$ est connexe non-vide, et si $\overline{x}_\circ$ est un point géométrique de $X_\circ$, le morphisme de groupes fondamentaux

$$\Pi_1(X_\circ, \overline{x}_\circ) \longrightarrow \Pi_1(X, \overline{x}_\circ)$$

est bijectif.

D'autre part, d'après la théorie de Galois (SGA V) l'énoncé 5.9 (dans le cas $X_\circ$ connexe, **95**
ce qu'on peut supposer, grâce à 5.7) équivaut à

Théorème 5.9 bis. Soient S le spectre d'un anneau hensélien, $s_\circ$ le point fermé de S, $f : X \to S$ un morphisme propre, et $X_\circ$ la fibre fermée de X/S. Pour un schéma Z, notons $\mathrm{Et}(Z)$ la catégorie des revêtements étales de Z. Alors le foncteur restriction

$$\mathrm{Et}(X) \longrightarrow \mathrm{Et}(X_\circ)$$

est une équivalence de catégories.

Remarque 5.10. Rappelons que 5.9 a été déjà démontré (SGA 1 X 2.1) dans le cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien complet. Malheureusement on n'arrive pas

[36] Cf. EGA IV 18.5.19.

à utiliser ce résultat pour prouver 5.9 en général [36], et la démonstration donnée de 5.9, dans le présent exposé et le suivant, est très différente de celle donnée dans SGA 1 X.

5.11. On peut donner une autre variante « non commutative » de (5.5) (ii), en utilisant la théorie de la 2-cohomologie de J. Giraud (cf. Thèse de J. Giraud, en préparation). Supposons S noethérien. Prenons un lien L sur X, et supposons que L se réalise localement (pour la topologie étale) par un faisceau en groupes ind-finis. Considérons l'application

$$\varphi^{(2)} : H^2(X, L) \longrightarrow H^2(X_\circ, L_\circ),$$

où $L_\circ$ est la restriction de L à $X_\circ$. Alors on a

$$(\varphi^{(2)})^{-1}(H^2(X_\circ, L_\circ)') = H^2(X, L)', \tag{5.11.1}$$

96 où les « primes » désignent les parties formées des éléments neutres.

Compte tenu de 5.5 (iii), cet énoncé équivaut aussi au suivant :

Pour toute gerbe $\mathscr{G}$ sur X, de lien L comme ci-dessus, désignant par $\mathscr{G}_\circ$ la restriction de $\mathscr{G}$ à $X_\circ$, le foncteur restriction sur les catégories de sections

$$\mathscr{G}(X) \longrightarrow \mathscr{G}_\circ(X_\circ)$$

est une équivalence de catégories.

Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle résulte en effet de 5.5 (i), et le fait qu'il soit essentiellement surjectif lorsque $\mathscr{G}(X) \neq \varnothing$ i.e. lorsque la classe $\xi \in H^2(X, L)$ de $\mathscr{G}$ est neutre, résulte de 5.5 (ii). Il reste donc à exprimer que $\mathscr{G}_\circ(X_\circ) \neq \varnothing$ implique $\mathscr{G}(X) \neq \varnothing$, ce qui n'est autre que (5.11.1).

Nous ne donnerons par ici la démonstration de (5.11.1), et nous nous contenterons de signaler que pour tout schéma noethérien X et tout sous-schéma fermé, on peut montrer en fait que la validité des énoncés 5.5 (i) (ii) implique celle de (5.11.1) ; la démonstration se fait assez élémentairement, en utilisant le résultat de descente VIII 9.4 a).

6. Premières réductions

Nous utilisons l'abréviation (f, F, g) pour désigner les données de 5.1 dans l'un quelconque des trois cas (i), (ii) ou (iii) de ce théorème.

Lemme 6.1. Pour que 5.1 soit vrai pour les données (f, F, g), où f, F sont fixés, et g
97 quelconque, il suffit que pour tout S-schéma $\overline{S}$, localisé strict d'un schéma localement de type fini S' sur S en un point qui est fermé dans sa fibre, le théorème soit vrai pour $(\overline{f}, \overline{F}, \overline{g})$, où $\overline{f}$, $\overline{F}$ sont déduits de f, F par le changement de base $\overline{S} \to S$, et où $\overline{g} : \overline{s} \to \overline{S}$ est l'inclusion du point fermé de $\overline{S}$.

Démonstration. On peut supposer évidemment S, S' affines, spectres d'anneaux A, A'. Alors A' est la limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini A'_i, et utilisant la théorie de passage à la limite (VII 5.11 et 5.14), on est ramené à prouver 5.1 pour les (f, F, g_i) où $g_i : \mathrm{Spec}(A'_i) = S'_i \to S$, ce qui nous ramène au cas où g est de type fini. Pour prouver que les homomorphisme de changement de base sont des isomorphismes, il suffit de prouver qu'ils induisent des isomorphismes sur les fibres des faisceaux en jeu, et il suffit de regarder les fibres géométriques en des points s' de S' qui sont fermés dans leur fibre sur S (VIII 3.13). Soit $\overline{s}'$ un point géométrique de S' correspondant à une clôture séparable de $k(s')$; comme s' est algébrique sur le point correspondant s de S, $k(\overline{s}')$ est donc aussi une clôture séparable de $k(s)$. Désignons par $\overline{s}$ le préschéma $\overline{s}'$,

[36] La situation a changé depuis ces lignes ont été écrites, cf. th. 3.1 dans M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings (à paraître).

considéré comme étant au-dessus de S, i.e. considéré comme point géométrique de S, et considérons les localisés stricts $\overline{S}$ et $\overline{S}'$ de S en $\overline{s}$ et en $\overline{s}'$ respectivement, de sorte qu'on a un carré commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\overline{s}' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{s} \arrow[d] \\
\overline{S}' \arrow[r] & \overline{S},
\end{tikzcd}$$

où la première flèche horizontale est un isomorphisme. Compte tenu de VIII 5.2 et 5.3, l'homomorphisme induit sur les fibres en $\overline{s}'$ par l'homomorphisme de changement de base relatif à (f, F, g) s'identifie à l'homomorphisme

$$H^i(\overline{X}, \overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}', \overline{F}')$$

induit par $\overline{X}' \to \overline{X}$, où $\overline{X}$ et $\overline{X}'$ désignent les schémas déduits de X par les changements 98
de base $\overline{S} \to S$ et $\overline{S}' \to S$. Or le carré commutatif ci-dessus fournit de façon évidente un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^i(\overline{X}_{\overline{s}}, \overline{F}) \arrow[r] & H^i(\overline{X}'_{\overline{s}'}, \overline{F}') \\
H^i(\overline{X}, \overline{F}) \arrow[r] \arrow[u] & H^i(\overline{X}', \overline{F}') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où la première flèche horizontale est encore un isomorphisme, donc la deuxième flèche horizontale est un isomorphisme dès que les deux flèches verticales le sont. Or c'est ce qu'assure l'hypothèse de (6.1), C.Q.F.D.

6.1.1. Ainsi, pour prouver 5.1 dans une situation $(F, f, -)$, on est ramené à étudier le cas particulier 5.5, avec S strictement local. Cela nous amène à étudier de façon générale la situation où on a un morphisme $h : Y \to X$ de schémas, et où on se propose de donner les conditions générales moyennant lesquelles les homomorphismes correspondants

$$H^i(X, F) \longrightarrow H^i(Y, h^*(F))$$

sont bijectifs. Le présent numéro donnera quelques résultats auxiliaires faciles sur cette situation, que (pour la commodité de références ultérieures) nous énoncerons avec plus de généralité et de précision qu'il ne serait nécessaire pour la démonstration de 5.1.

Lemme 6.2. Soient C, C' deux catégories abéliennes, $T^\bullet = (T^i)$ et $T'^\bullet = (T'^i)$ deux foncteurs cohomologiques de C dans C', $\varphi = (\varphi^i)$ un homomorphisme de foncteurs 99
cohomologiques de $T^\bullet$ dans $T'^\bullet$. On suppose $T^\bullet$ et $T'^\bullet$ nuls en degrés < 0, et T^i effaçable pour $i > 0$. Soit n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) φ^i est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n + 1$.
b) (Si $n \geq -1$). L'homomorphisme φ^i est un monomorphisme si $i = 0$, et un épimorphisme si $i \leq n$.
c) (Si $n \geq 0$). L'homomorphisme φ° est un isomorphisme, et les T'^i sont effaçables pour $0 < i \leq n$.

Si ces conditions sont remplies, et si $A \in \mathrm{Ob}(C)$, alors $\varphi^{n+1}(A) : T^{n+1}(A) \to T'^{n+1}(A)$ est un épimorphisme (donc un isomorphisme) si et seulement si $T'^{n+1}(A)$ est effaçable, i.e. s'il existe un monomorphisme $A \to B$ tel que l'homomorphisme $T'^{n+1}(A) \to T'^{n+1}(B)$ correspondant soit nul. Si $C' = (\mathrm{Ab})$ (catégorie des groupes abéliens), et si

$\xi \in T'^{n+1}(A)$, alors ξ est dans l'image de $T^{n+1}(A)$ si et seulement si ξ est effaçable, i.e. s'il existe un monomorphisme $A \to B$ tel que l'image de ξ dans $T'^{n+1}(B)$ soit nulle.

Démonstration. Évidemment a) implique b) et c). Comme les hypothèses faites sur $T^{\cdot}$ impliquent que les T^i $(i > 0)$ sont les satellites droits de T°, l'implication c) $\Rightarrow$ b) résulte de la caractérisation axiomatique des foncteurs satellites ; elle résulte également, par récurrence sur n, de la dernière assertion de 6.2, qui se démontre par l'argument bien connu qu'on se dispense se répéter ici (cf. démonstration de 6.″ ci-dessous). L'implication b) $\Rightarrow$ c) est triviale si $n = 1$, et si $n \geq 0$ on procède par récurrence sur n : l'hypothèse
100 de récurrence nous permet de supposer que φ^i est un isomorphisme pour $i \leq n - 1$, un monomorphisme pour $i = n$, donc par l'hypothèse un isomorphisme aussi pour $i = n$, et il reste à montrer que c'est un monomorphisme pour $i = n + 1$, utilisant que φ^n est un isomorphisme. Soit $A \to B$ un monomorphisme qui efface T^{n+1}, d'où une suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ dans C, et un homomorphisme de suites exactes dans C' :

$$\begin{tikzcd}
T^n(B) \arrow[r] \arrow[d] & T^n(C) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(B) \arrow[d] \\
T'^n(B) \arrow[r] & T'^n(C) \arrow[r] & T'^{n+1}(A) \arrow[r] & T'^{n+1}(B),
\end{tikzcd}$$

où les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes d'après ce qu'on vient de voir, et $T^{n+1}(A) \to T^{n+1}(B)$ est nul par construction. Alors le lemme des cinq implique que $T^{n+1}(A) \to T'^{n+1}(A)$ est un monomorphisme, C.Q.F.D.

Corollaire 6.3. Supposons que $T^{\cdot}$, $T'^{\cdot}$ proviennent de foncteurs cohomologiques (dénotés par les mêmes symboles) sur la catégorie dérivée droite [3] $D^+(C)$, à valeur dans C' ; on ne suppose pas nécessairement les $T^i(i > 0)$ effaçables. On suppose que $K^{\cdot} \in D^+(C)$, $H^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$ implique $T^i(K^{\cdot}) = T'^{\cdot}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$. Soit $K^{\cdot} \in \operatorname{Ob} D^+(C)$ un complexe borné à gauche dans C tel que $H^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$.

(i) Si la condition a) de 6.2 est satisfaite, alors l'homomorphisme $\varphi^i(K^{\cdot}) = T^i(K^{\cdot}) \to T'^i(K^{\cdot})$ est un isomorphisme pour $i < n$, un monomorphisme pour $i = n + 1$.

(ii) Soit de plus $L^{\cdot} \in \operatorname{Ob} D^+(C)$ tel que $H^i(L^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$, et soit $u : L^{\cdot} \to K^{\cdot}$ un homomorphisme dans $D^+(C)$, induisant un homomorphisme injectif $H^{\circ}(u) :$
101 $H^{\circ}(L^{\cdot}) \to H^{\circ}(K^{\cdot})$. Alors, pour que $T^{n+1}(L^{\cdot}) \to T'^{n+1}(L^{\cdot})$ soit surjectif, il faut et il suffit que l'image de $T'^{n+1}(L^{\cdot})$ dans $T'^{n1}(K^{\cdot})$ soit contenue dans celle de $T^{n+1}(K^{\cdot})$. Si $C' = (\mathrm{Ab})$, et si $\xi \in T'^{n+1}(A)$, alors ξ est dans l'image de $T^{n+1}(A)$ si et seulement si son image dans $T'^{n+1}(K^{\cdot})$ est dans celle de $T^{n+1}(K^{\cdot})$.

Rappelons que l'hypothèse que $T^{\cdot}$ et $T'^{\cdot}$ proviennent de foncteurs cohomologiques sur $D^+(C)$ peut s'expliciter en disant qu'ils proviennent de foncteurs cohomologiques sur la catégorie abélienne des complexes bornés à gauche de C, commutant aux translations des degrés, transformant des homomorphismes de complexes homotopes à zéro en des homomorphismes nuls de C', et transformant tout homomorphisme $u : K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ de complexes qui est un quasi-isomorphisme (i.e. qui induit des isomorphismes $H^i(K^{\cdot}) \to H^i(L^{\cdot})$) en un isomorphisme de C'. Pratiquement, tous les foncteurs cohomologiques de C dans C' qu'on rencontre sont obtenus ainsi.

Démonstration de 6.3. Prouvons d'abord (i). L'assertion est évidente si $H^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i \leq n + 1$, car alors d'après les propriétés de degrés imposées à $T^{\cdot}$, $T'^{\cdot}$, on aura $T^i(K^{\cdot}) = T'^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i \leq n + 1$. Soit d'autre part m un entier ≥ 0 tel que $H^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < m$: il en existe, par exemple $m = 0$ fait l'affaire. Nous procédons par récurrence descendante sur m, l'assertion étant prouvée si $m = n+2$. Nous supposons donc l'assertion prouvée pour les $m' > m$, et la prouvons pour m. D'après l'hypothèse sur les degrés de $K^{\bullet}$, $K^{\bullet}$ est quasi-isomorphe à un complexe à degrés $\geq m$, donc on peut le supposer à degrés $\geq m$. Il s'ensuit une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow H^m[-m] \longrightarrow K^{\bullet} \longrightarrow K'^{\bullet} \longrightarrow 0,$$

où $H^m = H^m(K^{\bullet})$, où le signe $[-m]$ indique translation de $-m$ sur les degrés d'un complexe, et où $K'^{\bullet}$ est défini comme conoyau. Donc les objets de cohomologie de $K'^{\bullet}$ sont **102**
ceux de $K^{\bullet}$ en degrés $\geq m+1$, et nuls en degrés $\leq m+1$; en particulier, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $K'^{\bullet}$. La suite exacte précédente donne lieu à un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
T^{i-1}(K'^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{i-m}(H^m) \arrow[r] \arrow[d] & T^i(K^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^i(K'^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{i+1-m}(H^m) \arrow[d] \\
T'^{i-1}(K'^{\bullet}) \arrow[r] & T'^{i-m}(H^m) \arrow[r] & T'^i(K^{\bullet}) \arrow[r] & T'^i(K'^{\bullet}) \arrow[r] & T'^{i+1-m}(H^m).
\end{tikzcd}$$

Faisant alors $i \leq n$ dans le diagramme précédent, et tenant compte de l'hypothèse de récurrence et de $m \geq 0$, on trouve que les flèches verticales autour de la flèche verticale médiane sont des isomorphismes et a fortiori des épimorphismes , et que la flèche verticale de droite est un monomorphisme, donc par le lemme des cinq la flèche verticale médiane est un épimorphisme. Faisant $i \leq n+1$, on trouve de même que les flèches verticales autour de la médiane sont des monomorphismes, la flèche verticale de gauche étant un isomorphisme et a fortiori un épimorphisme, d'où on conclut par le lemme des cinq que la flèche verticale médiane est un monomorphisme, ce qui établit 6.3 (i).

Pour établir la deuxième assertion 6.3 (ii), on utilise de même la suite exacte

$$0 \longrightarrow L^{\bullet} \longrightarrow K^{\bullet} \longrightarrow K'^{\bullet} \longrightarrow 0,$$

où $K'^{\bullet}$ est défini comme le mapping-cylinder de $L^{\bullet} \to K^{\bullet}$, donc est encore à cohomologie à degrés positifs. La « chasse au diagramme » habituelle dans

$$\begin{tikzcd}
T^n(K^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^n(K'^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(L^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(K^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(K'^{\bullet}) \arrow[d] \\
T'^n(K^{\bullet}) \arrow[r] & T'^n(K'^{\bullet}) \arrow[r] & T'^{n+1}(L^{\bullet}) \arrow[r] & T'^{n+1}(K^{\bullet}) \arrow[r] & T'^{n+1}(K'^{\bullet})
\end{tikzcd}$$

donne alors la dernière assertion de 6.3, compte tenu du fait que (en vertu de la première **103**
partie déjà démontrée) les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, les deux dernières des monomorphismes. Cela achève la démonstration de 6.3.

Lemme 6.4. Le théorème (5.1) est vrai si f est fini.

Cela résulte aussitôt en effet de VIII 5.5 et 5.8.

Proposition 6.5. Soit $h : Y \to X$ un morphisme de schémas quasi-compacts et quasi-séparés. Dans (i) ci-dessous, I désigne un ensemble donné ayant au moins deux points, dans (ii) et (iii), $\mathbf{L}$ désigne une partie non-vide de l'ensemble $\mathbf{P}$ des nombres premiers, et dans (iii) n désigne un entier.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application canonique

$$H^{\circ}(X, F) \longrightarrow H^{\circ}(Y, h^*(F))$$

est injective (resp. bijective).

b) Pour tout morphisme fini $X' \to X$, désignant par $h^{\circ} : Y' \to X'$ le morphisme déduit de h par le changement de base $X' \to X$, l'application canonique

$$H^{\circ}(X', I_{X'}) \longrightarrow H^{\circ}(Y', I_{Y'})$$

déduite de h' est injective (resp. bijective).

b') Avec les notations de b), l'application $U \mapsto h'^{-1}(U)$ de l'ensemble des parties de Y' à la fois ouvertes et fermées dans l'ensemble des parties de X' à la fois ouvertes et fermées est injective (resp. bijective).

104 b'') (Si X localement noethérien). Avec les notations de b), l'application induite sur les ensembles de composantes connexes

$$\Pi_{\circ}(h') : \Pi_{\circ}(X') \longrightarrow \Pi_{\circ}(Y')$$

est surjective (resp. bijective), ou encore : si X' est non-vide (resp. connexe non-vide) il en est de même de Y'.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors pour tout faisceau en groupes F sur X, le foncteur $P \mapsto h^*(P)$ de la catégorie des torseurs (= fibrés principaux homogènes) sous F dans la catégorie des torseurs sous $h^*(F)$ est fidèle (resp. pleinement fidèle), et a fortiori, dans le cas respé, l'application canonique

$$H^1(X, F) \longrightarrow H^1(Y, h^*(F))$$

est injective. Enfin, sous les mêmes hypothèses, le foncteur $X' \mapsto Y' = X' \times_X Y$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de Y est fidèle (resp. pleinement fidèle).

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau F de groupes ind-$\mathbf{L}$-finis sur X, l'application canonique

$$H^1(X, F) \longrightarrow H^1(Y, h^*(F))$$

est bijective pour $i = 0, 1$.

b) Pour tout morphisme fini $X' \to X$, désignant par $h' : Y' \to X'$ le morphisme déduit de h par changement de base, et pour tout $\mathbf{L}$-groupe fini ordinaire G, l'application canonique

$$H^1(X', G_{X'}) \longrightarrow H^1(Y', G_{X'})$$

est bijective pour $i = 0, 1$.

105 b') (Si $\mathbf{L} = \mathbf{P}$). Avec les notations de b), le foncteur image inverse par h' induit une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X' avec la catégorie des revêtements étales de Y'.

b'') (Si X noethérien, $\mathbf{L} = \mathbf{P}$). Avec les notations de b), si x' est non-vide, il en est de même de Y', et si y' est un point géométrique de Y', x' son image dans X', l'application canonique

$$\Pi_i(Y', y') \longrightarrow \Pi_i(X', x') \quad , \quad \text{pour } i = 0, 1,$$

est bijective.

(iii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau F de $\mathbf{L}$-torsion sur X, l'homomorphisme

$$H^i(X, F) \longrightarrow H^i(Y, h^*(F))$$

est un isomorphisme si $i \leq n$, un monomorphisme si $i = n + 1$.

a') (Si $n \geq -1$). Pour tout F comme ci-dessus, l'homomorphisme envisagé est injectif si $i = 0$, et surjectif si $i \leq n$.

b) (Si $n \geq -1$). Pour tout morphisme fini $X' \to X$, désignant par $h' : Y' \to X'$ le morphisme déduit de h par changement de base $X' \to X$, et pour tout $\ell \in \mathbf{L}$, $\nu > 0$, l'homomorphisme canonique

$$H^i(X', (\mathbf{Z}/\ell^\nu \mathbf{Z}_{X'}) \longrightarrow H^i(Y', \mathbf{Z}/\ell^\nu \mathbf{Z})_{Y'})$$

est injectif pour $i = 0$, surjectif pour $i \leq n$.

De plus, on a le complément suivant à l'énoncé précédent :

Corollaire 6.6. (i) Supposons la condition non respée 6.5 (i) a) satisfaite, soit F un faisceau d'ensembles sur X, et soit $\xi \in H^\circ(Y, h^*(F))$. Supposons qu'il **106**
existe un monomorphisme de faisceaux d'ensembles $F \to G$ tel que l'image de ξ dans $H^\circ(Y, h^*(G))$ soit dans l'image de $H^\circ(X, G)$. Alors ξ est dans l'image de $H^\circ(X, F)$.

(ii) Supposons la condition 6.5 (i) a) respée satisfaite, soit F un faisceau de groupes sur X, et soit $\xi \in H^1(Y, h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme de faisceaux de groupes $F \to G$ tel que l'image de ξ dans $H^1(Y, h^*(G))$ soit dans l'image de $H^1(X, G)$, alors ξ est dans l'image de $H^1(X, F)$.

(iii) Supposons la condition 6.5 (iii) a) satisfaite (pour une valeur donnée n), soit F un faisceau de $\mathbf{L}$-torsion sur X et soit $\xi \in H^{n+1}(Y, h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme $F \to G$ de faisceaux de $\mathbf{L}$-torsion, tel que l'image de ξ dans $H^{n+1}(Y, h^*(G))$ soit dans l'image de $H^{n+1}(X, G)$, alors ξ est dans l'image de $H^{n+1}(X, F)$.

Démonstration de 6.5 et 6.6. Prouvons d'abord 6.6. Le cas de 6.6 (iii) est un cas particulier de la dernière assertion dans 6.3, appliqué au cas où C est la catégorie des faisceaux abéliens de $\mathbf{L}$-torsion sur X, C' est la catégorie (Ab), et $T^i(F) = H^i(X, F)$, $T'^i = H^i(Y, g^*(F))$ (noter que $T'^\bullet$ est bien un foncteur cohomologique en F, grâce au fait que la foncteur $h^\bullet$ est exact). Bien entendu, ici la considération des complexes comme dans 6.3 est inutile (elle nous sera commode plus loin (6.8)) et nous utilisons uniquement la dernière assertion de 6.3.

Pour prouver (i), considérons la somme amalgamée $H = G \amalg_F G$, limite inductive, dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, du diagramme

$$\begin{tikzcd} & G \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Les propriétés d'exactitude habituelles du topos des faisceaux d'ensembles montrent, **107**
comme $F \to G$ est un monomorphisme, que l'on a un diagramme exact de faisceaux d'ensembles sur X

$$F \longrightarrow G \rightrightarrows H$$

(ce que l'on peut exprimer en disant que dans un topos, tout monomorphisme est effectif, et prouver en se ramenant comme d'habitude à la catégorie des ensembles). Comme les foncteurs H° et h^{*} sont exacts à gauche, on en conclut un homomorphisme de diagrammes exacts d'ensembles

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,F) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,G) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & H^0(X,H) \arrow[d] \\
H^0(Y,h^*(F)) \arrow[r] & H^0(Y,h^*(G)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & H^0(Y,h^*(H)),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont injectives. Une « chasse de diagramme » immédiate prouve alors l'assertion 6.6 (i).

Pour prouver 6.6 (ii), nous allons d'abord prouver la deuxième assertion de 6.5 (i), savoir que moyennant la condition a) de 6.5 (i), pour tout faisceau de groupes F sur X, le foncteur $P \mapsto h^{*}(P)$, de la catégorie des torseurs sous F dans la catégorie des torseurs sous $h^{*}(F)$, est fidèle (resp. pleinement fidèle), donc, dans le cas respé, induit une injection sur les H^{1}. Pour ceci, si P et P' sont deux torseurs sous F, désignons par $\mathrm{Isom}_F(P,P')$ le faisceau des F-isomorphismes de P sur P'. Il est immédiat que la formation de ce faisceau commute à toute extension de la base, en particulier à l'extension de la base par h. (C'est là une assertion valable pour tout morphisme de sites). Utilisant l'hypothèse sur l'effet de h^{*} sur les H° pour le faisceau $\mathrm{Isom}_F(P,P')$, on trouve que l'application $\mathrm{Isom}_F(P,P') \to \mathrm{Isom}_F(h^{*}(P),h^{*}(P'))$ est injective (resp. bijective), ce qui signifie
108 que la foncteur $P \mapsto h^{*}(P)$ est fidèle (resp. pleinement fidèle). (NB dans la catégorie des torseurs sous un faisceau en groupes, tout homomorphisme est un isomorphisme). Notons d'autre part, que si F est un sous-faisceau en groupes d'un faisceau en groupes G, alors la donnée d'un torseur P sous F revient à la donnée d'un torseur sous G (savoir celui déduit de P par extension $F \to G$ du Groupe structural), muni d'une section de Q/F (qui s'interprète en effet comme une « restriction du Groupe structural » de G à F). Ceci posé, avec les notations de 6.6 (ii), comme l'image de η dans $H^{1}(Y,h^{*}(G))$ provient d'un élément de $H^{1}(X,G)$, ce dernier est défini par un torseur Q sous G, de sorte que η est la classe du torseur $h^{*}(Q)$ sous $h^{*}(G)$. Le fait que η provient d'un $\xi \in H^{1}(Y,h^{*}(F))$ s'explicite alors en disant que ξ est la classe du $h^{*}(F)$-torseur défini par $h^{*}(Q)$ et une section convenable de $h^{*}(Q)/h^{*}(F)$. Comme le foncteur h^{*} est exact à droite, ce dernier faisceau n'est autre que $h^{*}(Q/F)$, et comme h^{*} induit une bijection sur les H° des faisceaux d'ensembles, il s'ensuit que la section envisagée de $h^{*}(Q)/h^{*}(F)$ provient d'une section de Q/F. Cette dernière définit alors un F-torseur par restriction du groupe structural, et la classe de ce torseur dans $H^{1}(X,F)$ a évidemment ξ comme image dans $H^{1}(Y,h\xi(F))$. Cela prouve 6.6 (ii) et achève la démonstration de 6.6.

Prouvons maintenant 6.5, en commençant par 6.5 (iii). Évidemment a) implique a'), et l'implication inverse est un cas particulier de 6.2 (appliqué encore au cas où C est la catégorie des faisceaux de $\mathbf{L}$-torsion sur X, et C' la catégorie des faisceaux de groupes abéliens), pourvu qu'on prouve l'effaçabilité dans C des foncteurs $H^{i}(X,F)$ pour $i>0$. Cela n'offre en effet pas de difficulté, mais nous pouvons aussi nous dispenser de prouver
109 ce résultat, en notant que F est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux F_i pour lesquels il existe un entier $n>0$ annulant F_i (IX 1.1). Alors $h^{*}(F)$ est limite inductive des $h^{*}(F_i)$, et compte tenu de la commutation de la cohomologie à la limite inductive (VII 3.3), résultant des hypothèses de quasi-compacité et de quasi-séparation faites sur X et Y (qui n'avaient pas servi pour 6.6), on se ramène à prouver la condition a) pour les F_i, ce qui nous ramène au cas où il existe un entier $m>0$ tel que $mF=0$. On peut évidemment supposer que les diviseurs premiers de m soit $\in \mathbf{L}$, et on peut alors prendre pour C la catégorie des faisceaux de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$-Modules sur X. Or on sait que dans cette catégorie,

les foncteurs $H^i(X,-)$ pour $i \geq 1$ sont effaçables ( ). Cela montre l'équivalence des conditions a) et a') de 6.5 (iii). D'autre part, appliquant a) à l'image directe d'un faisceau de $\mathbf{L}$-torsion F' sur X', X' fini sur X, qui est de $\mathbf{L}$-torsion grâce à IX 1.2 (v), IX 1.6 (iii), et utilisant 6.4 et VIII 5.5, on trouve que l'homomorphisme

$$H^i(X',F') \longrightarrow H^i(Y',h'^*(F'))$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n+1$, d'où a fortiori la condition b). Reste à prouver que cette condition implique a'). Pour ceci, utilisons le fait (IX 2.7.2) que tout faisceau de $\mathbf{L}$-torsion F sur X est limite inductive filtrante de faisceaux de $\mathbf{L}$-torsion constructibles ; alors l'argument de passage à la limite déjà utilisé montre que dans a'), on peut se limiter au cas où F est constructible. En vertu de IX 2.14 il existe alors un nombre fini de morphismes finis $p_i : X'_i \to X$, de faisceaux constants de $\mathbf{L}$-torsion $G_{X'_i}$ sur les X'_i, et un homomorphisme injectif

$$F \longrightarrow \prod_i p_{i_*}(G_{iX'_i})$$

Ceci dit, si $n = -1$, i.e. lorsque la conclusion voulue se réduit à l'assertion d'injectivité **110**
pour $H^\circ(X,F) \to H^\circ(Y,h^*(F))$, on voit aussitôt qu'on peut dans cette question remplacer F par un faisceau G tel qu'il existe un monomorphisme $F \to G$, et par suite on peut remplacer F par le produit des $p_{i^*}(G_{iX'_i})$. Compte tenu de 6.4, on est donc ramené à prouver l'assertion d'injectivité en remplaçant $h : Y \to X$ par $h' : Y' \to X'$, et F par un faisceau constant sur X' de valeur un groupe fini de $\mathbf{L}$-torsion ordinaire G. Or G est isomorphe à une somme de groupes de la forme $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$, avec $\ell \in \mathbf{L}$. On est donc bien réduit à vérifier b). Lorsque $n \geq 0$, on procède de façon analogue. Par récurrence sur n, on peut supposer la conclusion voulue (et par suite a)) prouvée pour l'entier $n-1$ au lieu de n. Utilisant alors 6.6 (iii), on voit qu'on peut encore remplacer F par un faisceau G tel qu'il existe un monomorphisme $F \to G$, et on prendra encore pour G le faisceau $p_*(G_{X'})$. Compte tenu de 6.4 et de la nullité des $R^i_{p_*}$ $(i \geq 1)$ pour un morphisme fini (VIII 5.5), cela nous ramène encore à prouver la surjectivité pour H^n en remplaçant $h : Y \to X$ par un $h' : Y' \to X'$, et F par un faisceau constant sur X' de valeur un groupe fini de $\mathbf{L}$-torsion ordinaire. Comme l'injectivité est déjà acquise grâce à l'hypothèse de récurrence et l'implication $a') \Rightarrow a)$, on est encore ramené, par dévissage sur G, au cas où G est de la forme $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$, c'est-à-dire au cas envisagé dans la condition b) de 6.5 (iii). Cela prouve le cas (iii) de 6.5.

Les cas (i) et (ii) se démontrent exactement de la même façon, pour ce qui est de l'équivalence des conditions a) et b) dans 6.5 (i) resp. 6.5 (ii) : on utilise IX 2.7.2 et la **111**
commutation du H° et H^1 aux limites inductives filtrantes de faisceaux (VII 5.14) pour se ramener au cas où F est constructible, puis IX 2.14, 6.6 (i) (ii) et VIII 5.8 pour se ramener au cas particulier envisagé dans b). Par ailleurs, dans (i), l'équivalence des conditions b), b') et b'') est triviale et n'est mise que pour mémoire, ainsi que le fait qu'elles impliquent la fidélité (resp. la pleine fidélité) du foncteur $X' \mapsto Y'$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de Y. Il en est de même de l'équivalence des conditions b), b') et b'') dans 6.5 (ii), qui ont été ajoutées pour faire bon poids. La démonstration de 6.5 est ainsi achevée.

Remarque 6.7. [36].

[36] Le rédacteur recommande d'omettre la lecture de ces remarques, ainsi que de (6.13), introduites subrepticement (en même temps que diverses autres modifications plus ou moins heureuses du texte original) par un collaborateur irrévérencieux.

1) Évidemment, les arguments démontrant 6.5 et 6.6 sont de nature très générale et essentiellement triviale et auraient intérêt à être dégagés en des lemmes abstraits de la même eau que 6.2 (les faisceaux $p_*(G_{X'})$ jouant le rôle de cogénérateurs de la catégorie $\boldsymbol{C}$ dans laquelle on travaille). On laisse ce plaisant exercice au lecteur, et nous nous bornons à signaler que le même énoncé essentiellement pourrait être donné en regardant des foncteurs tels que $\boldsymbol{R}^i f_*$ au lieu des foncteurs $\boldsymbol{H}^i$. Les mêmes remarques s'appliquent à 6.8, 6.11 ci-dessous.
2) Lorsque X est noethérien, alors les arguments donnés montrent que dans l'énoncé des conditions b) et leurs variantes dans 6.5 (i) (ii) (iii), on peut se borner à prendre X' intègre ; lorsque X est universellement japonais, on peut même les
112 prendre intègre et normaux ; c'est également possible sans la restriction japonaise sur X, à condition de prendre des morphismes $p : X' \to X$ entiers au lieu de morphismes finis. Nous ne nous servirons d'aucune de ces variantes dans la suite du séminaire.
3) La démonstration de 6.6 n'utilise pas l'hypothèse de quasi-compacité et de quasi-séparation faite sur X, et il en est de même pour le fait que dans (i) (ii) (iii) la condition a) implique les autres, ainsi que pour l'équivalence des conditions b), b'), b'') entre elles. Notons d'autre part que la forme b) des conditions 6.5 (i) montre que, pour $\mathbf{L} = \phi$, ce sont des cas particuliers (lorsque X est quasi-compact quasi-séparé) de 6.5 (iii), pour $n = -1$ resp. pour $n = 0$. Cela reste d'ailleurs vrai (en se bornant aux conditions sous la forme a)) sans la restriction énoncée sur X, comme on voit aisément grâce au fait que pour tout faisceau d'ensembles F, et tout nombre premier ℓ, on peut trouver deux faisceaux abéliens de ℓ-torsion G et H, et un homomorphisme $u : G \to H$ des faisceaux d'ensembles sous-jacents, tels que F soit isomorphe à l'image inverse de la section nulle (on prendre pour F le $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$-Module libre engendré par F, et pour H le faisceau constant $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ sur X). Le même argument montre que (sans restriction de quasi-compacité et de quasi-séparation) 6.5 (ii) a) (où il suffit même de faire $i = 0$) implique la condition respée 6.5 (i) a) ; cela permet par suite, compte tenu que cette dernière implique déjà l'injectivité de $H^1(X, F) \to H^1(Y, h^*(F))$ pour tout faisceau en groupes F sur X, de se borner dans l'énoncé de 6.5 (ii) a) d'exiger pour $i = 1$ la surjectivité de $H^1(X, F) \to H^1(Y, h^*(F))$. Malheureusement, le cas 6.5 (ii) ne peut être envisagé comme cas particulier de 6.5 (iii), ce qui nous oblige souvent de répéter dans le cas non commutatif un argument déjà fait pour l'essentiel dans le cas commutatif. Notons également que, sauf 6.10, les
113 résultats qui suivent sont énoncés de sorte qu'ils sont valables sans hypothèse de quasi-compacité et de quasi-séparation.

Proposition 6.8. (Lemme de descente). Avec les notations générales de 6.5, supposons donné de plus un morphisme $p : \overline{X} \to X$, désignons par $\overline{h} : \overline{Y} \to \overline{X}$ le morphisme déduit de h par le changement de base p, et par $p_y : \overline{Y} \to Y$ le morphisme canonique. Nous supposons, ou bien que p est surjectif, ou bien que h est une immersion fermée et que $X = p(\overline{X}) \cup h(Y)$.

(i) Supposons que le morphisme $\overline{h} : \overline{Y} \to \overline{X}$ satisfasse à la condition d'injectivité (resp. de bijectivité) de 6.5 (i) a). Dans le cas respé, supposons de plus que le morphisme de changement de base

$$(*) \qquad h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y_*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$. Alors le morphisme $h : X \to Y$ satisfait également la condition d'injectivité (resp. de bijectivité) de 6.5 (i) a).

(ii) Supposons que $\overline{h} : \overline{Y} \to \overline{X}$ satisfasse la condition de 6.5 (ii) a), et que pour tout faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, le morphisme de changement de base $(*)$ soit bijectif. Alors $h : Y \to X$ satisfait également la condition de 6.5 (ii) a).

(iii) Supposons que $\overline{h} : \overline{Y} \to \overline{X}$ satisfasse à la condition de 6.5 (iii) a), et que pour tout faisceau abélien $\overline{F}$ de $\mathbf{L}$-torsion sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base

$$h^*(R^i p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^i p_{Y_*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$$

soit bijectif pour $i \leq n-1$, injectif pour $i = n$ (où n est un entier ≥ 1 donné). Alors le morphisme $h : Y \to X$ satisfait également à la condition de 6.5 (iii) a).

Démonstration de 6.8. Dans le cas où on ne suppose pas p surjectif, mais h une immersion **114**
fermée et $X = p(\overline{x}) \cup h(Y)$, nous considérons le schéma somme $\overline{X}'$ de $\overline{X}$ et Y, et le morphisme $p' : \overline{X}' \to X$ déduit de p et h. Alors p' est surjectif, de plus on vérifie trivialement, dans chacun des trois cas envisagés (i) (ii) (iii), que les hypothèses faites sur le couple (h, p) sont encore satisfaites pour le couple (h, p'). Cela nous ramène donc au cas où p est surjectif, dans lequel nous allons nous placer dans la suite. Dans ce cas pour tout faisceau F sur X, l'homomorphisme canonique

$$F \longrightarrow p_*(p^*(F))$$

est injectif. Dans le cas (i), pour vérifier l'injectivité de $H^\circ(X, F) \to H^*(Y, h^*(F))$, on est ramené aussitôt au cas où on remplace F par $p_*(\overline{F})$ (où on pose $\overline{F} = p^*(F)$). Or considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^\circ(X, p_*(\overline{F})) \arrow[r] \arrow[dd, "\wr"] & H^\circ(Y, h^*(\overline{F})) \arrow[d] \\
 & H^\circ(Y, p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))) \arrow[d, "\wr"'] \\
H^\circ(\overline{X}, \overline{F}) \arrow[r] & H^\circ(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F})),
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale gauche et la deuxième flèche verticale droite sont les isomorphismes canoniques, la première flèche verticale droite provenant de l'homomorphisme de changement de base par h. Par hypothèse la deuxième flèche horizontale est injective, ce qui implique aussitôt qu'il en est de même de la première, ce qui prouve l'assertion non respée de (i). Pour l'assertion respée, on suppose que la deuxième flèche horizontale est surjective, de plus l'homomorphisme de changement de base étant un monomorphisme
par hypothèse, il en est de même de la première flèche verticale droite, donc du composé **115**
des deux flèches verticales droites. Il s'ensuit aussitôt que la première flèche horizontale est également surjective, ce qui achève de prouver (i). Pour prouver (ii), grâce à ce qui précède et 6.5 (i) on est ramené à prouver la surjectivité pour $H^1(X, F) \to H^1(Y, h^*(F))$. Utilisant 6.6 (ii) on est encore ramené à la prouver pour F de la forme $p_*(\overline{F})$, où $\overline{F}$ est un faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes sur $\overline{X}$ (IX 1.6 (ii)). Écrivant les suites exactes pour les H^1, (variantes de (3.2)) pour les morphismes p et p_Y, on trouve un homomorphisme de suites

exactes non commutatives :

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(X,p_*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^1(\overline{X},\overline{F}) & \longrightarrow & H^0(X,R^1p_*(\overline{F})) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(Y,p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^0(Y,R^1(p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F})))),
\end{array}$$

où dans chaque ligne la première flèche est injective et identifie le premier terme à l'image inverse, par la deuxième flèche, du point marqué du troisième terme. Par hypothèse sur $\overline{h}$, la flèche verticale médiane est bijective. D'autre part, les deux flèches verticales extrêmes se factorisent respectivement par $H^1(Y,h^*(p_*(\overline{F}))$ et $H^\circ(Y,h^*(R^1(p_*(\overline{F}))$, en composant les homomorphismes $H^i(X,-) \to H^1(Y,-)$ (pour $i=1$ et $i=0$ respectivement) et les homomorphismes déduits en appliquant $H^i(Y,-)$ (pour ces mêmes valeurs de i) à l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \to p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ resp. $h^*(R^1p_*(\overline{F})) \to R^1p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$. Comme la première de ces flèches est un isomorphisme par hypothèse, il s'ensuit que la première flèche verticale du diagramme ci-dessus s'identifie à l'homomorphisme $H^1(C,-) \to H^1(Y,-)$ que nous voulons étudier. Pour prouver sa bijectivité, il reste donc à prouver que la dernière flèche verticale du diagramme est injective. Or d'après ce qu'on vient de dire, elle est composée de deux ap-
116 plications, dont la première est un homomorphisme canonique $H^\circ(X,-) \to H^\circ(Y,-)$, donc bijective, et la deuxième est injective, car déduite par le foncteur exact à gauche $H^\circ(Y,-)$ d'un homomorphisme $H^*(R^1(p_*(\overline{F})) \to R^1p_*(\overline{h}^*(\overline{F}))$ qui est un monomorphisme. Ce dernier fait résulte en effet aisément de l'hypothèse de bijectivité faite pour l'homomorphisme de changement de base dans la dimension précédente 0, par exemple en utilisant la deuxième assertion de 6.5 (i) et le calcul habituel des fibres des images directes supérieures (VIII 5.3). Cela prouve 6.8 (ii).

Reste à prouver 6.8 (iii). Pour ceci, il nous sera plus commode, au lieu d'utiliser directement l'injection $F \to p_*(p^*(F))$ comme ci-dessus, d'utiliser l'homomorphisme

$$F \longrightarrow Rp_*(\overline{F})$$

dans la catégorie dérivée droite $D^+(C)$, où C désigne la catégorie des faisceaux abéliens sur X. Rappelons que par définition, $Rp_*(\overline{F})$ est le complexe $p_*(C(\overline{F}))$, où $C(\overline{F})$ est un complexe résolution injective de $\overline{F}$ dans la catégorie des faisceaux abéliens sur $\overline{X}$. Si $K^\cdot$ est un complexe sur X, nous désignons par $H^i(X,K^\cdot)$ les groupes d'hypercohomologie de X à coefficients dans $K^\cdot$, et on utilise les notations analogues sur Y. En vertu de 6.3, on est ramené à prouver la surjectivité pour

$$H^n(X,Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^n(Y,h^*Rp_*(\overline{F})). \tag{1}$$

Or par hypothèse, l'homomorphisme de changement de base

$$H^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \tag{2}$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie en degrés $\leq n-1$, et un mono-
117 morphisme en degrés n, ce qui peut s'exprimer en disant que le « mapping-cylinder » $K^\cdot$ de l'homomorphisme précédant n'a des faisceaux de cohomologie non nuls qu'en degrés $\geq n$. Donc $H^i(Y,K^\cdot)=0$ si $i<n$, ce qui implique, par la suite exacte de cohomologie, que les homomorphismes

$$H^i(Y,h^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^i(Y,Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})), \tag{3}$$

induits par l'homomorphisme ci-dessus, sont des isomorphismes pour $i \leq n-1$, un monomorphisme pour $i = n$. Considérons le composé de (1) et (3)

$$H^n(X, Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^n(Y, h^*(Rp_*(\overline{F}))) \longrightarrow H^n(Y, Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})). \tag{4}$$

Les termes extrêmes sont respectivement isomorphes, en vertu des définitions, à $H^n(\overline{X}, \overline{F})$ et $H^n(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F}))$, et le composé de (4) n'est autre que l'homomorphisme déduit de $\overline{h}$, qui est bijectif grâce à l'hypothèse faite sur $\overline{h}$. Comme la deuxième flèche de (4) est injective d'après ce qu'on vient de voir, la première est également bijective, ce qui achève la démonstration de 6.8.

D'ailleurs, on constate aussitôt que la démonstration précédente fournit le résultat suivant, légèrement plus précis et plus général :

Corollaire 6.9. Les notations sont celles de 6.8. On suppose de plus satisfaite pour h la condition non respée de 6.5 (i) (resp. la condition respée de 6.5 (i), resp. la condition de 6.5 (iii), avec $n \geq -1$), et que pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \to p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est injectif (resp. bijectif, resp. que pour tout faisceau de $\mathbf{L}$-torsion $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base $h^* R^i p_*(\overline{F}) \to R^i p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ soit bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$). Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. un faisceau de $\mathbf{L}$-torsion) sur X, et soit $\xi \in H^{n+1}(Y, h^*(F))$ (où on prend $n = -1$ dans le cas(i), $n = 0$ dans le cas (ii)). 118
Posons $\overline{F} = p^*(F)$. Alors, pour que ξ soit dans l'image de $H^{n+1}(X, F)$, il faut et il suffit que son image inverse dans $H^{n+1}(\overline{Y}, p_{Y^*}(h^*(F)) = H^{n+1}(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F}))$ soit dans l'image de $H^{n+1}(\overline{X}, \overline{F})$.

Nous utiliserons cette forme précisée de 6.8 pour prouver le

Corollaire 6.10. Les notations sont celles de 6.5. On suppose, pour simplifier, vérifiée la condition non respée de 6.5 (i).

(i) Pour que le condition respée de 6.5 (i) soit satisfaite (resp. pour qu'on ait 6.5 (ii) a), resp. pour qu'on ait 6.5 (iii) a)), il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : Pour tout faisceau F d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. de groupes abéliens de $\mathbf{L}$-torsion) sur X, tout $\xi \in H^\circ(Y, h^*(F))$ (resp. tout $\xi \in H^i(Y, h^*(F))$ avec $i = 0, 1$, resp. tout $\xi \in H^i(Y, h^*(F))$ avec $i \leq n$), et toute partie fermée non vide X' de X, désignant par Y' sont image inverse dans Y, il existe un morphisme $p : \overline{X} \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :
   1°) L'image $p(\overline{X})$ est contenue dans X' et contient un ouvert non vide de X'.
   2°) Pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ (resp. ...) l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \to p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est un isomorphisme (resp. pour tout faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes $\overline{F}$ sur X, l'homomorphisme de changement de base $h^*(R^i p_*(\overline{F})) \to R^i p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ pour $i = 0, 1$ est bijectif, resp. pour tout faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base est bijectif pour $i \leq n$).
   3°) L'image inverse de ξ dans $H^i(\overline{Y}, p_Y * (h^*(F))) = H^i(\overline{Y}, \overline{h}^*(p^*(F)))$ est contenue dans l'image de $H^i(\overline{X}, p^*(F))$.

(ii) Soit $n \geq -1$, et supposons que pour tout faisceau d'ensembles F (resp. tout faisceau de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. tout faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion) F sur X, l'homomorphisme $H^i(X, F) \to H^i(Y, h^*(F))$ soit bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$, (dans le premier cas, on suppose $n = 1$, dans le deuxième, $n = -1$ ou 0). Soit $\xi \in H^{n+1}(Y, h^*(F))$. Pour que ξ soit dans l'image de $H^{n+1}(X, F)$, il 119 faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition énoncée dans (i) ci-dessus, avec $i = n + 1$).

Démonstration de 6.10. Utilisant 6.5 et une récurrence immédiate sur n, on constate que 6.10 (i) est conséquence de 6.10 (ii), que nous allons maintenant démontrer.

Supposons que ξ ne soit pas dans l'image de $H^n(X, F)$. Soit Φ l'ensemble des parties fermées X' de X telles que l'image ξ dans $H^n(Y', h^*(F)|Y')$ ne soit pas contenue dans celle de $H^n(X', F|X')$. Par hypothèse, $X \in \Phi$, donc Φ n'est pas vide. Ordonnons Φ par la relation $\supset$, et montrons que Φ est inductif. Pour ceci, il suffit de prouver que si (X'_λ) est une famille totalement ordonnée d'éléments de Φ, et si X' est leur intersection, alors $X' \in \Phi$. Or, munissant les X'_λ et X' de la structure induite réduite, on voit que les morphismes $X'_\lambda \to X$ sont affines (puisque ce sont des immersions fermées), donc le système projectif des X'_λ satisfait aux conditions envisagées dans VII 5. De plus, on constate aussitôt que X' est la limite projective des X'_λ. De même, Y' est la limite projective du système projectif des Y'_λ, qui sont affines sur Y. Utilisant VII 5.8, on trouve donc

$$\varinjlim H^n(X'_\lambda, F|X'_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^n(X', F|X') \quad , \quad \varinjlim H^n(Y'_\lambda, h^*(F)|Y'_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^n(Y', h^*(F)|Y').$$

120 De ceci, on conclut aussitôt que si on avait $(\xi|Y') \in \operatorname{Im} H^n(X', F|X')$, alors il existerait un indice λ tel que $(\xi|Y'_\lambda) \in \operatorname{Im}(X'_\lambda, F|X'_\lambda)$, ce qui est absurde ; donc on a bien $X' \in \Phi$. Donc Φ est inductif, et contient par suite un élément minimal, soit X'. Comme évidemment $\phi \notin \Phi$, X' est non-vide. Appliquons à ξ et à X' l'hypothèse de 6.10, d'où un morphisme $p : \overline{X} \to X$ satisfaisant aux conditions 1°) à 3°) énoncées dans 6.10. Notons qu'on peut supposer même p surjectif. En effet, soit U un ouvert non vide de X' contenu dans $p(\overline{X})$, et soit X'_1 son complémentaire dans X', de sorte que par construction on a $X'_1 \notin \Phi$. Utilisant cette relation, on voit tout de suite que, posant $\overline{X}_1 = \overline{X} \amalg X'_1$ et désignant par $\overline{p}_1 : \overline{X}_1 \to X$ le morphisme défini par $\overline{p}$ et l'inclusion de X'_1 dans X, le morphisme $\overline{p}_1$ satisfait encore aux mêmes hypothèses que $\overline{p}$; de plus, il est surjectif. Nous supposons donc p surjectif, et appliquons maintenant 6.9, en y remplaçant le morphisme $h : Y \to X$ par le morphisme $h' : Y' \to X'$ (X' étant muni, disons, de la structure induite réduite), et ξ par $\xi|Y'$. On conclut alors de 6.9 que l'on a $(\xi|Y') \in \operatorname{Im} H^n(X', F|X')$, ce qui contredit la relation $X' \in \Phi$ et achève la démonstration de 6.10.

Nous utiliserons 6.10 pour ramener 5.5 au cas où f est un morphisme projectif ; mais pour ceci, dans le cas non noethérien, nous aurons besoin d'une variante non noethérienne du lemme de Chow, qui sera donnée au numéro suivant.

Proposition 6.11. (Lemme de transitivité). Les notations sont celles de 6.8, mais on ne fait aucune hypothèse de surjectivité relativement à p. On suppose que h satisfait à la condition (i) a) (resp. (ii) a), resp. (iii) a) de 6.5. On suppose de plus, dans le cas (i), que pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base de 6.8 est un monomorphisme (resp. un isomorphisme) ; dans le cas (ii), que $\overline{X}$ est noethérien et que pour tout faisceau $\overline{F}$ de ind-$\mathbf{L}$-groupes, l'homomorphisme de changement de
121 base $h^*(R^1p_*(\overline{F})) \to R^1p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est bijectif pour $i = 0, 1$; enfin, dans le cas (iii), que l'homomorphisme de changement de base est bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n + 1$. Alors le morphisme $\overline{h} : \overline{Y} \to \overline{X}$ satisfait également à la condition (i) (resp. (ii), resp. (iii)) de 6.5.

Démonstration de 6.11. Dans le cas (i), on considère le diagramme commutatif de la démonstration de 6.8 (i). Ici les hypothèses impliquent que la première flèche horizontale et la première flèche verticale de droite sont injectives (resp. bijectives), donc il en est de même de la deuxième flèche horizontale, ce qu'on voulait établir. Dans le cas (ii), on

se donne un faisceau $\overline{F}$ de ind-$\mathbf{L}$-groupes sur $\overline{X}$, et il faut montrer que tout élément de $H^1(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F}))$ provient d'un élément de $H^1(\overline{X}, \overline{F})$. En vertu de 6.6 (ii) appliqué à $\overline{h}$, il suffit de trouver un monomorphisme $\overline{F} \to \overline{G}$ de faisceaux en groupes sur $\overline{X}$ qui efface $H^1(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F}))$. Or considérons la deuxième ligne du diagramme utilisé dans la démonstration de 6.8 (ii). Il suffit successivement de trouver un monomorphisme $\overline{F} \to \overline{G}$, avec $\overline{G}$ un faisceau en groupes in-$\mathbf{L}$-finis, qui efface le dernier terme $H^\circ(Y, R^1 p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$, puis un monomorphisme de faisceaux en groupes $\overline{G} \to \overline{H}$ qui efface $H^1(Y, p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$. Or, comme on a remarqué dans la démonstration de 6.8 (i), les deux termes qu'il s'agit d'effacer sont isomorphes respectivement, par les flèches verticales extrêmes du diagramme envisagé, à $H^\circ(X, R^1 p_*(\overline{F}))$ et à $H^1(X, p_*(\overline{F}))$, compte tenu de l'hypothèse sur les homomorphismes de changement de base faites ici sur p, h. D'ailleurs, les isomorphismes envisagés sont évidemment fonctoriels en $\overline{F}$, de sorte qu'il suffit d'effacer les deux termes précédents. Or en vertu de 3.3 on peut effacer $R^1 p_*(\overline{F})$ (et à fortiori $H^\circ(X, R^1 p_*(\overline{F}))$ par un monomorphisme de $\overline{F}$ dans un ind-$\mathbf{L}$-groupe $\mathbf{G}$. Il reste à effacer $H^1(X, p_*(\overline{F}))$, ce qui est possible grâce au fait que par le diagramme envisagé, ce dernier terme s'envoie **122**
dans $H^1(\overline{X}, \overline{F})$ par un monomorphisme fonctoriel en $\overline{F}$, et que $H^1(\overline{X}, \overline{F})$ est encore effaçable grâce à 3.3.

Il reste à traiter le cas (iii), et pour celui-ci encore nous reprenons à rebours la démonstration de 6.8 [36]. Il faut prouver que l'homomorphisme

$$H^i(\overline{X}, \overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F}))$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$, et un monomorphisme pour $i = n + 1$. Or les homomorphismes précédents sont induits par un homomorphisme de complexes

$$\mathbf{R}\Gamma_{\overline{X}}(\overline{F}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\overline{Y}}(\overline{h}^*(\overline{F})),$$

déduit d'une résolution injective $C(\overline{F})$ et d'un homomorphisme de $\overline{h}^*(C(\overline{F}))$ (qui est une résolution de $h^*(\overline{F})$) dans une résolution injective de $\overline{h}^*(\overline{F})$. L'homomorphisme ci-dessus s'identifie également à l'homomorphisme composé

$$\mathbf{R}\Gamma_X(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_Y(h^*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_Y(Rp_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F})),$$

où le premier homomorphisme est l'homomorphisme h^* relatif à $\mathbf{R}p_*(\overline{F})$, et le deuxième est déduit des homomorphismes de changement de base $h^*(\mathbf{R}p_*(\overline{F})) \to \mathbf{R}p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ en appliquant $\mathbf{R}\Gamma_Y$. Le premier homomorphisme induit donc un isomorphisme sur les groupes de cohomologie des complexes envisagés, en vertu de l'hypothèse faite sur h et de 6.3 (i). Il en est de même pour le deuxième, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite sur les homomorphismes de changement de base, en utilisant l'argument donné dans la démonstration de 6.8 (iii). Par suite, la même conclusion s'applique au composé des deux, ce qui achève de prouver 6.11.

Remarque 6.12. L'argument donné pour 6.11 dans les cas (i) et (iii) donne encore **123**
un résultat plus précis : pour pouvoir conclure, pour un faisceau $\overline{F}$ donné sur $\overline{X}$, que $H^i(\overline{X}, \overline{F}) \to H^i(\overline{Y}, \overline{h}^*(\overline{F}))$ est bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n + 1$, il suffit de supposer

1°) l'homomorphisme de changement de base $h^*(R^i p_*(\overline{F})) \to R^i p_{Y^*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n + 1$, et
2°) pour tout couple d'entiers $i, j \geq 0$, l'homomorphisme $H^i(X, \mathbf{R}^j p_*(\overline{F})) \to H^i(Y, h^*(\mathbf{R}^j p_*(\overline{F}))$ induit par h est un isomorphisme si $i+j \leq n$, un monomorphisme si $i+j = n+1$.

[36] On pourrait aussi, au lieu de 6.3, utiliser la suite spectrale de Leray pour p, p_Y.

Il est plausible qu'on a un résultat analogue dans le cas (ii), mais son énoncé devrait nécessairement faire intervenir de la 2-cohomologie non commutative. C'est pour éviter le recours à cette théorie que nous avons utilisé un argument différent dans 6.10 (ii), utilisant les propriétés d'effaçabilité du H^1 non commutatif, argument qui ne donne pas en revanche de résultat, comme ci-dessus, pour un $\overline{F}$ fixé.

Remarques 6.13. Le cas le plus important où les conditions de 6.5 (i) (ii) (iii) sont remplies est celui envisagé dans 5.5, qui sera prouvé dans l'exposé suivant en utilisant les réductions faites dans le présent exposé. Un autre cas intéressant (où h n'est plus une immersion fermée comme dans 5.5 sera étudié dans XV. Signalons également le cas, assez voisin de 5.5, où X est le spectre d'un anneau noethérien, séparé et complet pour la topologie définie par un idéal J, et où $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$ est le sous-schéma fermé de X défini par J. On vérifie alors directement les conditions de 6.5 (ii) (avec $\mathbf{L} = \mathbf{P}$)
124 sous la forme b'') (EGA IV 18.3.2) ; il est très plausible que les conditions de 6.5 (iii) sont également vérifiées pour tout n, i.e. que pour tout faisceau de torsion F sur X, les homomorphismes $H^n(X, F) \to H^n(Y, F|Y)$ soient bijectifs. On peut faire des conjectures considérablement plus générales, liées à une généralisation à des schémas non locaux de la construction de hensélisation. Tout d'abord, notons qu'on ne connaît pas d'exemple, h étant une immersion fermée, où les conditions de 6.5 (ii) (iii) ne soient satisfaites (avec $\mathbf{L} = \mathbf{P}$) lorsque la condition respée de 6.5 (i) l'est, c'est-à-dire lorsque le couple (X, Y) est un couple hensélien dans la terminologie de (EGA IV 18.5.5) ; on peut donc conjecturer qu'un tel couple satisfait aux conditions de 6.5 (ii) (iii) (avec $\mathbf{L} = \mathbf{P}$, tout n). D'autre part, on peut se demander sous quelles conditions la propriété suivante pour un couple (X, Y) d'un schéma X quasi-complet et quasi-séparé et d'un sous-schéma fermé Y implique que le couple est hensélien :

($*$) Pour tout schéma X' étale sur X, posant $Y' = X' \times_X Y$, l'application canonique $\Gamma(Y'/Y) \to \Gamma(X'/X)$ est bijective. (Cf. EGA IV 18.5.4 b)). Cette condition est évidemment plus faible à priori que la condition hensélienne 6.5 (i) ; elle est même strictement plus faible, car elle est vérifiée par exemple si X est un schéma projectif normal irréductible de dimension ≥ 2 sur un corps k, et Y une section hyperplane de X (comme il résulte facilement de SGA 2 XII 2.1, où on fait $S = \mathrm{Spec}(k)$), mais évidemment le couple (X, Y) n'est pas hensélien. Il est possible par contre que si X est affine, la condition ($*$) implique que (X, Y) est un couple hensélien ; s'il en était ainsi, pour tout schéma affine
125 X et tout partie fermée Y de X, un procédé de localisation étale le long dé Y, analogue à celui de la hensélisation des anneaux locaux, devrait permettre de lui associer un couple hensélien (X', Y), où X' est « proétale » sur X. Une autre hypothèse sur (X, Y) (suggérée par des résultats de Hironaka et Rossi sur la contractibilité de certaines sous-variétés de variétés algébriques), qui permettrait peut-être de déduire la propriété hensélienne de la propriété plus faible ($*$), est la suivante : l'immersion $Y \to X$ est régulière de codimension 1, et le faisceau conormal $\mathbf{N}_{Y/X} = \mathbf{J}/\mathbf{J}^2$ (où $\mathbf{J}$ est l'idéal qui définit Y dans X) est un faisceau inversible ample sur Y. (NB. Dans le cas du contre-exemple envisagé plus haut, ce faisceau conormal était un contraire anti-ample, i.e. son inverse étant ample).

7. Une variante du Lemme de Chow [(*)].

Nous aurons besoin de la variante suivante de (EGA II 5.6.1) débarrassée de toutes hypothèses noethérienne ou d'irréductibilité.

[36]Le lecteur qui ne s'intéresse aux énoncés du par. 5 que dans le cas noethérien peut omettre la lecture du présent numéro.

Lemme 7.1. Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, et $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini, avec X non vide. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

avec π projectif et $\overline{f}$ quasi-projectif, et un ouvert non-vide U de X, tels que π induise 126
un isomorphisme de $\overline{U} = U \times_X \overline{X} = \Pi^{-1}(U)$ sur U.

Démonstration. Notons d'abord : Soit $i : X' \to X$ un sous-schéma fermé de X/S et $V \subset X'$ un sous-schéma ouvert dans X et dense dans X'. Si le lemme est vrai pour X', il l'est pour X. En effet, soit

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "f'"'] & & \overline{X}' \arrow[ll, "\pi'"'] \arrow[dl, "\overline{f}'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme comme dans l'énoncé, et $U' \neq \phi$ un ouvert de X' tel que π' induise un isomorphisme $\overline{U}' = \pi'^{-1}(U)' \to U'$. Puisque V est dense dans X', $U' \cap V \neq \phi$ et on peut donc remplacer U' par cet ouvert. Alors U' est un ouvert de X, et on pose $\pi = i\pi'$, $\overline{f} = \overline{f}'$, $U = U'$.

Or il existe un recouvrement fini de X par des ouverts affines non vides U_k, $k = 1, \ldots, n$; de l'hypothèse sur S résulte que chaque $U_k \to S$ est quasi-affine, et a fortiori quasi-compact. Démontrons le théorème pour tout X, par récurrence sur n : Si l'intersection U des U_k est dense dans X on peut copier la démonstration de (EGA II 5.6, B, C, D), tenant compte des modifications de la notation. Si l'intersection est non-vide, on se ramène au cas où elle est dense en remplaçant X par l'adhérence X' de U (cf. plus haut), et U_k par $U_k' = U_k \cap X'$. Supposons enfin que U soit vide et choisissons r, $1 \leq r \leq n$, tel que $V = \cap_{k=1}^{n} U_k \neq \phi$ mais $V \cap U_{r+1} = \phi$ - c'est évidemment possible puisque $U_1 \neq \phi$. Nous pouvons maintenant remplacer X par l'adhérence X' de V et les U par les $U_k \cap V$ non-vides. Comme alors $U_{r+1} \cap V$ est vide, on obtient le résultat par l'hypothèse de récurrence.

8. Réductions définitives 127

Lemme 8.1. Pour prouver l'un des énoncés 5.1 (i) (ii) (iii), il suffit de le faire lorsque l'on suppose f projectif et S noethérien.

Supposons d'abord 5.1 démontré pour f projectif, montrons comment on en conclut le même énoncé pour tout f. Utilisant 6.1, on est réduit au cas de 5.5, avec S strictement local. Appliquons maintenant 6.10 en faisant $Y = X_\circ$. Étant donné (ξ, X') comme énoncé dans 6.10, nous appliquons le lemme de Chow 7.1 pour trouver un S-morphisme $p : \overline{X} \to X'$, avec $\overline{X}$ projectif sur S, tel que $p(\overline{X})$ contienne un ouvert non vide de X' (condition 1°) de 6.10). Comme p est projectif, par hypothèse les homomorphismes de changement de base pour (p, h) sont des isomorphismes (condition 2°) de 6.10). Enfin, comme X est projectif sur S, par hypothèse le morphisme d'inclusion $\overline{Y} = \overline{X}_\circ \to \overline{X}$ induit un isomorphisme pour les groupes de cohomologie $H^i(\overline{X}, \overline{F}) \to H^i(\overline{X}_\circ, \overline{h}^*(\overline{F}))$, (condition 3°) de 6.10). Donc les conditions de 6.10 sont bien satisfaites, d'où la conclusion.

Montrons maintenant que pour vérifier l'un des trois énoncés 5.1 pour toute situation (f, F, g), avec f projectif, on peut supposer de plus que S est noethérien. Pour ceci, on note qu'on peut supposer grâce à 6.1 que S est strictement local et que $S' \to S$ est l'inclusion du point fermé, et on est ramené à vérifier l'énoncé 5.5 avec S strictement local. De plus, comme X se plonge dans le schéma projectif-type $\mathbf{P}^r_S$, on peut (grâce à la compatibilité 4.4 (ii)) remplacer X par $\mathbf{P}^r_S$, F par son image dans $\mathbf{P}^r_S$, ce qui nous ramène
128 au cas où $X = \mathbf{P}^r_S$. Notons que A est limite inductive filtrante de sous-anneaux locaux henséliens noethériens A_i tels que l'homomorphisme d'inclusion $A_i \to A$ soit local : prendre les hensélisés stricts des sous-$\mathbf{Z}$-algèbres de type fini de A en les idéaux premiers induits par l'idéal maximal de A. Sous ces conditions, le corps résiduel k de A est également la limite inductive des corps k des A_i (EGA IV 5.13.1). Soient $S = \mathrm{Spec}(A_i)$, $X_i = \mathbf{P}^r_{S_i}$, et supposons donné un système inductif (F_i) de faisceaux d'ensembles (resp. ...) sur les X_i comme dans VII 5.7, et soit F le faisceau qu'il définit sur X. Soit $F_{i\circ}$ (resp. $F_\circ$) le faisceau induit par F_i sur la fibre $X_{i\circ}$ du point fermé s_i de S_i (resp. sur la fibre $X_\circ$ du point fermé s de S). Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_i H^n(X_i, F_i) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(X, F) \arrow[d] \\
\varinjlim_i H^n(X_{i0}, F_{i0}) \arrow[r] & H^n(X_0, F_0),
\end{tikzcd}$$

dont les deux flèches horizontales sont des isomorphismes, en vertu de VII 5.7. Par suite, pour prouver que la deuxième flèche verticale est un isomorphe, il suffit de le prouver pour la première, donc il suffit de prouver que les homomorphismes $H^n(X_i, F_i) \to H^n(X_{i\circ}, F_{i\circ})$ sont des isomorphismes. D'autre part, tout faisceau d'ensembles (resp. ...) F sur X est isomorphe à la limite d'un système inductif comme ci-dessus, en prenant par exemple $F_i = u_{i*}(F)$, $u_i : X \to X_i$ étant le morphisme canonique, en vertu de (5.2) et (IX 1.6 (iii)). Cela achève la démonstration de 8.1.

Corollaire 8.2. Le théorème 5.1 (i) est vrai.

En effet, il suffit de conjuguer 8.1, le critère 6.5 (i) b''), et 5.8.

129 Lemme 8.3. Pour prouver l'un des énoncés 5.1 (i) (ii) (iii), il suffit de le faire lorsqu'on suppose f projectif de dimension relative ≤ 1, et S noethérien.

En effet, nous savons déjà par 8.1 qu'on peut se borner au cas f projectif, S noethérien, et un argument déjà signalé nous permet de supposer de plus qu'on a $X = \mathbf{P}^r_S$. Nous procédons alors par récurrence sur r, en notant que le théorème est vrai par hypothèse pour $r = 1$. On peut donc supposer $r \geq 2$, et le théorème démontré pour $\mathbf{P}^{r-1}_S \to S$ (toute base S). Considérons $Z = \mathbf{P}^{r-2}_S$ comme plongé dans $X = \mathbf{P}^r_S$ de la façon habituelle, et soit $p : \overline{X} \to X$ obtenu en faisant éclater Z dans X. Un calcul immédiat (cf. EGA V) montre que l'on a un morphisme naturel $p_1 : \overline{X} \to X_1 = \mathbf{P}^1_S$, qui fait de $\overline{X}$ un X_1-schéma localement isomorphe à $\mathbf{P}^{r-1}_{X_1}$ (c'est le fibré projectif sur X_1 associé à un faisceau localement libre de rang r convenable sur X_1). D'autre part, les fibres de p sont de dimension ≤ 1, ainsi que celles de $f_1 : X_1 \to X$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse, et l'hypothèse de récurrence, aux trois morphismes p, p_1, f_1 dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \overline{X} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & X_1 \arrow[dl, "f_1"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Comme p est surjectif, le lemme 6.8 nous ramène à prouver 5.1 pour le composé $\overline{f} = fp = f_1 p_1$. Or nous pouvons déjà appliquer 5.1 aux deux morphismes f_1 et p_1. Compte tenu de 6.11, on en conclut que 5.1 est vrai également pour leur composé $f_1 p_1$. Cela achève la démonstration de 8.3.

Lemme 8.4. Pour démontrer 5.1 (ii), il suffit de démontrer le « théorème de spécialisa- **130**
tion pour le groupe fondamental » 5.9 bis bis, dans le cas où f est projectif de dimension relative ≤ 1, et où S est strictement local noethérien.

Cela résulte en effet aussitôt de 8.3, 6.1 et 6.5 (ii) (critère b)).

On démontrera directement le théorème de spécialisation, dans le cas 8.4, dans l'exposé suivant (XIII 2).

Lemme 8.5. Pour démontrer 5.1 (iii), il suffit de démontrer 5.1 (ii) et, de plus, la proposition suivante (qui sera démontrée dans l'exposé suivant (XIII 3) ou (EGA IV 21.9.12)) :

Proposition 8.6. Soit S hensélien et noethérien, $f : X \to S$ projectif de dimension relative ≤ 1, et $X_\circ$ la fibre fermée de X/S. Pour tout schéma Z, soit $\operatorname{Pic} Z = H^1(Z, (G_m)_Z)$ le groupe de Picard de Z. Le morphisme de restriction

$$\operatorname{Pic} X \longrightarrow \operatorname{Pic} X_\circ$$

est surjectif.

Démonstration de 8.5. D'après 6.5 (iii) et 8.2, il suffit de démontrer que

$$\varphi^q : H^q(X, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}) \longrightarrow H^q(X_\circ, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z})$$

est surjectif pour tout $q \geq 1$, et tout nombre premier 1. Or on connaît la surjectivité si $q = 1$, d'après 5.1 (ii). De plus, puisque $X_\circ$ est un schéma projectif de dimension ≤ 1 sur un corps k séparablement clos, on a

$$H^q(X_\circ, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}) = 0$$

si $q > 2$ dans le cas $\ell \neq \operatorname{car}.k$ (X 4.3), et si $q > 1$ dans le cas $\ell = \operatorname{car}.k$ (X 5.2). La surjectivité est donc triviale pour ces valeurs de q !

Il reste à traiter le cas $q = 2$ et $\ell \neq \operatorname{car}.k$. Notons $n = \ell^\nu$. Comme le faisceau des ra- **131**
cines n-ièmes de l'unité $(\boldsymbol{\mu}_n)_S$ est localement isomorphe à $(\mathbf{Z}/n)_S$, et que S est strictement local, il existe un isomorphisme (non canonique) $(\boldsymbol{\mu}_n)_S \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S$ d'où $(\boldsymbol{\mu}_n)_X \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_X$.

Par théorie de Kummer IX 3.2 appliquée à X et $X_\circ$, on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Pic} X \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & H^2(X, {}_n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^2"] & H^2(X, G_m) \arrow[d] \\ \operatorname{Pic} X_0 \arrow[r] & H^2(X_0, {}_n) \arrow[r] & H^2(X_0, G_m). \end{tikzcd}$$

Or $H^2(X_\circ, G_m) = 0$ d'après IX 4.6. Donc la surjectivité de ϵ implique celle de φ^2, d'où le lemme.

Bibliographie

[1] Giraud J., Cohomologie non-abélienne, thèse (à paraître), et deux notes aux C.R. t.260, p.2392 et 2656 (1965).

[2] Godement R., Théorie des faisceaux, Paris (1958).

[3] Verdier J.L., Catégories dérivées, Institut des Hautes Études Scientifiques (1964).

EXPOSÉ XIII

Théorème de changement de base pour un morphisme propre : fin de la démonstration

M. Artin

1. Le cas projectif et plat

Rappelons l'énoncé de XII 5.9. bis dans le cas envisagé ici : 132

Proposition 1.1. Soit S le spectre d'un anneau hensélien noethérien, et $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat. Soit $X_\circ$ la fibre fermée de X/S. Le foncteur de restriction

$$\mathrm{Et}(X) \longrightarrow \mathrm{Et}(X_\circ)$$

est une équivalence de catégories.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il résulte de XII 6.5 (i) que la flèche est pleinement fidèle. Il reste à démontrer que chaque revêtement étale $Y_\circ$ de $X_\circ$ est induit par un revêtement étale Y de X.

Lemme 1.2. Soit S localement noethérien, $f : X \to S$ projectif et plat, et $Y \subset X$ un sous-schéma. Le sous-foncteur $\epsilon = \prod_{X/S} Y/X$: (Sch)/S(Ens) du foncteur final « qui exprime la condition $Y = X$ », i.e. tel que pour $S' \to S$, on ait

$$\epsilon(S') = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad Y' \neq X' \\ \{\phi\} & \text{si} \quad Y' = X' \end{cases}$$

(où l'on désigne par un prime l'effet du changement de base $S' \to S$) est représentable 133
par un sous-préschéma Z de S. Si Y est ouvert (resp. fermé), il en est de même de Z.

Démonstration. Soit Y fermé dans l'ouvert U de X, et soit C le fermé complémentaire de U. Puisque F est propre, l'image de C dans S est un fermé D, et il est évident que la condition $U = X$ est représentée par l'ouvert $S - D$ de S. On peut donc supposer qu'on a déjà $U = X$, i.e. que Y est un sous-schéma fermé. Considérons le morphisme surjectif $\mathscr{O}_X \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_Y$ de $\mathscr{O}_X$-modules ; dire que $Y = X$ revient au même que de dire qu'il existe un morphisme $\mathscr{O}_Y \xrightarrow{\beta} \mathscr{O}_X$ tel que le composé $\beta\alpha$ soit l'identité, c'est-à-dire, qu'il existe une section de $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ qui relève la section identique de $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$. Or il résulte de EGA III 7.7.8 que le foncteur qui à S'/S associe l'ensemble des sections de $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ (resp. $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$) est représenté par un fibré vectoriel V_1 (resp. V_2) sur S. Soient $\varphi : V_1 \to V_2$ le morphisme $u \mapsto u\alpha$ induit par $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$, et $s : S \to V_2$ la section correspondant à l'identité $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$. L'image inverse de la section s par φ s'identifie à un sous-schéma fermé Z de S, et il est clair que Z représente le foncteur ϵ, d'où le lemme.

Lemme 1.3. Soient S un schéma localement noethérien, $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat, et E un faisceau localement libre sur X. Soit

$$QE : (\mathrm{Sch})/S \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

le foncteur qui à S'/S associe l'ensemble $QE(S')$ des faisceaux quotients A' de $E' = E \otimes_{O_S} \mathscr{O}_{S'}$ munis d'une structure d'Algèbre étale sur $\mathscr{O}_{X'}$. Ce foncteur est représentable par un schéma localement de type fini sur S.

134 Démonstration. Le foncteur Quot(E), Quot(E)(S') = ensemble des quotients de E' plat au-dessus de S', est représentable par un schéma localement de type fini (TDTE IV, exp. 221), disons par Z/S. Soit M_u le quotient « universel » de $E \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Z$ au-dessus de X_Z. Le sous-foncteur de Quot(E) des quotients que sont plats au-dessus de X' est représenté par un ouvert U de Z. En effet, soit M' un quotient de E', donné par un S-morphisme $S' \to Z$. Puisque M' est plat au-dessus de S', dire qu'il est plat au-dessus de X' revient au même que de dire que pour chaque point $s' \in S'$, le module $M'_{s'}$ est plat au-dessus de la fibre $X'_{s'}$ (EGA IV 5.9), ce qui équivaut à $(M_u)_z$ plat au-dessus de la fibre Z_z au point z image de s'. Or l'ensemble U des $z \in Z$ tels que $(M_u)_z$ soit plat sur Z_z, i.e. que M_u soit plat sur Z en les points de Z_s, est ouvert dans Z en vertu de EGA IV 11.1.5, d'où l'assertion.

Il suffit maintenant de représenter le foncteur relatif $QE/U[f]$. On est donc réduit au lemme suivant, en remplaçant S par U et X par $X \times_S U$:

Lemme 1.4. Soient S un schéma localement noethérien, $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat, et M un faisceau localement libre sur $\mathscr{O}_X$. Le foncteur Alget : (Sch)/$S \to$ (Ens), qui à S'/S associe l'ensemble Alget(S') des structures d'algèbre sur M' étales au-dessus de $\mathscr{O}_{X'}$, est représentable par un schéma de type fini sur S.

Démonstration. Nous dirons, pour abréger, « représentable » en sous-entendant « par un schéma relatif de type fini ». Les fibrés vectoriels rencontrés seront tous définis par des faisceaux cohérents, donc seront de type fini. Une loi de composition bilinéaire dans M' est donnée par une section du faisceau localement libre $\mathscr{H}om\,(M' \otimes M', M')$. Puisque
135 $\mathscr{H}om\,(M' \otimes M', M')$ est S-plat, il résulte de EGA III 7.7.6 que le foncteur « loi de composition bilinéaire » est représentée par un fibré vectoriel Z sur S. Il faut vérifier que les conditions supplémentaires sur la loi d'être associative, commutative, et d'avoir une section unité, sont représentées par un sous-schéma de Z, et on peut (en considérant le foncteur relatif) remplacer S par Z, donc peut supposer qu'on a une loi de composition donnée sur M, et montrer qu'on peut représenter le sous-foncteur de S exprimant les conditions précédentes par un sous-schéma de S.

Or pour l'associativité, la condition est que deux sections de $\mathscr{H}om\,(M \otimes M \otimes M, M)$ deviennent égales par changement de base $S' \to S$. Soit Y le produit fibré de ces sections au-dessus du fibré vectoriel correspondant à $\mathscr{H}om\,(M \times M \otimes M, M)$. Le schéma Y s'identifie à un sous-schéma fermé de X, et l'associativité après $S' \to S$ est exprimé par la condition $Y' = X'$. Elle définit donc un sous-foncteur de S représentable par un sous-schéma fermé de S d'après 1.2. Pour la commutativité la condition est que deux sections de $\mathscr{H}om\,(M \otimes M, M)$ deviennent égales, ce qui définit encore un sous-foncteur de S représentable par un sous-schéma fermé d'après 1.2. Supposons enfin, ce qui est maintenant loisible, que la loi est déjà associative et commutative, et examinons la condition pour qu'il existe une section unité, qui sera alors unique. Le foncteur qui en S'/S a comme valeur l'ensemble des sections de M' est représentable par un fibré vectoriel, d'après EGA III 7.7.6, et tout revient à représenter le sous-foncteur de ce dernier correspondant aux sections unités (compte tenu de l'unicité qu'on vient de rappeler). Relativisant comme d'habitude, on peut supposer qu'une section ϵ de M est déjà donnée,
136 et montrer que le sous-foncteur de S exprimant qu'elle devient une section unité est représentable. Or, la condition que ϵ soit une unité est que le composé des morphismes

évidents $M' \to M' \otimes M' \to M'$ soit l'identité, c'est-à-dire que deux sections déterminées de Hom (M, M) deviennent égales. On conclut encore grâce à 1.2.

Supposons enfin qu'une structure d'algèbre commutative unitaire soit donnée sur le module localement libre M. La condition d'être étale est ouverte dans X (SGA I 4.5), donc représentable sur S par un sous-schéma (ouvert). Ceci achève la démonstration de 1.4, donc de 1.3.

1.5. Soit maintenant Z/S l'objet qui représente le foncteur envisagé dans 1.3, et examinons la condition sur Z d'être lisse sur S en un point z. En traduisant SGA 1 III 3.1 en termes du foncteur QE, on trouve la condition suivante :

Soient B un anneau artinien local, $\mathscr{M} = rB$, J un idéal de B tel que $J\mathscr{M} = 0$, $S' =$ Spec B, $S'' =$ Spec B/J et $S' \to S$ un morphisme. On utilise des notations évidentes pour les effets des changements de bases $S' \to S$ et $S'' \to S$.

(∗) Pour chaque quotient A'' de E'' muni d'une structure d'algèbre étale sur $\mathscr{O}_{X''}$, correspondant à un S-morphisme $S'' \to Z$ d'image z, il existe un quotient A' de E', muni d'une structure d'algèbre étale sur $\mathscr{O}_{X'}$, qui l'induise.

Or puisque X' et X'' ont même espace sous-jacent, une algèbre A' qui induit A'' est déjà déterminée à isomorphisme unique près (SGA I 8.3). On peut donc exprimer la condition (∗∗) ainsi : **137**

(∗∗) Soit A' une algèbre étale sur $\mathscr{O}_{X'}$, et A'' l'algèbre induite de A' sur X''. Chaque homomorphisme surjectif

$$E'' \xrightarrow{\varphi''} A''$$

correspondant à un morphisme $S'' \to Z$ d'image z, se relève en un homomorphisme (nécessairement surjectif en vertu du lemme de Nakayama)

$$E' \xrightarrow{\varphi'} A'.$$

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow B \longrightarrow B/J \longrightarrow 0$$

on déduit une suite exacte de faisceaux sur X' :

$$0 \longrightarrow J \otimes \mathscr{H}om(E', A') \longrightarrow \mathscr{H}om(E', A') \longrightarrow \mathscr{H}om(E'', A'') \longrightarrow 0.$$

L'obstruction au relèvement de φ'' se trouve dans $H^1\,(X', J \otimes \mathscr{H}om(E', A'))$. Soit $S_\circ =$ Spec $B/\mathscr{M}$. Puisque $J\mathscr{M} = 0$, on a

$$J \otimes \mathscr{H}om(E', A') \simeq J \otimes \mathscr{H}om(E_\circ, A_\circ),$$

et il est clair que

$$H^1(X', J \otimes \mathscr{H}om(E_\circ, A_\circ)) \simeq J \otimes H^1(X_\circ, \mathscr{H}om(E_\circ, A_\circ)).$$

Tenant compte du fait que la cohomologie commute à l'extension des corps de base, on trouve le

Corollaire 1.6. Soient Z/S le schéma qui représente le foncteur de 1.3, $X_Z = X \times_S Z$, et A_Z l'Algèbre étale quotient (« générale ») de E_Z. Alors Z/S est lisse en tout point $z_\circ$ tel que

$$H^1(X_\circ, \mathscr{H}om(E_\circ, A_\circ)) = 0,$$

où l'indice zéro désigne la restriction à la fibre $X_\circ$ de X_Z/Z au point $z_\circ$. **138**

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de théorème 1.1 : avec les notations du théorème, soit $Y_\circ/X_\circ$ un revêtement étale, donné par un faisceau d'Algèbres $A_\circ$, étale sur $\mathscr{O}_{X_\circ}$. Pour n assez grand, $A_\circ(n)$ est engendré par ses sections (EGA III 2.2.1). On a donc une surjection

$$\mathscr{O}_{X_\circ}^N \longrightarrow A_\circ(n) \longrightarrow 0,$$

d'où une surjection

$$O_{X_\circ}^N(-n) = E_\circ \longrightarrow A_\circ \longrightarrow 0.$$

Choisissons n assez grand pour qu'on ait aussi

$$(+) \qquad H^1(X_\circ, \mathscr{H}om(E_\circ, A_\circ)) = 0,$$

ce qui est possible en vertu de (EGA III 2.2.1), puisque

$$\mathscr{H}om(E_\circ, A_\circ) = [\mathscr{H}om(\mathscr{O}_{X_\circ}^N, A_\circ)](n) = [A_\circ(n)]^N.$$

Posons $E = O_X^N(-n)$, et soit Z/S le schéma qui représente le foncteur envisagé dans 1.3. Le quotient $A_\circ$ de $E_\circ$ correspond à un point $z_\circ \in Z$ de la fibre fermée de Z/S, rationnel sur $k(s)$, et d'après 1.5 et (+), Z/S est lisse au point $z_\circ$. Or puisque S est le spectre d'un anneau hensélien et Z/S passant par $z_\circ$: c'est par exemple immédiat à partir de la définition originale (SGA II 1.1) de la lissité. Il s'ensuit que $A_\circ$ est induit par une Algèbre A étale sur X (quotient de E), ce qui achève la démonstration de 1.1.

2. Le cas de dimension relative ≤ 1

139

L'assertion est la suivante :

Proposition 2.1. Avec les notations de XII 5.9 bis, le foncteur $\mathrm{Et}(X) \to \mathrm{Et}(X_\circ)$ est une équivalence de catégories si S est noethérien strictement local, et f est projectif et de dimension ≤ 1.

D'après XII 8.5, cela achèvera la démonstration de XII 5.1 (ii), qui généralise à la fois 1.1 et 2.1.

Lemme 2.2. Soit S le spectre d'un anneau local noethérien A, et soit X/S projectif, de dimension relative $\leq n$. Il existe un S-schéma projectif et plat Z/S de dimension relative $\leq n$ et une immersion fermée $X \hookrightarrow Z$ au-dessus de S.

Démonstration. Soit $X \to \mathbf{P}_S^N$ un plongement projectif au-dessus de S, et soit $J \subset A[x_\circ, \dots, x_N]$ l'idéal homogène qui définit X. Soient $k = A/rA$, $S_\circ = \operatorname{Spec} k$, $X_\circ = X \otimes_S k$. Alors $X_\circ$ est défini par l'idéal homogène $J_\circ = \operatorname{Im}(J \to k[X_\circ, \dots, X_N])$. Comme $\dim X_\circ \leq n$, il est bien connu qu'il existe des éléments $f_1^\circ, \dots, f_{N-n}^\circ$ de $J_\circ$ qui définissent un sous-schéma $Z_\circ$ de $\mathbf{P}_k^N$ de dimension n. Soient f_i $(0 \leq i \leq N-n)$ des éléments de J qui relèvent les f_i°, et soit Z le sous-schéma de $\mathbf{P}_S^N$ défini par $f_1, \dots, f_\nu$. En vertu de EGA IV 11.3, Z est plat au-dessus de S, d'autre part en vertu de EGA IV 13.1.5 il est de dimension relative $\dim Z_\circ = n$. Cela achève de prouver 2.2.

Démonstration de 2.1. Soit X/S projectif de dimension relative ≤ 1, avec S noethérien strictement local. Nous pouvons supposer X (donc $X_\circ$) connexe. Soit $X \to Z$ une immersion fermée au-dessus de S avec Z projectif, plat et de dimension ≤ 1, cf. 2.2. Soit
140 $s_\circ$ le point fermé de S. On a un diagramme correspondant de schémas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Et}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \mathrm{Et}(X) \arrow[d, "b"] \\
\mathrm{Et}(Z_0) \arrow[r, "c"] & \mathrm{Et}(X_0).
\end{tikzcd}$$

On veut démontrer que b est une équivalence. D'après XII 5.8, b est pleinement fidèle, et il reste à démontrer qu'il est essentiellement surjectif. Or il est essentiellement surjectif d'après 1.1, et il suffit donc de démontrer que c est essentiellement surjectif. On est ainsi réduit (laissant tomber le $_\circ$) à la proposition suivante :

Proposition 2.3. Soient k un corps séparablement clos, Z un k-schéma, localement de type fini et de dimension ≤ 1, et $X \hookrightarrow Z$ un sous-schéma fermé connexe. Alors tout revêtement étale de X est induit par un revêtement étale de Z.

Démonstration. On peut supposer Z et X de dimension 1, le cas où X est de dimension nulle étant triviale grâce à l'hypothèse faite sur k. Alors $Z = X \cup Y$, où Y est le sous-schéma fermé adhérence de $Z - X$. Soit $V = X \cap Y$ le schéma intersection, qui est un schéma discret i.e. localement artinien. Le morphisme $X \amalg Y \to Z$ est fini et surjectif, donc un morphisme de descente strict pour la catégorie des revêtements étales (SGA IX 4.7). On a évidemment

$$(*)\qquad (X \amalg Y) \times_Z (X \amalg Y) = X \amalg Y \amalg V^{(1)} \amalg V^{(2)} \quad (V^{(i)} = V),$$

où pr_i envoie $V^{(i)}$ dans le composant X de $X \amalg Y$ et $V^{(j)}$ dans le composant Y pour $j \neq i$.

Soit X'/X un revêtement étale de degré n, et soit Y''/Y un revêtement de degré n (par exemple le revêtement trivial de degré n), de sorte que $X' \amalg Y''$ est un revêtement 141
de $X \amalg Y$ de degré n. Il suffit de trouver des données de descente pour ce revêtement et pour le morphisme $X \amalg Y \to Z$. En regardant $(*)$, on voit qu'une donnée de descente pour ce morphisme équivaut simplement à un isomorphisme

$$X' \times_X V = V' \xrightarrow{\sim} V'' = Y'' \times_Y V.$$

Puisque k est séparablement clos, il en est de même de $k(z_i)$, et par suite chaque revêtement étale de V est complètement décomposé, d'où $V' \simeq V''$, ce qui donne le résultat.

Remarque 2.4. On peut éviter le recours au délicat résultat de SGA IX et à la théorie de la descente, par un argument direct, montrant que la catégorie des revêtements étales de Z est équivalente à la catégorie des triples (X', Y', θ), où $X'(Y')$ est un revêtement étale de $X(Y)$ et θ un V-isomorphisme $X' \times_X V \simeq Y' \times_Y V$. Ce résultat, valable pour tout schéma Z réunion de deux sous-schémas fermés X, Y, s'établit directement à l'aide du résultat analogue pour la détermination des Modules quasi-cohérents sur X (lorsque $X = V(\mathfrak{J})$, $Y = V(\overline{K})$, $J \cap \overline{K} = 0$).

3. Un résultat auxiliaire sur le groupe de Picard (*)

Proposition 3.1. Soient X un schéma noethérien, $X_\circ$ un sous-schéma fermé de X tel que a) $\dim X_\circ \leq 1$, et b) pour toute partie fermée connexe non-vide Y de X, $Y_\circ = Y \cap X_\circ$ est connexe non-vide.

(i) Soit $Z_\circ$ la réunion des $\{\overline{x}\} \cap X_\circ$ pour $x \in \mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_X$ tel que $\{\overline{x}\} \cap X_\circ$ soit réduit à un point. Alors pour tout diviseur de Cartier $D_\circ$ sur $X_\circ$ tel que supp ($D_\circ$ ne rencontre pas $Z_\circ$, il existe un diviseur de Cartier D sur X, induisant $D_\circ$ (et si $D_\circ \geq 0$, on peut prendre $D \geq 0$). 142

(ii) Supposons qu'il existe un ouvert affine $U_\circ$ de $X_\circ$ contenant l'ensemble fini $\mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{X_\circ} \cup Z_\circ$ (condition automatiquement satisfaite X est noethérien et si $X_\circ$ admet un faisceau inversible ample). Alors l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_\circ)$ est surjectif.

[36] Figure aussi dans EGA IV 21.9.11, 21.9.12 sous une forme légèrement plus générale ; notamment il suffit dans 3.2 que f soit *séparé* au lieu de propre.

Démonstration.

(i) Comme $\dim X_\circ \leq 1$, on voit tout de suite que tout diviseur de Cartier $D_\circ$ sur $X_\circ$ a un support discret, donc est la différence de deux diviseurs de Cartier positifs, de supports contenus dans celui de $D_\circ$. Cela nous ramène dans (i) au cas où $D_\circ$ est positif, donc où pour tout $x \in \operatorname{Supp} D_\circ$, $D_\circ$ est défini en x par un élément non diviseur de zéro $f_x \in \operatorname{rad}(\mathscr{O}_{X_\circ}, x)$. Alors f_x est induit par une section g_x de $\mathscr{O}_X$ sur un voisinage ouvert U_x de x. Je dis qu'en prenant U_x assez petit, g_x est non diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_{U_x}$, i.e. , $V(g_x) \cap \operatorname{Ass} \mathscr{O}_{U_x} = \phi$. En effet, il résulte de a) et b) que pour tout $x \in X$, et en particulier pour $z \in \operatorname{Ass} \mathscr{O}_X$, $\overline{z} \cap X_\circ$ est un fermé connexe de $X_\circ$ donc est, soit réduit à un seul point fermé, soit à une réunion connexe de composantes irréductibles de dimension 1 sur $X_\circ$. Comme $x \notin Z_\circ$ il s'ensuit que dans le premier cas on a $x \notin \overline{z}$. Mais pour $s \in \operatorname{Ass} \mathscr{O}_X$ du deuxième type, on ne peut pas avoir $x \in \overline{z}$ et $z \in V(g_x)$, puisqu'alors g_x donc f_x s'annulerait sur une des composantes irréductibles de $\overline{z} \cap \operatorname{supp} X_\circ$, qui est aussi une composante irréductible de $X_\circ$, ce qui est incompatible avec le fait que f_x est
143 non diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_{X_\circ, x}$. Donc quitte à restreindre U_x on peut supposer que $V(g_x) \cap \operatorname{Ass} \mathscr{O}_{U_x} = \phi$, i.e. g_x est non diviseur de zéro. Soit Y_x l'adhérence de $V(g_x)$ dans X, alors $Y_x \cap X_\circ \cap U_x \subset V(g_x) \cap X_\circ$ admet x comme point isolé, donc il en est de même de $Y_x \cap X_\circ$, donc par la condition b) de la proposition, Y_x admet une composante connexe Y'_x telle que $Y'_x \cap X_\circ = \{x\}$. De plus, on a $Y'_x \subset U_x$, car $T_x = Y'_n - Y'_x \cap U_x$ est un fermé de X tel que $T_x \cap X_\circ = \phi$, donc $T_x = \phi$ en vertu de la condition b). Nous prenons maintenant le diviseur de Cartier D'_x sur X qui induit Y'_x sur U_x, et induit zéro sur $X - Y'_x$, et poserons $D = \Sigma_x d'_x$, qui est un diviseur de Cartier positif sur X, induisant évidemment $D_\circ$ sur $X_\circ$.

(ii) La conclusion résulte de (i) et du fait que tout module inversible $\mathbf{L}_\circ$ sur $X_\circ$ est isomorphe au module défini par un diviseur de Cartier $D_\circ$ dont le support ne rencontre pas $Z_\circ$. Ce dernier fait signifie en effet que pour $\mathbf{L}_\circ$ admet une section définie sur un ouvert $V_\circ$ contenant $\operatorname{Ass} \mathscr{O}_{X_\circ} \cup Z_\circ$, cette section ne s'annulant en aucun point de ce dernier ensemble. Or il suffit de prouver cela en remplaçant $X_\circ$ par l'ouvert affine $U_\circ$, et dans ce cas cela est bien connu et provient du fait qu'un module inversible sur un schéma semi-local est isomorphe au faisceau structural. Enfin, on sait bien que si $X_\circ$ admet un faisceau ample, alors toute partie finie de $X_\circ$ est contenue dans un ouvert affine. Cela prouve (ii).

On a le corollaire suivant, qui généralise XII 8.6 et qui achève la démonstration de XII 5.1 (iii) :

Corollaire 3.2. Soit S le spectre d'un anneau hensélien noethérien, et $f : X \to S$ un morphisme propre et de dimension relative ≤ 1. Alors pour tout sous-schéma fermé
144 $X'_\circ$ de X ayant même espace sous-jacent que la fibre fermée $X_\circ$ de X/S, l'application canonique $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X_\circ)$ est surjective.

En effet, on applique le proposition à $(X, X'_\circ)$, en notant que la condition a) est satisfaite par hypothèse, et b) en vertu de XII 5.7. Il reste à vérifier l'hypothèse faite dans ii) d'existence d'un $U_\circ$, ce qui résulte du fait que $X'_\circ$ est nécessairement projectif (comme toute courbe propre sur un corps).

Remarque. Le lecteur qui ne voudra pas admettre ou reconstituer le fait que les courbes propres sur un corps sont projectives, se bornera à utiliser le corollaire en supposant déjà que f est projectif, ce qui suffit pour l'application que nous avions en vue ici. Signalons d'autre part que, admettant la projectivité des courbes algébriques propres sur un corps, on conclut que sous les conditions de 3.2 X est nécessairement projectif sur S, comme on voit en choisissant un $\xi_\circ \in \mathrm{Pic}\,(X_\circ)$ ample et le relevant en un $\xi \in \mathrm{Pic}(X)$, et appliquant EGA III 4.7.1.

Bibliographie

[1] Grothendieck A., Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, in Fondements de la Géométrie Algébrique (Extraits du Sém. Bourbaki 1957-62) Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie.

EXPOSÉ XIV

Théorème de finitude pour un morphisme propre ; dimension cohomologique des schémas algébriques affines

M. Artin

Cet exposé contient deux théorèmes importants qui se démontrent en utilisant le théorème de changement de base pour un morphisme propre. **145**

1. Théorème de finitude pour un morphisme propre

Théorème 1.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et de présentation finie. Soit A un anneau noethérien à gauche qui est une $\mathbf{Z}/n$-algèbre pour $n \in \mathbf{N}$ convenable. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) constructible sur X. Alors le faisceau f_*F (resp. $R^1 f_* F$, resp. $R^q f_* F$ pour chaque $q \geq 0$) est également constructible.

En particulier, on a :

Corollaire 1.2. Soit X un schéma propre sur le spectre d'un corps séparablement clos k, et soit F un faisceau abélien de torsion constructible sur X. Alors les groupes $H^q(X, F)$ sont finis pour chaque $q \geq 0$.

Remarque 1.3. Le théorème est faux pour les faisceaux abéliens si l'on omet la condition que f soit propre, comme on voit en prenant $F = \mathbf{Z}/p$, $p = \operatorname{car} k$, $X = \mathbf{E}^1_k$, l'espace affine, et f l'inclusion de X dans $\mathbf{P}^1_k$, ou le morphisme structural $X \to \operatorname{Spec} k$. Cependant, on conjecture[37] qu'il est vrai si F est premier aux caractéristiques résiduelles de S **146**
et S est « excellent » EGA IV 7.8. On peut le démontrer, lorsqu'on dispose du théorème de résolution des singularités (par exemple en caractéristique nulle) pour un schéma excellent S d'égales caractéristiques (XIX 5.1).

Démonstration de 1.1. L'assertion est locale sur S et on peut donc prendre S affine. Alors S est limite des spectres d'anneaux de type fini sur $\mathbf{Z}$, et les données du théorème sont telles qu'on peut les obtenir, par changement de base $S \to S_0$, d'un morphisme propre $f_0 : X_0 \to S_0$ avec S_0 de type fini sur $\mathbf{Z}$ et un faisceau constructible F_0 sur X_0, cf. EGA IV 8 et IX 2.7.4. Or, puisque l'image inverse d'un faisceau constructible est encore constructible (IX 2.4 (iii)), on est ramené, en appliquant XII 5.1 au morphisme de changement de base $S_0 \leftarrow S$, à démontrer la constructibilité de $f_{0,*}F_0$ (resp. de $R^q f_{0,*} F_0$), d'où le

[37]N.D.E. : Ofer Gabber a présenté la généralisation suivante de ?? lors des conférences en l'honneur de Luc Illusie et de Pierre Deligne en 2005. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini de schémas noethériens quasi-excellents (EGA IV 7.8), et soit F un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/n$-modules sur $X_{\text{ét}}$ avec n inversible sur Y. Alors, les faisceaux $R^i f_* F$ sur $Y_{\text{ét}}$ sont constructibles et nuls sauf pour un nombre fini de i. Il y a des assertions analogues pour faisceaux constructibles d'ensembles resp. de groupes d'ordre inversible sur Y.
Avant le résultat de Gabber, le théorème ?? était connu dans le cas suivant. Soit S un schéma régulier de dimension ≤ 1 et soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas de type fini et F un faisceau de A-modules à gauche sur $X_{\text{ét}}$. Alors, les faisceaux $R^i f_* F$ sont constructibles (SGA 4 1/2 Finitude 1.1).

Lemme 1.4. Il suffit de vérifier 1.1 avec S de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$.

Lemme 1.5. L'assertion ensembliste de 1.1 est vraie, c'est-à-dire f_*F est un faisceau constructible d'ensembles si F l'est.

Démonstration. On peut supposer S noethérien (1.4). Soit $F \to G = \prod_i \pi_{i,*}(C_i)$ une injection avec $\pi_i : X_i \to X$ fini et C_i constant et constructible sur X_i (IX 2.14). On a $f_*F \subset f_*G$ et par suite (IX 2.9 (ii)) il suffit de traiter le cas $F = G$. Or $f_*G = \prod_i (f\pi_i)_* G_i$, et un produit fini de faisceaux constructibles sur S est constructible (IX 2.6 (ibis)). En remplaçant X par X_i, on est ramené au cas où $F = D_X$ est un faisceau constant constructible, à valeur D. Or en vertu de XII 5.1 (i), la fibre $f_*(F)_{\overline{s}}$ est isomorphe à $D^{C(s)}$, où
147 $C(s) = \pi_0(X_{\overline{s}})$, donc elle est finie. D'après IX 2.13 (iii) il suffit de démontrer que la fonction « nombre d'éléments de la fibre de f_*F » est constructible sur S. Or cette fonction est $\operatorname{card}(D^C)$, où C est la fonction « nombre de composantes connexes dans la fibre géométrique », et C est constructible (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat.

Lemme 1.6. Soit S un schéma noethérien, $f : X \to S$ propre, F un faisceau de groupes (resp. de A-modules) constructible sur X, q un entier égal à 0 ou 1 (resp. un entier ≥ 0). Soient S_i $(1 \leq i \leq n)$ des sous-schémas de S tels que $S = \cup_i S_i$ et soient F_i, $f_i : X_i \to S_i$ les « restrictions » des données aux S_i. Alors si pour tout i, $R^q f_{i,*} F_i$ est constructible, il en est de même de $R^q f_* F$.

Démonstration. La restriction de $R^q f_* F$ à S_i est isomorphe à $R^q f_{i,*} F_i$ d'après XII 5.1, et le lemme suit de IX 2.8.

On procède maintenant par des raisonnements analogues à ceux de XII 8 :

Lemme 1.7. Soient S noethérien,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes propres, et $j : U \to X$ un ouvert tel que l'ouvert $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ s'envoie isomorphiquement sur U. Soit $Y = X - U$ le schéma fermé réduit et soient $f_0 : Y \to S$ et $i : Y \to X$ les morphismes canoniques. Supposons le théorème 1.1 vrai[38] pour $\overline{f}$, f_0 et π. Alors il est également vrai pour f.

148 Démonstration. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A-modules F sur X. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow 0,$$

et compte tenu de la suite exacte de cohomologie correspondante pour les $R^q f_*$, et de IX 2.6, on voit qu'il suffit de vérifier la constructibilité des $R^q f_*$ pour les membres extrêmes (notons que $i_* i^* F$ est constructible d'après IX 2.4 (iii) et IX 2.14 (i), donc $j_! j^* F$ l'est aussi (IX 2.6). Puisque i est une immersion fermée,

$$(R^q f_*) i_*(i^* F) \simeq (R^q f_{0,*})(i^* F),$$

(VIII 5.6), d'où la constructibilité dans ce cas d'après l'hypothèse sur f_0. De plus, désignant par $\overline{j} : \overline{U} \to \overline{X}$ le morphisme d'inclusion et $\overline{F} = \pi^* F$, on a

$$(*) \qquad j_! j^* F \simeq \pi_* \overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F},$$

[38] N.D.E. : L'hypothèse sur $R^q \pi_*$ ne figure que pour $q = 0$ dans la démonstration. Dans ce cas, on sait déjà la constructibilité par (1.5).

comme on vérifie en définissant d'abord une flèche →, et prouvant qu'elle est inversible fibre par fibre en utilisant XII 5.1. En chaque point géométrique $\overline{y}$ de Y, la restriction de $\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F}$ à la fibre $\overline{X}_{\overline{y}}$ de $\overline{X}$ sur X est nulle, et par suite XII 5.1 la fibre de $(R^q\pi_*)\,(\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F})$ en $\overline{y}$ est nulle pour chaque $q \geq 0$. Puisque d'autre part π induit un isomorphisme au-dessus de $X - Y$, on a $(R^q\pi_*)\,(\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F}) = 0$ si $q > 0$. De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*)(R^q\pi_*)(\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F}) \Longrightarrow R^n\overline{f}_*(\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F})$$

et $(*)$ on déduit des isomorphismes

$$(R^q\overline{f}_*)(\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F}) \simeq (R^q f_*)(j_!j^*F)$$

pour $q \geq 0$. Puisque $\overline{j}_!\overline{j}^*\overline{F}$ est constructible (même raisonnement que pour $j_!j^*F$) le membre de gauche l'est aussi, d'où la constructibilité de $(R^q f_*)(j_!j^*F)$ et donc de $R^q f_*F$. **149**

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes constructible sur X. Remplaçons $\pi : \overline{X} \to X$ par $\pi \amalg i : (\overline{X} \amalg Y) \to X$. Il suffit ainsi de démontrer que si $\pi : \overline{X} \to X$ est surjectif et si 1.1 est vrai pour π et pour $\overline{f}$, il l'est également pour f. Soit d'abord $\overline{F}$ un faisceau de groupes constructible sur $\overline{X}$. Alors $\pi_*\overline{F}$ est constructible sur X (1.5) et on a une injection $(R^1 f_*)\pi_*\overline{F} \hookrightarrow (R^1\overline{f}_*)\overline{F}$. Le membre de droite est constructible par hypothèse, et par suite le membre de gauche l'est aussi (IX 2.9 (ii)). Or, puisque π est surjectif, on a une injection $F \to \pi_*\pi^*F = G$. Le faisceau $\overline{F} = \pi^*F$ est constructible, donc G et R^1f_*G sont aussi constructibles, comme on a vu ci-dessus. On est ainsi ramené au lemme suivant :

Lemme 1.8. Soient S noethérien, $f : X \to S$ un morphisme propre, et $F \overset{u}{\hookrightarrow} G$ une injection de faisceaux de groupes constructibles sur X. Si R^1f_*G est constructible, R^1f_*F l'est aussi.

Démonstration. Soit $C = G/F$ qui est un faisceau constructible d'espaces homogènes sous G (appliquer IX 2.6). Considérons la suite exacte

$$(*) \qquad f_*C \xrightarrow{\delta} R^1f_*F \xrightarrow{u^1} R^1f_*G.$$

Pour démontrer que R^1f_*F est constructible, il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de démontrer que si $S \neq \varnothing$, il existe un ouvert non-vide de S sur lequel $R^1f_*(F)$ soit constructible. On peut donc supposer R^1f_*G localement constant, donc puisque la constructibilité est une notion locale pour la topologie étale, on peut supposer que S est irréductible et R^1f_*G est constant (et constructible), à valeur $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Soit D_i $(i = 1, \dots, n)$ le sous-faisceau de R^1f_*F image inverse de la section e_i par u^1. On **150**
a, puisque dans un topos « les sommes sont universelles », $R^1f_*F = \amalg_i D_i$, et il suffit donc de démontrer que chaque D_i est constructible sur un S' convenable étale sur S et non-vide.

Rappelons que R^1f_*F est le faisceau associé au préfaisceau $\mathscr{R}^1F$, où $\mathscr{R}^1F(S') = H^1(X \times_S S', F)$. Par suite on peut supposer (en remplaçant S par un S' non-vide étale sur S) que D_i est le faisceau « vide » (donc constructible), ou qu'il existe un élément $\alpha \in H^1\,(X, F)$ qui induit une section $\overline{\alpha}$ de D_i. Dans ce dernier cas, soit

$$f_*C^\alpha \xrightarrow{\delta} R^1f_*F^\alpha \longrightarrow R^1f_*G^\alpha$$

la suite exacte déduite de $(*)$ « en tordant à l'aide de α ». On a

$$R^1f_*F^\alpha \simeq R^1f_*F \quad , \quad R^1f_*G^\alpha \simeq R^1f_*G,$$

et la section de $R^1f_*F^\alpha$ correspondant à $\overline{\alpha}$ est la section unité. Donc le sous-faisceau D_i^α de $R^1f_*F^\alpha$ correspondant à D_i est l'image inverse de la section unité de $R^1f_*G^\alpha$, i.e. ,

D_i^α est l'image de f_*G^α par δ. Puisque f_*G est constructible (1.5) il en est de même de D_i^α, donc de D_i (appliquer IX 2.6), d'où le lemme.

Lemme 1.9. Soit S noethérien et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

151 un diagramme commutatif de morphismes propres. Si le théorème 1.1 est vrai pour f et π, il l'est également pour $\overline{f}$.

Démonstration. Dans le cas d'un faisceau $\overline{F}$ de A-modules constructible, on utilise la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*)(R^q \pi_*)\overline{F} \Longrightarrow (R^n \overline{f}_*)\overline{F}.$$

Par hypothèse, on trouve que $E_2^{p,q}$ est constructible pour chaque p, q, et par suite l'aboutissement l'est aussi, comme il résulte alors de IX 2.6.

Soit $\overline{F}$ un faisceau de groupes constructible. On la suite exacte (XII 3.2)

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow (R^1 f_*)\pi_*\overline{F} \longrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F} \longrightarrow f_*(R^1\pi_*)\overline{F},$$

où les membres extrêmes sont constructibles d'après l'hypothèse et 1.5. On procède comme dans la démonstration de 1.8 : Il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de supposer $S \neq \varnothing$, et de démontrer la constructibilité sur un ouvert non-vide convenable. On peut donc supposer $f_*(R^1\pi_*)\overline{F}$ localement constant, et (par localisation étale) même constant et constructible (IX 2.4 (i)) à valeur $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit D_i le sous-faisceau de $(R^1\overline{f}_*)\overline{F}$ image inverse de e_i, de sorte que $(R^1\overline{f}_*)\,\overline{F} = \coprod_i D_i$. Il suffit de démontrer que chacun des faisceaux D_i induit un faisceau constructible sur un S'/S étale connexe et non-vide convenable. Si D_i n'est pas le « faisceau vide », on se ramène au cas où il existe un élément $\alpha \in H^1\,(\overline{X}, \overline{F})$ qui induit une section $\overline{\alpha}$ de D_i. Soit

$$0 \longrightarrow (R^1 f_*)\pi_*\overline{F}^\alpha \longrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F}^\alpha \longrightarrow f_*(R^1\pi_*)\overline{F}^\alpha$$

la suite exacte déduite de $(*)$ en tordant $\overline{F}$ à l'aide de α. La section de $(R^1\overline{f}_*)\,\overline{F}^\alpha$ correspondant à $\overline{\alpha}$ est la section unité, et par suite le sous-faisceau D_i^α de $(R^1\overline{f}_*)\overline{F}^\alpha$ correspon-
152 dant à D_i est l'image inverse de la section unité de $f_*(R^1\pi_*)\,\overline{F}^\alpha$, d'où $D_i^\alpha \simeq (R^1 f_*)\pi_*\overline{F}^\alpha$, qui est bien un faisceau constructible, C.Q.F.D.

Lemme 1.10. Il suffit de vérifier 1.1 dans le cas où S est de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, et f est projectif et de dimension relative ≤ 1.

Démonstration. Supposons d'abord que f soit projectif et procédons par récurrence sur la dimension relative de f, qu'on peut supposer finie, quitte à remplacer S par un ouvert affine. Si f est de dimension relative $\leq n$, avec $n \geq 2$, on peut trouver, localement sur S, un morphisme fini $\pi : X \to \mathbf{P}_S^n$, et on se ramène par 1.9 et IX 2.14 (i) au cas où f est le morphisme structural de $\mathbf{P}^n_S$. Considérons le diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd}
& \overline{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "\overline{f}"] & \\
\mathbf{P}^n_S \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{P}^1_S \arrow[dl, "b"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

déjà envisagé dans la démonstration de XII 8.3, où $\overline{X}$ est déduit de $\mathbf{P}^n_S$ en faisant éclater le sous-schéma fermé $Y \simeq \mathbf{P}^{n-2}_S$. La dimension relative de b est ≤ 1, celle de a est $\leq n-1$, et par suite le théorème est vrai pour a et b par l'hypothèse de récurrence, donc pour $\overline{f}$ par (1.9). De plus, la dimension de π est ≤ 1, celle de $f_0 : Y \to S$ est $\leq n-1$. Il résulte donc de 1.7 que 1.1 est vrai pour f, donc pour tout morphisme projectif. Soit maintenant f propre arbitraire, et procédons par récurrence noethérienne sur X : on peut supposer le théorème vrai pour chaque sous-schéma fermé distinct de X et que $X \neq \varnothing$. Soit

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

un diagramme du type donné par le lemme de Chow XII 7.1. En appliquant 1.7 à ce **153**
diagramme, on déduit 1.1 pour f, d'où le lemme.

1.11. Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 1.1. Si F est un faisceau de groupes constructibles, on peut trouver une injection $F \hookrightarrow G = \prod_i \pi_{i,*}C_i$ avec π_i fini et C_i constant et constructible (IX 2.14), et il résulte de 1.8 qu'on peut supposer F constant. De même, si F est un faisceau de A-modules constructible, on peut, en appliquant IX 2.14, trouver une résolution $F \to G^{\cdot}$, $G^{\cdot} = \{0 \to G^0 \to G^1 \to G^2 \to \dots\}$, de F, telle que chaque G^{ν} soit de la forme $G^{\nu} = \prod_i \pi_{i,*}C_i$, et on se réduit par la suite spectrale de la résolution $G^{\cdot}$,

$$E_2^{p,q} = H^p((R^q f_*)G^{\cdot}) \Longrightarrow (R^n f_*)F,$$

au cas où F est constant et constructible, à valeur M.

Rappelons que A est une $\mathbf{Z}/n$-algèbre. Soit ℓ un nombre premier qui divise n. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ell M \longrightarrow M \longrightarrow M/\ell M \longrightarrow 0,$$

et il suffit encore de prouver 1.1 pour ℓM et $M/\ell M$.

On se réduit alors, par une récurrence facile, au cas A est une $\mathbf{Z}/\ell$-algèbre, $\ell \in \mathbf{P}$, et où M est un A-module de type fini. Alors M est un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/\ell$, et par suite le morphisme canonique

$$H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) \otimes_{\mathbf{Z}/\ell} M \longrightarrow H^q(Y, M)$$

est bijectif, quel que soit Y quasi-compact et quasi-séparé (en effet, c'est trivial si M est de rang fini, et les deux membres commutent aux limites inductives (VI 5.1 et VII 3.3)), **154**
donc

$$[R^q f_*(\mathbf{Z}/\ell)] \otimes_{\mathbf{Z}/\ell} M \xrightarrow{\sim} R^q f_*(M).$$

Il suffit donc évidemment de démontrer que $R^q f_*(\mathbf{Z}/\ell)$ est constructible en tant que $\mathbf{Z}/\ell$-Module, c'est-à-dire, on est réduit au cas $A = \mathbf{Z}/\ell$, ce que nous supposons désormais.

Notons que le cas où F est de dimension relative ≤ 0 (i.e. où f est fini) et F est arbitraire résulte maintenant de VIII 5.6 et de 1.5.

Procédons par récurrence noethérienne sur S. D'après 1.6, on peut supposer $S \neq \varnothing$, et se permettre de remplacer S par un ouvert non-vide quelconque. De plus, on peut supposer S intègre, de point générique s. La fibre X_s est un schéma algébrique de dimension ≤ 1, et par suite il existe une extension radicielle K' de $k(s) = K$, telle que le normalisé Y de $(X_s \otimes_K K')_{\text{réd}}$ soit lisse au-dessus de $\operatorname{Spec} K'$ [38]. En remplaçant S par un ouvert non-vide, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini radiciel surjectif $S' \to S$ tel que S'_s soit K-isomorphe à $\operatorname{Spec} K'$, et un morphisme fini surjectif, un morphisme lisse et projectif $\overline{X}' \to S'$ et un S'-morphisme fini surjectif $\pi : \overline{X}' \to X' = X \times_S S'$ qui induise $Y \to X_s \otimes_K K'$ sur les fibres en le point générique s de S (EGA IV 9.6.1). Or, d'après VIII 1.1, il est inoffensif de faire une extension radicielle. On peut donc remplacer S par S' et X par X', c'est-à-dire, on peut supposer que f s'insère dans un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

155 où π est surjectif et fini, et $\overline{f}$ est lisse. De plus, d'après la construction, on peut supposer qu'il existe un sous-schéma fermé Y de X tel que la fibre générique de Y soit finie, et tel que π induise un isomorphisme au-dessus de $X - Y$. En remplaçant encore S par un ouvert non-vide, on se ramène au cas où de plus $f_0 : Y \to S$ est un morphisme fini.

Comme F est constant, $\pi^* F$ est également constant, et $F \to \pi_* \pi^* F$ est injectif parce que π est surjectif. Si F est un faisceau de groupes, il suffit de démontrer que $(R^1 f_*)(\pi_* \pi^* F) \simeq (R^1 \overline{f}_*)(\pi^* F)$ est constructible (1.8). Si F est un faisceau de $\mathbf{Z}/\ell$-modules, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \pi_* \pi^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où C est concentré sur Y, parce que π induit un isomorphisme au-dessus de $X - Y$. Il s'ensuit que $R^q f_* C = R^q f_{0,*} C$ est constructible (nul si $q > 0$), et ainsi il suffit encore de démontrer que $(R^q f_*)\,(\pi_* \pi^* F) = (R^q \overline{f}_*)\,(\pi^* F)$ est constructible. En remplaçant f par $\overline{f}$ et F par $\pi^* F$, on est réduit au cas F constant et constructible et f est lisse.

Traitons le cas d'un faisceau de groupes constant, $F = G_X$. Toutes les fibres de $(R^1 f_*)$ G_X sont finies ; en effet, en appliquant XII 5.2 (ii) on est réduit, pour le prouver, au cas où S est le spectre d'un corps séparablement clos et où X est lisse et de dimension ≤ 1 au-dessus de S. Le résultat est connu dans ce cas (SGA 1 X 2.6). Il suffit donc de démontrer que les morphismes de spécialisation sont injectifs (IX 2.13 (ii)). Pour cela, on est réduit au cas S strictement local, et par le théorème de changement de base XII 5.1 (ii) on peut même remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète et
156 strictement local. De plus, on peut supposer X connexe. Puisque $H^1(X, G)$ classifie les revêtements principaux galoisiens de X de groupe G, il suffit de vérifier que si $X' \to X$ est un revêtement étale connexe alors le fibre géométrique est également connexe. Cela résulte facilement du fait que f est lisse et propre, à fibres géométriques connexes.

[38] Cf. EGA IV 17.15.14.

Traitons maintenant le cas $F = (\mathbf{Z}/\ell)_X$. Pour les valeurs 0 et 1 de q le résultat est déjà connu ((1.5) et ci-dessus). D'après XII 5.3 bis, il reste seulement le cas $q = 2$, et de plus, si S est de caractéristique ℓ, on a $R^2 f_*(\mathbf{Z}/\ell) = 0$. En remplaçant S par un ouvert non-vide convenable, on est donc réduit au cas où ℓ est inversible sur S. Alors, d'après XII 5.2 (iii) et X 5.2, la fibre de $R^2 f_*(\mathbf{Z}/\ell)$ en un point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de $s \in S$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/\ell)^{c(s)}$, où $c(s)$ est le nombre des composantes irréductibles de dimension 1 de la fibre géométrique $X_{\overline{s}}$. Or c est une fonction constructible sur S (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat (IX 2.13 (iii)).

Remarque 1.11. La démonstration de 1.1 se simplifie beaucoup en utilisant le formalisme de la cohomologie à supports propres, qui sera développé dans ?? comme conséquence directe du théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.1. D'autre part, l'énoncé 1.1 se généralise au cas où on se donne sur S un faisceau quelconque d'anneaux de torsion $\mathscr{A}$, et qu'on prend sur X un complexe $K^\cdot$ de $f^*(\mathscr{A})$-Modules satisfaisant une condition de « constructibilité » qui, dans le cas particulier 1.1, s'exprimerait simplement en disant que des faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^i(K^\cdot)$ de $K^\cdot$ sont des A-modules constructibles, nuls pour i assez grand.

2. Une variante de la dimension 157

2.1. Soit X un schéma. On va noter

$$d(x) = \dim \overline{\{x\}} \tag{2.1.1}$$

pour $x \in X$, où $\overline{\{x\}}$ est l'adhérence de $\{x\}$. Si F est un faisceau abélien sur X, on pose

$$d(F) = \sup\{d(x) \mid x \in X \quad \text{et} \quad F_{\overline{x}} \neq 0\}. \tag{2.1.2}$$

On aura besoin d'une notion rectifiée dans le cas local :

Définition 2.2. Soient Y le spectre d'un anneau local noethérien universellement caténaire (EGA IV 5.6.2) et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. On pose

$$\delta(x) = \dim \overline{\{y\}} + deg.tr.\ k(x)/k(y).$$

Si F est un faisceau abélien sur X, on pose

$$\delta(F) = \sup\{\delta(x) \mid x \in X \quad \text{et} \quad F_{\overline{x}} \neq 0\}.$$

Proposition 2.3. (i) Soit $i : X' \to X$ une immersion et $x' \in X'$. Alors $\delta(i(x')) = \delta(x')$.

(ii) Soit X_0 la fibre fermée de X/Y. On a

$$\delta(x) = \begin{cases} d(x) & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_0 \neq \varnothing \\ d(x)+1 & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_0 = \varnothing; \end{cases}$$

(iii) $\delta(x) = d(x)$ si f est propre.

Démonstration. L'assertion (i) est triviale à partir de la définition. Puisque $\overline{\{x\}} \cap X_0$ 158
n'est pas vide dans le cas f propre, (iii) est conséquence de (ii). Pour (ii), nous pouvons remplacer X par $\overline{\{x\}}$ et Y par $\overline{\{y\}}$ (avec la structure induite réduite), ce qui est permis d'après (i). Soient $x' \in X'$ et $y' = f(x')$. On a la formule (EGA IV 5.6.1.1)

$$\dim \mathscr{O}_{X,x'} = \dim \mathscr{O}_{Y,y'} + deg.tr.\ k(x)/k(y) - deg.tr.\ k(x')/k(y').$$

Supposons que $X_0 \neq \varnothing$. Alors il est clair que $\sup_{x'} \{\dim \mathcal{O}_{X,x'}\} = \dim X$ est obtenu en prenant pour x' un point fermé de X_0, d'où

$$\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x'} = \dim Y + deg.tr.\ k(x)/k(y) = \delta(x).$$

Si $X_0 = \varnothing$, le supremum est évidemment obtenu en prenant pour x' un point fermé dans sa fibre $f^{-1}(y')$, tel que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$. Il existe de tels points, parce que les $y' \in Y$ avec $\dim \overline{\{y'\}} = 1$ forment un ensemble très dense (EGA IV 10.1.3, 10.3.1, 10.4.1, 10.5.9). On a donc :

$$\begin{aligned}\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x'} &= \dim \mathcal{O}_{Y,y'} + deg.tr.\ k(x)/k(y)\\ &= \dim Y - 1 + deg.tr.\ k(x)/k(y) = \delta(x) - 1,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Proposition 2.4. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini sur le spectre d'un corps k. Soit $x \in X$, $y = f(x)$, et y_0 une spécialisation de y. Soient $f' : X' \to Y'$ le localisé strict de f en un point géométrique $\overline{y}_0$ au-dessus de y_0, et $x' \in X'$ un point au-dessus de x. Alors on a

$$\delta(x') = d(x) - d(y_0).$$

159 Démonstration. On a

$$\begin{aligned}d(x) &= d(y) + deg.tr.\ k(x)/k(y)\\ \delta(x') &= d(y') + deg.tr.\ k(x')/k(y'),\end{aligned}$$

où $y' = f'(x')$. De plus

$$deg.tr.\ k(x)/k(y) = deg.tr.\ k(x')/k(y'),$$

parce que les extensions $k(x')/k(x)$ et $k(y')/k(y)$ sont algébriques. Il reste donc à démontrer que

$$d(y') = d(y) - d(y_0).$$

On peut supposer y maximal dans Y, donc y' maximal dans Y', et alors

$$\begin{aligned}d(y') &= \dim \mathcal{O}_{Y',\overline{y}_0}\\ &= \dim \mathcal{O}_{Y,y_0} \quad \text{(EGA IV 6.1.3)}\\ &= \dim_{y_0} Y - d(y_0) \quad \text{(EGA IV 5.2.3.1)}\\ &= d(y) - d(y_0),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Dimension cohomologique des schémas algébriques affines

Théorème 3.1 (d). [39] Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de schémas de type fini sur un corps k. Soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$ (cf. 2.1). Alors $d(R^q f_* F) \leq d - q$.

En particulier, prenant $Y = \mathrm{Spec}(k)$:

160 Corollaire 3.2. Soit X un schéma affine de type fini sur un corps k séparablement

[39] N.D.E. : Le théorème ?? est aujourd'hui connu sous le nom de *théorème de Lefschetz affine.*

clos. Alors[40]

$$\operatorname{cd} X \leq \dim X.$$

Corollaire 3.3. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^N$ un schéma projectif de dimension n sur un corps séparablement clos k, et soit $Y = H \cap X$ une « section hyperplane » de X. Alors pour tout faisceau de torsion F sur X, l'homomorphisme canonique

$$H_Y^q(X, F) \longrightarrow H^q(X, F)$$

est bijectif pour $q > n + 1$, et surjectif pour $q = n + 1$.

Le corollaire est trivial à partir de 3.2 et de la suite exacte pour un sous-ensemble fermé (V 6.5.4), compte tenu que $X - Y = U$ est affine de dimension $\leq n$. Remarquons que 3.3 est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes : en effet, si X est lisse sur k et F est localement constant et premier à la caractéristique, on peut calculer la cohomologie $H_Y^q(X, F)$ explicitement en utilisant le théorème de pureté cohomologique relatif (XVI 3) et la suite spectrale (V 6.4.3), et on trouve que

$$H_Y^q(X, \mathbf{Z}/n) \simeq H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \quad \text{pour tout } q;$$

l'homomorphisme $H^{q-2}\,(Y, \mu_n^{-1}) \to H^q(X, \mathbf{Z}/n)$ déduit de 3.3 n'étant autre que l' « homomorphisme de Gysin », qui sera étudié ultérieurement [40].

Le théorème 3.1 (d) équivaut[41] au suivant :

Corollaire 3.4 (d). Soit Y' un schéma strictement local qui est un localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f' : X' \to Y'$ un morphisme affine de type fini, 161
et F' un faisceau de torsion sur X' tel que $\delta(F') \leq d$ (cf. (2.2)). Alors $H^q(X', F') = 0$ pour $q > d$.

En effet, supposons que 3.4 (d) soit vrai. Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de schémas algébriques sur k et soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$. Soit y un point de Y et ξ un point géométrique au-dessus de y. Pour démontrer 3.1 (d), il faut démontrer que la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ est nulle si $d(y) > d - q$.

Soit $f' : X' \to Y'$ le localisé strict de f au point ξ, c'est-à-dire, soit Y' le localisé strict de Y en ξ et soit $X' = X \times_Y Y'$.

Soif F' le faisceau induit de F sur X, de sorte que $(R^q f_* F)_\xi = H^q(X', F')$ (VIII 5.2). On a d'après (2.4)

$$\delta(F') \leq d(F) - d(y) \leq d - d(y),$$

et en appliquant 3.4 (d), on trouve $H^q(X', F') = 0$ si $q > d - d(y)$, d'où le résultat.

Inversement, supposons que 3.1 (d) soit vrai, et soient F', $f' : X' \to Y'$ comme dans l'énoncé de 3.4 (d). Puisque la cohomologie commute aux limites inductives (VII 3.3) et F' est limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles (IX 2.9), on peut supposer F' constructible. Or Y' est localisé strict d'un schéma algébrique Y en un point géométrique ξ au-dessus d'un point fermé y_0 (X 3.3). Écrivons $Y' = \varprojlim_\alpha Y_\alpha$, où (Y_α) est un système projectif filtrant de schémas affines étales sur Y (VIII 4.5). D'après IX 2.7.4, F' est induit

[40]N.D.E. : Considérons l'assertion analogue en géométrie analytique complexe : Soit X une variété affine sur $\mathbf{C}$ et soit F un faisceau constructible sur X. Alors, on a $H^m(X^{an}, F) = 0$ pour tout $m > \dim X$, où X^{an} est l'espace analytique associée à X. Bien que cette assertion découle de 3.2 par le théorème de comparaison XVI 4.1, on a aussi deux preuves entièrement de nature analytique données par Pierre Deligne et Hélène Esnault, voir Esnault, H., Variation on Artin's vanishing theorem, *Advances in Math.* **198** (2005), 435–438.

[40]Cf. SGA 2 XIV pour une étude systématique des théorèmes du type de Lefschetz.

[41]N.D.E. : Plus précisément, l'argument du texte donne le résultat suivant. L'assertion 3.4 (d') pour $d' \leq d$ implique 3.1 (d), et l'assertion 3.1 (d) implique 3.4 (d). Cela suffit pour conclure ci-après.

d'un faisceau de torsion constructible F_α sur $X_\alpha = X \times_Y Y_\alpha$ pour α suffisamment grand,
162 et on voit immédiatement, utilisant 2.4 et EGA IV 9.5.5, qu'on peut de plus supposer que $d(F_\alpha) = \delta(F') \leq d$. En remplaçant Y par Y_α, on est réduit au cas où F' est induit par un faisceau F sur X, avec $d(F) \leq d$. On a alors $R^q f_* F = 0$ si $q > d$, d'après 3.1 (d), donc en particulier

$$(R^q f_* F)_\xi = H^q(X', F') = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

d'où 3.4 (d).

Comme cas particulier de 3.4 (d), on a

Corollaire 3.5. Soit Y' un schéma strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps k. Soit $U \subset Y'$ un ouvert affine. Alors $\operatorname{cd} U \leq d$.

Remarque 3.6. Il semble très plausible[42] que 3.4, donc 3.5, reste valable pour tout schéma local noethérien Y' (pas nécessairement un localisé strict d'un schéma algébrique), du moins si Y' est excellent (EGA IV 7.8). C'est ce qui sera prouvé dans (XIX 6) lorsqu'on suppose de plus Y de caractéristique nulle.

4. Démonstration du théorème 3.1

La démonstration se fait par récurrence sur d.

Lemme 4.1. 3.1 (0) et 3.1 (1) sont vrais.

Démonstration. Triviale pour $d = 0$, auquel cas supp F est fini sur k, et on applique (VIII 5.5). Soient F, $f : X \to Y$ comme dans l'énoncé de 3.1 et supposons que $d(F) \leq 1$. En remplaçant F par un sous-faisceau constructible (IX 2.9 et VII 3.3), on se réduit au cas
163 où F est constructible. Alors le support de F est contenu dans un sous-schéma fermé de X de dimension ≤ 1 (IX 2.3), et on peut remplacer X par ce sous-schéma, c'est-à-dire, on peut supposer qu'on a $\dim X \leq 1$. D'après IX 5.7, la dimension cohomologique d'un schéma algébrique affine de dimension 1 sur un corps séparablement clos est ≤ 1. Il suffit d'ailleurs de traiter le cas où k est séparablement clos : en effet, soit $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ le morphisme déduit de f par le changement de base $\operatorname{Spec} \overline{k} \to \operatorname{Spec} k$ ($\overline{k}$ la clôture séparable de k). Pour un point géométrique ξ de Y, le localisé strict $f' : X' \to Y'$ de f en ξ s'identifie à un localisé strict de $\overline{f}$, donc la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ à une fibre de $R^q \overline{f}_* \overline{F}$. Puisque f est affine, on trouve donc que $R^q f_* F = 0$ si $q > 1$. De plus, il est évident que $d(f_* F) \leq 1$. Pour le cas $q = 1$, notons que l'hypothèse que X soit de dimension ≤ 1 implique qu'il existe une partie fermée finie Z de Y telle que f soit fini au-dessus de $Y - Z$. Il en résulte que $R^1 f_* F$ est nul dans $Y - Z$ (VIII 5.6), d'où $d(R^1 f_* F) \leq 1$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit $d \geq 2$ et supposons maintenant que 3.1 (d') (ou, ce qui revient au même, 3.4 (d')) est vrai pour $d' < d$.

Lemme 4.2. Pour démontrer 3.4 (d) dans tous les cas, il suffit de traiter le cas où $X' = \mathbf{E}^1_{Y'}$ est l'espace affine dimension 1 sur Y', et où f est le morphisme structural.

Démonstration. Évidemment, on peut supposer $X' = \mathbf{E}^N_{Y'}$ pour n convenable, parce qu'on peut plonger X' dans un $\mathbf{E}^N_{Y'}$. Supposons $N > 1$ et le résultat connu pour tout
164 Y' et pour $\mathbf{E}^r_{Y'}$ avec $r < N$. Soit F' un faisceau de torsion sur $\mathbf{E}^N_{Y'}$, avec $d(F') \leq d$.

[42] N.D.E. : Ofer Gabber a réussit à démontrer l'analogue suivant de ?? : Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de type fini avec Y quasi-excellent (EGA IV 7.8) possédant une fonction de dimension δ_Y. Soit δ_X la fonction de dimension rectifiée associée sur X. Pour n inversible sur Y et tout faisceau F de $\mathbf{Z}/n$ sur X on a $\delta_Y(R^q f_* F) \leq \delta_X(F) - q$ pour tout $q \geq 0$. Ici, on définit comme ci-dessus $\delta(G) = \sup\{\delta(x) \mid x \in X \quad \text{et} \quad G_{\overline{x}} \neq 0\}$ pour un faisceau G.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^N_{Y'} \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "f'"'] & & \mathbf{E}^{N-1}_{Y'} \arrow[dl, "h'"] \\ & Y' & \end{tikzcd},$$

g' et h' les projections canoniques, de sorte que $\mathbf{E}^N_{Y'}$ est isomorphe à l'espace affine de dimension 1 au-dessus de $\mathbf{E}^{N-1}_{Y'}$. Puisque évidemment chaque anneau localisé strict de $\mathbf{E}^{N-1}_{Y'}$ est aussi le localisé strict d'un schéma algébrique, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux fibres de $R^q g'_* F'$, et on trouve que

$$(*) \qquad \delta(R^q g'_* F') \leq d - q.$$

De plus, 3.4 (d') est vrai pour h', $d' \leq d$, par l'hypothèse de récurrence sur N.

Considérons la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{E}^{N-1}_{Y'}, R^q g'_*(F')) \Longrightarrow H^n(\mathbf{E}^N_{Y'}, F').$$

On a $E_2^{p,q} = 0$ si $p > d - q$, comme on trouve en appliquant $(*)$ et 3.4 (d') au morphisme h'. Il s'ensuit que l'aboutissement est nul si $n > d$, d'où le lemme.

Considérons l'énoncé supplémentaire suivant, qui est un cas spécial de 3.5 :

Énoncé 4.3 (d). Soit X' strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f \in \Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$ et soit $U \subset X'$ l'ouvert $U = X' - V(f)$. Alors $\operatorname{cd} U \leq d$.

Lemme 4.4. 4.3 (d) implique 3.4 (d).

Démonstration. Considérons le diagramme 165

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^1_{Y'} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f'"'] & & \mathbf{P}^1_{Y'} \arrow[dl, "g'"] \\ & Y' & \end{tikzcd}$$

où Y' est comme dans l'énoncé de 3.4 et où $\mathbf{P}^1_{Y'}$ est l'espace projectif, déduit de $\mathbf{E}^1$ « en ajoutant la section Y'_∞ à l'infini ». Soit F' un faisceau de torsion sur $\mathbf{E}^1$ avec $d(\operatorname{supp} F') \leq d$. On a la suite spectrale

$$H^p(\mathbf{P}^1, R^q i_* F') \Longrightarrow H^n(\mathbf{E}^1, F').$$

Or les $R^q i_* F$, pour $q > 0$, sont concentrés sur Y'_∞, qui est Y'-isomorphe à Y'. Puisque Y' est strictement local, il s'ensuit que $H^p(\mathbf{P}^1, R^q i_* F') = 0$ si $p, q > 0$. De plus, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre (XII 5.1), la cohomologie d'un faisceau de torsion sur $\mathbf{P}^1$ peut-être calculée sur la fibre fermée, qui est un schéma de dimension cohomologique ≤ 2 (X 4.3). On a donc $H^p(\mathbf{P}^1, i_* F') = 0$, si $p > 2$. Comme on veut démontrer $H^n(\mathbf{E}^1, F') = 0$ pour $n > d$, et comme $d \geq 2$, on est réduit à démontrer que $H^0(\mathbf{P}^1, R^q i_* F') = 0$ pour $q > d$. Ce groupe, isomorphe aussi à $H^0(Y'_\infty, R^q i_*(F'))$, est en vertu de (VIII 4.6) isomorphe à la fibre de $R^q i_* F'$ au point Q, Q étant le point à l'infini de $\mathbf{P}^1$ dans la fibre fermée.

Il suffit (VII 3.3 et IX 2.9) de traiter le cas où F' est constructible. Alors, puisque $\delta(\operatorname{supp} F') \leq d$, il existe un sous-schéma fermé X' de $\mathbf{P}^1$ avec $\dim X' \leq d$, tel que

X' contienne le support de F'. Soit $\widetilde{X}'$ le localisé de X' au point géométrique Q, soit
166 $\widetilde{U} = \widetilde{X}' - \widetilde{X} \times_{\mathbf{P}^1} Y'_\infty$, et soit F le faisceau induit par F' sur U par le morphisme $\widetilde{U} \to \mathbf{P}^1$. Alors la fibre de $R^q i_* F$ au point Q n'est autre que $H^q(\widetilde{U}, \widetilde{F})$ (VIII 5.2), et on applique 4.3 (d) au schéma strictement local X' et à l'ouvert $\widetilde{U}$.

Le lemme ci-dessous, joint à 4.4, achèvera la démonstration.

Lemme 4.5. 3.4 (d') pour $d' < d$ implique 4.3 (d') pour $d' \leq d$.

Démonstration. Supposons 3.4 (d') pour $d' < d$. Par récurrence, nous pouvons supposer que 4.3 (d') est vrai pour $d' < d$. Soient les données X', f, U comme dans l'énoncé 4.3 (d). Alors X est localisé strict d'un schéma algébrique X_0 sur un corps k en un point géométrique fermé. On peut prendre X_0 affine et de dimension $\leq d$, quitte à le remplacer par un voisinage de x_0. Alors X est limite projective de schémas affines et étales X_i au-dessus de X_0 (VIII 4.5).

Soit F un faisceau de torsion sur U. Il faut démontrer que $H^q(U, F) = 0$ si $q > d$, et il suffit encore de traiter le cas où F est constructible. Alors les données f, F, U proviennent de données analogues sur l'un des X_i (IX 2.7.4). On aura un faisceau F_i sur $U_i = X_i - V(f_i)$ qui « induit » F sur U. Puisque $U = \varprojlim U_i$, on a (VII 5.8)

$$H^q(U, F) = \varinjlim H^q(U_i, F_i).$$

Il suffit donc de démontrer le fait suivant : Quel que soit i, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & U'' \arrow[dl] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

167 où $U \to U_i$ est la flèche donnée, tel que $\mathrm{cd}(U'') \leq d$. En effet, cela impliquera que chaque élément de $H^q(U_i, F_i)$, pour $q > d$, a une image nulle dans $H^q(U, F)$.

Supposons $i = 0$, et considérons le morphisme $g : X_0 \to \mathbf{E}^1_k = Y_0$ donnée par $f_0 \in \Gamma(X_0, \mathscr{O}_{X_0})$. Soit Y'' le localisé strict de $\mathbf{E}^1_k$ en un point géométrique au-dessus de l'origine, donc Y'' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et soit $X'' = X_0 \times_{Y_0} Y''$.

Le morphisme $X \to X_0$ se factorise par X'' puisque X est strictement local. De plus, l'ouvert $U'' = X'' \times_{X_0} U_0$ n'est autre que la fibre générique de X''/Y''. C'est donc un schéma algébrique affine au-dessus du point générique de Y', et on a évidemment $\dim U'' \leq d - 1$.

Vérifions que $\mathrm{cd}\, U'' \leq d$ (ce qui achèvera la démonstration). Soit K le corps résiduel de Y'' au point générique. C'est un corps de dimension cohomologique 1, c'est-à-dire, on a $\mathrm{cd}(G) = 1$, G le groupe de Galois de la clôture séparable $\overline{K}$ de K (X 2.2). Soit $\overline{U}'' = U'' \times_{\operatorname{Spec} K} (\operatorname{Spec} \overline{K})$. On a $\mathrm{cd}\, \overline{U}'' \leq d - 1$ par hypothèse de récurrence sur d (c'est 3.2 pour un schéma de dimension $< d$). Le fait que $\mathrm{cd}\, U'' \leq d$ suit alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre (VIII 8.4)

$$H^q(G, H^q(\overline{U}'', \overline{F})) \Longrightarrow H^n(U, F),$$

d'où le lemme 4.5.

EXPOSÉ XV

Morphismes acycliques

M. Artin

Introduction

Soit $g : X \to Y$ un morphisme de schémas. Dans le premier numéro, nous étudions des conditions pour que g soit acyclique, c'est-à-dire, tel que pour tout faisceau de torsion F sur Y on ait $H^q(Y, F) \simeq H^q(X, g^*F)$, et que cela reste vrai si l'on remplace Y par un Y' étale sur Y. Une condition naturelle nécessaire d'acyclicité est que les fibres géométriques soient acycliques, c'est-à-dire, aient une cohomologie triviale pour des faisceaux de torsion constants. On verra que cette condition, jointe à une condition locale, appelée acyclicité locale de f (1.11), implique que f est acyclique. **168**

Le théorème fondamental est qu'un morphisme lisse est localement acyclique pour les faisceaux de torsion premiers aux caractéristiques résiduelles 2.1, ce qui impliquera le théorème de changement de base par un morphisme lisse XVI 1.1, qui sera développé, avec ses premières conséquences, dans l'exposé suivant.

Le présent exposé est indépendant des exposés XI à XIV, et notamment du « théorème de changement de base pour un morphisme propre ». Ce dernier interviendra à nouveau de façon essentielle, mais en conjonction avec le théorème fondamental du présent exposé, à partir de l'exposé suivant.

1. Généralités sur les morphismes globalement et localement acycliques

Proposition 1.1. Soit $g : X \to Y$ un morphisme de schémas. Les assertions (i) à (iii) suivantes sont équivalentes : **169**

(i) Pour chaque $Y' \to Y$ étale (qu'on peut prendre affine au-dessus d'un ouvert affine de Y) et chaque faisceau d'ensembles F sur Y', le morphisme canonique $F \to g'_* g'^* F$ est injectif (resp. bijectif).

(ii) Pour chaque $Y' \to Y$ étale (qu'on peut prendre affine au-dessus d'un ouvert affine de Y) et chaque faisceau d'ensembles F sur Y', le morphisme canonique $H^0(Y', F) \to H^0(X', g'^* F)$ est injectif (resp. bijectif).

(iii) Pour chaque $Y' \to Y$ localement quasi-fini et chaque faisceau d'ensembles F sur Y', le morphisme canonique $H^0(Y', F) \to H^0(X', g'^* F)$ est injectif (resp. bijectif).

(ii bis) (Si f est quasi-compact et quasi-séparé.) Comme (ii), mais en prenant F faisceau constant de la forme $I_{Y'}$, où I est un ensemble donné au préalable, avec card $I \geq 2$.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate à partir des définitions, et (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (ii bis) sont triviales. On a (ii bis) $\Rightarrow$ (ii), car on peut supposer Y affine, donc X et Y quasi-compacts et quasi-séparés, et on peut alors appliquer XII 6.5 (i). Pour l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii), notons d'abord le lemme suivant :

Lemme 1.2. Soit $f : Y' \to Y$ un morphisme localement quasi-fini. Alors f est « fini **170** localement sur Y' pour la topologie étale », c'est-à-dire, on a des diagrammes commutatifs

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} Y'_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "b_i"] & Y' \arrow[d, "f"] \\ Y_i \arrow[r, "c_i"] & Y \end{tikzcd}$$

où les a_i, c_i sont étales, les b_i sont finis, et les a_i forment un recouvrement de Y' [42].

En effet, soit y' un point de Y' et $y = f(y')$. Il suffit de trouver un diagramme $(*)$ tel que y' soit dans l'image de Y'_i. Soit $\widetilde{Y}$ le spectre de l'anneau hensélisé de $\mathscr{O}_{Y,y}$ VIII 4.1 et Z le localisé (ordinaire) de $\widetilde{Y}' = Y' \times_Y \widetilde{Y}$ en l'unique point au-dessus de y' et du point fermé $\tilde{y}$ de $\widetilde{Y}$. D'après VIII 4.1 (ii), $Z \to \widetilde{Y}$ est fini, et Z est un ouvert induit de $\widetilde{Y}'$. Puisque $\widetilde{Y}$ est limite de préschémas Y_i étales au-dessus de Y, on voit immédiatement EGA IV 9 que pour Y_i convenable il existe un ouvert Z_i de $Y' \times_Y Y_i$, tel que $Z = Z_i \times_{Y_i} \widetilde{Y}$, et dans $(*)$ il suffira de prendre $Y'_i = Z_i$, C.Q.F.D.

Supposons maintenant que (i) de 1.1 soit vrai. Il est évident que l'assertion (iii) de 1.1 équivaut à l'assertion déduite de (i) en remplaçant le morphisme $Y' \to Y$ étale par un morphisme localement quasi-fini. Sous cette forme, l'assertion (pour Y, Y' donnés) est locale sur Y et Y' pour la topologie étale, et on est donc réduit par le lemme au
171 cas d'un morphisme $f : Y' \to Y$ fini. Soit $f' : X' \to X$ le morphisme déduit de f par le changement de base g. Alors le morphisme de changement de base $g^*f_*F \to f'_*g'^*F$ est bijectif VIII 5.6 D'après (i), on a $f_*(F) \to g_*g^*f^*F)$. Par suite le morphisme $H^0(Y',F) \xrightarrow{\epsilon} H^0(Y', g'_*g'^*F)$ de (iii) est le composé $H^0(Y',F) = H^0(Y, f_*F) \xrightarrow{\epsilon'} H^0(Y, g_*g^*f_*F) = H^0(X, g^*f_*F) \simeq H^0(X, f'_*g'^*F) = H^0(X', g'^*F)$. Puisque ϵ' est injectif (resp. bijectif) il en est de même de ϵ. Cela achève la démonstration de 1.1.

Définition 1.3. On appelle morphisme (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique) un morphisme $g : X \to Y$ ayant une des propriétés équivalentes (i) à (iii) (resp. (i) à (iii) respées) de 1.1. Le morphisme est dit universellement (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique) si pour chaque morphisme de changement de base $Y' \to Y$, le morphisme $g' = g \times_Y Y' : X \times_Y Y' \to Y'$ est (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique). Enfin, un schéma X est dit (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique) s'il est non-vide (resp. connexe et non vide).

Corollaire 1.4. Soit $g : X \to Y$ un morphisme 0-acyclique. Alors pour chaque $Y' \to Y$ localement quasi-fini et chaque faisceau en groupes F sur Y', le morphisme canonique

$$H^1(Y',F) \longrightarrow H^1(X', g'^*F)$$

est injectif.

Cela résulte aussitôt de XII 6.5 (i).

172 Corollaire 1.5. Soit $g : X \to Y$ un morphisme. Si g est surjectif (i.e. ses fibres sont non vides, i.e. ses fibres sont (-1)-acycliques) alors g est (-1)-acyclique. La réciproque est vraie si g est quasi-compact et quasi-séparé.

[42] Cf. EGA IV 18.12.1.

La première assertion est évidente sur la forme 1.1 (ii) par considération des fibres des faisceaux envisagés. La deuxième résulte de la définition sous la forme 1.1 (iii) et du sorite de passage à la limite VII 5, compte tenu que pour tout $y \in Y$, $y = \operatorname{Spec} k(y)$ est limite projective de schémas affines localement quasi-finis sur Y, savoir les voisinages affines de y dans $\overline{\{y\}}$ (muni de la structure réduite induite). – Notons que 1.5 implique que lorsque g est quasi-compact et quasi-séparé, alors g (-1)-acyclique implique déjà g universellement (-1)-acyclique.

Proposition 1.6. Soient $g : X \to Y$ un morphisme de schémas, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ un ensemble de nombres premiers, et $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel (resp. $n = 1$). Les assertions (i) à (iii) (resp. les assertions (i) à (iii) respées) suivantes sont équivalentes. Si de plus g est quasi-compact et quasi-séparé, alors (i) à (iii) (resp. (i) à (iii) respées) sont aussi équivalentes à (iv) (resp. (iv) respée).

(i) Pour chaque $Y' \to Y$ étale et chaque faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes) IX 1.5 F sur Y', on a

$$\begin{cases} F \xrightarrow{\sim} g'_* g'^* F, \\ (R^q g'_*) g'^* F = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq q \leq n \quad (\textit{resp.} \text{ si } \ q = 1). \end{cases}$$

(ii) Pour chaque $Y' \to Y$ étale et chaque faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes) F sur Y', le morphisme canonique **173**

$$H^q(Y', F) \longrightarrow H^q(X', g'^* F)$$

est bijectif si $q \leq n$ et injectif si $q = n + 1$ (resp. est bijectif si $q \leq 1$).

(iii) Pour chaque $Y' \to Y$ localement quasi-fini et chaque faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes) F sur Y', le morphisme

$$H^q(Y', F) \longrightarrow H^q(X', g'^* F)$$

est bijectif si $q \leq n$ et injectif si $q = n + 1$ (resp. est bijectif si $q \leq 1$).

(iv) Le morphisme g est surjectif, et pour chaque $Y' \to Y$ localement quasi-fini, chaque $\nu > 0$, et chaque $\ell \in \mathbf{L}$, le morphisme canonique

$$H^q(Y', Z/\ell^\nu) \longrightarrow H^q(X', \mathbf{Z}/\ell^\nu)$$

est surjectif pour $0 \leq q \leq n$ (resp. pour chaque $Y' \to Y$ localement quasi-fini et chaque $\mathbf{L}$-groupe fini ordinaire G, le morphisme canonique

$$H^i(Y', G) \longrightarrow H^i(X', G)$$

est surjectif pour $i = 0, 1$).

Démonstration de 1.6. Les implications (ii) $\Leftarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) sont triviales. Or $(R^q g'_*) g'^* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $R^q(Y'') = H^q(X'', g''^* F)$ ($Y'' \to Y'$ étale). Si (ii) est vrai, on a $H^q(Y'', F) \xrightarrow{\sim} H^q(X'', g''^* F)$, donc le faisceau associé est nul, i.e. (ii) $\Rightarrow$ (i). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 1.1 (i) (qui correspond au cas $n = 0$) joint à la suite spectrale de Leray **174**

$$H^p(Y', (R^q g'_*) g'^* F) \Longrightarrow H^{p+q}(X', g'^* F)$$

dans le cas abélien, et à la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(Y', g'_* g'^* F) \longrightarrow H^1(X', g'^* F) \longrightarrow H^0(Y', (R^1 g'_*) g'^* F).$$

dans le cas des faisceaux de groupes.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Puisque (i) et (ii) sont équivalentes, il est clair que (iii) équivaut à l'énoncé qui est déduit de (i) en remplaçant le mot « étale » par les mots « localement quasi-fini ».

Sous cette forme c'est, pour Y, Y' donnés, une assertion locale sur Y' et sur Y pour la topologie étale, et on est donc réduit par 1.2 au cas où $f : Y' \to Y$ est un morphisme fini. Soit $f' : X' \to X$ le morphisme . On a d'après VIII 5.5 (resp. VIII 5.8) (appliqué trois fois)

$$f_*(R^q g'_*)g'^*F \simeq R^q(fg')_*g'^*F \simeq R^q(gf')_*g'^*F \simeq (R^q g_*)f'_*g'^*F \simeq (R^q g_*)g^*(f_*F)$$

et ce dernier est nul si (i) est vrai pour les valeurs de q envisagées, d'où (i) ⇒ (iii).

175 Il reste à démontrer (iv) ⇒ (iii) ; or ceci résulte aussitôt de XII 6.5.

Définition 1.7. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$. Un morphisme $g : X \to Y$ qui satisfait à une des conditions équivalentes (i) à (iii) (resp. (i) à (iii) respées) de 1.6 est appelé morphisme n-acyclique (resp. morphisme 1-asphérique) pour $\mathbf{L}$. On dit que g est acyclique pour $\mathbf{L}$ s'il est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ pour chaque n. On dit que g est universellement n-acyclique (resp. universellement 1-asphérique) pour $\mathbf{L}$, si pour chaque $Y' \to Y$ le morphisme $g' = g \times_Y Y'$ est n-acyclique (resp. 1-asphérique) pour $\mathbf{L}$. Enfin, un préschéma X est dit n-acyclique (resp. 1-asphérique) pour $\mathbf{L}$, s'il est 0-acyclique 1.3 et si pour chaque $\ell \in \mathbf{L}$ et chaque $1 \leq q \leq n$ on a $H^q(X, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ (resp. et pour chaque $\mathbf{L}$-groupe fini ordinaire G, on a $H^1(X, G) = 0$).

Remarques 1.8. a) Si g est quasi-compact et quasi-séparé, il suffit, pour que g soit universellement n-acyclique, que g' soit n-acyclique chaque fois que $Y' \to Y$ est localement de présentation finie. Nous n'avons pas besoin de ce fait et en laissons la démonstration, qui est un exercice de passage à la limite, au lecteur.

b) Nous ignorons si un morphisme n-acyclique pour $\mathbf{L}$ est déjà universellement n-acyclique pour $\mathbf{L}$. La même question se pose pour les variantes locales plus bas 1.11.

c) Lorsque $n = 0$, on retrouve la notion de 1.3. Bien entendu, on aurait pu rédiger 1.6. et 1.7. de façon à inclure le cas $n = -1$. La proposition qui suit est également

176 valable dans ce cas.

Proposition 1.9. (i) Soient $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ des morphismes de schémas, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$, et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que g soit 0-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. n-acyclique pour $\mathbf{L}$). Soit $f = hg$. Alors pour tout faisceau d'ensembles (resp. de ind $\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) F sur Z, on a un isomorphisme $f_*f^*F \xrightarrow{\sim} h_*h^*F$ (resp. des isomorphismes $(R^p f_*)f^*F \xrightarrow{\sim} (R^p h_*)h^*F$ si $p \leq 1$, resp. si $p \leq n$). En particulier, h est 0-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. n-acyclique pour $\mathbf{L}$) si et seulement si f l'est.

(ii) Soit $\{g_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}$ un système projectif de morphismes de schémas tels que les morphismes $X_\alpha \to X_\beta$ et $Y_\alpha \to Y_\beta$ soient affines et que les g_α soient quasi-compacts et quasi-séparés. Soit $g : X \to Y$ la limite projective des g VII 5.1. Alors si tous les g_α sont 0-acycliques (resp. 1-asphériques pour $\mathbf{L}$, resp. n-acycliques pour $\mathbf{L}$), il en est de même de g.

Démonstration. Pour (i), on a d'abord

$$h_*h^*F \xrightarrow{\sim} h_*(g_*g^*)h^*F \simeq f_*f^*F.$$

La deuxième assertion de (i) est conséquence immédiate de la suite spectrale de Leray

$$(R^p h_*)(R^q g_*)f^*F \Longrightarrow (R^{p+q} f_*)f^*F.$$

177 Enfin l'assertion non-abélienne résulte de la suite exacte XII 3.2. L'assertion (ii) résulte facilement de la théorie de passage à la limite VII 5 et VI.

Corollaire 1.9.1. Soit $g : X \to Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, et $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$. Si g est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$), alors pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, algébrique sur un point y de Y, la fibre géométrique $X_{\overline{y}}$ est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$).

En effet, $\overline{y}$ est limite projective de schémas affines Y_i qui sont localement quasi-finis sur Y, et comme les $X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ sont n-acycliques pour $\mathbf{L}$ (resp. ...), il en est de même de $X_{\overline{y}} \to \overline{y}$ en vertu de 1.9 (ii), d'où la conclusion annoncée.

Proposition 1.10. Soient $g : X \to Y$ un morphisme de schémas, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$, et $n \in \mathbf{N}$. Alors les conditions (i) à (iv) ci-dessous sont équivalentes.

(i) Soit $\overline{y}$ un point géométrique de Y et $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de $\overline{y}$. Soient $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ les localisés stricts de X, Y aux points $\overline{x}$, $\overline{y}$, et soit $\widetilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ le morphisme induit par g. Alors $\widetilde{g}$ est 0-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. n-acyclique pour $\mathbf{L}$).

(ii) Pour chaque diagramme à carrés cartésiens

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"] & X' \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "g'"] & X'' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "g''"] \\ Y & Y' \arrow[l, "i"] & Y'' \arrow[l, "i'"] \end{tikzcd}$$

avec i étale et i' étale de présentation finie, et chaque faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) F sur Y'', le morphisme de changement de base XII 4.1, XII 4.2 **178**

$$g'^*i'_*F \longrightarrow j'_*g''^*F$$

est bijectif (resp. les morphismes

$$g'^*(R^q i'_*)F \longrightarrow (R^q j'_*)g''^*F$$

sont bijectifs pour $q = 0, 1$, resp. sont bijectifs pour $0 \leq q \leq n$ et injectifs pour $q = n + 1$).

(iii) Même énoncé que (ii), sauf que le morphisme i' est supposé seulement quasi-fini et quasi-séparé.

(iv) Même énoncé que (ii), mais en supposant i seulement localement quasi-fini, et en revanche i' une immersion ouverte quasi-compacte.

Démonstration. L'implication (iii) ⇒ (ii) est triviale. Vérifions que (i) ⇒ (iii). Il suffit de regarder le morphisme de (iii) fibre par fibre. Soient $\overline{y}$ un point géométrique de Y' et $\overline{x}$ un point géométrique de X' au-dessus de $\overline{y}$. Soit

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}' \arrow[d, "\widetilde{g}'"] & \widetilde{X}'' \arrow[l, "\widetilde{j}'"'] \arrow[d, "\widetilde{g}''"] \\ \widetilde{Y}' & \widetilde{Y}'' \arrow[l, "\widetilde{i}'"] \end{tikzcd}$$

le diagramme cartésien déduit de $(*)$, où $\widetilde{X}'$, $\widetilde{Y}'$ sont les localisés stricts des X', Y' aux points $\overline{x}$, $\overline{y}$ et où $\widetilde{Y}'' = Y'' \times_{Y'} \widetilde{Y}'$, $\widetilde{X}'' = X'' \times_{X'} \widetilde{X}'$. On a VIII 5.2 et VIII 5.3 **179**

$$H^q(\widetilde{Y}'', \widetilde{F}) \simeq (R^q i'_*F)_{\overline{y}} \simeq (g'^*(R^q i'_*)F)_{\overline{x}},$$

où $\widetilde{F}$ est l'image inverse de F sur $\widetilde{Y}''$, et

$$H^q(\widetilde{X}'', \tilde{g}''^* \widetilde{F}) \simeq ((R^q j'_*) g''^* F)_{\overline{x}}.$$

Puisque $\tilde{i}'$ est quasi-fini, on peut appliquer 1.1 (iii) (resp. 1.5 (iii)) au morphisme

$$H^q(\widetilde{Y}', \widetilde{F}) \longrightarrow H^q(\widetilde{X}', \tilde{g}''^* \widetilde{F})$$

pour les valeurs de q envisagées, d'où (i) ⇒ (iii).

(ii) ⇒ (i). Supposons (ii) vrai et vérifions le critère 1.6 (ii) d'acyclicité pour un morphisme $\tilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$. Soit $\widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}$ étale, avec $\widetilde{Y}'$ affine, et soit $\widetilde{F}$ un faisceau d'ensembles (resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion, resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes) sur $\widetilde{Y}'$. On doit démontrer que

$$H^q(\widetilde{Y}', \widetilde{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(\widetilde{X}', \tilde{g}'^* \widetilde{F}),$$

où $\tilde{g}' : \widetilde{X}' \to \widetilde{Y}'$ est le morphisme déduit de $\tilde{g}$ par changement de base. Or écrivons $\widetilde{Y} = \varprojlim Y_\alpha$ où les Y_α sont étales et affines au-dessus de Y (supposant Y affine, ce qui est loisible). On peut « descendre » le morphisme étale $\widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}$ à un des Y_α, disons en $Y'_0 \to Y_0$, et on a $\widetilde{Y}' = \varprojlim Y'_\alpha = Y \times_{Y_0} Y'_0$. Or chaque faisceau $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{Y}'$ est limite inductive des faisceaux $f'^*_\alpha f'_{\alpha_*} \widetilde{F}$, où $f'_\alpha : \widetilde{Y}'_\alpha \to Y'_\alpha$ est le morphisme canonique. D'après IX 1.2 et IX 1.6 les faisceaux $f'_{\alpha *} F$ sont des faisceaux d'ensembles (resp. abéliens de $\mathbf{L}$-torsion,
180 resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes). Compte tenu de VII 3.3, on voit donc qu'il suffit de traiter le cas où $\widetilde{F}$ se descend à un des Y'_α, disons à un F_0 sur Y'_0. En appliquant (ii) au diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "g"'] & X_0 \arrow[l] \arrow[d, "g_0"'] & X'_0 \arrow[l, "j'_0"'] \arrow[d, "g'_0"'] \\
Y & Y_0 \arrow[l] & Y'_0, \arrow[l, "i'_0"']
\end{tikzcd}$$

on déduit que $g_0{}^*(R^q i'_{0_*}) F_0 \xrightarrow{\sim} (R^q j'_{0_*}) g'^*_0 F_0$ pour les valeurs de q applicables. Or les points géométriques $\overline{y}$, $\overline{x}$ se relèvent canoniquement en des points géométriques de Y_0, X_0 (nous les notons par les mêmes symboles), et on a VIII 5.2 et VIII 5.3

$$H^q(\widetilde{Y}', \widetilde{F}) = ((R^q i'_{0_*}) F_0)_{\overline{y}} = (g_0{}^*(R^q i'_{0_*}) F_0)_{\overline{x}}$$

et

$$H^q(\widetilde{X}', \tilde{g}'^* \widetilde{F}) = ((R^q j'_{0*}) g'^*_0 F_0)_{\overline{x}}$$

pour les valeurs de q envisagées, d'où le résultat.

Reste à montrer que les conditions (i) à (iii) sont équivalentes à (iv). Or, utilisant la forme (i), on voit que ces conditions sont stables par extension de la base $Y' \to Y$ localement quasi-finie, d'où résulte aussitôt, sous la forme (ii), qu'elles impliquent (iv). D'autre part, (iv) implique (iii), car pour vérifier (iii) on voit tout de suite, utilisant par exemple la suite spectrale de Leray, ou le résultat de descente XII 6.8, que l'on peut supposer Y' et Y'' affines. Mais alors par le « Main Theorem » EGA IV 8.12.8 $Y'' \to Y'$
181 se factorise en $Y'' \xrightarrow{i'_1} Y'_1 \xrightarrow{i'_2} Y'$, avec i'_1 une immersion ouverte, et i'_2 un morphisme fini. Utilisant VIII 5.5, VIII 5.8 pour i'_2, on est réduit à vérifier (ii) pour i'_1, qui relève de (iv). Ceci achève la démonstration de 1.10.

Définition 1.11. Un morphisme $g : X \to Y$ de préschémas qui satisfait à une des conditions équivalentes (i) à (iv) de 1.10 est appelé morphisme localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. localement n-acyclique pour $\mathbf{L}$). On définit d'une manière évidente (comparer 1.7) les notions de morphisme localement acyclique, et de morphisme universellement localement 0-acyclique (resp. ...) pour $\mathbf{L}$.

On peut naturellement varier les énoncés (i) à (iii) de 1.10. Ainsi, dans (iii) et (iv) on peut se borner à un faisceau F constant et de la forme G_I, G un ensemble fini (resp. un $\mathbf{L}$-groupe fini, resp. G de la forme $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$, avec $\ell \in \mathbf{L}$, $\nu \in \mathbf{N}$) ; cela résulte facilement de VIII 5.2, VIII 5.3 et de XII 6.5. Signalons également la variante suivante :

Corollaire 1.12. Supposons $g : X \to Y$ localement de type fini. Pour vérifier la 0-acyclicité (resp. ...) locale, il suffit de vérifier 1.10 (i) dans le cas où le point géométrique $\overline{x}$ est fermé dans la fibre géométrique $X_{\overline{y}}$.

En effet, dans la démonstration de (i) ⇒ (iii) de 1.10, on a vérifié (iii) fibre par fibre, et il suffisait de le faire pour les fibres aux points géométriques $\overline{x}$ qui sont fermés dans leur fibre géométrique, puisque g est localement de type fini VIII 3.13 b). **182**

Proposition 1.13. (i) Soient $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ des morphismes de schémas, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$, et $n \in \mathbf{N}$, et supposons que g soit surjective, et localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. localement n-acyclique pour $\mathbf{L}$). Alors h est localement 0-acyclique (resp. ...) si et seulement si $f = hg$ l'est.

(ii) Soit $\{g_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}$ un système projectif de morphismes de préschémas tels que les morphismes $X_\alpha \to X_\beta$ et $Y_\alpha \to Y_\beta$ soient affines. Soit g la limite projective des $\{g_\alpha\}$ VII 5.1. Alors si tous les g_α sont localement 0-acycliques (resp. ...), il en est de même de g.

C'est un sorite analogue à 1.9.

Remarques 1.14. Pour simplifier sa tâche, le rédacteur a omis dans 1.10 à 1.13 de traiter également la cas de $n = -1$, et il laisse au lecteur le soin de se convaincre que les énoncés, définitions et démonstrations s'appliquent essentiellement sans changement à ce cas. Ainsi, avec les notations de 1.10, la condition (i) s'énonce en disant que les morphismes induits locaux $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ sont (-1)-acycliques i.e. 1.5 surjectifs, et les conditions (ii) à (iv) s'énoncent en disant que le morphisme de changement de base $g'^*(i'_*(F)) \to j'_*(g''^*(F))$ est un monomorphisme. Sous ces conditions, on dira donc que g est localement (-1)-acyclique. Cette condition est donc stable par extension lo- **183**
calement quasi-finie de la base. Comme exemple, signalons qu'un morphisme plat est localement (-1)-acyclique, car pour un tel morphisme la condition de surjectivité pour les $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ est une conséquence bien connue de la platitude de ces morphismes. D'autre part, signalons aussi que lorsque f est localement de présentation finie, alors f est localement (-1)-acyclique si et seulement si il est universellement ouvert, du moins lorsque Y est localement noethérien : cela résulte en effet aisément de EGA IV 14.4.9, 1.10.3. Pour un tel morphisme, la (-1)-acyclicité locale implique par suite la (-1)-acyclicité locale universelle. (Il est d'ailleurs très probable [42] que dans ces derniers énoncés, l'hypothèse localement noethérienne sur Y soit inutile : c'est en tous cas ainsi si l'ensemble des composantes irréductibles de Y est localement fini EGA IV 14.4.10.)

Théorème 1.15. Soient $g : X \to Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ un ensemble de nombres premiers, n un entier naturel (resp. $n = 1$). On suppose que g est $(n-1)$-acyclique pour $\mathbf{L}$ et localement $(n-1)$-acyclique pour $\mathbf{L}$ 1.3, 1.7, 1.11, 1.14. Soit F un faisceau sur Y, que pour $n \geq 1$ on suppose muni d'une structure de faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion (resp. d'une structure de faisceau en groupes), et soit ξ un

[42] Cela a été effectivement vérifié par M. Raynaud. Cf. réédition de EGA IV 14 !

élément de $H^n(X, g^*(F))$. Pour que ξ provienne d'un élément de $H^n(Y, F)$ (qui est alors uniquement déterminé, grâce à l'hypothèse de $(n-1)$-acyclicité sur g), il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, algébrique sur un point y de Y, l'image $\xi_{\overline{y}}$ de ξ
184 dans $H^n(X_{\overline{y}}, F|X_{\overline{y}})$ soit dans l'image de $H^n(\overline{y}, F_{\overline{y}})$ (ce qui, pour $n \geq 1$, signifie qu'on a $\xi_{\overline{y}} = 0$).

Notons tout de suite qu'on conclut de 1.15 que, sous les conditions préliminaires envisagées pour g, g est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$) si et seulement si pour tout $\overline{y}$ comme dessus, $X_{\overline{y}}$ est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. est 1-asphérique pour $\mathbf{L}$) : le « si » résulte en effet directement de 1.15 et des définitions, le « seulement si » étant de toutes façons immédiat par 1.9.1. Ceci dit, une récurrence immédiate sur n fournit le

Corollaire 1.16. Soit g un morphismes quasi-compact et quasi-séparé qui est localement $(n-1)$-acyclique pour $\mathbf{L}$, où n est un entier naturel donné (resp. où $n = 1$). Alors g est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. est 1-asphérique pour $\mathbf{L}$) si et seulement si pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, algébrique sur un point y de Y, la fibre $X_{\overline{y}}$ est n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$).

Corollaire 1.17. Soient $g : X \to Y$ un morphisme de préschémas, $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ un ensemble de nombres premiers, n un entier naturel (resp. $n = 1$). Pour que g soit localement n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$) il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, si $\tilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ est le morphisme des localisés stricts de X et Y (en $\overline{x}$ et le point géométrique correspondant $\overline{y}$ de Y) induit par g, chaque fibre géométrique $X_{\overline{z}}$ de g, relativement à un point géométrique $\overline{z}$ de Y algébrique sur un point z de Y, soit n-acyclique pour $\mathbf{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$).

185 La nécessité résulte en effet du critère 1.10. (i) et de 1.9.1., pour la suffisance on procède par récurrence sur n, ce qui nous permet, lorsque $n \geq 1$, de supposer que g est déjà localement $(n-1)$-acyclique pour $\mathbf{L}$. Il en est alors de même des morphismes $\tilde{g}$, et 1.16 implique alors que $\tilde{g}$ est n-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbf{L}$), ce qui en vertu du critère 1.10 (i) implique que g est localement n-acyclique (resp. localement 1-asphérique) pour $\mathbf{L}$.

Corollaire 1.18. Avec les notations de 1.17, si g est localement de type fini, alors dans le critère énoncé, on peut se borner à prendre des points géométriques $\overline{x}$ dont la localité x est fermée dans sa fibre.

Cela résulte en effet de la démonstration donnée et de 1.12.
Démonstration de 1.15 [42]. Montrons d'abord qu'on peut supposer Y strictement local. Dans le cas abélien, $n \geq 1$, la suite spectrale de Leray pour g et $g^*(F)$, jointe à $R^i g_*(g^*(F)) = 0$ pour $0 < i \leq n-1$, et $F \xrightarrow{\sim} g_* g^*(F)$, exprimant l'hypothèse de $(n-1)$-acyclicité de g, implique qu'on a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^n(Y, F) \longrightarrow H^n(X, g^*(F)) \longrightarrow H^0(Y, R^n g_*(g^*(F)),$$

qui montre qu'il suffit de prouver que l'image de ξ dans le troisième terme est nul. Ceci se vérifie fibre par fibre, et compte tenu de VIII 5.2 on est ramené au cas où Y est strictement local. Le cas $n = 0$, F étant un faisceau d'ensembles, se traite de la même manière, car l'hypothèse sur g implique que $F \to g_* g^*(F)$ est injectif, et ξ s'identifie à une section du deuxième faisceau, dont il s'agit de montrer qu'elle provient d'une section du
186 premier : cela se vérifie encore fibre par fibre, et on applique VIII 5.3. Le même argument

[42] Le lecteur qui ne s'intéresserait qu'au cas noethérien est invité à se reporter à 1.18.

essentiellement est valable dans le cas non commutatif, avec $n = 1$, en utilisant la suite exacte XII 3.2

$$H^1(Y, F) \longrightarrow H^1(X, g^*(F)) \longrightarrow H^0(Y, R^1 g_*(g^*(F)),$$

et utilisant VIII 5.3.

Nous supposons donc Y strictement local, donc X quasi-compact et quasi-séparé. Le morphisme $g : X \to Y$ satisfait aux conditions de XII 6.10, ce qui nous ramène au cas où pour toute partie fermée Y_1 de Y distincte de Y, la restriction de ξ à $X_1 = X \times_Y Y_1$ est dans l'image de $H^n(Y_1, F|Y_1) \to H^n(X_1, g^*(F)|X_1)$, et à vérifier dans ce cas qu'on peut trouver un morphisme fini $f : Y' \to Y$, dont l'image dans Y contient un ouvert non vide de Y, et tel que l'image inverse ξ' de ξ sur $X' = X \times_Y Y'$ soit contenue dans l'image de $H^n(Y', F') \to H^n(X', g'^*(F'))$. On notera en effet que, compte tenu de VIII 5.5, VIII 5.8, la condition 2°) de loc. cit. est automatiquement satisfaite pour ce morphisme $f : Y' \to Y$.

Pour trouver un tel f, nous pouvons supposer Y réduit, et nous considérons un point maximal y de Y. Soit $\overline{y}$ le point géométrique correspondant à une clôture séparable de $k(y)$, de sorte que $\overline{y}$ est limite projective filtrante d'ouverts U_i de schémas finis intègres Y_i sur Y, dont chacun est tel que son image dans Y contient un voisinage de y. Utilisant l'hypothèse sur ξ, on voit qu'il existe un indice i tel que l'image inverse de ξ sur $X \times_Y U_i$ est nulle si $n \geq 1$, resp. est dans l'image de $H^0(U_i, F_{U_i})$ si $n = 0$.

Nous prendrons Y' égal à Y_i, et notons qu'on peut supposer $U' = U_i$ égal à l'image inverse d'un voisinage ouvert affine U de y dans Y, de sorte qu'on voit que l'image inverse de ξ sur $X \times_Y Z'$ (où $Z' = Y' - U'$ est l'image inverse de $Z = X - U$ dans Y') est dans l'image de $H^n(Z', F_{Z'})$. Quitte à remplacer Y par Y', nous voyons donc que nous sommes réduits au cas suivant : il existe un ouvert affine U de Y, de complémentaire Z, tel que les restrictions de ξ à X_U et à X_Z appartiennent respectivement à l'image de $H^n(U, F_U)$ et à l'image de $H^n(Z, F_Z)$; de plus, si $n \geq 1$, on peut supposer ces restrictions nulles. **187**

Lorsque $n \geq 1$, nous allons montrer que sous ces conditions, on a $\xi = 0$. Pour simplifier les notations, nous écrirons Y' au lieu de X, et nous désignons par U', Z' les images inverses de U, Z dans Y', par F' l'image inverse $g^*(F)$. Notons $i : U \to Y$, $j : Z \to Y$, $i' : U' \to Y'$, $j' : Z' \to Y'$ les inclusions,

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g_U"] & Y' = X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[d, "g_Z"] \\ U \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "j"] & Z, \end{tikzcd}$$

et considérons la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow F'_{U',Y'} \longrightarrow F' \longrightarrow F'_{Z',Y'} \longrightarrow 0.$$

Comme l'image de ξ dans $H^n(Y', F'_{Z',Y'}) = H^n(Z', F'_{Z'})$ est nulle, ξ provient d'un élément de $H^n(Y', F'_{U',Y'})$, et la restriction de ce dernier sur U' est égale à celle de ξ, donc est nulle. Comme $F'_{U',Y'}$ est isomorphe à l'image inverse de $F_{U,Y}$, nous sommes ainsi ramenés au cas d'un faisceau de la forme $F_{U,Y}$, donc nous pouvons supposer $F_Z = 0$ (ce qui tient compte de l'hypothèse $\xi|Z' = 0$). Notons que si $F \to G$ est un monomorphisme de faisceaux abéliens de $\mathbf{L}$-torsion (resp. de faisceaux en groupes), il suffit de prouver que l'image η de ξ dans $H^n(Y', G')$ est dans l'image de $H^n(Y, G)$ i.e. est nulle XII 6.6. Cela nous permet de remplacer F par $i_*(F_U)$, compte tenu que l'hypothèse $F_Z = 0$ implique **188** que l'homomorphisme canonique $F \to i_*(F_U)$ est injectif. Or comme g est localement $(n-1)$-acyclique pour $\mathbf{L}$, et a fortiori 0-acyclique pour $\mathbf{L}$ (car $n \geq 1$), il s'ensuit que l'image inverse de $i_*(F_U)$ sur Y' s'identifie à $i'_*(F'_{U'})$, de sorte qu'on est ramené à montrer que l'image η de ξ dans $H^n(Y', i'_*(F'_{U'}))$ est nulle. Or la restriction de η à U' est nulle, et il suffit donc de vérifier que l'homomorphisme

$$(*) \qquad H^n(Y', i'_*(F'_{U'})) \longrightarrow H^n(U', F'_{U'})$$

est un monomorphisme. Dans le cas abélien, on utilise la suite spectrale de Leray pour i' et $F'_{U'}$:

$$E_2^{p,q} = H^p(Y', R^q i'_*(F'_{U'})) \Longrightarrow H^*(U', F'_{U'}),$$

et les relations

$$(**) \qquad E_2^{p,q} = 0 \text{ pour } 0 < p \leq n-1 \quad , \quad q \leq n-1.$$

Pour vérifier ces dernières, on note que l'hypothèse de $(n-1)$-acyclicité locale de g pour $\mathbf{L}$ implique que l'on a des isomorphismes

$$R^q i'_*(F'_{U'}) \simeq g^*(R^q i_*(F_U)) \text{ pour } q \leq n-1,$$

189 et compte tenu du fait que g est $(n-1)$-acyclique pour $\mathbf{L}$, donc que $H^p(Y, G) \xrightarrow{\sim} H^p(Y', G')$ pour $p \leq n-1$ et tout faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion G sur Y, on trouve $(**)$ puisque $H^p(Y, G) = 0$ pour $p > 0$, et on trouve de même

$$(***) \qquad E_2^{0,q} \simeq H^0(Y, R^q i_*(F_U)) \text{ pour } \quad q \leq n-1.$$

La suite spectrale de Leray considérée donne alors naissance à une suite exacte, qui forme la deuxième ligne du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^0(Y, R^{n-1} i_*(F_U)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^n(Y, i_*(F_U)) = 0 \arrow[d] & \\
H^0(Y', R^{n-1} i'_*(F'_{U'})) \arrow[r] & H^n(Y', i'_*(F'_{U'})) \arrow[r] & H^n(U', F'_{U'}),
\end{tikzcd}$$

où la première flèche verticale est bijective en vertu de $(***)$. On lit sur le diagramme que $(*)$ est injectif, ce qui achève la démonstration dans ce cas. Dans le cas non abélien, $n = 1$, on utilise le même diagramme avec $n = 1$:

$$\begin{tikzcd}
H^0(Y, i_*(F_U)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(Y, i_*(F_U)) = 0 \arrow[d] & \\
H^0(Y', i'_*(F'_{U'})) \arrow[r] & H^1(Y', i'_*(F'_{U'})) \arrow[r] & H^1(U', F'_{U'}),
\end{tikzcd}$$

XII 3.2, où la première flèche verticale est encore bijective grâce à l'hypothèse de 0-acyclicité locale et globale faite sur g, et on conclut encore l'injectivité de $(*)$ dans ce cas.

Traitons enfin le cas $n = 0$. Remarquons que la donnée d'une section ξ de F' revient, en vertu de , à la donnée d'une section $\xi_{U'}$ de $F'_{U'}$ et d'une section $\xi_{Z'}$ de $F'_{Z'}$, telles que l'image de $\xi_{Z'}$ par l'homomorphisme naturel

$$F'_{Z'} \longrightarrow j'^*(i'_*(F'_{U'}))$$

190 soit la section du deuxième membre induite par $\xi_{U'}$. Par hypothèse, il existe des sections η_Z et η_U de F_Z et F_U respectivement, qui induisent $\xi_{Z'}$ et $\xi_{U'}$. Tout revient à voir qu'elles satisfont à la condition de compatibilité analogue, exprimant que ce sont les restrictions d'une même section η de F. Il faut vérifier l'égalité de deux sections de $j^*(i_*(F_U))$, et pour ceci, comme $Z' \to Z$ est surjectif (g étant surjectif puisque (-1)-acyclique par hypothèse), il suffit de vérifier que les deux sections correspondantes

de ${g_Z}^*(j^*(i_*(F_U)) = j'^*(g^*(i_*(F_U))$ sont égales. Or le faisceau envisagé, grâce à l'homomorphisme de changement de base

$$(*) \qquad g^*(i_*(F_U)) \longrightarrow i'_*({g_U}^*(F_U)) = i'_*(F'_{U'}),$$

s'envoie dans $j'^*(i'_*(F'_{U'}))$, et ce dernier homomorphisme est injectif, car il en est ainsi de $(*)$ grâce à l'hypothèse que g est localement (-1)-acyclique. Il suffit donc de vérifier que les deux sections de $j'^*(i'_*(F'_{U'}))$, images des deux sections précédentes, sont égales. Or on constate aussitôt que ces sections ne sont autres que celles déjà envisagées plus haut, qui sont égales par hypothèse. Cela achève la démonstration.

Remarque 1.18. On peut donner un raffinement de 1.15, qui fournit une démonstration nettement plus simple de 1.15 lorsque Y est supposé localement noethérien. Pour ceci, en plus des hypothèses préliminaires sur g, F, supposons qu'il existe un nombre fini de points géométriques $f_i : \overline{y}_i \to Y$ de Y tels que le morphisme

$$F \longrightarrow \prod_i f_{i*}({f_i}^*(F))$$

soit injectif (hypothèse automatiquement vérifiée si Y est noethérien et si F est constructible IX 2.14). Je dis que sous ces conditions, le critère 1.15 est valable en se bornant aux seuls points géométriques $\overline{y}_i$. En effet, en vertu de XII 6.6 on peut supposer que F est lui-même de la forme $f_*(M_{\overline{y}})$, où M est un ensemble resp. un groupe resp. un groupe abélien de $\mathbf{L}$-torsion, et $f : \overline{y} \to Y$ un point géométrique. Soit $f' : X' = X_{\overline{y}} \to X$ le morphisme canonique. Supposant, pour fixer les idées, $n \geq 1$, l'hypothèse locale faite sur g implique qu'on a **191**

$$g^*(f_*(M_{\overline{y}})) \simeq f'_*(M_{X'}) \quad , \quad R^i f'_*(M_{x'}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

la deuxième relation provenant du fait que la premier membre est isomorphe à $g^*(R^i f_*(M_{\overline{y}}))$, qui est nul puisque manifestement $R^i f_*(M_{\overline{y}}) = 0$ pour $i \geq 1$. De ces relations, on conclut que

$$H^n(X, g^*(F)) \simeq H^n(X, f'_*(M_{X'})) \longrightarrow H^n(X', M_{X'})$$

est injectif, en utilisant la suite spectrale de Leray pour f', ce qui prouve bien qu'un élément ξ de $H^n(X, F)$ induisant un élément nul de $H^n(X_{\overline{y}}, F)$ est nul. Pour déduire de ceci une démonstration simplifiée de 1.15 dans le cas où Y est localement noethérien, on note qu'on peut se borner au cas Y noethérien, et un passage à la limite facile, utilisant IX 2.7.2 et VII 5, permet de se ramener au cas où F est de plus constructible, justiciable de l'énoncé qu'on vient de prouver.

2. Acyclicité locale d'un morphisme lisse

192

Le théorème est le suivant :

Théorème 2.1. Soient $g : X \to Y$ un morphisme lisse et soit $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ l'ensemble complémentaire de l'ensemble des caractéristiques résiduelles de X. Alors g est localement acyclique et localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$.

Notons d'abord le corollaire :

Corollaire 2.2. Soit $g : \mathbf{E}^m_Y \to Y$ le morphisme structural de l'espace affine. Alors g est acyclique et 1-asphérique pour l'ensemble $\mathbf{L}$ complémentaire de l'ensemble des caractéristiques résiduelles de Y.

En effet, par récurrence sur m et 1.9 (i) on se ramène au cas $m = 1$. D'après 2.1 on sait que g est localement n-acyclique et localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, donc que la condition locale de 1.16 est satisfaite. Il suffit donc de démontrer que les fibres géométriques de $\mathbf{E}^1_Y$ sont acycliques et 1-asphériques pour $\mathbf{L}$, c'est-à-dire que Spec $k[t]$ est acyclique et 1-asphérique pour $\mathbf{L}$ si k est un corps séparablement clos de caractéristique $p \notin \mathbf{L}$, ce qui résulte de IX 4.6 pour l'assertion d'acyclicité, et pour la 1-asphéricité est bien connu.
193 Plus généralement, soit X' un revêtement normal irréductible galoisien de $X = \mathbf{P}^1_k$, qui soit non ramifié en dehors du point ∞ et dont la ramification en ce point soit modérée. Prouvons que le degré n du revêtement est égal à 1. Or on a la formule de Hurwitz :

$$2(g'-1) = 2n(g-1) + \deg \mathfrak{d}_{X'/X}$$

où g, g' sont le genre de X, X', et $\mathfrak{d}_{X'/X}$ le diviseur différente. On a $g = 0$, et l'hypothèse de ramification modérée implique $\deg \mathfrak{d}_{X'/X} \leq n-1$, d'où $2(g'-1) \leq -(n+1)$ donc $n \leq 2(1-g') - 1$, et comme $g' \geq 0$, on conclut $n \leq 1$ donc $n = 1$, C.Q.F.D.

Démonstration de 2.1. L'assertion est locale sur X et Y pour la topologie étale, et on peut donc supposer SGA 1 II 1.1 que g est le morphisme structural de l'espace affine $\mathbf{E}^m_Y$, et que Y est affine. En appliquant la transitivité de l'acyclicité locale 1.13. (i) et le fait que $\mathbf{E}^m_Y = \mathbf{E}^{m-1}_{\mathbf{E}^1_Y}$ on se réduit immédiatement au cas $m = 1$, c'est-à-dire, au cas $X = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_Y[t]$.

Appliquons 1.18. On est ramené à démontrer que les fibres géométriques du morphisme de schémas strictement locaux $\tilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, déduit d'un couple de points géométriques $\overline{x}$, $\overline{y}$, où $\overline{x}$ est fermé dans la fibre $X_{\overline{y}}$, sont acycliques pour $\mathbf{L}$ et 1-asphériques pour $\mathbf{L}$. On peut évidemment supposer $Y = \widetilde{Y}$. Soit $Y' \to Y$ un morphisme fini, local, et surjectif, de sorte que Y' est strictement local, et soient $\overline{y}'$ le point de Y' au-dessus de $\overline{y}$, $\overline{x}'$ le point de X' au-dessus de $\overline{x}$ et de $\overline{y}'$. Puisque $X' \to X$ est fini, le localisé strict de X' au point $\overline{x}'$ n'est autre que $\widetilde{X}' = \widetilde{X} \times_Y Y'$. Par suite, toute fibre géométrique de $\widetilde{X}'/Y'$ est déduite d'une fibre géométrique de $\widetilde{X}/Y$ par extension algébrique (nécessaire-
194 ment radicielle) du corps de base, de plus il y a au moins une fibre géométrique de $\widetilde{X}'/Y'$ au-dessus de chaque fibre géométrique de $\widetilde{X}/Y$. On peut donc VIII 1.1 remplacer Y par Y', et par choix convenable de Y', on se ramène ainsi au cas où $k(\overline{x}) = k(\overline{y})$. Alors $\overline{x}$ est un point rationnel de la fibre $X_{\overline{y}} = \operatorname{Spec} k(\overline{y})[t]$, disons le point $t = a^0$. En relevant a^0 en une section a de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ et en faisant la « translation » $t_1 = t - a$ on est ramené au cas où le point $\overline{x}$ est le point $\{t = 0\}$ de Spec $k(\overline{y})[t]$. Posons $A = \Gamma(\widetilde{Y}, \mathscr{O}_{\widetilde{Y}})$, de sorte que A est un anneau strictement local.

Notation 2.3. Soit A un anneau hensélien local. On dénote par $A\{t\}$ le hensélisé de l'anneau $A[t]$ en l'idéal premier engendré par rad A et t.

Corollaire 2.4. Soient A hensélien et A' une A-algèbre finie. Alors

$$A'\{t\} \simeq A' \otimes_A A\{t\}.$$

Cela résulte immédiatement de VIII 4.1. Notons que si A est strictement local, il en est de même de $A\{t\}$.

La démonstration du théorème est ramenée au lemme suivant :

Lemme 2.5. Soit A un anneau hensélien de caractéristique résiduelle p. Alors chaque fibre géométrique de Spec $A\{t\}$ sur Spec A est acyclique et 1-asphérique pour $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \{p\}$.

Notons que puisque $A\{t\}$ est le hensélisé de $A[t]$, une fibre Spec $A\{t\} \otimes_A K$, K un
195 corps résiduel de A, est limite projective de schémas affines et de type fini X_i sur la

« droite » Spec $K[t]$, c'est-à-dire, limite de courbes algébriques affines. Donc chaque fibre géométrique de Spec $A\{t\}$ est limite de courbes affines $(X_i)_{\overline{K}}$ au-dessus du corps séparablement clos $\overline{K}$, et il s'ensuit de IX 5.7 et VII 5.7 que la dimension cohomologique des fibres géométriques est ≤ 1. Il suffit donc de vérifier que les fibres géométriques sont 1-asphériques pour $\mathbf{L}$, c'est-à-dire, qu'une telle fibre géométrique $\overline{Z}$ est connexe, non vide, et que $H^1(\overline{Z}, G) = 0$ pour chaque $\mathbf{L}$-groupe fini G.

Écrivons $A = \varinjlim B_\alpha$ où les B_α sont des anneaux de type fini sur $\mathbf{Z}$. Le morphisme $B_\alpha \to A$ se factorise par le hensélisé A_α de B_α en l'idéal premier induit par rad A, d'où $A = \varinjlim A_\alpha$. On constate aisément qu'on a aussi $A\{t\} = \varinjlim A_\alpha\{t\}$. De plus, soient $\overline{y}$ un point géométrique de Spec A, $X_{\overline{y}}$ la fibre géométrique de $S = \operatorname{Spec} A\{t\}$ sur Spec A en $\overline{y}$, $\overline{y}_\alpha$ le point de Spec A_α induit par $\overline{y}$, et $X_{\alpha\,\overline{y}_\alpha}$ la fibre géométrique de Spec $A_\alpha\{t\}$ sur Spec A en $\overline{y}_\alpha$. On a $X_{\overline{y}} = \varprojlim X_{\alpha\,\overline{y}_\alpha}$. On est donc réduit pour la démonstration de 2.5 par 1.7 (ii) (appliqué aux morphismes $X_{\alpha\,\overline{y}_\alpha} \to \overline{y}_\alpha$) au cas $A = A_\alpha$, c'est-à-dire, où A est le hensélisé d'une algèbre de type fini sur $\mathbf{Z}$ en un idéal premier donné. Nous le supposons désormais. Rappelons qu'une telle algèbre est un anneau excellent EGA IV 7.8.3 (iii), 7.8.6 (i), donc que A_α est également excellent (comme on voit facilement sur la définition, cf. EGA IV 18.7.6).

Vérifions la 0-acyclicité. (Pour un résultat plus général, cf. Appendice.) Puisque $A\{t\}/A$ admet la section « $t = 0$ », une fibre géométrique $\overline{Z}$ est non-vide. Pour voir qu'elle est **196**
connexe, on est réduit, en remplaçant A par un quotient 2.4, au cas où A est intègre, et où $\overline{Z}$ est la fibre géométrique au-dessus du point générique de Spec A. Il suffit de prouver que pour toute extension finie séparable K' de corps de fractions K de A, le schéma $Z_{K'}$ ($Z = \operatorname{Spec} A\{t\} \otimes_A K$) est connexe. Soient A' la normalisée de A dans K' (qui est une A-algèbre finie EGA IV 7.8.2) et Z' la fibre générique de Spec $A'\{t\}$ sur A'. D'après 2.4, on a $A'\{t\} \simeq A' \otimes_A A\{t\}$, d'où $Z_{K'} \simeq Z'$. Remplaçons A par A'. Il suffit alors de démontrer que Z est intègre, et il suffit de démontrer que $A\{t\}$ est intègre. Mais A étant normal, $A[t]$ l'est, donc $A\{t\}$ l'est aussi SGA 1 I 9.5. (i), d'où le résultat.

La démonstration de 2.5, et par suite de 2.1, est ainsi réduite au lemme suivant, qui sera démontré dans le prochain numéro :

Lemme 2.6. *Soit A un anneau hensélien et excellent, et soit $\overline{Z}$ une fibre géométrique de Spec $A\{t\}/\operatorname{Spec} A$. Alors chaque revêtement principal galoisien $\overline{Z}'$ de $\overline{Z}$, de groupe G d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p de A, est trivial.*

3. Démonstration du lemme principal

197

En remplaçant A par une algèbre finie A' (cf. 2.4), on réduit l'assertion 2.6 au cas où A est intègre et où $\overline{Z}$ est la fibre géométrique générique de Spec $A\{t\}$ sur Spec A. Soient K le corps des fractions de A et $Z = \operatorname{Spec} A\{t\} \otimes_A K$. Si $\overline{Z}'/\overline{Z}$ est un revêtement principal galoisien, on peut le descendre à un $Z_{K'}$, où K' est une extension finie séparable convenable de K. En remplaçant 2.4 A par son normalisé dans K', qui est une A-algèbre finie EGA IV 7.8.3 (vi), on est ramené à démontrer le lemme sous la forme suivante :

Lemme 3.1. *Avec les notations de 2.6, supposons A normal, et soit Z'/Z un revêtement étale principal galoisien, de groupe G d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p de A. Alors Z' est induit par une extension galoisienne K' de K, i.e. (SGA 1 IX 6.2) le revêtement $\overline{Z}'$ de $\overline{Z}$ déduit de Z' est trivial.*

Démonstration. Soit B' le normalisé de $A\{t\}$ dans l'anneau des fonctions rationnelles de Z', et considérons les idéaux premiers P de hauteur 1 de $A\{t\}$ tels que l'algèbre B' sur $A\{t\}$ soit ramifiée en P. Puisque Z'/Z est étale, P n'est pas sur le point générique de

Spec A, i.e. $\mathfrak{p} = P \cap A \neq 0$. Donc $A\{t\}/\mathfrak{p}A\{t\} = (A/\mathfrak{p})\{t\}$ est intègre et de dimension au plus égale à $\dim A$. Puisque $A\{t\}$ est excellent EGA IV 7.8.6 (i) et 18.7.6 donc caténaire,
198 on a $\dim \operatorname{Spec} A\{t\}/P = (\dim A + 1) - 1 = \dim A \geq \dim A\{t\}/\mathfrak{p}A\{t\}$, d'où $P = \mathfrak{p}A\{t\}$ puisque $P \supset \mathfrak{p}A\{t\}$.

Soient donc $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ les idéaux premiers de hauteur 1 de A tels que $B'/A\{t\}$ soit ramifié en les idéaux $\mathfrak{p}_i A\{t\}$, soit s le p.g.c.d. des ordres des groupes d'inertie SGA IV 2 $G_i \subset G$ pour B' en les idéaux premiers au-dessus des $\mathfrak{p}_i A\{t\}$, qui est un entier divisant l'ordre de G, donc premier à p. Soit $f \in A$ une fonction qui s'annule avec ordre 1 en chaque $\mathfrak{p}_i$ (un tel f existe, comme il résulte par exemple de Bourbaki, Alg. Comm., Chap. II, § 3, cor. à prop. 17). En remplaçant 2.4 A par son normalisé A_i dans l'extension finie $K_1 = K[x]/(x^s - f)$ de K et B' par le normalisé de $A_1 \otimes_A B'$, on se réduit par le lemme d'Abhyankar SGA 1 X 3.6 au cas où B' n'est ramifiée en aucun idéal premier de hauteur 1 de $A\{t\}$.

Alors l'algèbre $B'/A\{t\}$ est aussi étale au-dessus de la fibre de $\operatorname{Spec} A\{t\}$ en tout point de $\operatorname{Spec} A$ de codimension 1. En effet, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de A. Puisque A est normal, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, donc régulier, donc $A\{t\} \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ est aussi régulier — en effet, c'est une limite de schémas étales au-dessus de $A_{\mathfrak{p}}[t]$. Par hypothèse, l'algèbre $B'/A\{t\}$ est étale en chaque point de codimension ≤ 1 de $\operatorname{Spec} A\{t\} \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$, donc elle est étale partout par le théorème de pureté de Zariski-Nagata SGA 1 X 3.1 ; pour une démonstration, voir p. ex. SGA 2, X 3.4).

En remplaçant 2.4 A par une A-algèbre finie convenable, on se ramène au cas où de plus l'algèbre B'/tB' sur $A\{t\}/tA\{t\} \simeq A$ est complètement décomposée au-dessus du point générique de $\operatorname{Spec} A$. Donc il suffit de démontrer que sous ces conditions, l'algèbre
199 B' sur $A\{t\}$ est « triviale », et puisque $A\{t\}$ est hensélien, il suffit de démontrer que B' sur $A\{t\}$ est étale ; en effet, il résulte du fait que l'algèbre B'/tB' splitte au-dessus du point générique de $\operatorname{Spec} A$ qu'elle splitte sur $\operatorname{Spec}(A)$ (SGA 1 I 10.1, donc que les extensions résiduelles de B' sur l'idéal maximal de $A\{t\}$ sont triviales, et on applique (EGA IV 18.5.14). On est donc ramené au lemme suivant :

Lemme 3.2. Soit B un anneau local excellent et normal, et soit $0 \neq t \in \operatorname{rad} B$ tel que B/tB soit normal. Soit B' une B-algèbre finie intègre normale, contenant B, telle que :

(i) L'algèbre B'/tB' sur B/tB est complètement décomposée en les points maximaux de $\operatorname{Spec}(B/tB)$.
(ii) L'algèbre B' sur B est étale en les points de codimension 1 de $\operatorname{Spec}(B/tB)$.

Alors B' est étale sur B.

Démonstration. En vertu de (ii), l'assertion est triviale pour $\dim B \leq 2$, c'est-à-dire pour $\dim B/tB \leq 1$. Supposons que B'/B ne soit pas étale, soit x un point maximal de l'ensemble des points de $\operatorname{Spec} B/tB$ au-dessus duquel B'/B n'est par étale, et soit C l'anneau local de $\operatorname{Spec} B$ en x. Alors C est encore un anneau excellent et normal (EGA IV 7.8.2), on a $0 \neq t \in \operatorname{rad} C$, et (i) et (ii) sont vrais pour la C-algèbre $C' = C \otimes_B B'$. On peut donc supposer $B = C$, c'est-à-dire, que B' est étale sur B au-dessus de chaque point
200 de $\operatorname{Spec} B/tB$, sauf peut-être à l'origine. Puisque B/tB est normal (en fait unibranche suffirait), la condition (i) implique que l'algèbre B'/tB' est complètement décomposée en dehors de l'origine. De plus, on peut supposer $\dim B \geq 3$. On est donc ramené au lemme suivant :

Lemme 3.3. Soit B un anneau local excellent et normal, $0 \neq t \in \operatorname{rad} B$, $\dim B \geq 3$. Soit B' une B-algèbre finie normale intègre, contenant B, telle que l'algèbre B'/tB' de B/tB soit complètement décomposée en dehors de l'origine. Alors B' est étale sur B.

Démonstration. Soient $X = \operatorname{Spec} B$, $X_1 = X - \{x_0\}$, où x_0 est le point fermé, et soit $i : U \to X$ l'ouvert des $x \in X$ en lesquels l'algèbre B'/B est étale. Alors $(X - U) \cap V(t) = \{x_0\}$ est de dimension 0. Puisque $V(t)$ est défini par une équation, il s'ensuit que $\dim(X - U) \leq 1$ (EGA 0_{IV} 16.2.5), donc (X étant caténaire) $x \in X - U \Rightarrow \dim \mathscr{O}_{X,x} \geq \dim B - 1 \geq 2$, i.e. $\operatorname{codim}(X - U, X) \geq 2$.

Soit $X' = \operatorname{Spec}(B')$, U' l'image inverse de U dans X', alors, X étant universellement caténaire, la relation $\operatorname{codim}(X - U, X) \geq 2$ implique la relation $\operatorname{codim}(X' - U', X') \geq 2$ (EGA IV 5.6.10), donc, X' étant normal, on a

$$B' = \Gamma(X', \mathscr{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U', \mathscr{O}_{U'}).$$

Soit alors $\mathscr{B}' = \widetilde{B}'$ le faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres qui définit X' sur X, $\mathscr{C}$ sa restriction à U, alors la formule précédente équivaut à la formule

$$\mathscr{B} \xrightarrow{\sim} i_*(\mathscr{C}),$$

et 3.3 se ramène par suite à l'énoncé suivant (où il n'est plus question de B') : Soient B, t comme dans 3.3, $X = \operatorname{Spec}(B)$, $Y = \operatorname{Spec}(B/tB)$, U un voisinage ouvert de $Y_1 =$ **201**
$Y - \{x_0\}$ dans $X_1 = X - \{x_0\}$, U' un revêtement étale de U dont la restriction à Y_1 soit complètement décomposée, $\mathscr{C}$ le faisceau de $\mathscr{O}_{U'}$-algèbres définissant U', alors ($i : U \to X$ désignant l'immersion canonique) $i_*(\mathscr{C})$ est une Algèbre cohérente étale sur X (ou, ce qui revient au même, grâce à la relation $\operatorname{prof} \mathscr{O}_{X,x} \geq 2$ pour $x \in X - U$ signalée plus haut et à EGA IV 5.10.5, U' se prolonge en un revêtement étale X' de X).

Soit $\widehat{X} = \operatorname{Spec} \widehat{B}$, où $\widehat{B}$ est le complété de B. Alors $\widehat{B}$ est normal (EGA IV 7.8.3 (v)) et $\widehat{B}/B$ est fidèlement plat. Soit

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U} & \xrightarrow{i} & \widehat{X} \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

le diagramme cartésien déduit de $\widehat{X} \to X$. Puisque f est fidèlement plat, le foncteur i_* commute au changement de base f EGA IV 2.3.1, et on est ramené EGA IV 17.7.1 à prouver que $\hat{i}_*(\widehat{C})$ est une algèbre étale sur $\widehat{X}$. On peut donc remplacer B par $\widehat{B}$, c'est-à-dire, on peut supposer B complet. Dans ce cas, nous allons prouver que U' est un revêtement complètement décomposé de U (ce qui impliquera évidemment qu'il se prolonge en un revêtement étale de X, et achèvera la démonstration). Or cette assertion est maintenant conséquence immédiate de la « théorie de Lefschetz locale » SGA 2 X 2.1 (i) **202**
et 2.5, comme on constate immédiatement, compte tenu encore une fois de la relation $\operatorname{prof} \mathscr{O}_{X,x} \geq 2$ pour $\dim\{x\} = 1$.

Remarque 3.4. On peut prouver 3.2 et 3.3 sous des conditions plus générales, en suivant essentiellement la même démonstration : au lieu de supposer B excellent et normal, il suffit de supposer que le complété $\widehat{B}$ est normal (condition qui est stable par localisation, grâce aux résultats de EGA IV 7), ou seulement que le complété de B pour la topologie (tB)-adique soit normal, et quotient d'un anneau régulier.

4. Appendice : Un critère de 0-acyclicité locale

203

Les résultats du présent numéro ne seront plus utilisés dans la suite du séminaire.

Théorème 4.1. Soit $g : X \to Y$ un morphisme de schémas. On suppose g plat et à fibres séparables, et X et Y localement noethériens resp. g localement de présentation finie. Alors g est universellement localement 0-acyclique.

On peut évidemment supposer X et Y affines, ce qui permet, dans le cas respé, de se ramener au cas où Y donc X est noethérien, par la méthode standard de EGA IV 8, utilisant ici EGA IV 9.7.7. On peut donc se borner à prouver le premier énoncé. L'hypothèse étant stable par changement de base de type fini, on est réduit, compte tenu du passage à la limite 1.13 (ii), à prouver que g est localement 0-acyclique, et pour ceci on est ramené par 1.17 à prouver que si on suppose de plus g strictement local, alors les fibres géométriques de g sont connexes. Or c'est ce que dit EGA IV 18.9.8.

Corollaire 4.2. *Soit $g : X \to Y$ un morphisme de schémas, avec Y discret. Alors g est universellement localement 0-acyclique.*

On peut supposer que Y est le spectre d'un corps parfait k VIII 1.1. D'autre part, on peut supposer X affine, donc limite projective de schémas affines de type fini sur k, et
204 compte tenu de 1.13 (ii) on est ramené au cas où X est de type fini sur k. Enfin, on peut évidemment supposer X réduit, donc séparable sur k puisque k est parfait. La conclusion résulte alors de 4.1.

Corollaire 4.3. *Supposons que g soit surjectif, et satisfasse aux conditions de 4.1 ou de 4.2 ; dans le cas non respé de 4.1 on suppose de plus que g est, soit quasi-compact et quasi-séparé, soit universellement ouvert. Alors g est un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des faisceaux étales sur des préschémas variables.*

Dans les cas envisagés, g est universellement submersif et il résulte de VIII 9.1 que g est un morphisme de descente universelle pour la catégorie fibrée envisagée. Cela nous permet, pour la question d'effectivité, de nous borner au cas Y affine. On voit de plus, dans chacun des cas envisagés, que X se recouvre par un nombre fini d'ouverts affines X_i dont les images recouvrent Y. Remplaçant X par la somme disjointe des X_i, on peut alors supposer X affine, a fortiori quasi-compact et quasi-séparé sur Y. On conclut alors grâce au raisonnement de VIII 9.4.1, en utilisant le fait XVI 1.1 que pour un morphisme quasi-compact et quasi-séparé g, la formation de $g_*(F)$ (F un faisceau étale sur X) commute à tout changement de base $Y' \to Y$ qui est localement 0-acyclique.

Remarques 4.4. a) On obtient ainsi la démonstration (qui avait été laissée en suspens) de VIII 9.4 d), comme cas particulier de 4.3. Une démonstration diffé-
205 rente plus facile, n'utilisant pas le résultat assez délicat de EGA IV 18.9.8, s'obtiendrait en notant que grâce à VIII 9.1 on peut se borner au cas du morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ induit par une extension de corps K/k, or $\mathrm{Spec}(K)$ est universellement localement 0-acyclique sur $\mathrm{Spec}(k)$, car il est même universellement acyclique pour $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \{p\}$, $p = \operatorname{car} k$, comme on verra dans XVI 1.5.

b) On ignore si tout morphisme quasi-compact et quasi-séparé, surjectif et localement (-1)-acyclique (ou universellement localement (-1)-acyclique) est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des faisceaux étales sur des préschémas variables. Cet énoncé semble assez plausible, et améliorerait 4.3 et VIII 9.4 c), d). On le rapprochera de l'énoncé d'effectivité dans Murre, Sém. Bourbaki *n°* 293, p. 17.

c) Il est plausible que sous les conditions de 4.2, g est même localement acyclique pour L et localement 1-asphérique pour L, où L est l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de Y. On peut dans cette question supposer évidemment Y spectre d'un corps algébriquement clos k, et on peut montrer (SGA 1964/65) que la réponse est affirmative lorsqu'on dispose de la résolution des singularités pour les schémas de type fini sur k. Donc la réponse est affirmative lorsque Y est de caractéristique nulle, comme on voit en utilisant les résultats de Hironaka [42]

[42] Cf. SGA 1 XIII.

EXPOSÉ XVI

Théorème de changement de base par un morphisme lisse, et applications

M. Artin

1. Le théorème de changement de base par un morphisme lisse

207

Théorème 1.1. Soient $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$, $n \in \mathbf{N}$, et

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien, avec f quasi-compact et quasi-séparé[43], et g universellement localement 0-acyclique (resp. universellement localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. universellement localement n-acyclique pour $\mathbf{L}$) (XV 1.11). Alors pour chaque faisceau F d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) sur X, le morphisme de changement de base (XII 4.1.2)

$$\varphi^q : g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q f'_*)g'^* F$$

est bijectif pour $q = 0$ (resp. $q \leq 1$, resp. $q \leq n$).

En particulier, en appliquant XV 2.1, on trouve le

Corollaire 1.2. (Théorème de changement de base par un morphisme lisse). Supposons que le morphisme g de $(*)$ soit lisse, que f soit quasi-compact et quasi-séparé, et que $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ soit l'ensemble complémentaire à l'ensemble des caractéristiques résiduelles de Y. Alors pour chaque faisceau F d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) sur X, le morphisme de changement de base φ^q ci-dessus est bijectif pour 208
$q = 0$ (resp. pour $q = 0, 1$, resp. pour chaque q).

Démonstration de 1.1. Traitons d'abord le cas où $f : X \to Y$ est quasi-projectif : ce n'est qu'une conjonction du théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.1 et de la définition XV 1.9. En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où $\overline{f}$ est projectif, donc propre, et où i est une immersion ouverte. Or on sait XII 5.1 que le théorème de changement de base est vrai pour $\overline{f}$ quel que soit $g : Y' \to Y$. Puisque $g \times_Y \overline{Y} : Y' \times_Y \overline{Y} \to \overline{Y}$ est encore universellement 0-acyclique (resp. ...), on se ramène immédiatement par (XII 4.4 (ii)) à démontrer le théorème pour le morphisme i,

[43]N.D.E. : =cohérent XXX

c'est-à-dire, on est ramené au cas où f est une immersion ouverte. Alors le théorème est conséquence de la définition XV 1.10 (ii).

Traitons maintenant le cas général. L'assertion est locale sur Y, et on peut donc supposer Y affine.

Lemme 1.3. On peut de plus supposer X affine.

Démonstration. Procédant comme dans XII 6.1, on est réduit, pour prouver 1.1 pour un f
209 donné, à le prouver dans la situation déduite de la situation donnée par des changements de base $\widetilde{Y} \to Y$, $\widetilde{Y}' \to Y'$, pour un morphisme local $\tilde{g} : \widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}$ de localisés stricts de Y', Y induit par g, et à prouver que les homomorphismes

$$(*) \qquad H^q(\widetilde{X}, F) \longrightarrow H^q(\widetilde{X}', F') \quad (\text{où } F' = g'^*(F))$$

sont bijectifs pour $q \leq n$, où $\widetilde{X} = X \times_Y Y$, $\widetilde{X}' = X' \times_{Y'} Y'$. Cela nous ramène donc au cas où Y, Y', g sont strictement locaux, et à prouver dans ce cas la bijectivité des applications précédentes, admettant que 1.1 est prouvé pour f affine. Or soit (X_i) un recouvrement fini de X par des ouverts affines X_i, et soit Z le schéma somme des X_i, qui est donc affine et muni d'un morphisme surjectif $h : Z \to X$, d'où un morphisme $h' : Z' \to X'$. Notons que h est séparé, et qu'il est affine lorsque f est séparé. Ceci dit, appliquant le lemme de descente XII 6.8, on voit que pour prouver la bijectivité des applications $(*)$ pour $q \leq n$ et pour tout F, il suffit de prouver la bijectivité des applications correspondantes $H^q(Z, h^*(F)) \to H^q(Z', h'^*(F'))$, à condition que les homomorphismes de changement de base, pour $Z \to X$ et le changement de base $X' \to X$, soient des isomorphismes en dimension $\leq n$. Or si f est séparé, donc h est affine, il en est ainsi par hypothèse, ce qui prouve 1.1 lorsque f est supposé séparé. Dans le cas général, on peut alors appliquer le résultat précédent à h qui est toujours séparé, et on conclut encore que 1.1 est vrai pour f, ce qui prouve 1.3.

Remarque. On pourrait aussi invoquer la suite spectrale de Leray pour le recouvre-
210 ment ouvert (X_i) de X, et ses variantes non commutatives, mais cette méthode, qui n'est pas essentiellement différente du recours à XII 6.8, a le désavantage de nous obliger à distinguer à nouveau les trois cas habituels, travail qui a déjà été fait dans loc. cit.

Pour achever la démonstration du théorème dans le cas général, il suffit de ramener la démonstration au cas où $f : X \to Y$ est affine et de type fini, donc quasi-projectif. D'après 1.3, on peut supposer X affine. Soit alors $X = \varprojlim X_\alpha$, où $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ sont des schémas affines et de type fini sur Y. On termine avec la technique de passage à la limite habituelle (VII 5).

Compléments 1.4. a) Nous laissons au lecteur le soin de constater que la même démonstration donne encore une conclusion lorsqu'on suppose que g est universellement localement (-1)-acyclique (XV 1.14) : dans ce cas, l'homomorphisme de changement de base

$$\phi^0 : g^*(f_*(F)) \longrightarrow f'_*(g'^*(F))$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles F sur X. D'autre part, supposons à nouveau $n \geq 0$, on peut compléter 1.1 par l'énoncé d'injectivité suivant, contenu également dans la démonstration qui précède : si g est universellement localement 0-acyclique, alors pour tout faisceau en groupes F sur X, l'homomorphisme de changement de base ϕ^1 de 1.1 est un monomorphisme ; si g est universellement localement n-acyclique pour $\mathbf{L}$, alors l'homomorphisme ϕ^{n+1} de 1.1 est un monomorphisme pour tout faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion F sur X.

211 b) Il est sans doute possible de donner également une conclusion d'injectivité analogue à partir de l'hypothèse de 1-asphéricité locale pour $\mathbf{L}$ de g, en introduisant les invariants de 2-cohomologie non commutative de la thèse de GIRAUD, comparer XII 5.11 [43]; la même question se pose également pour (1.6) et (2.3) ci-dessous.

COROLLAIRE 1.5. Soit K/k une extension de corps, et soit $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \{p\}$, où $p = \operatorname{car} k$. Alors $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k)$ est universellement localement acyclique pour $\mathbf{L}$ et universellement localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$; si k et K sont séparablement clos, alors le morphisme précédent est également universellement acyclique pour $\mathbf{L}$ et universellement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$.

Notons tout de suite la conséquence suivante de (1.5) :

COROLLAIRE 1.6. Soient K/k une extension de corps séparablement clos, X un schéma, F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. de groupes abéliens de $\mathbf{L}$-torsion) sur X, où $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \{p\}$, $p = \operatorname{car} k$. Alors l'application

$$H^q(X, F) \longrightarrow H^q(X_K, F_K)$$

est bijective pour $q = 0$ (resp. pour $q \leq 1$, resp. pour tout q).

Cela résulte en effet aussitôt du fait que $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k)$ est universellement acyclique pour $\mathbf{L}$ et universellement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, et des définitions. Notons qu'on peut interpréter aussi l'homomorphisme précédent sur les H^q comme s'identifiant, par VIII 2.4, à l'homomorphisme de changement de base

$$g^*(R^q f_*(F)) \longrightarrow R^q f'_*(g'^*(F)),$$

où $f : X \to \operatorname{Spec}(k)$, $f' : X_K \to \operatorname{Spec}(K)$, $g : \operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k)$ et $g' : X_K \to X$ 212
sont les morphismes évidents. Donc lorsque X est quasi-compact et quasi-séparé, la bijectivité de ces homomorphismes peut aussi être considérée, grâce à 1.1, comme conséquence du fait que $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k)$ est universellement localement acyclique pour $\mathbf{L}$ et universellement localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$. Ce dernier fait implique donc déjà 1.6 pour X quasi-compact et quasi-séparé, ce qui suffit manifestement à entraîner que $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k)$ est universellement acyclique pour $\mathbf{L}$ et universellement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$ (XV 1.7, XV 1.6 (i)).

Ceci montre donc que pour prouver 1.5, il suffit de prouver la première assertion de 1.5. Quitte à passer à la clôture parfaite de k, ce qui est licite par VIII 1.1, on peut alors supposer k parfait. Toute extension K de k est limite inductive de ses sous-algèbres A de type fini sur k, et k étant parfait, quitte à localiser un tel A, on peut le supposer lisse, de sorte que K apparaît comme limite inductive filtrante de sous-algèbres lisses. Ces dernières étant universellement localement acycliques pour $\mathbf{L}$ et universellement localement 1-asphériques pour $\mathbf{L}$ en vertu de XV 2.1, on conclut grâce à XV 1.13 (ii), C.Q.F.D.

REMARQUE 1.7. On comparera le théorème d'invariance 1.5 à XII 5.4, où on n'a pas eu à supposer le faisceau de torsion envisagé premier aux caractéristiques résiduelles, mais où en revanche on doit supposer X propre sur k. Déjà dans le cas de $H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, où X 213
est une courbe algébrique affine (par exemple la droite affine) sur un corps algébriquement clos k de car. $p > 0$, l'analogue des énoncés précédents devient faux, à cause des phénomènes de « ramification immodérée[44] » à l'infini, impliquant que dans un tel cas

[43] C'est ce qui est effectivement établi dans le livre de J. Giraud.

[44] N.D.E. : =sauvage XXX

la classification des revêtements étales principaux de groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est essentiellement « continue ».

2. Théorème de spécialisation des groupes de cohomologie

Théorème 2.1. Soient $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$, $n \in \mathbf{N}$, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de présentation finie propre [44] et localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. localement n-acyclique pour $\mathbf{L}$). Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) constructible et localement constant sur X. Alors les $R^q f_* F$ sont constructibles et localement constants pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0, 1$, resp. pour $q \leq n$) et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, on a

$$(R^q f_* F)_{\overline{y}} \simeq H^q(X_{\overline{y}}, F_{\overline{y}}),$$

pour ces mêmes valeurs de q.

Remarque. Notons que la dernière assertion n'est que le théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.2.

214 Compte tenu de XV 2.1, on a immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. (Théorème de spécialisation pour les groupes de cohomologie). Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et lisse, et $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ l'ensemble complémentaire à l'ensemble des caractéristiques résiduelles de Y. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) constructible sur X. Alors les $R^q f_*(F)$ sont constructibles et localement constants pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0, 1$, resp. pour tout q), et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, on a

$$R^q f_*(F)_{\overline{y}} \simeq H^q(X_{\overline{y}}, F_{\overline{y}})$$

pour ces mêmes valeurs de q.

Remarque. Prenant $n = 1$, et traduisant en termes de groupes fondamentaux, on retrouve (SGA 1 X 3.8) comparant les groupes fondamentaux des fibres d'un morphisme propre et lisse.

Démonstration de 2.1. Puisqu'on sait déjà que les $R^q f_*(F)$ sont constructibles XIV 1.1, il suffit grâce à IX 2.11 de prouver que pour tout morphisme de spécialisation $\overline{y}_1 \to \overline{y}_0$ de points géométriques de Y, le morphisme de spécialisation correspondant (VIII 7.7)

$$(*) \qquad R^q f_*(F)_{\overline{y}_0} \longrightarrow R^q f_*(F)_{\overline{y}_1}$$

est bijectif pour les valeurs de q envisagées. Or on a à ce sujet le résultat un peu plus
215 général suivant (où il est inutile de supposer f de présentation finie et F constructible) :

Corollaire 2.3. Soient $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$, $n \in \mathbf{N}$, $f : X \to Y$ un morphisme propre et localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$, resp. localement 1-acyclique pour $\mathbf{L}$), F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbf{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbf{L}$-torsion) sur X, qui est localement constant. Alors pour tout morphisme de spécialisation $\overline{y}_1 \to \overline{y}_0$ de points géométriques de Y, l'homomorphisme de spécialisation correspondant $(*)$ ci-dessus est bijectif pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0, 1$, resp. pour $q \leq n$). De plus, dans le cas $n = 0$ i.e. g localement 0-acyclique, pour tout faisceau de groupes localement constant F sur X, l'homomorphisme $R^1 f_*(F)_{\overline{y}_0} \to R^1 f_*(F)_{\overline{y}_1}$ est injectif ; si n est quelconque, pour tout faisceau abélien de $\mathbf{L}$-torsion F localement constant sur X, l'homomorphisme de spécialisation $(*)$ est injectif pour $q = n + 1$.

[44] Pour une hypothèse moins restrictive que celle de propreté permettant d'obtenir les mêmes conclusions, cf. SGA 5 II 3 et SGA 1 XIII.

Il existe un schéma strictement local intègre Y', et un morphisme $g : Y' \to Y$ appliquant le point fermé y'_0 en y_0, le point générique en y'_1 : il suffit par exemple de prendre d'abord le localisé strict de Y relativement à $\overline{y}_0$, puis son sous-schéma fermé intègre défini par un point au-dessus de y_1. De plus, quitte à remplacer Y' par son normalisé dans une clôture algébrique de son corps des fonctions, on peut supposer Y normal et $k(y'_1)$ algébriquement clos, de sorte que y'_0 et y'_1 sont des points géométriques de Y'. Utilisant le théorème de changement de base (XII 5.1) pour (f, F, g), on est ramené, pour prouver 2.3, à le faire en remplaçant Y, $\overline{y}_0$, $\overline{y}_1$ par Y', y'_0, y'_1, ce qui nous ramène à prouver 2.3 **216**
dans le cas où Y est normal et strictement local, et où $\overline{y}_0$ et $\overline{y}_1$ sont respectivement son point fermé y_0 et son point générique y_1. D'ailleurs, utilisant XII 4, on voit que l'homomorphisme de spécialisation $(*)$ s'identifie alors à l'homomorphisme

$$H^q(X, F) \longrightarrow H^q(X_1, g_1^*(F)),$$

où $X_1 = X_{y_1}$ et où $g : y_1 \to Y$ et $g_1 : X_1 \to X$ sont les morphismes canoniques. Notre assertion provient alors du lemme suivant (où on ne suppose plus f propre) :

Lemme 2.4. Avec les notations préliminaires de 2.3, abandonnons l'hypothèse de propreté sur f, supposons en revanche Y normal intègre, de point générique y_1 tel que $k(y_1)$ soit séparablement clos, et soient $X_1 = X_{y_1}$, $g_1 : X_1 \to X$ le morphisme canonique. Alors l'homomorphisme

$$(**) \qquad H^q(X, F) \longrightarrow H^q(X_1, g_1^*(F))$$

est bijectif pour $q = 0$ (resp. bijectif pour $q = 0, 1$, resp. bijectif pour $q = n$, injectif pour $q = n + 1$). De plus, dans le cas $n = 0$ i.e. g localement acyclique, pour tout faisceau en groupes F sur X, l'homomorphisme $(**)$ est injectif pour $q = 1$.

Un argument immédiat (XV 1.6 (i) ⇒ (ii)) montre qu'il suffit de prouver la relation

$$F \xrightarrow{\sim} g_{1_*} g_1{}^*(F),$$

et pour $n \geq 1$, les relations supplémentaires **217**

$$R^q g_{1_*} g_1{}^*(F) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq q \leq n.$$

Ces relations étant locales sur X pour la topologie étale, et F étant localement constant pour la topologie étale, on peut supposer F constant, donc de la forme G_X, où G est un ensemble (resp. un ind-$\mathbf{L}$-groupe, resp. un groupe abélien de $\mathbf{L}$-torsion). Notons d'autre part que l'hypothèse que Y est normal implique $g_*(G_{y_1}) \xleftarrow{\sim} G_Y$ (IX 2.14.1), et l'hypothèse que $k(y_1)$ est séparablement clos implique que les $R^q g_*(G_{y_1})$ sont nuls pour $q \geq 1$. D'autre part, l'hypothèse que g est localement 0-acyclique (resp. ...) implique que la formation des $R^q g_*(G_y)$ commute au changement de base $f : X \to Y$ pour $q \leq n$, compte tenu du fait que l'on peut supposer Y affine, et qu'alors y_1 apparaît comme limite projective de ses voisinages ouverts affines, qui sont quasi-compacts dans Y, de sorte qu'on peut appliquer la définition XV 1.11 et la théorie du passage à la limite VII 5. On en conclut qu'on a bien

$$G_X \xrightarrow{\sim} g_{1_*}(G_{X_1}) \quad , \quad R^q g_{1_*}(G_{X_1}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq q \leq n,$$

ce qui achève la démonstration de 2.4 et par suite de 2.1.

Remarque. La démonstration qui précède, via 2.4, plus simple que notre démonstration initiale, est due à M. Lubkin.

Corollaire 2.5. Sous les conditions de 2.1, supposons Y connexe, et soit $q \leq n$. Alors les $H^q(X_{\overline{y}}, F)$, pour les points géométriques y de Y, sont tous isomorphes entre **218**
eux.

3. Le théorème de pureté cohomologique relatif

DÉFINITION 3.1. Soit S un schéma. On appelle S-couple lisse (Y, X) une S-immersion fermée $i : Y \to X$ de S-préschémas lisses, c'est-à-dire, un diagramme commutatif de préschémas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "h"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

tel que f et h soient lisses et que i soit une immersion fermée. On notera $U = X - Y$, $j : U \to X$ l'immersion ouverte, et $g : U \to S$ le morphisme structural. On appelle codimension de (Y, X) en un point $y \in Y$ la codimension en y de la fibre Y_s dans X_s, où $s = h(y)$.

La codimension est donc une fonction localement constante sur Y. Nous indiquerons par la phrase « (Y, X) est de codimension c » que cette fonction est même constante, de valeur c.

Soient (Y, X) un S-couple lisse et $y \in Y$. Rappelons (SGA II 4.10) qu'il existe des entiers m et n, un voisinage X' de y dans X, et un morphisme étale

$$\phi : X' \longrightarrow \mathbf{E}_S^n = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$$

219 tels que $Y' = Y \cap X'$ soit l'image inverse du sous-schéma fermé $\mathbf{E}_S^m$ défini par les équations

$$t_{m+1} = \cdots = t_n = 0.$$

On peut exprimer ce résultat en disant que localement pour la topologie étale, chaque S-couple lisse (Y, X) est isomorphe au couple standard $(\mathbf{E}_S^m, \mathbf{E}_S^n)$ pour m et n convenables, où

$$\mathbf{E}_S^r = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_r].$$

Dans le présent numéro, on se propose de calculer les faisceaux de cohomologie locale $\mathbf{H}_Y^q(X, F) = (R^q i^!)F$ (V 6 et VIII 6.6) pour un S-couple lisse (Y, X), à valeurs dans un faisceau abélien de torsion localement constant F premier aux caractéristiques résiduelles. Nous commençons par des considérations préliminaires :

PROPOSITION 3.2. Soit

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif, où f est lisse, et j est une immersion ouverte telle que la fibre U_s soit dense dans X_s pour chaque $s \in S$. Soit F un faisceau d'ensembles sur S. Alors le morphisme canonique

$$f^*F \longrightarrow j_*g^*F = j_*j^*f^*F$$

est bijectif.

220 Démonstration. On se réduit facilement au cas où U est rétrocompact dans X. Soit $\bar{s}$ un point géométrique de S, $\bar{x}$ un point géométrique de X au-dessus de S, $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{S}$ le

morphisme des localisés stricts de S, X en des points géométriques correspondants, et $\widetilde{U} = U \times_X \widetilde{U}$. On a, avec les notations évidentes,

$$(f^* F)_{\overline{x}} = H^0(\widetilde{X}, \widetilde{f}^* \widetilde{F}) \simeq H^0(\widetilde{S}, \widetilde{F}).$$

Par suite il suffit de démontrer que $\widetilde{g} : \widetilde{U} \to \widetilde{S}$ est 0-acyclique, ce qui impliquera

$$(j_* g^* F)_{\overline{x}} \simeq H^0(\widetilde{U}, \widetilde{g}^* \widetilde{F}) \simeq H^0(\widetilde{S}, \widetilde{F}).$$

Puisque $\widetilde{g}$ est limite de morphismes lisses, il est localement 0-acyclique (XV 2.1, XV 1.11), et par XV 1.12 il suffit de démontrer que les fibres géométriques de $\widetilde{U}/\widetilde{S}$ sont 0-acycliques, c'est-à-dire connexes et non-vides. Soit $\overline{s}'$ un point géométrique de $\widetilde{S}$. Alors la fibre $\widetilde{X}_{\overline{s}'}$ est régulière, connexe et non vide, et il résulte de l'hypothèse que $\widetilde{U}_{\overline{s}'}$ est un ouvert dense de $\widetilde{X}_{\overline{s}'}$, donc connexe et non-vide, d'où le résultat.

Corollaire 3.2.1. Sous les conditions de 3.2, le foncteur $X' \mapsto X'|U$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de U est pleinement fidèle. En particulier, pour tout groupe fini G, l'application de restriction

$$H^1(X, G) \longrightarrow H^1(U, G)$$

est injective.

Cela résulte de 3.2, via un argument standard que nous allons, pour la commodité des références, expliciter en un 221

Lemme 3.2.2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, et soit $f^* : \mathrm{Et}(Y) \to \mathrm{Et}(X)$ le foncteur image inverse $Y' \mapsto Y' \times_Y X$ de la catégorie $\mathrm{Et}(Y)$ des revêtements étales de Y dans $\mathrm{Et}(X)$. Conditions équivalentes :

(i) f^* est fidèle (resp. pleinement fidèle).

(ii) Pour tout revêtement étale Y' de Y, désignant par $f' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de f par changement de base $Y' \to Y$, l'application $U \mapsto f'^{-1}(U)$ de l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées des Y' dans l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de X' est injective (resp. bijective).

(ii bis) Avec les notations de (ii), pour tout faisceau d'ensembles constant C sur Y', l'application canonique

$$H^0(Y', C) \longrightarrow H^0(X', f^* C)$$

est injective (resp. bijective).

(iii) Avec les notations de (ii), l'application canonique

$$\Gamma(Y'/Y) \longrightarrow \Gamma(X'/X)$$

est injective (resp. bijective).

La démonstration est laissée au lecteur (cf. SGA 2, IX 3.1 et 3.2).

Remarques 3.2.3. On peut considérablement généraliser 3.2, tant en termes de faisceaux d'ensembles, en affaiblissant les hypothèses sur f, qu'en termes de faisceaux de groupes avec des conclusions sur les $R^q g_* (f^* F)$ (cf. SGA 2 XIV 1 et SGA 1 XIII). Remarque analogue pour 3.4 à 3.6. 222

« Rappelons » aussi le théorème de pureté de Zariski-Nagata sous sa forme relative :

Théorème 3.3. (Théorème de pureté relatif). Soit

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif où f est lisse, et où j est une immersion ouverte telle que pour tout $s \in S$, $X_s - U_s$ soit partout de codimension ≥ 2 dans X_s. Alors le foncteur $X' \mapsto X'|U$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de U est une équivalence de catégories.

Démonstration. Que le foncteur soit pleinement fidèle a été vu (3.2.1). Le fait qu'il soit essentiellement surjectif va se déduire du théorème classique. On se donne un revêtement étale U' de U, il faut montrer qu'il se prolonge en un revêtement étale X' de X. Réduction immédiate facile au cas où U est rétrocompact dans X, puis au cas où S est affine et de type fini sur Spec $\mathbf{Z}$, X un schéma connexe, et f de type fini.

223 On procède par récurrence sur $n = \dim S$, l'assertion étant conséquence du théorème classique (SGA 2 X 3.4) dans le cas $n = 0$. Ayant l'unicité, on peut appliquer la technique de descente de SGA 1 IX 4.7 au normalisé $S \leftarrow \overline{S}$ pour se réduire au cas S (et donc X) normal ($\overline{S} \to S$ étant fini (EGA IV 7.8.3 (iii) (vi)). De plus, quitte à agrandir U, on peut supposer U maximal parmi les ouverts au-dessus desquels U' peut se prolonger, et il faut prouver alors $U = X$. Sinon, soient x un point maximal de $X - U$, et $s = f(x)$. Tout revient à prouver qu'on peut prolonger U' au-dessus d'un voisinage de x. Nous pouvons supposer que $\dim \mathcal{O}_{S,s} = n \geq 1$ et que le théorème est déjà démontré pour la dimension $< n$. Posons $B = \mathcal{O}_{X,x}$ et soit B' le normalisé de B dans l'anneau des fonctions rationnelles sur le revêtement U' de U ; donc B' est une B-algèbre finie (loc. cit.). Il suffit évidemment de démontrer que B' est une B-algèbre étale.

Soient $A = \mathcal{O}_{S,s}$, $0 \neq t \in \max A$, $A_0 = A/tA$, $B_0 = B/tB$. Par hypothèse de récurrence, la restriction du revêtement à $U_0 = U \otimes_A A_0$ s'étend à un revêtement étale de Spec B_0, appelons-le Spec B_0^*. Quitte à remplacer X par un revêtement étale convenable d'un voisinage de x (ce qui est loisible) on peut supposer Spec B_0^* complètement décomposé sur Spec B_0. On est ainsi ramené au cas où la B_0-algèbre B_0' est complètement décomposée en dehors du point fermé de Spec B_0. Alors les hypothèses de XV 3.3 sont satisfaites, d'où le résultat.

Corollaire 3.4. Mêmes hypothèses que dans 3.3. Alors on a $(R^1 j_*) g^* F = 0$ pour chaque faisceau F de groupes ind-finis sur S.

224 Réduction comme d'habitude au cas S noethérien, f de type fini, et F constructible. Soit $0 \to F \to G$ une injection de faisceaux de groupes ind-finis sur S, et $C = G/F$. Il résulte de 3.2 que le foncteur $j_* g^*$ est exact, donc que $j_* g^* G \to j_* g^* C$ est surjectif, donc (XII 3.1) que $(R^1 j_*) g^* F \to (R^1 j_*) g^* G$ est injectif. On peut donc remplacer F par G, et on se ramène ainsi par IX 2.14 et VIII 5.5 au cas où $F = G$ est constant, à valeur un groupe fini ordinaire G. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X, $\widetilde{X}$ le localisé strict de X en $\overline{x}$, et $\widetilde{U} = \widetilde{X} \times_X U$. Alors il résulte de 3.3 que l'on a

$$(R^q j_* g^* F)_{\overline{x}} = H^q(\widetilde{U}, G_{\widetilde{U}}) \simeq H^q(\widetilde{X}, G_{\widetilde{X}}),$$

et ce dernier est nul, d'où le résultat.

Lemme 3.5. (Lemme d'Abhyankar relatif). Soit (Y, X) un S-couple lisse de codimension 1, tel que Y soit défini par une équation $t = 0$ dans X. Soient $U = X - Y$ et V/U

un revêtement principal galoisien d'ordre n premier aux caractéristiques résiduelles de Y. Posons $X' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[z]/(z^n - t)$, $U' = U \times_X X'$, $V' = V \times_X X'$. Alors le revêtement V' s'étend uniquement à un revêtement étale de X'.

Démonstration. Réduction immédiate au cas S, X, Y affines et de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$. L'unicité est un cas particulier de 3.2.1. Nous allons déduire l'existence de XV 1.12 : soient $\overline{s}$ un point géométrique de S et $\overline{x}$ un point géométrique de Y au-dessus de $\overline{s}$. Soient $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{S}$ le morphisme des localisés stricts correspondants induit par f, $\widetilde{U} = U \times_X \widetilde{X}$, 225
etc...Par descente, compte tenu de l'unicité, il suffit évidemment de démontrer que $\widetilde{V}'$ s'étend en un revêtement étale de $\widetilde{X}'$, c'est-à-dire (puisque $\widetilde{X}'$ n'admet pas de revêtement non-trivial) que $\widetilde{V}'$ est un revêtement trivial de $\widetilde{U}'$.

Soit $\overline{U} = \varprojlim_m \widetilde{U}_m = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\widetilde{U}}[t^{1/m}]$, où m parcourt l'ensemble des entiers m premiers à la caractéristique résiduelle de $\widetilde{X}$. Alors $\overline{U}/\widetilde{U}$ est un « revêtement galoisien infini » de groupe abélien $G = \varprojlim_m \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, et on voit immédiatement qu'il suffit de démontrer que $\overline{U}$ est 1-asphérique pour l'ensemble $\mathbf{L} \subset \mathbf{P}$ complémentaire à la caractéristique résiduelle de $\widetilde{X}$.

Considérons le morphisme $\overline{f} : \overline{U} \to \widetilde{S}$. Il est limite de morphismes lisses, donc localement 1-asphérique pour $\mathbf{L}$ (XV 2.1, XV 1.11 (ii)). D'après XV 1.12, il suffit de démontrer que les fibres géométriques de $\overline{U}/\widetilde{S}$ sont 1-asphérique pour $\mathbf{L}$. Soit $\overline{s}$ un point géométrique de $\widetilde{S}$. La fibre géométrique $\overline{U}_{\overline{s}}$ est limite des fibres $(\widetilde{U}_m)_{\overline{s}}$. Par suite il suffit de démontrer que chaque revêtement principal galoisien d'un $(\widetilde{U}_m)_{\overline{s}}$, d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles, induit un revêtement trivial de $\overline{U}_{\overline{s}}$. En remplaçant $\widetilde{X}$ par $\widetilde{X}_m = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\widetilde{X}}[t^{1/m}]$ (qui est encore lisse au-dessus de $\widetilde{S}$), on se réduit au cas $m = 1$, c'est-à-dire, $\widetilde{U}_m = \widetilde{U}$. Soit V un tel revêtement de $\widetilde{U}_{\overline{s}}$. Or $\widetilde{X}_{\overline{s}} = Z$ est un schéma strictement local régulier, et $W = \widetilde{U}_{\overline{s}}$ est l'ouvert complémentaire à un sous-ensemble régulier de codimension 1. On peut donc appliquer le lemme d'Abhyankar sous sa forme usuelle (SGA 1 X 3.6) pour conclure que V induit un revêtement V_m sur W_m qui s'étend en un 226
revêtement étale de Z_m, pour m convenable. Mais Z donc Z_m étant strictement local, il s'ensuit que ce revêtement est trivial, donc V_m est un revêtement trivial de W_m, C.Q.F.D.

Remarque 3.5.1. Lorsqu'on ne suppose pas l'ordre n de G premier aux caractéristiques résiduelles de X, on peut encore prouver ceci : soit m le plus grand entier premier aux caractéristiques résiduelles de Y qui divise l'ordre de G, et supposons que pour chaque point $s \in S$, le revêtement V_s de $U_s = X_s - Y_s$ ait, en les points maximaux de Y_s, des groupes d'inertie d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles de Y. Alors la conclusion de 3.5 reste valable en prenant $X' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[z]/(z^m - t)$. On peut aussi prendre pour m, plus généralement, un multiple commun quelconque des ordres des groupes d'inertie qu'on vient d'envisager, supposés premiers aux caractéristiques résiduelles correspondantes.

Corollaire 3.6. (Pureté cohomologique en dimension 1). Soit (Y, X) un S-couple lisse de codimension 1, et soit F un faisceau de groupes constructible et localement constant sur X, d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles de X. Alors avec les notations de 3.1, $(R^1 j_*) j^* F$ est localement isomorphe comme faisceau d'ensembles pointés à $i_*(F_Y/\operatorname{int}(F_Y))$, où $F_Y = F|Y$ et où $F_Y/\operatorname{int}(F_Y)$ désigne le quotient de F_Y par les opérations de F_Y sur lui-même par automorphismes intérieurs.

Remarque. L'isomorphisme du corollaire 3.6 n'est pas canonique.

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas X noethérien et connexe. Puisque 227 l'assertion est locale sur X pour la topologie étale, nous pouvons supposer que F est un faisceau constant, à valeur un groupe fini ordinaire G d'ordre m premier aux caractéristiques résiduelles de X, et de plus que $\boldsymbol{\mu}_{mX} \simeq (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})_X$. Soit $U = X - Y$ et $U' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_U[t^{1/m}]$, qui est un revêtement principal galoisien « essentiel » de U de groupe $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ puisque $\boldsymbol{\mu}_{mX} \simeq (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})_X$. Les revêtements principaux de groupe G de U qui sont trivialisés sur U' sont classifiés localement sur Y par $H = \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, G)$ mod $\operatorname{int}(G)$, qui est un ensemble pointé isomorphe à l'ensemble sous-jacent de $G/\operatorname{int}(G)$. On obtient ainsi un morphisme du faisceau constant H_Y sur Y dans $(R^1 j_*)G_U$, et il suffit de démontrer qu'il est bijectif, ce qui résulte immédiatement de 3.5.

Théorème 3.7. (Pureté cohomologique). Soit (Y, X) un S-couple lisse de codimension $c > 0$. Soit F un faisceau abélien sur X localement isomorphe (pour la topologie étale) à un faisceau de la forme $f^*(G)$, où G est un faisceau de torsion sur S, premier aux caractéristiques résiduelles (par exemple F un faisceau localement constant de groupes finis d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles de X). Alors, avec les notations de 3.1, on a

$$\mathbf{H}^q_Y(X, F) = (R^q i^!)F = 0 \qquad \text{si} \quad q \neq 2c,$$

(i.e.)
$$\begin{cases} F \xrightarrow{\sim} j_* j^* F \quad \text{et} \\ (R^q j_*) j^* F = 0 \qquad\qquad \text{si} \quad q \neq 0, \quad 2c-1, \end{cases}$$

228 et

$$\mathbf{H}^{2c}_Y(X, F) = i^*[(R^{2c-1} j_*) j^* F]$$

est un faisceau localement isomorphe à $i^*(F)$.

Démonstration. L'assertion est locale sur X pour la topologie étale ; on peut donc [44] supposer F constant, donc si on veut $F \simeq f^*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S$ pour le faisceau constant $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S$ sur S.

Traitions d'abord le cas $c = 1$. (L'assertion pour $(R^1 j_*) j^* F$, dans le cas F localement constant tout au moins, résulterait immédiatement de 3.6, mais nous allons le déduire de nouveau.) Rappelons que (Y, X) est localement isomorphe au couple $(\mathbf{E}^{n-1}_S, \mathbf{E}^n_S)$, et si l'on remplace S par $\mathbf{E}^{n-1}_S$, on se ramène au cas où $X = \mathbf{E}^1_S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S[t]$ et où Y est la section $t = 0$ de X/S. La situation est localement isomorphe à l'inclusion de la section à l'infini dans l'espace projectif $\mathbf{P}^1_S$. On peut donc prendre $X = \mathbf{P}^1_S$, Y la section à l'infini, et $U = \mathbf{E}^1_S = X - Y$.

Examinons la suite spectrale de Leray

$$(R^p f_*)(R^q j_*)(\mathbf{Z}/n) \Longrightarrow (R^{p+q} g_*)(\mathbf{Z}/n).$$

Or l'aboutissement est nul pour $p + q > 0$, d'après XV 2.2. De plus, les $R^q j_*$ sont concentrés sur Y si $q > 0$, qui s'envoie isomorphiquement sur S par f, et d'autre part $j_*(F|U) \xleftarrow{\sim} F$ en vertu de 3.2. Il s'ensuit que $(R^p f_*)(R^q j_*) = 0$ si p et $q > 0$, et que $f_*(R^q j_*)$ détermine le faisceau $(R^q j_*)$ si $q > 0$, enfin $R^p f_* j_*(F|U) = R^p f_*(F)$. La suite spectrale se
229 réduit donc à des isomorphismes

$$f_*(R^q j_*)(F|U) \xrightarrow{\sim} (R^{q+1} f_*)(F) \quad \text{si} \quad q > 0.$$

Mais $(R^q f_*)(F)$ se calcule fibre par fibre (XII 5.2), donc est nul si $q \neq 0$, 2, et est un faisceau localement isomorphe à G si $q = 2$, comme il résulte aisément de XII 5.2 et IX

[44] Du moins si F était supposé localement constant. Le lecteur se convaincra que la démonstration qui suit s'applique aussi, essentiellement au cas général.

4.7. Donc $(R^q j_*)(F|U) = 0$ si $q \neq 1$, et est un faisceau localement isomorphe à $i^*(F)$ si $q = 1$.

Le cas $c > 1$ se traite maintenant facilement par récurrence : soit (Y, X) un S-couple lisse de codimension $c > 1$. Il est clair que, localement sur X, on peut trouver un sous-schéma Z de X de codimension 1 qui contient Y et qui est lisse au-dessus de S, de sorte qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i"'] & & Z \arrow[dl, "v"] \\ & X & \end{tikzcd},$$

où couple est un S-couple lisse (on devrait appeler (Y, Z, X) un S-triple lisse), où la codimension de (Z, X) est 1, et celle de (Y, Z) est $c - 1$.

Or on a la suite spectrale de foncteurs composés

$$(R^p u^!)(R^q v^!)F \Longrightarrow (R^{p+q} i^!)F.$$

Par hypothèse de récurrence, $(R^q v^!)F = 0$ si $q \neq 2$ et est localement isomorphe à $v^*(F)$ si $q = 2$, d'où encore par hypothèse de récurrence, appliquée à $(R^q v^!)F$, que $(R^p u^!)(R^q v^!)F$ est nul si $(p, q) \neq (2c-2, 2)$ et est localement isomorphe à $u^* w^*(F)$ si $(p, q) = (2c-2, 2)$, 230
d'où immédiatement le résultat pour $(R^{p+q} i^!)F$, C.Q.F.D.

Corollaire 3.8. Soient (Y, X) un S-couple lisse de codimension c, n un entier naturel premier aux caractéristiques résiduelles de X, et posons

$$T_{Y/X} = \mathbf{H}^{2c}_Y(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}),$$

qui est un faisceau sur Y localement isomorphe (pour la topologie étale) au faisceau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$ en vertu de (3.7). Soit F un faisceau abélien sur X, annulé par n, satisfaisant à la condition énoncée dans 3.7. Alors on a (pour mémoire) $\mathbf{H}^i_Y(F) = 0$ pour $i \neq 2c$, et de plus on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{H}^{2c}_Y(F) \simeq i^*(F) \otimes T_{Y/X}.$$

Démonstration. On définit aisément un homomorphisme canonique

$$\varphi : i^*(F) \otimes T_{Y/X} \longrightarrow \mathbf{H}^{2c}_Y(F)$$

i.e. un homomorphisme

$$i^*(F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{H}^{2c}_Y(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}), H^{2c}_Y(F)),$$

en utilisant l'homomorphisme canonique $F \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, F)$. Il reste à prouver que ϕ est un isomorphisme, ce qu'on vérifie aisément en suivant la démonstration donnée de 3.7.

Corollaire 3.8.1. Sous les conditions de 3.8, la formation des $\mathbf{H}^i_Y(F)$ commute à 231
tout changement de base $S' \to S$.

C'est clair.

Corollaire 3.9. (Théorème de pureté cohomologique absolue). Soient X un schéma régulier, Y un sous-préschéma fermé régulier de codimension c en chaque point. Supposons de plus que X soit localement de type fini sur un corps parfait k. Alors, si n est premier aux caractéristiques résiduelles de X, on a

$$\mathbf{H}^i_Y(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \text{ si } i \neq 2c,$$

et $H^{2c}_Y(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est un faisceau sur Y localement isomorphe (pour la topologie étale) au faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$).

C'est un cas particulier de 3.7, compte tenu que l'hypothèse implique que X et Y sont lisses sur k.

Remarques 3.10. a) On peut dans 3.8 expliciter la structure du faisceau $T_{Y/X}$, on trouve qu'il est canoniquement isomorphe au faisceau $(\boldsymbol{\mu}_n)_Y^{\otimes -c}$, où $\boldsymbol{\mu}_n$ désigne le faisceau des racines n.èmes de l'unité (localement isomorphe au faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$). L'isomorphisme en question est étudié sous le nom de classe fondamentale locale de Y dans X, dans la situation un peu plus générale des intersections complètes relatives, dans Exp. XVIII consacré à la dualité.

232 b) Il est très plausible que les conclusions de 3.9 et de 3.10 a) restent valables sans postuler l'existence d'un corps de base k, tout au moins lorsque X est un préschéma « excellent »[45]. C'est ce qui sera établi en tous cas dans Exp. XIX lorsque X est de caractéristique nulle, en utilisant la résolution des singularités de Hironaka. Comme nous verrons dans SGA 5 on a besoin du « théorème de pureté absolu » (ainsi que de la résolution des singularités) notamment pour pouvoir établir la « formule de dualité locale », (qui elle-même est un des ingrédients majeurs de la formule de Lefschetz-Verdier).

4. Théorème de comparaison de la cohomologie pour les préschémas algébriques sur C.

Soit X un schéma algébrique sur $\operatorname{Spec}\mathbf{C}$. Nous allons comparer les sites étale et classique sur X, et nous reprenons les notations de XI 4. Le théorème de comparaison, qui est la forme générale de XI 4.4, est le suivant :

Théorème 4.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini de schémas localement de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathbf{C}$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif de morphismes de sites

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{et}} \arrow[d, "f_{\mathrm{et}}"'] & X_{\mathrm{cl}} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "f_{\mathrm{cl}}"] \\ S_{\mathrm{et}} & S_{\mathrm{cl}} \arrow[l, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

233 Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. abélien de torsion) et supposons qu'on soit dans l'un des cas suivants :

(i) f propre,
(ii) F constructible.

Alors les morphismes de changement de base XII 4.2 [45]

$$\varphi : \epsilon^*(R^q f_{\mathrm{et}*})F \longrightarrow (R^q f_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^* F$$

sont bijectifs pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0, 1$, resp. pour $q \geq 0$).

Remarquons que la théorème de Grauert-Remmert (XI 4.3 (iii)) que nous avions utilisé dans la démonstration de XI 4.4, est un cas particulier de 4.1.

234 Pour la démonstration, nous traitons d'abord le cas f propre. Dans ce cas, le résultat

[45]N.D.E. : Travaux de Gabber XXX

[45]En fait, nous utilisons l'homomorphisme de changement de base sous des conditions plus générales que celles envisagées dans Exp. XII, où nous nous étions limités à un carré *cartésien* de morphismes de *préschémas*. Le lecteur se convaincra aisément que la définition s'étend verbatim à un carré *essentiellement commutatif* de morphismes de *sites*. Pour plus de développements à ce sujet, voir exposé suivant.

sera conséquence de GAGA et du théorème de changement de base pour un morphisme propre, par un raisonnement élémentaire qui aurait pu figurer dans Exp. XIV. Pour traiter le cas général, nous utiliserons de plus la résolution des singularités [1] et 3.7.

On peut évidemment supposer Y, donc aussi X, de type fini sur $\mathbf{C}$.

Cas f propre. Nous rappelons les faits élémentaires suivants :

(a) L'espace topologique X_{cl} est localement compact.

(b) Si $f : X \to S$ est propre, alors $f_{\mathrm{cl}} : X_{\mathrm{cl}} \to S_{\mathrm{cl}}$ est une application propre d'espaces topologiques.

En effet, (a) est trivial puisque localement X_{cl} est un fermé dans un $\mathbf{C}^n$. Pour (b) on se ramène par le lemme de Chow au cas où f est projectif, ce cas étant trivial.

Soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur X_{et}. Pour les deux morphismes f_{et} et f_{cl}, la formation des R^q commute à la formation des fibres (XII 5.2 et [2] 4.11.1). Il suffit donc de vérifier le théorème fibre par fibre, en les points fermés de S_{et}.

Dans le lemme suivant, nous ne supposons pas que g soit propre :

Lemme 4.2. Soit 235

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "h"'] \arrow[dl, "\overline{g}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif avec h propre, et soit U un ouvert de X tel que h induise un isomorphisme de l'ouvert $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ de $\overline{X}$ sur U. Soient $j : U \to X$ et $\overline{j} : \overline{U} \to \overline{X}$ les inclusions, F un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur U, et $\overline{F}$ le faisceau induit sur $\overline{U}$. Si le théorème 4.1 est vrai pour $(\overline{g}, \overline{j}_!\overline{F})$ il l'est également pour $(g, j_!F)$.

Démonstration. Le théorème est vrai pour $(\overline{h}, \overline{j}_!\overline{F})$ parce qu'on est ramené à le vérifier fibre par fibre, et on a alors les deux cas suivants : ou bien la restriction du faisceau à la fibre est nulle, ou bien le morphisme h est un isomorphisme. Dans ces deux cas, le résultat est trivial. On trouve que

$$\epsilon^* j_! F \simeq \epsilon^* h_{\mathrm{et}\,*}(\overline{j}_!\overline{F}) \simeq h_{\mathrm{cl}\,*}\epsilon^*(\overline{j}_!\overline{F})$$

et

$$(R^q h_{\mathrm{et}\,*})\overline{j}_!\overline{F} = (R^q f_{\mathrm{cl}\,*})_\epsilon{}^*(\overline{j}_!\overline{F}) = 0 \text{ si } q > 0$$

pour les valeurs de q envisagées, donc que

$$(R^q g_{\mathrm{et}\,*})j_!F \simeq (R^q \overline{g}_{\mathrm{et}\,*})\overline{j}_!\overline{F}$$

et

$$(R^q g_{\mathrm{cl}\,*})j_!F \simeq (R^q \overline{g}_{\mathrm{cl}\,*})\overline{j}_!\overline{F},$$

d'où 4.2. 236

Lemme 4.3. Pour vérifier 4.1 pour toutes les données (f, F) avec f propre, il suffit de la faire dans le cas où on suppose que de plus f est de dimension relative ≤ 1 et $S = \operatorname{Spec} \mathbf{C}$ est un point.

Démonstration. Récurrence sur la dimension relative. Supposons le résultat connu en dimension relative $< n$, et que $n > 1$. Comme nous l'avons remarqué, nous pouvons faire la vérification fibre par fibre, c'est-à-dire, nous pouvons supposer que $S = \operatorname{Spec} \mathbf{C}$ est un point, et donc X de dimension $\leq n$. De plus, nous pouvons supposer X réduit. Soient φ une fonction rationnelle sur X qui n'est constante sur aucune composante irréductible de X, U un ouvert dense de X sur lequel φ est défini, et $\overline{X} \subset X \times \mathbf{P}^1$ l'adhérence du graphe du morphisme $\varphi : U \to \mathbf{E}^1$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X} \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "\overline{g}"] & \\
X \arrow[dr, "g"'] & & \mathbf{P}^1 \arrow[dl, "b"] \\
 & Y = \operatorname{Spec} \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

où les dimensions relatives de a et b sont $< n$. Par l'hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour $(a, .)$ et $(b, .)$, d'où on conclut qu'il l'est également pour $(\overline{g}, .)$. En effet, c'est
237 trivial pour $q = 0$; si F est abélien de torsion sur $\overline{X}$, cela résulte du morphisme de suites spectrales de Leray

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon^*(R^p h_{\mathrm{et}*})(R^q a_{\mathrm{et}*})F \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \varepsilon^*(R^{p+q}\overline{g}_{\mathrm{et}*})F \arrow[d] \\
(R^p b_{\mathrm{cl}*}(R^q a_{\mathrm{cl}*}))\varepsilon^* F \arrow[r, Rightarrow] & (R^{p+q}\overline{g}_{\mathrm{cl}*})\varepsilon^* F;
\end{tikzcd}$$

si enfin F est un faisceau de groupes ind-finis sur $\overline{X}$, notons que puisque $\epsilon^*(R^1\overline{g}_{\mathrm{et}\,*})$ est un foncteur effaçable, il suffit de démontrer (compte tenu du résultat pour $q = 0$), que $(R^1\overline{g}_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*$ est également effaçable (cf. XII 8.2), ce qui résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow (R^1 b_{\mathrm{cl}\,*})a_{\mathrm{cl}\,*}\epsilon^* F \longrightarrow (R^1\overline{g}_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^* F \longrightarrow b_{\mathrm{cl}\,*}(R^1 a_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^* F,$$

et du fait que $(R^1 b_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*$ et $(R^1 a_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*$ sont effaçables grâce à l'hypothèse de récurrence.

Soit maintenant F un faisceau d'ensembles sur X. On a $F \hookrightarrow h_{\mathrm{et}\,*}h_{\mathrm{et}}{}^* F = G$. Par la suite exacte

(4.3.1) $$F \to G \rightrightarrows G \amalg_F G,$$

on se ramène (pour $q = 0$) à démontrer 4.1 pour G, donc pour un faisceau de la forme $h_{\mathrm{et}\,*}\overline{F}$. Mais pour un tel faisceau, le résultat sera conséquence du théorème pour $(\overline{g}, .)$ et pour $(h, .)$, et h est de dimension relative $< n$, comme on voit immédiatement.

Soit F un faisceau abélien de torsion sur X. On a la suite exacte

$(*)$ $$0 \longrightarrow j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow 0.$$

238 Puisque U est dense dans X, on a $\dim Y \leq n$, donc 4.1 est vrai pour $(g|Y, i^* F)$, donc pour $(g, i_* i^* F)$. Il suffit donc, grâce au lemme des cinq, de vérifier 4.1 pour $(f, j_! j^* F)$, ce qui résulte du théorème pour $\overline{g}$ (4.2).

Soit F un faisceau de groupes ind-finis sur X. Il suffit de démontrer que le foncteur $(R^1 g_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*$ est effaçable pour le faisceau F, ce qui résulte de $(*)$ et de l'effaçabilité pour $j_! j^* F$ et pour $i_* i^* F$, i.e. du théorème pour $(g, j_! j^* F)$ (4.2) et pour $(g, i_* i^* F)$ (hypothèse de récurrence), C.Q.F.D.

Lemme 4.4. Pour démontrer (4.1) dans le cas où f est propre, il suffit de démontrer ceci : soit X une courbe complète régulière sur $\operatorname{Spec} \mathbf{C}$, et F un faisceau constant et constructible d'ensembles (resp. ...) sur X. Alors les morphismes

$$H^q(X_{\mathrm{et}}, F) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{cl}}, F)$$

sont bijectifs pour les valeurs de q envisagées.

Démonstration. Puisqu'il suffit de vérifier le théorème fibre par fibre, on est ramené par 4.3 au cas X propre et de dimension ≤ 1. Le cas de dimension 0 est d'ailleurs trivial, et il résulte de cela que le théorème est vrai pour un morphisme fini. Puisque f est propre, la cohomologie de X_{et} et de X_{cl} commute aux limites inductives (VII 3.3 et [2], 4.12.1) et on est donc ramené au cas F constructible (IX 2.9 (iii)).

On applique IX 2.14. Pour un faisceau d'ensembles, la suite exacte (4.3.1) et IX 2.14 montrent qu'on peut prendre $F = \pi_* C$, où $\pi : X' \to X$ est fini, X' est normal, donc 239
régulier, et C est un faisceau constant sur X'. Pour un faisceau abélien de torsion, on prend une résolution de F par des produits finis de faisceaux de la forme $\pi_* C$ et on applique la suite spectrale d'une résolution, et on se réduit encore au cas $F = \pi_* C$. Pour un faisceau de groupes ind-finis, on rappelle qu'il suffit de démontrer l'effaçabilité de $(R^1 g_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*$ pour le faisceau F, donc pour un faisceau G dans lequel on peut plonger F, donc on est encore réduit au cas $F = \pi_* C$. Or il est évident par (VIII 5.5 et VIII 5.8) qu'on peut maintenant remplacer X par X', d'où le lemme.

Pour traiter ce dernier cas, il suffit évidemment (tenant compte de la dimension cohomologique (IX 5.7) et [2] 4.14.1)) de démontrer que pour une courbe complète et régulière on a

($q = 0$): X connexe et non-vide $\Leftrightarrow X_{\mathrm{cl}}$ connexe et non-vide.

($q = 1$): Le morphisme de changement de base induit une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X et de la catégorie des revêtements étales analytiques finis de X_{cl}.

($q = 2$): On a un isomorphisme $\epsilon : H^2(X_{\mathrm{et}}, \boldsymbol{\mu}_n) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{\mathrm{cl}}, \boldsymbol{\mu}_n)$.

Or les deux premières assertions résultent immédiatement de GAGA. Pour la dernière, notons qu'on a $H^2(X_{\mathrm{et}}, \mathbf{G}_m) = 0$ (IX 4.5) et de même, notant $\mathscr{O}^*$ le faisceau des fonctions holomorphes inversibles de X_{cl}, $H^2(X_{\mathrm{cl}}, \mathscr{O}^*) = 0$ (cela résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^* \longrightarrow 0$$

et du fait que $H^2(X_{\mathrm{cl}}, \mathscr{O}) = H^2(X_{\mathrm{et}}, \mathscr{O}_X) = 0$ par GAGA). Par suite la suite exacte de 240
Kummer IX 3.2 (resp. la suite exacte sur X_{cl}

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_n \to \mathscr{O}^* \xrightarrow{n} \mathscr{O}^* \to 0)$$

donne

$$H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbf{G}_m)/n \xrightarrow{\sim} H^2(X_{\mathrm{et}}, \boldsymbol{\mu}_n)$$
$$(\textit{resp. } H^1(X_{\mathrm{cl}}, \mathscr{O}^*)/n \xrightarrow{\sim} H^2(X_{\mathrm{cl}}, \boldsymbol{\mu}_n)).$$

D'après GAGA, le morphisme canonique

$$H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbf{G}_m) = \operatorname{Pic} X \longrightarrow \operatorname{Pic} X_{\mathrm{cl}} = H^1(X_{\mathrm{cl}}, \mathscr{O}^*)$$

est bijectif, d'où le résultat, ce qui prouve 4.1 dans le cas où f est propre.

Cas F constructible. Le démonstration se fait par récurrence sur $\dim X$. Supposons le résultat connu si la dimension est $< n$, et prouvons-le quand la dimension de X est $\leq n$.

Lemme 4.5. *On peut supposer $f : X \to S$ une immersion ouverte dense et F constant.*

Démonstration. Comme dans la démonstration de 1.3, on peut en effet supposer X et S affines, donc f quasi-projectif. Alors on applique le raisonnement de 4.4 pour se ramener au cas $F = \pi_* C$, $\pi : X' \to X$ fini, et C constant, d'où en remplaçant X par X', au cas 241

F constant. On peut remplacer X par X_{red}. Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif tel que $\overline{X}$ soit réduit, que $\overline{f}$ soit projectif, et que h soit une immersion ouverte dense. Il suffit de vérifier le théorème pour les deux morphismes h, $\overline{f}$ (cf. dém. de 4.3), donc pour h puisque $\overline{f}$ est propre, donc pour une immersion ouverte dense.

Lemme 4.6. On peut de plus supposer S régulier.

Démonstration. Soit $S' \xrightarrow{h} S$ une « résolution des singularités de S », i.e. , un morphisme surjectif, propre et birationnel, tel que S' soit régulier, et soit

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & S' \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

le diagramme cartésien déduit de h.

Soit F un faisceau d'ensembles constant sur X. On a $F \hookrightarrow G = h'_* h'^* F$ et on en déduit qu'il suffit (pour $q = 0$) de vérifier 4.1 pour G (cf. (4.3.1)), c'est-à-dire, pour un
242 faisceau de la forme $h'_* F'$, où F' est constant sur X'. Or on a un diagramme commutatif (où on supprime le symbole « et »)

$$\begin{tikzcd} \varepsilon^* f_*(h'_* F') = \varepsilon^* h_* f'_* F' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"] & h_{\mathrm{cl}*} \varepsilon^* f_* F' \arrow[d, "b"] \\ f_{\mathrm{cl}*} \varepsilon^*(h'_* F') \arrow[r, "c"] & f_{\mathrm{cl}*} h'_{\mathrm{cl}*} \varepsilon^* F' = h_{\mathrm{cl}*} f'_{\mathrm{cl}*} \varepsilon^* F', \end{tikzcd}$$

et a, c sont bijectifs d'après le résultat pour un morphisme propre. Pour démontrer que d est bijectif, il suffit de démontrer que b l'est, donc que

$$\epsilon^* f'_* F' \xrightarrow{\sim} f'_{\mathrm{cl}\,*} \epsilon^* F'$$

donc on est ramené au cas $S = S'$, donc S régulier.
(Remarque : nous avons utilisé sans le mentionner explicitement le théorème de finitude pour un morphisme propre XIV 1.1).

Soit F un faisceau abélien constant de torsion sur X. Il suffit de traiter le cas $F = (\mathbf{Z}/n)_X$. Or le morphisme h' induit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense $j : U \to X$ de X ; soient $j' : U' \to X'$ l'ouvert $h'^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$, et $Y = X - U$. On a $\dim Y < n$ parce que U est dense, donc le théorème est vrai pour $(f, (\mathbf{Z}/n)_Y)$. Par la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!(\mathbf{Z}/n)_U \longrightarrow (\mathbf{Z}/n)_X \longrightarrow (\mathbf{Z}/n)_Y \longrightarrow 0$$

et le lemme des cinq, on se ramène à démontrer le théorème pour le faisceau $j_!(\mathbf{Z}/n)_U$ et le morphisme f, donc par 4.2 à démontrer le théorème pour $(hf', j'_!(\mathbf{Z}/n)_{U'})$. Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow j'_!(\mathbf{Z}/n)_{U'} \longrightarrow (\mathbf{Z}/n)_{X'} \longrightarrow (\mathbf{Z}/n)_{Y'} \longrightarrow 0,$$

et le théorème est vrai pour $(hf', (\mathbf{Z}/n)_{Y'})$ par l'hypothèse de récurrence. Il suffit donc de démontrer le théorème pour $(hf', (\mathbf{Z}/n)_{X'})$. Mais par le cas propre, le théorème est vrai pour $(h, .)$, et il s'ensuit, par la suite spectrale de Leray pour le couple de morphismes h, f', qu'il suffit de la démontrer pour $(f', \mathbf{Z}/n)$, d'où le lemme dans ce cas. **243**

Supposons enfin que F soit un faisceau de groupes finis constant. Rappelons qu'il suffit de démontrer que le foncteur $(R^1 f_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*(\cdot)$ est effaçable pour F, donc pour un G dans lequel on peut plonger F, donc pour $G = h'_* h'^* F$, c'est-à-dire pour un faisceau de la forme $h'_* F'$ où F' est constant sur X'. On a

$$\epsilon^*(h'_* F') \xrightarrow{\sim} h'_{\mathrm{cl}\,*}(\epsilon^* F')$$

et

$$0 \longrightarrow (R^1 f_{\mathrm{cl}\,*})h'_{\mathrm{cl}\,*}\epsilon^*(\cdot) \longrightarrow (R^1 f_{\mathrm{cl}} h'_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*(\cdot) = (R^1 h_{\mathrm{cl}} f'_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*(\cdot),$$

donc il suffit de démontrer l'effaçabilité de ce dernier foncteur pour un faisceau constant. Mais on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (R^1 h_{\mathrm{cl}\,*})f'_{\mathrm{cl}\,*}\epsilon^*(\cdot) \longrightarrow (R^1 h_{\mathrm{cl}} f'_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*(\cdot) \longrightarrow h_{\mathrm{cl}\,*}(R^1 f'_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*(\cdot),$$

et le premier membre est effaçable, disons effacé par la résolution de Godement (XII 3.3), parce que h est propre. Il suffit donc de démontrer que le membre de droite est effacé par la résolution de Godement, donc que $(R^1 f'_{\mathrm{cl}\,*})\epsilon^*(\cdot)$ l'est, donc que le théorème est vrai pour (f', F') où F' est constant, d'où le lemme.

Fin de la démonstration. Nous supposons maintenant que F est un faisceau constant et **244**
que $f : X \to S$ est une immersion ouverte dense, avec S régulier. Le cas ensembliste résulte maintenant immédiatement de 3.2 et du lemme trivial analogue pour la topologie classique. En effet, on en déduit que $\epsilon^* f_* F$ et $f_{\mathrm{cl}\,*}\epsilon^* F$ sont constants de même valeur, donc isomorphes par φ.

Pour $q > 0$, on va d'abord se réduire au cas où de plus $X = S - Y$ avec Y régulier, i.e. au cas où (Y, S) est un Spec $\mathbf{C}$-couple lisse. En effet, écrivons $X = S - C_1$, où C_1 est muni de la structure induite réduite, et définissons récursivement

Y_ν = l'ouvert dense des points réguliers de C_ν,

$C_{\nu+1} = C_\nu - Y_\nu$, avec structure induite réduite.

On a $\dim C_{\nu+1} < \dim C_\nu$ parce que Y_ν est dense dans C_ν, d'où une suite

$$X = X_1 \subset X_2 = S - C_2 \subset X_3 = S - C_3 \subset \ldots \subset X_r = S,$$

où les inclusions $i_\nu : X_\nu \to X_{\nu+1}$ sont des immersions ouvertes et où l'on a

$$X_\nu = X_{\nu+1} - Y_\nu, Y_\nu \text{ fermé dans } X_{\nu+1}, \text{ et régulier.}$$

Or l'image directe $i_{\nu *}F$ d'un faisceau constant sur X est constante (3.2), et les $R^q i_\nu * F$ sont constructibles et concentrés sur les variétés de Y de dimension $\leq n-1$ (3.4, 3.6, 3.7) pour les valeurs de q envisagées. Donc par l'hypothèse de récurrence et la suite spectrale de Leray (resp. la suite exacte XII 3.2), on se réduit au cas de i_ν, d'où la réduction **245**
annoncée.

Mais pour un couple lisse (Y, S) on a calculé explicitement la valeur des $(R^q f_*)F$ pour la topologie étale (3.4, 3.6, 3.7), et un calcul analogue et facile, que nous laissons au lecteur, donne les résultats analogues pour la topologie classique. On en déduit le théorème pour f par une comparaison directe.

5. Le théorème de finitude pour les préschémas algébriques en caractéristique zéro

Théorème 5.1. *Soient k un corps de caractéristique zéro, et $f : X \to S$ un morphisme de type fini de schémas localement de type fini sur k. Soit F un faisceau constructible d'ensembles (resp. de groupes finis, resp. abélien de torsion) sur X. Alors les $R^q f_* F$ sont également constructibles pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0, 1$, resp. pour tout q).*

On met l'hypothèse que k soit de caractéristique 0 parce qu'on va se servir du théorème de résolution des singularités [1]. La démonstration vaut également pour la caractéristique $p > 0$ si l'on admet la résolution des singularités, pourvu que F soit d'ordres premiers à p. On peut donc déduire un résultat en caractéristique $\neq 0$ pour $\dim X \leq 2$, en appliquant les résultats d'Abhyankar [3]. Un autre ingrédient de la démonstration,
246 en plus du sempiternel th. de changement de base pour un morphisme propre, est le « théorème de pureté cohomologique absolu » 3.9[46].

Rappelons que le théorème est déjà démontré pour un morphisme propre et pour S arbitraire (XIV 1.1). D'ailleurs on obtiendra dans Exposé XIX (encore en car. 0) le théorème de finitude sous les hypothèses beaucoup plus faibles que S soit un schéma excellent et que f soit de type fini, en prouvant pour de tels schémas le théorème de pureté absolu sous la forme signalée dans 3.10.

Dans le cas de caractéristique $\neq 0$ et d'un schéma de dimension ≥ 3, on n'a pour l'instant que la conséquence facile suivante de XI 3.3 :

Théorème 5.2. *Soit X un schéma algébrique lisse sur $\operatorname{Spec} k$, k un corps séparablement clos, et soit F un faisceau de groupes abéliens finis (resp. de groupes finis) qui est localement constant, et d'ordres premiers à la caractéristique de k. Alors $H^q(X, F)$ est un groupe fini (resp. un ensemble pointé fini) pour tout q (resp. pour $q = 0, 1$).*

Démonstration de 5.2. On peut supposer k algébriquement clos (VIII 1.1). Récurrence sur $n = \dim X$: D'après XI 3.3 et il existe un hyper-recouvrement de X par des ouverts qui sont des « bons voisinages ». On se réduit immédiatement, par la suite spectrale d'un hyper-recouvrement, au cas où X est un bon voisinage, donc admet une fibration élémentaire (XI 3.1)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

247 D'après (3.2, 3.6, 3.7), le faisceau $j_* F$ est localement constant sur X, $(R^1 j_*)F$ est localement constant sur $Y = \overline{X} - X$, et $(R^q j_*)F = 0$ si $q > 0$. Par suite il résulte de 2.1 que $(R^p \overline{f}_*)(R^q j_*)F$ est un faisceau localement constant sur S pour les valeurs de q envisagées, et le résultat résulte de l'hypothèse de récurrence et de la suite spectrale de Leray (resp. de la suite exacte XII 3.2).

La démonstration de 5.1 est très voisine de celle de 4.1 pour le cas F constructible. Nous nous bornerons à indiquer les grandes lignes : récurrence sur $\dim X = n$. On se réduit d'abord au cas X et S affines, donc f quasi-projectif, en appliquant la méthode de la démonstration de 1.3. Ensuite on applique IX 2.14 et (VIII 5.5 et VIII 5.8) pour se

[46] N.D.E. : Travaux de Deligne et Gabber XXX

ramener au cas F constant. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

où h est une immersion ouverte dense et où $\overline{f}$ est propre, donc le théorème est vrai pour $\overline{f}$ (XIV 1.1). Il suffit ainsi de démontrer le théorème pour (h, F), c'est-à-dire pour une immersion ouverte dense et un faisceau constant. Soit $h : S' \to S$ une résolution des 248
singularités de S et

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "h'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[from=u, "f"] & S' \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

le diagramme cartésien déduit de h. On se ramène à démontrer le théorème pour f', donc au cas où de plus $S = S'$ est régulier. Par la méthode de récurrence employée dans la fin de la démonstration de 4.1, on se réduit au cas où $Y = S - X$ est non-singulier, i.e. où (Y, S) est un couple lisse, et on termine en appliquant (3.2, 3.4, 3.6, 3.7).

Remarque 5.3. La démonstration de 5.1 qu'on vient d'esquisser est également valable lorsqu'on se donne un anneau noethérien A à gauche, annulé par un entier $n > 0$ (qu'il faut supposer premier à la caractéristique si celle-ci n'est pas supposée nulle, cf. remarques suivant 5.1), et qu'on considère des faisceaux de A-modules à gauche constructibles.

Bibliographie

[1] Hironaka, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Math., vol. 79 (1964), p. 109.

[2] Godement, P. Théorie des faisceaux, Paris, 1958. **249**

[3] Abhyankar, S. Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Ann. of Math., vol. 63 (1956), p. 491.

[4] J.P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Annales Inst. Fourier 1956, p. 1-42 (cité GAGA).

EXPOSÉ XVII

Cohomologie à supports propres

P. Deligne

Introduction

252

Dans cet exposé est développé le formalisme de la cohomologie à support propre. Les questions de variance ont été traitées avec assez de soin, alors qu'elles n'étaient que rendues plausibles dans le séminaire oral. Ceci explique la longueur de l'exposé, dont les paragraphes 1 à 4 sont consacrés aux catégories et à la topologie générale. Il est très vivement recommandé au lecteur de ne lire que les paragraphes 5 et 6, où se trouve concentrée la substance géométrique de l'exposé (§ 5 : construction et variance de la cohomologie à support propre, théorèmes de changement de base, de finitude, de tor-dimension finie et de comparaison ; § 6 : théorie du morphisme tracé pour un morphisme quasi-fini et plat).

Dans les paragraphes 1 et 2, on « rappelle » quelques résultats sur les catégories dérivées. Le § 1 *n*° 1 est consacré au formalisme des signes. Dans le § 3, on traite du problème de recoller deux formalismes de variance. Dans le § 4, on introduit les résolutions plates et on étudie les propriétés spéciales des résolutions flasques de Godement.

Dans cet exposé, les foncteurs $R^q f_!$ images directes supérieures à supports propres, 253
et le foncteur $Rf_!$ qui leur donne naissance, ne sont définis que pour f un morphisme compactifiable (3.2.1). Dans l'appendice, rédigé par B. Saint-Donat, on montre comment étendre la définition aux morphismes séparés de type fini de but quasi-compact quasi-séparé.[47]

Le § 5 *n*° 5 (cohomologie d'un produit symétrique) ne servira plus dans ce séminaire. Il sera utilisé dans SGA 5 pour raffiner le théorème de rationalité des fonctions L.[48]

Le § 6 *n*° 3 (théorie de la trace pour coefficients continus) ne sera utilisé dans l'exposé XVIII que dans le cas relativement facile des groupes lisses ; le lecteur intéressé par le théorème de dualité de Poincaré (dualité globale), et prêt à admettre un argument transcendant, pourra même se dispenser complètement de lire ce § 6 *n*° 3, ainsi que la plus grande partie du § 1 de XVIII.

0. Préliminaires terminologiques

[46] Le présent exposé et le suivant, rédigés en 1968 et 1969, reprennent et complètent les exposés oraux de A. Grothendieck (de printemps 1964). Le rédacteur, qui n'assistait pas au séminaire oral, s'est partiellement inspiré des notes de A. Grothendieck.

[47] N.D.E. : le théorème de compactification de Nagata assure que tout morphisme séparé de type fini de but quasi-compact quasi-séparé est compactifiable. Voir B. Conrad, « Deligne's notes on Nagata compactifications », *J. Ramanujan Math. Soc.* **22** (2007), 205–257, cité [C] dans la suite, 4.1, ainsi que « Erratum for "Deligne's notes on Nagata compactifications" », *J. Ramanujan Math. Soc.* **24** (2009), 427–428.

[48] N.D.E. : voir SGA $4\frac{1}{2}$, Fonctions L modulo ℓ^n et modulo p.

0.1. Le signe = placé entre deux groupes de symboles désignant des objets d'une catégorie signifiera parfois (par abus de notations) que ces objets sont canoniquement isomorphes. La catégorie et l'isomorphisme canonique devront en principe avoir été définis au préalable. Dans un diagramme, le signe = désignera alors l'isomorphisme lui-même.

0.2.0. Soit $f : S \to S'$ un morphisme de sites (IV 4.9.3). Si U et U' sont des objets de S et S', un f-morphisme de U dans U' sera par définition un morphisme de U dans f^*U'. Pour les sites étales de schémas, on retrouve la notion usuelle.

254 0.2.1. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont des faisceaux sur S et S', un f-morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}'$ sera indifféremment

(i) un morphisme de $f^*\mathscr{F}'$ dans $\mathscr{F}$

(ii) un morphisme de $\mathscr{F}'$ dans $f_*\mathscr{F}$

(iii) une fonction qui, à chaque f-morphisme φ d'un objet U de S dans un objet U' de S' associe une fonction de $\mathscr{F}'(U')$ dans $\mathscr{F}(U)$, et ce de façon compatible avec la composition de φ avec une flèche de S ou S' [48].

On voit sur (i), (ii) et (iii) que les faisceaux d'ensemble forment une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie des sites.

Itou pour les faisceaux de modules à gauche sur des sites annelés. Itou pour les faisceaux étales sur des schémas ; ce n'est pas immédiatement un cas particulier de ce qui précède, car les sites forment en fait une 2-catégorie et « site étale de X » n'est qu'un pseudo-foncteur en X (VII 1.4).

La définition précédente fait des faisceaux d'ensembles (resp. ...) sur des sites variables une catégorie fibrée sur celle des sites, ayant pour catégories fibres les catégories opposées aux catégories usuelles de faisceaux d'ensembles (resp. ...).

0.3. Soient I un ensemble fini, ϵ une fonction de I à valeurs dans $\{+1, -1\}$, $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille de catégories additives graduées par des foncteurs de translation T_i ([11] I 1.1.0) et F un multifoncteur multiadditif des catégories $\mathscr{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathscr{A}$ graduée par le foncteur de translation T. On suppose F covariant (resp. contravariant)
255 en les i tels que $\epsilon_i = 1$ (resp. $\epsilon_i = -1$). Modifiant et complétant ([11] II 2.1.1), on dira que F est un foncteur gradué si on s'est donné une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ d'isomorphismes de foncteurs entre $T\circ F$ et $F\circ T_i^{\epsilon_i}$, telle que les diagrammes suivants soient anticommutatifs, pour $i \neq j$ dans I,

$$\begin{tikzcd}
F\circ(T_i^{\epsilon_i}, T_j^{\epsilon_j}) \arrow[r, "\varphi_j * T_i^{\epsilon_i}"] \arrow[d, "\varphi_i * T_j^{\epsilon_j}"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & T\circ F\circ T_i^{\epsilon_i} \arrow[d, "T*\varphi_i"] \\
T\circ F\circ T_j^{\epsilon_j} \arrow[r, "T*\varphi_j"] & T\circ T\circ F.
\end{tikzcd}$$

On laisse au lecteur le soin de définir le composé de deux foncteurs gradués et de vérifier que c'est encore un foncteur gradué.

0.4. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie additive et I un ensemble fini. Pour $i \in I$, on désigne par 1_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de $\mathbf{Z}^I$. Un complexe I^{uple} (resp. un complexe I^{uple} naïf) de $\mathscr{A}$ consiste en

(a) une famille $(K^k)_{k\in\mathbf{Z}^I}$ d'objets de $\mathscr{A}$;

[48] Ces terminologies ne sont pas compatibles à l'identification des objets de S aux faisceaux associés.

(b) pour chaque $i \in I$ et chaque $k \in \mathbf{Z}^I$, une flèche $d_i^k : K^k \to K^{k+1_i}$, ces flèches vérifiant $d_i^{k+1_i} d_i^k = 0$ et, pour $i \neq j$ $d_i^{k+1_j} d_j^k + d_j^{k+1_i} d_i^k = 0$ (resp. $d_i^{k+1_j} d_j^k = d_j^{k+1_i} d_i^k$).

0.5. On appellera pro-objet d'une catégorie $\mathscr{C}$ un foncteur de $\mathscr{C}$ dans (Ens) qui soit **256**
limite inductive filtrante (selon une petite catégorie filtrante) de foncteurs représentables (cf. I 8.10). Tout pro-objet est limite inductive selon un petit ensemble ordonné filtrant de foncteurs représentables. Si X_i est un système projectif d'objets de $\mathscr{C}$, indexé par une petite catégorie filtrante, on désigne par "$\varprojlim$" X_i le pro-objet $\varinjlim h^{X_i}$.

0.6. Le lecteur dualisera 0.5 au cas des ind-objets (Cf. I 8.2).

0.7. Conformément à la nouvelle terminologie, on appelle schéma ce qui s'appelait autrefois préschéma, et on appelle schéma séparé ce qui s'appelait autrefois schéma.

0.8. La catégorie des schémas annelés est la catégorie dont les objets sont les schémas dont le site étale est muni d'un faisceau d'anneaux, une flèche de $(S, \mathscr{A})$ dans $(T, \mathscr{B})$ étant un couple formé d'un morphisme de schémas f de S dans T, et d'un homomorphisme φ de faisceaux d'anneaux de $f^*\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}$. Le morphisme de schémas f est dit induit par (f, φ).

0.9. Si X est un schéma sur Y, on désigne par $(X/Y)^n$ le produit fibré n-uple de X sur Y.

0.10. Soit S un schéma. On appellera grand site étale (resp. grand site fppf, resp. grand site fpqc) de S le site Sch/S, muni de la topologie étale (resp. fppf, resp. fpqc) (SGA 3 IV 6.3). On fera attention que ce n'est pas un $\mathscr{U}$-site ($\mathscr{U}$ étant l'univers fixé, Sch/S consistant en les schémas $\in \mathscr{U}$).

On appelle petit site fpqc (resp. petit site fppf) de S le site des schémas plats sur S **257**
(resp. plats de présentation finie) muni de la topologie fpqc (resp. fppf). Lorsqu'il faudra éviter une confusion, on appellera petit site étale de S le site S_{et} (VII 1.2).

0.11. Dans bien des cas, le rédacteur s'est permis de parler de diagrammes commutatifs de morphismes de sites là où il eût fallu parler de diagrammes essentiellement commutatifs, i.e. commutatifs à isomorphisme près (cf. IV 3.2.2). Le lecteur pourra vérifier que les arguments que nous donnons s'appliquent aussi à la situation générale.

0.12. La terminologie « schéma cohérent » pour « schéma quasi-compact quasi-séparé » a été subrepticement introduite par endroits par A. Grothendieck.

0.13. Un faisceau de torsion F sur un schéma S sera dit premier aux caractéristiques résiduelles de S s'il est limite inductive de ses sous-faisceaux annulés par des entiers n inversibles sur S.

1. Les catégories dérivées

1.1. Fonceurs exacts (les règles de signe).

1.1.1. Pour les théorèmes fondamentaux relatifs aux catégories dérivées, je renvoie à Verdier [11] et [12]. Dans ce n°, une attention toute spéciale a été accordée aux problèmes de signes.

Rappelons que si $f : X \to Y$ est un morphisme de complexes (dans une catégorie additive, sous-entendue par la suite), son cône $C(f)$ est défini par 258

(1.1.1.1) $$C(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \qquad d^n = -d_X^{n+1} + f^{n+1} + d_Y^n.$$

Lorsque $X = 0$ (resp. $Y = 0$), on a $C(f) = Y$ (resp. $C(f) = X[1]$), de sorte que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

définit un « triangle »

$$X \xrightarrow{f} Y \to C(f) \xrightarrow{j} X[1].$$

Dans la catégorie des complexes à homotopie près, on appelle distingué un triangle isomorphe à un triangle de ce type, et antidistingué un triangle qui devient distingué quand on change le signe de ses flèches. On vérifie que le triangle défini par une suite exacte de complexes scindée en chaque degré ([11] p. 10, cf. la démonstration de 1.1.5.4) est antidistingué et que, à isomorphisme près, tout triangle antidistingué est obtenu ainsi.

*1.1.2. Les calculs de signes s'effectuent le plus aisément à l'aide des « règles formelles » suivantes. On écrit un élément de $C(f)^n$ sous la forme $1 \otimes x + y$ ($x \in X^{n+1}$, $y \in Y^n$), 1 étant une « cellule » de dimension 1, et on pose $d(1) \otimes x = f(x)$. On a donc

$$d(1 \otimes x + y) = d1 \otimes x - 1 \otimes dx + dy = -1 \otimes dx + f(x) + dy._*$$

259 Définition 1.1.3. (i) Un foncteur gradué (0.3) d'une catégorie triangulée $\mathscr{A}$ dans une catégorie triangulée $\mathscr{B}$ est dit exact s'il transforme triangles distingués en triangles distingués.

(ii) Un foncteur gradué contravariant d'une catégorie triangulée $\mathscr{A}$ dans une catégorie triangulée $\mathscr{B}$ est dit exact si pour tout triangle distingué (X, Y, Z, u, v, w) de $\mathscr{A}$ le triangle $(F(Z), F(Y), F(X), F(v), F(u), TF(w))$ est distingué (dans cette définition, on identifie FX à $TFTX$ grâce à la graduation de F).

(iii) Soient $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille finie de catégories triangulées, ϵ une fonction de I dans $\{+1, -1\}$ et $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée. Un foncteur gradué F du produit des $\mathscr{A}_i$ dans $\mathscr{A}$, covariant en les i tels que $\epsilon(i) = 1$ et contravariant en les i tels que $\epsilon(i) = -1$ est dit exact si quel que soit $i \in I$, les foncteurs de $\mathscr{A}_i$ dans $\mathscr{A}$ déduits de F en fixant toutes les variables, sauf la $i^{\text{ème}}$, sont des foncteurs exacts.

Un composé de foncteurs exacts est encore un foncteur exact.

1.1.4. Si $(K^{n_1 \dots n_p}, d_1, \dots, d_p)$ est un complexe multiple (0.4), le complexe simple associé est défini par

(1.1.4.0) $$K^n = \prod_{\sum n_i = n} K^{(n_i)} \quad , \quad d = \sum d_i.$$

Quand, exceptionnellement, on le définira par une somme plutôt que par un produit, ce fait sera signalé explicitement.

Soit I un ensemble fini. On se propose, d'après Cartan-Eilenberg et J.P. Serre,
260 d'expliquer comment à tout complexe naïf I^{uple} K est canoniquement associé un complexe I^{uple} (0.4).

Pour tout ordre total $<$ sur I, soit $K(<)$ le complexe I^{uple} suivant :

$$(1.1.4.1) \qquad \begin{cases} K(<)^{\underline{k}} = K^{\underline{k}} \\ d(<)_i^{\underline{k}} = (-1)^{\sum\limits_{j<i} k_j} d_i. \end{cases}$$

Si $<_1$ et $<_2$ sont deux ordres totaux sur I l'isomorphisme canonique τ entre $K(<_1)$ et $K(<_2)$ est par définition celui donné par

$$(1.1.4.2) \qquad \tau^{\underline{k}} = (-1)^{\epsilon(<_1,<_2)}, \quad \text{où} \quad \epsilon(<_1,<_2) = \sum_{\substack{i<_1 j \\ i<_2 j}} k_i k_j.$$

1.1.4.2.1. On vérifie que ces isomorphismes canoniques établissent un système transitif d'isomorphismes entre les $K(<)$ pour $<$ ordre total sur I ; ces $K(<)$ forment donc un complexe I^{uple} unique à isomorphisme unique près, qu'on désignera dans ce n° par la notation $K(*)$ et qu'on appelle le complexe I^{uple} associé ou complexe naïf I^{uple} K. On prendra garde que $K(*)^{\underline{k}}$ n'est pas canoniquement isomorphe à $K^{\underline{k}}$: seul le choix d'un ordre total sur I permet d'identifier ces deux objets.

Si K est un complexe naïf I^{uple}, et si $i \in I$, on désigne par $K[1_i]$ le complexe naïf suivant, de différentielles notées $d_j[1_i]$:

$$(1.1.4.3) \qquad \begin{cases} K[1_i]^{\underline{k}} = K^{\underline{k}+1_i} \\ d_j[1_i]^{\underline{k}} = d_j^{\underline{k}+1_i} \quad \text{si } i \neq j \\ d_i[1_i]^{\underline{k}} = -d_i^{\underline{k}+1_i}. \end{cases}$$

Si K est un complexe I^{uple}, on pose **261**

$$(1.1.4.4) \qquad \begin{cases} K[1_i]^{\underline{k}} = K^{\underline{k}+1_i} \\ d_j[1_i]^{\underline{k}} = -d_j[1_i]^{\underline{k}+1_i}. \end{cases}$$

Si K est un complexe naïf I^{uple} et $<$ un ordre total sur I, de sorte que $K(*)$ est donné par (1.1.4.1), on définit un isomorphisme σ entre $K[1_i](*)$ et $K(*)[1_i]$ par la formule

$$(1.1.4.5) \qquad \sigma^{\underline{k}} = (-1)^{\sum\limits_{j<i} k_j} \mathrm{id}_{K^{\underline{k}+1_i}}.$$

. On vérifie que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de l'ordre total $<$; il définit donc un isomorphisme, dit canonique, entre $K[1_i](*)$ et $K(*)[1_i]$.

. Quels que soient i, j dans I, si K est un complexe ou un complexe naïf I^{uple}, on identifie de façon évidente $K[1_i][1_j]$ et $K[1_j][1_i]$.

Pour $i \neq j$ dans I, le diagramme suivant d'isomorphismes canoniques du type 1.1.4.6 ou 1.1.4.7 est alors anticommutatif :

$$(1.1.4.7.1) \qquad \begin{tikzcd} K[1_i][1_j](*) \arrow[r, equal] \arrow[d, leftrightarrow] & K[1_j][1_i](*) \arrow[r, leftrightarrow] & K[1_j](*)[1_i] \arrow[d, leftrightarrow] \\ K[1_i](*)[1_j] \arrow[r, leftrightarrow] & K(*)[1_i][1_j] \arrow[r, equal] & K(*)[1_j][1_i]. \end{tikzcd}$$

1.1.5. Soit $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un foncteur contravariant additif de catégories additives. **262**
On définit comme suit l'extension de F aux complexes : $F : C(\mathscr{A}) \to C(\mathscr{B})$. Si K est un complexe de $\mathscr{A}$, on pose

$$(1.1.5.1) \qquad \begin{cases} F(K)^k = F(K^{-k}) \\ d_{F(K)}^k = (-1)^{k+1} F(d^{-k-1}). \end{cases}$$

L'isomorphisme canonique σ entre $F(K)[1]$ et $F(K[-1])$ est défini par

(1.1.5.2) $$\sigma^k = (-1)^{k+1}\,\mathrm{id}_{F(K^{-k-1})}\,.$$

Si $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ sont deux foncteurs contravariants additifs, on définit l'isomorphisme canonique ρ entre $G{\circ}F(K)$ et $G(F(K))$ par

(1.1.5.3) $$\rho^k = (-1)^k\,\mathrm{id}_{G\circ F(K^k)}\,.$$

Lemme 1.1.5.4. (i) Pour tout foncteur contravariant additif $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, les formules (1.1.5.1), (1.1.5.2) définissent un foncteur contravariant exact de $K(\mathscr{A})$ dans $K(\mathscr{B})$.

(ii) Pour tout couple (G, F) de foncteurs contravariants additifs composables, la formule (1.1.5.3) définit un isomorphisme de foncteurs gradués entre l'extension aux complexes de GF et le composé des extensions aux complexes de G et F.

263 Preuve. Un morphisme de degré i : $f : K \to L$ est au choix

(a) un morphisme de K dans $L[i]$
(b) un morphisme de $K[-i]$ dans L
(c) une famille $f^n : K^n \to L^{n+i}$ qui commute ou anticommute aux différentielles selon la parité de i.

Si $f : K \to L[i]$ est un morphisme de degré i, alors $F(f) : F(L)[-i] \to K$ est encore un morphisme de degré i ; pour $i = 1$, on a

(1.1.5.5) $$F(f)^n = (-1)^{n+1}F(f^{-n-1}).$$

Si $0 \to K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \to 0$ est une suite exacte de complexes scindée degré par degré, le choix d'un scindage permet d'écrire le différentielle de L sous la forme

$$d_L = d_K + d_M + f,$$

où f est un morphisme de degré un de M dans K. De même, la suite exacte duale

$$0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$$

définit un morphisme de degré un f^* de $F(K)$ dans $F(M)$. On a $f^* = F(f)$. Il en résulte que l'image par F d'un triangle (K, L, M, u, v, f) défini par une suite exacte courte de complexes est encore un triangle du même type et, d'après 1.1.1, ceci prouve (i).

Sous les hypothèses (ii), pour f de degré un, on a $G(F(f))^n = (-1)^{n+1}(-1)^{-n}G \circ F(f)^n = -G \circ F(f)^n$; en particulier, l'isomorphisme de graduation $G(F(K[1])) \simeq G(F(K))[1]$ est l'isomorphisme ayant pour composantes -1.

264 Le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \circ F(K)[1] \arrow[r, leftrightarrow, "\rho[1]"] \arrow[d, equal] & G(F(K))[1] \arrow[d, leftrightarrow] \\ G \circ F(K[1]) \arrow[r, leftrightarrow, "\rho"] & G(F(K[1])) \end{tikzcd}$$

est donc commutatif, ce qui prouve (ii).

1.1.6. Soit $s = +$, ou $s = -$; soient I un ensemble fini, $\epsilon : I \to \{+, -\}$ une fonction, $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{A}$ des catégories additives, et F un multifoncteur multiadditif des catégories $\mathscr{A}_i$ dans $\mathscr{A}$, covariant en les arguments d'indice i tel que $\epsilon(i) = +$ et contravariant en les autres. On se propose de définir l'extension $K^s(F)$ (ou simplement F) de F aux complexes comme multifoncteur exact des catégories $K^{s\epsilon(i)}(\mathscr{A}_i)$ ($s\epsilon(i) = \pm$, selon la règle des signes) dans $K^s(\mathscr{A})$, [48] présentant la même variance que F. On expliquera ensuite

[48]La construction fournit également une extension de F en un multifoncteur des catégories $C^{s\epsilon(i)}(\mathscr{A}_i)$ dans $C^s(\mathscr{A})$.

en quel sens cette construction est compatible à la composition des foncteurs. D'autres conventions de degrés sont possibles, et seront utilisées ; ce point est indépendant des questions de signe considérées ici.

. Si F est contravariant à une variable, on définit $K^s(F)$ par les formules (1.1.5).

. Si F est covariant, on définit le foncteur $K^s(F)$ par passage au quotient à partir du composé du foncteur évident du produit des catégories $C^s(\mathscr{A}_i)$ dans la catégorie des complexes I^{uples} naïfs, du foncteur (1.1.4) de la catégorie des complexes I^{uples} naïfs dans celle des complexes I^{uples} (1.1.4.2.1), et du foncteur complexe simple associé (1.1.4.0) : **265**

$$K^s(F) = C^s(F)(*)_{s.a}.$$

Soient des complexes $K_j \in K^s(\mathscr{A}_j)$, et $i \in I$; on pose $K_j[1_i] = K_j$ pour $j \neq i$, et $K_i[1_i] = K_i[1]$. On a alors des isomorphismes évidents :

$$C^s(F)(K_j[1_i]) \simeq C^s(F)(K_j)[1_i],$$

et

$$C^s(F)(K_j)(*)[1_i]_{s.a} \simeq C^s(F)(K_j)(*)_{s.a}[1],$$

d'où, via (1.1.4.5), un isomorphisme canonique σ entre $K^s(F)(K_j[1_i])$ et $K^s(F)(K_j)[1]$. Il résulte de 1.1.4.7 que ces isomorphismes définissent une graduation de $K^s(F)$.

. Dans le cas général, F est le produit de foncteur contravariants canoniques $\mathscr{A}_i \to \mathscr{A}_i^\circ$ (pour $\epsilon(i) = -$) et d'un foncteur covariant F^+ ; on définit le foncteur $K^s(F)$ par composition à partir de 1.1.6.1 et 1.1.6.2.

Proposition 1.1.7. *Sous les hypothèses précédentes, le foncteur $K^s(F)$ est un foncteur multiadditif exact.*

Il suffit de vérifier 1.1.7 sous les hypothèses de 1.1.6.1 (où la proposition est 1.1.5.4 (i)) ou de 1.1.6.2. Pour vérifier que les foncteurs déduits de $K^s(F)$ en fixant toutes les variables, sauf la $i^{\text{ème}}$, sont exacts, on peut expliciter $K^s(F)$ en terme d'un ordre sur I pour lequel i soit le plus petit élément ; un triangle distingué type (1.1.1.1) est alors **266**
transformé en triangle distingué type.

1.1.8. Soient I et J deux ensembles finis, $\Psi : I \to J$ une application surjective, $\epsilon_I : I \to \{+,-\}$ et $\epsilon_J : J \to \{+,-\}$ des fonctions, et des multifoncteurs multiadditifs, covariants en les arguments pour lesquels $\epsilon = +$ et contravariant en les autres :

$$G_j : \prod_{\Psi(i)=j} \mathscr{A}_i \longrightarrow \mathscr{B}_j \qquad (j \in J)$$

$$F : \prod_{j\in J} \mathscr{B}_j \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Choisissons des ordres totaux sur I et J, de telle sorte que Ψ soit une application croissante. On définit alors l'isomorphisme canonique ρ entre l'extension aux complexes de $F \circ (G_j)$ et le composé des extensions aux complexes de F et des G_j par la formule

$$\text{(1.1.8.1)} \qquad \rho^{\underline{k}} = (-1)^{A(\underline{k})} : \text{ automorphisme de } F \circ (G_j)(K_i^{k_i\epsilon_I(i)\epsilon_J(\Psi(i))}).$$

avec

$$A(\underline{k}) = \sum_{\epsilon_I(i)=\epsilon_J(\Psi(i))=-} k_i + \sum_{\epsilon_J(j)=-} \sum_{\substack{\Psi(a)=\Psi(b)=j \\ a<b}} k_a k_b.$$

Cette formule généralise (1.1.5.3), on vérifie que ρ ne dépend pas des ordres choisis sur I et J, et est un isomorphisme de foncteurs gradués (cf. 1.1.5.4 (ii)).

Ces isomorphismes ρ vérifient la condition évidente de cocycle pour un composé triple.

267 1.1.9. Soient I un ensemble fini, i et j deux éléments distincts de I, $I' = I\backslash\{i,j\}$, $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{A}$ des catégories additives et $F : (\mathscr{A}_i)_{i\in I} \to \mathscr{A}$ et $G : (\mathscr{A}_i)_{i\in I'} \to \mathscr{A}$ des multifoncteurs multiadditifs. On suppose que $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}_j$ et que F est contravariant en la $i^{\text{ème}}$ variable et covariant en la $j^{\text{ème}}$. Pour X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}_i$, on désignera par $F_{X,Y}$ le multifoncteur des $(\mathscr{A}_i)_{i\in I'}$ dans $\mathscr{A}$ obtenu en fixant les $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ arguments :

$$F_{X,Y}(\dots) = F(\dots, X, \dots, Y, \dots).$$

On appelle morphisme de contraction $c : F \to G$ la donnée pour tout $X \in \mathscr{A}$ d'un morphisme de foncteurs

$$c_X : F_{X,X} \longrightarrow G,$$

tel que pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathscr{A}_i$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_{Y,X} \arrow[r] \arrow[d] & F_{X,X} \arrow[d, "c_X"] \\ F_{Y,Y} \arrow[r, "c_Y"'] & G \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Les conventions 1.1.6 sont motivées par le

Lemme 1.1.9.1. Soient $c : F \to G$ un morphisme de contraction et $(K_\ell)_{\ell\in I}$ des complexes dans les $\mathscr{A}_\ell$, avec $K_i = K_j$. Soit $<$ un ordre total sur I pour lequel i soit le prédécesseur de j. Soit, avec les notations de 1.1.6, pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$c^k : K^s(F)(K_\ell)^k \longrightarrow K^s(G)(K_\ell)^k$$

268 le morphisme dont la restriction à $F(\dots K_i^{k_i} K_j^{k_j} \dots)$ vaut 0 si $k_i \neq k_j$, et vaut $c_{K_i^{k_i}}$ si $k_i = k_j$. Alors, $(c^k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est un morphisme de complexes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier ce lemme, et le fait que le morphisme de contraction (c^k) ne dépend pas de l'ordre choisi sur I.

L'exemple standard de morphisme de contraction est celui de la loi de composition

$$\operatorname{Hom}(Y,Z) \otimes \operatorname{Hom}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X,Z).$$

Exemples 1.1.10. (i) Si on applique les définitions de 1.1.6 au foncteur produit tensoriel, on retrouve la notion usuelle de produit tensoriel de deux complexes, la différentielle étant donnée par

$$d(x\otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes dy.$$

(ii) Si on applique les définitions de 1.1.6 au foncteur $\operatorname{Hom}(X,Y)$, en considérant Y comme première variable et X comme seconde variable, convention qu'on suivra toujours, cette convention permet d'identifier, pour deux complexes X, Y, le k-ième composant du complexe $\operatorname{Hom}(X,Y)$ défini dans 1.1.6 à $\prod_n \operatorname{Hom}(X^n, Y^{n+k})$, et on retrouve la différentielle habituelle : pour $f \in \operatorname{Hom}(X^n, Y^{n+k})$, on a

$$df = d\circ f - (-1)^k f \circ d.$$

(iii) Les conventions précédentes ont pour vertu que les systèmes de flèches suivante
269 sont des morphismes de complexes, sans qu'on doive les perturber par aucun signe (1.1.9) :

$$\operatorname{Hom}^\bullet(L,M) \otimes \operatorname{Hom}^\bullet(K,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}^\bullet(K,M) : f\otimes g \mapsto f\circ g$$
$$\operatorname{Hom}^\bullet(L,M) \otimes L \longrightarrow M : f \otimes x \mapsto f(x).$$

*1.1.10.1. La convention (1.1.4.5)–(1.1.6.2) se justifie comme suit, pour $F = \otimes$: un élément de $((K \otimes L)[1])^n$ s'écrit sous la forme (*1.1.2) (en se rappelant que $(K \otimes L)[1] = C(K \otimes L \to 0)$ (1.1.1.1)) $\sum 1 \otimes (x^p \otimes y^q)$, un élément de $(K[1] \otimes L)^n$ sous la forme $\sum (1 \otimes x^p) \otimes y^q$ et un élément de $(K \otimes L[1])^n$ sous la forme $\sum x^p \otimes (1 \otimes y^q)$; le signe apparaît quand on interchange x^p et 1. Pour $F =$ dual, la convention (1.1.5.2) se justifie ainsi : un élément de $K^*[1]$ s'écrit $1 \otimes \omega$; sa valeur sur un élément $1' \otimes x$ de $K[-1]$ ($1'$ cellule de dimension -1) est $< 1 \otimes \omega, 1' \otimes x >= (-1)^{\deg \omega} < 1, 1' >< \omega, x >= (-1)^{\deg \omega} < \omega, x >$; c'est la convention adoptée.$_*$

Remarque 1.1.11. « Rappelons » qu'une catégorie sous-additive est une catégorie dont les ensembles de flèches $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sont munies de lois de groupes abéliens, la composition des morphismes étant biadditive. Un foncteur additif F entre catégories sous-additives et un foncteur qui vérifie la formule

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

pour $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Les foncteurs additifs d'une catégorie sous-additive $\mathscr{A}$ dans un autre $\mathscr{B}$ forment une catégorie, notée $\mathscr{H}om_{\mathrm{add}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Soit (D) l'unique catégorie sous-additive, d'ensemble d'objets indexés par $\mathbf{Z}$, $(X^n)_{n\in\mathbf{Z}}$, **270**
avec

$$\text{(1.1.11.1)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Hom}(X^n, X^n) = \mathbf{Z}, \text{ engendré par l'identité} \\ \mathrm{Hom}(X^n, X^{n+1}) = \mathbf{Z}, \text{ engendré par une flèche notée } d_n \\ \mathrm{Hom}(X^i, X^j) = 0 \text{ si } j - i \neq 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

Soit D le complexe de (D) défini par $D^n = X^n$ et $d^n = d^n$.

Pour toute catégorie sous-additive $\mathscr{A}$, le foncteur $G \mapsto G(D)$ de $\mathscr{H}om_{\mathrm{add}}((D), \mathscr{A})$ dans $C(\mathscr{A})$ est un isomorphisme.

La construction 1.1.6 s'étend au cas d'un foncteur multiadditif de catégories sous-additives $\mathscr{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathscr{A}$.

Soit

$$F^\cdot = (F^n, d^n)_{n\in\mathbf{Z}}$$

un complexe de foncteurs multiadditifs de catégories additives $\mathscr{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathscr{A}$. On peut considérer $F^\cdot$ comme un foncteur de (D) dans une catégorie de multifoncteurs, ou encore comme un foncteur multiadditif

$$F_1 : \prod \mathscr{A}_i \times (D) \longrightarrow \mathscr{A}.$$

On définit l'extension de $F^\cdot$ aux complexes par la formule

$$\text{(1.1.11.2)} \qquad F^\cdot(K_1 \ldots K_n) = F_1(K_1 \ldots K_n, D).$$

1.1.12. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux catégories additives et

$$F^\cdot = (F^n, d^n)_{n\in\mathbf{Z}}$$

un complexe de foncteurs additifs de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. Supposons que les foncteurs F_i admettent des adjoints à droite F_i ; et ${}^t d^i : F_{i+1} \to F_i$ est le transposé de d^i, soit $F.$ le complexe de foncteurs additifs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}$, de composantes les F_i, et d'opérateur différentiel **271**

$$(d.)^i = (-1)^{i+1}\, {}^t d^{-i-1} : F_{-i} \longrightarrow F_{-i-1}.$$

Soit ^{t} le foncteur contravariant de (D) dans (D) donné par

$${}^t X^n = X^{-n} \quad , \quad {}^t d^n = d^{-n-1}.$$

Le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme canonique près

(1.1.12.1)
$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}\times(D)\times\mathscr{B} \arrow[r, "(F^n(A),\mathrm{Id})"] \arrow[d, "(\mathrm{Id},{}^t,\mathrm{Id})"] & \mathscr{B}\times\mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}"] & (\mathrm{Ab}) \arrow[d, equal] \\ \mathscr{A}\times(D)\times\mathscr{B} \arrow[r, "(\mathrm{Id},(F_\bullet)^n(B))"] & \mathscr{A}\times\mathscr{A} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}"] & (\mathrm{Ab}). \end{tikzcd}$$

Ceci exprime la formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}(F^n(A), B) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}(A, F_n(B)).$$

Les conventions générales 1.1.3 fournissent donc un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}^\bullet(F^\bullet(K), L) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}^\bullet(K, F_\bullet(L)).$$

Définition 1.1.13. Si K est un complexe d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, on appelle tronqué à droite (resp. à gauche) de K en dimension n, et on désigne par $\tau_{\leq n}(K)$ (resp. $\tau_{\geq n}(K)$) les complexes suivants

$$\tau_{\leq n}(K) \,:\, \dots K^{n-2} \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^n) \longrightarrow 0$$
$$\tau_{\geq n}(K) \,:\, 0 \longrightarrow \mathrm{coker}(d^{n-1}) \longrightarrow K^{n+1} \longrightarrow K^{n+2} \dots.$$

272 Proposition 1.1.14. (i) $H^i(\tau_{\leq n}(K)) = 0$ pour $i > n$ et $H^i(\tau_{\geq n}(K)) = 0$ pour $i < n$.

(ii) Le morphisme canonique $\tau_{\leq n}(K) \to K$ (resp. $K \to \tau_{\geq n}K$) induit des isomorphismes sur les H^i pour $i \leq n$ (resp. $i \geq n$).

Le foncteur $\tau_{\leq n}$ (resp. $\tau_{\geq n}$) transforme morphismes homotopes en morphismes homotopes. Dès lors, il résulte de 1.1.14 que le foncteur 1.1.13 garde un sens dans la catégorie dérivée.

1.1.15. Si K est un complexe double, de première (resp. deuxième) différentielle d' (resp. d''), on désigne par $\tau''_{\leq n}(K)$ le sous-complexe double de K tel que

$$\tau''_{\leq n}(K)^{pq} = \begin{cases} K^{pq} & \text{si } q < n \\ \mathrm{Ker}(d'') & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q > n \end{cases}$$

on définit de même $\tau''_{\geq n}(K)$, $\tau'_{\leq n}(K)$ et $\tau'_{\geq n}(K)$.

1.1.16. On aura aussi à considérer les « tronqués bêtes » d'un complexe K, définis par

$$\sigma_{\leq n}(K)^i = \begin{cases} K^i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases} \qquad \sigma_{\geq n}(K)^i = \begin{cases} K^i & \text{si } i \geq n \\ 0 & \text{si } i < n. \end{cases}$$

273

1.2. Foncteurs dérivés. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée et S un système multiplicatif saturé ([11] I 2.1.2). Si $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, on désignera par A^+ et A^- les ind et pro-objets ((0.5) et (0.6))

$$A^+ = \text{“}\varinjlim_{A\xrightarrow{s}A'}\text{”}\, A' \qquad A^- = \text{“}\varprojlim_{A'\xrightarrow{s}A}\text{”}\, A',$$

où s parcourt la catégorie filtrante des flèches de S de source ou but A.

Les foncteurs $A \mapsto A^+$ et $A \to A^-$ rendent inversibles les éléments de S et définissent des foncteurs pleinement fidèle de $\mathscr{A}(S^{-1})$ dans les catégories des Ind et pro-objets de $\mathscr{A}$ respectivement.

Définition 1.2.1. Soit F un multifoncteur covariant exact des catégories triangulées $(\mathscr{A}_i)_{0<i\leq n}$ dans la catégorie triangulée $\mathscr{A}$ et soient S_i et S des systèmes multiplicatifs saturés des catégories $\mathscr{A}_i$ et $\mathscr{A}$.

(i) Le foncteur dérivé droit RF de F (relativement aux S_i et à S) est le foncteur des catégories $\mathscr{A}_i(S_i^{-1})$ dans la catégorie des ind-objets de $\mathscr{A}(S^{-1})$ qui rend commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{A}_i) \arrow[r, "(A_i)\mapsto F(A_i^+)"] \arrow[d] & \operatorname{Ind}\mathscr{A} \arrow[d] \\
\mathscr{A}_i(S_i^{-1}) \arrow[r, "RF"] & \operatorname{Ind}\mathscr{A}(S^{-1}).
\end{tikzcd}$$

(ii) On dit que RF est défini en (A_i) si le ind-objet $RF(A_i)$ de $\mathscr{A}(S^{-1})$ est « essentiellement constant », i.e. provient d'un objet de $\mathscr{A}(S^{-1})$; cet objet est appelé la valeur de RF en (A_i). 274

(iii) On dit que F est dérivable à droite si RF est partout défini ; on désignera alors encore par RF le foncteur des $\mathscr{A}_i(S_i^{-1})$ dans $\mathscr{A}(S^{-1})$ qu'il définit.

(iv) Une famille (A_i) d'objets des $\mathscr{A}_i$ est dite déployée pour RF si le morphisme canonique de $F(A_i)$ dans $RF(A_i)$ est un isomorphisme.

On laisse au lecteur le soin de définir par dualité le dérivé gauche LF de F (à valeur dans $\operatorname{Pro}\mathscr{A}(S^{-1})$) et d'étendre les définitions précédentes aux cas où F est covariant en certains arguments et contravariant en d'autres.

Lorsque RF est partout défini, la définition qu'on en a donné ici coïncide avec celle de Verdier ([11] p. 39), comme on le vérifie facilement.

Proposition 1.2.2. Soient (A_1', A_1, A_1'') un triangle distingué dans $\mathscr{A}_1$, et $A_i \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}_i$ $(i \neq 1)$.

(i) Si $(A_1', (A_i))$ et $(A_1'', (A_i))$ sont déployées pour RF, alors la famille $(A_1, (A_i))$ l'est aussi.

(ii) Si RF est défini en $(A_1', (A_i))$ et en $(A_1'', (A_1))$, il l'est aussi en $(A_1, (A_i))$ et le triangle $(RF(A_1', (A_i)), RF(A_1, (A_i)), RF(A_1'', (A_i)))$ est distingué dans $\mathscr{A}(S^{-1})$.

Prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i). Puisque F est exact, la flèche 275

$$(F(A_1', (A_i)), F(A_1, (A_i)), F(A_1'', (A_i))) \to (RF(A_1', (A_i)), RF(A_1, (A_i)), RF(A_1'', (A_i)))$$

est un morphisme de triangles distingués. Par hypothèse, cette flèche est un isomorphisme en deux sommets ; c'en est donc un au troisième, comme on voulait.

Lemme 1.2.2.1. Si $\Delta = (X, Y, Z)$ est un triangle distingué d'une catégorie triangulée $\mathscr{A}$ et S un système multiplicatif saturé de $\mathscr{A}$, alors le triangle $\Delta^+ = (X^+, Y^+, Z^+)$ de $\operatorname{Ind}\mathscr{A}$ est limite de triangles distingués de $\mathscr{A}$.

Désignons par $\mathscr{L}$ la catégorie des morphismes de triangle distingués de source Δ dont les flèches appartiennent à S.

(a) Si $\Delta = (X, Y, Z)$ et $\Delta' = (X', Y', Z')$ sont deux triangles distingués de $\mathscr{A}$ et si $f : \Delta \to \Delta'$ est un $\mathscr{A}(S^{-1})$-morphisme de triangles, il existe dans $\mathscr{A}$ des morphismes de triangles $s : \Delta' \to \Delta''$ et $f_1 : \Delta \to \Delta''$ tels que les composantes de s soient dans S et que le diagramme

(1)
$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ \Delta' \arrow[r, "s"] & \Delta'' \end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $\mathscr{A}(S^{-1})$.

Il existe un diagramme commutatif

(2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ X' \arrow[r, "s_X"] & X''_0 \end{tikzcd} \qquad (s_X \in S, f_1 \in \mathrm{Fl}\,\mathscr{A})$$

276 et un morphisme $\Delta' \xrightarrow{s} \Delta''_0$ dans S, admettant s_X pour composante. Raisonnons de même en les autres sommets : on obtient un diagramme du type (1), dans lequel toutefois f_1 n'est pas encore un morphisme de triangle dans $\mathscr{A}$, les diagrammes

(3)
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "w"'] & Z''_0 \arrow[d, "w''"] \\ X \arrow[r, "f_1"] & X''_0 \end{tikzcd}$$

par exemple pouvant ne pas être commutatifs dans $\mathscr{A}$, seulement dans $\mathscr{A}(S^{-1})$. Il existe $t_X : X''_0 \to X''_1$ dans S tel que $t_X w'' f_1 = t_X f_1 w$ et $t : \Delta''_0 \to \Delta''_1$ admettant t_X pour composante. Remplaçons Δ''_0 par Δ''_1, s par ts et f_1 par tf_1 ; dans le diagramme de type (1) obtenu, (3) est cette fois commutatif ; procédant de même aux autres sommets, on obtient (1). On laisse au lecteur le soin de vérifier de même :

(b) Si $f, g : \Delta \rightrightarrows \Delta'$ sont deux morphismes de triangles distingués dans $\mathscr{A}$, égaux dans $\mathscr{A}(S^{-1})$, alors il existe un morphisme de triangles distingués à flèches dans S, $s : \Delta' \to \Delta''$, tel que $sf = sg$.
(c) La catégorie $\mathscr{L}$ est filtrante à droite.
(d) On achève la démonstration du lemme en notant que

$$\Delta^+ = \text{“}\varinjlim_{s\in\mathscr{L}}\text{”}\,(\text{but de } s).$$

277 Prouvons 1.2.2 (ii). Soient X' et X'' des objets de $\mathscr{A}(S^{-1})$ représentant $RF(A'_1, (A_i))$ et $RF(A''_1, (A_i))$, et complétons le morphisme de degré 1 de X'' dans X' en un triangle distingué (X', X, X''). Remplaçant les A_i, A'_1, A_1 et A''_1 par le but d'une flèche de S_i ou S_1 de source A_i, A'_1, A_1 ou A''_1, on se ramène au cas où il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F(A''_1, (A_i)) \arrow[d] & X'' \arrow[l, "a''"'] \arrow[d] \\ F(A'_1, (A_i)) & X', \arrow[l, "a'"'] \end{tikzcd}$$

où a'' et a' sont des sections de flèches de $F(A''_1, (A_i))$ dans X'' et de $F(A'_1, (A_i))$ dans X'. En vertu de l'axiome $TR\,3$ de [11] on peut compléter ce diagramme en un morphisme de triangles

$$\begin{aligned}(X'XX'') &\longrightarrow (F(A'_1,(A_i)), F(A_1,(A_i)), F(A''_1,(A_i)))\\ &\longrightarrow (RF(A'_1,(A_i)), RF(A_1,(A_i)), RF(A''_1,(A_i))).\end{aligned}$$

La flèche composée est un morphisme de triangles, de source un triangle distingué et de but une limite (dans Ind $\mathscr{A}(S^{-1})$) de triangles distingués (1.2.2.1). Quel que soit Y dans $\mathscr{A}(S^{-1})$, le diagramme suivant sera commutatif et ses lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Y,X''[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(Y,X') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(Y,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(Y,X'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(Y,X'[1]) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(Y,RF(A''_1,A_i)[-1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,RF(A'_1,A_i)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,RF(A_1,A_i)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,RF(A''_1,A_i)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,RF(A'_1,A_i)[1]) \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, les flèches autres que la flèche centrale sont des isomorphismes. Le lemme **278**
des 5 montre que la flèche centrale aussi est un isomorphisme, quel que soit Y, donc que le triangle distingué (X',X,X'') est isomorphe au triangle $(RF(A'_1,(A_i)), RF(A_1,(A_i)), RF(A''_1,(A_i)))$. Ceci achève la démonstration.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux catégories abéliennes et F un foncteur covariant additif de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$, F définit des foncteurs exacts de $K(\mathscr{A})$ dans $K(\mathscr{B})$, de $K^+(\mathscr{A})$ dans $K^+(\mathscr{B})$ et de $K^-(\mathscr{A})$ dans $K^-(\mathscr{B})$ (1.1.7).

Définition 1.2.3. (i) On appelle foncteurs dérivés droits de F les foncteurs de $D^+(\mathscr{A})$ dans Ind $D^+(\mathscr{B})$ et de $D(\mathscr{A})$ dans Ind $D(\mathscr{B})$ dérivés droits des extensions de F aux complexes $K^+(\mathscr{A}) \to K^+(\mathscr{B})$ et $K(\mathscr{A}) \to K(\mathscr{B})$.

(ii) Un objet A de $\mathscr{A}$ est dit acyclique à droite pour F, ou, par abus de langage, acyclique pour RF, si le complexe réduit à A en degré 0 est déployé pour RF.

On s'intéressera surtout au cas où RF est partout défini ; on peut alors le considérer comme un foncteur de $D^+(\mathscr{A})$ dans $D^+(\mathscr{B})$, ou de $D(\mathscr{A})$ dans $D(\mathscr{B})$, selon le cas.

Proposition 1.2.4. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} D^+(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "RF"] & D(\mathscr{A}) \arrow[d, "RF"] \\ \mathrm{Ind}\ D^+(\mathscr{B}) \arrow[r] & \mathrm{Ind}\ D(\mathscr{B}). \end{tikzcd}$$

Si K est un complexe nul en degré $< n$ et si $s : K \to L$ est un quasi-isomorphisme, **279**
le morphisme composé $K \xrightarrow{s} L \to \sigma_{\geq n}(L)$ (1.1.6) est encore un quasi-isomorphisme. Les quasi-isomorphismes de K dans un complexe borné inférieurement forment donc une sous-catégorie (pleine) cofinale de la catégorie de tous les quasi-isomorphismes de source K. Le proposition en résulte formellement.

En particulier, si le foncteur RF est partout défini sur $D(\mathscr{A})$, il est partout défini sur $D^+(\mathscr{A})$, et le foncteur dérivé $RF : D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B})$ est restriction du foncteur dérivé $RF : D(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{B})$.

1.2.5. On laisse au lecteur le soin de :

(i) Généraliser la définition 1.2.3 au cas d'un complexe de multifoncteurs, covariant en certaines variables et contravariant en d'autres ;
(ii) Dualiser la définition 1.2.5 (i) pour définir les dérivés gauches ;
(iii) Etendre la proposition 1.2.4 au cas d'un complexe borné de multifoncteurs ;
(iv) Dualiser la proposition 1.2.5 (iii) en considérant des foncteurs dérivés gauches et l'inclusion de $D^-(\mathscr{B})$ dans $D(\mathscr{B})$.

Proposition 1.2.6. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux catégories abéliennes, $\mathscr{P}$ une partie de $\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ et F un foncteur additif de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. On suppose que

(a) tout objet de $\mathscr{A}$ est quotient d'un élément de $\mathscr{P}$
(b) pour toute suite exacte courte
$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$
où Q et R sont dans $\mathscr{P}$, P appartient aussi à $\mathscr{P}$ et la 0-suite $0 \to FP \to FQ \to$
280 $FR \to 0$ est exacte. Alors, tout objet de $\mathscr{P}$ est acyclique pour LF.

Si $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, les résolutions gauches de A par des objets de $\mathscr{P}$ formeront un système cofinal dans la catégorie filtrante des résolutions gauches de A. Il suffit donc de prouver que si un complexe
$$\ldots \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$
est acyclique et à objets dans $\mathscr{P}$, son image est acyclique. Le coupant en suites exactes courtes
$$(1.2.6.i) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{i-1}) \longrightarrow A_i \longrightarrow \mathrm{Im}(d_i) \longrightarrow 0 \qquad (i \geq 0)$$
on voit par récurrence sur i que $\mathrm{Im}(d_i) \in \mathbf{P}$ et que l'image de (1.2.6.i) par F est une suite exacte courte. L'image du complexe est donc acyclique.

Proposition 1.2.7. Soit F un foncteur additif d'une catégorie abélienne dans une catégorie abélienne $\mathscr{B}$. Si tout objet de $\mathscr{A}$ est quotient (resp. sous-objet) d'un objet acyclique pour LF (resp. RF) (1.2.3), le foncteur dérivé $LF : D^-(\mathscr{A}) \to D^-(\mathscr{B})$ (resp. $RF : D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B})$) est partout défini et tout complexe borné supérieurement (resp. inférieurement) d'objets acycliques pour LF (resp. RF) est déployé.

Il suffit de considérer le dérivé gauche LF. Si K est un complexe borné supérieurement, les quasi-isomorphismes $s : L \to K$ avec L borné supérieurement et à objets acycliques forment un système cofinal dans la catégorie des quasi-isomorphismes de but K. Il suffit de montrer que pour K à objets acycliques, $F(s) : F(L) \to F(K)$ est un quasi-
281 isomorphisme ; on aura alors dans le cas général $F(L) = LF(K)$. Soit M le cône de s. Le complexe est à objets acycliques et $H^*(M) = 0$; il faut prouver que $H^*(F(M)) = 0$.

Soit i un entier. Les complexes déployés forment une sous-catégorie triangulée, de sorte que tout complexe borné d'objets acycliques, notamment $\tau_{\geq i}(M)$, est déployé. Puisque $H^j(\tau_{\geq i}(M)) = 0$ pour $j > i$, on a, pour $j > i$, $H^j(F(M)) = H^j(F(\tau_{\geq i}(M))) = H^j LF(\tau_{\geq i}(M)) = 0$.

Proposition 1.2.8. Soif $F^\bullet$ un complexe borné inférieurement de foncteurs de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. Si pour tout $K \in K^+(\mathscr{A})$ existe un quasi-isomorphisme $L \xrightarrow{s} K$, où $L \in K^+(\mathscr{A})$ est déployé pour tous les RF^i, alors le foncteur dérivé $RF^\bullet : D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B})$ existe et tout complexe borné inférieurement déployé pour tous les RF^i est déployé pour $RF^\bullet$.

La preuve en est laissée au lecteur, ainsi que celle de l'énoncé dual, ou des variantes obtenues en prenant F contravariant, ou en prenant un complexe borné de foncteurs et en travaillant dans $D(\mathscr{A})$ et $D(\mathscr{B})$.

Définition 1.2.9. Soit F un foncteur de $D^b(\mathscr{A})$ dans $D(\mathscr{B})$ et d un intervalle de $\mathbf{Z}$. On dit que F est d'amplitude cohomologique $\subset d$ si pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, $H^i F(A) = 0$ pour $i \notin d$.

Très souvent, d sera un intervalle de la forme $[0, x]$ ou $[-x, 0]$ et on dira alors que F est de dimension cohomologique resp. homologique $\leq x$. On dira que F est de dimension finie s'il existe un intervalle fini d de $\mathbf{Z}$ tel que F soit d'amplitude $\subset d$.

Proposition 1.2.10. Supposons remplies les hypothèses de 1.2.7, et que le foncteur $RF : D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B})$ (resp. $LF : D^-(\mathscr{A}) \to D^-(\mathscr{B})$) est de dimension finie. Alors tout complexe d'objets acycliques pour RF (resp. LF) est déployé, et le foncteur RF : $D(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{B})$ (resp. $LF : D(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{B})$) est partout défini. **282**

Pour la démonstration, on renvoie à Verdier [11]. Il existe un énoncé analogue pour les complexes bornés de foncteurs. On peut encore remplacer l'exposant $+$ (resp. $-$) par b.

2. Catégories fibrées en catégories dérivées

2.1. Introduction. Le rédacteur insiste pour que le lecteur s'abstienne de lire ce §. On y donne le formalisme du théorème trivial de dualité et on y résout la perplexité soulevée par Artin dans XII 4.

Pour les notions de catégories sur une autre, de catégorie fibrée, de catégorie cofibrée et de clivage, on renvoie à SGA 1 VI. On établit entre autres dans cet exposé une équivalence entre les notions de catégories fibrées clivées normalisées sur une catégorie $\mathscr{C}$, et de pseudo-foncteur de $\mathscr{C}^\circ$ dans (Cat).

Définition 2.1.1. Si X est un site annelé, on désigne par $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des faisceaux de modules à gauche sur X.

Quand il y a lieu d'éviter une confusion, on écrit plutôt $D(X, \mathscr{A})$, $\mathscr{A}$ désignant le faisceau d'anneaux.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme de sites annelés, f définit des foncteurs dérivés **283**

(1) $Rf_* : D^+(X) \to D^+(Y)$ et

(2) $Lf^* : D^-(Y) \to D^-(X)$,

et, par passage aux catégories opposées, des foncteurs

(1°) $Rf_* : D^+(X)^\circ \to D^+(Y)^\circ$

(2°) $Lf^* : D^-(Y)^\circ \to D^-(X)^\circ$,

« fonctoriels » en f. Plus précisément, (1°) et (2°) définissent deux pseudo-foncteurs de la catégorie des sites dans celle des catégories triangulées, l'un covariant et l'autre contravariant. On trouve ainsi deux catégories sur celle des sites, l'une cofibrée, de fibres les $D^+(X)^\circ$, et de foncteurs image directe les Rf_*, l'autre fibrée, de fibres les $D^-(X)^\circ$, et de foncteurs image réciproque les Lf^*. Si le foncteur f^* est de dimension homologique finie (i.e. de « tor-dimension finie ») on peut dans (2) remplacer l'exposant par un exposant $+$. On obtient donc deux catégories sur la catégorie $\mathscr{S}_{\mathrm{tdf}}$ des sites annelés et des morphismes de site annelés de tor-dimension finie, catégories dont les fibres sont les catégories $D^+(X)^\circ$. Le « théorème trivial de dualité » de Verdier ([11] p. 48) exprime que ces deux catégories sont canoniquement isomorphes ; elles sont donc fibrées et cofibrées ; les foncteurs « image directe » sont les foncteurs Rf_* (sic), et les foncteurs « image réciproque » sont les foncteurs Lf^* (sic).

2.1.2. Le langage des catégories fibrées permet de résoudre aisément la perplexité soulevée par Artin en XII 4 : il suffit d'appliquer la proposition suivante à la catégorie fibrée et cofibrée sur celle des sites de fibres les opposées des catégories de faisceaux sur les sites correspondants (cf. 0.2). **284**

Soit $\mathscr{E}$ une catégorie sur $\mathscr{B}$, $f : y \to x$ une flèche de $\mathscr{B}$, et $F \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E}_x)$. Rappelons qu'un couple (G, φ) $(G \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}_y, \varphi \in \mathrm{Hom}_f(G, F))$ est une image réciproque au sens strict de F par f si, quels que soient $g : z \to y$ et $H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}_z$, on a

$$\mathrm{Hom}_g(H, G) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathrm{Hom}_{fg}(H, F).$$

De même pour les images directes. Si $\mathscr{E}$ est fibrée ou cofibrée sur $\mathscr{B}$, cette notion se réduit à celle d'image réciproque.

Proposition 2.1.3. Soient ϵ une catégorie sur $\mathscr{B}$, $y \in \operatorname{Ob}\mathscr{B}$, $F \in \operatorname{Ob}\mathscr{E}_y$ et un diagramme commutatif dans $\mathscr{B}$:

(2.1.3.1)
$$\begin{tikzcd} y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & y \arrow[d, "f"] \\ x' \arrow[r] & x. \end{tikzcd}$$

On suppose que les images directes et réciproques f_*F, g^*f_*F, g'^*F et $f'_*g'^*F$ existent au sens strict. Il existe alors une et une seule flèche $\varphi \in \operatorname{Fl}\mathscr{E}_{x'}$, dite flèche de changement de base, rendant commutatif le diagramme

(2.1.3.2)
$$\begin{tikzcd} & g'^*F \arrow[dl] \arrow[r] & F \arrow[d] \\ f'_*g'^*F \arrow[dr, "\varphi"'] & & f_*F \\ & g^*f_*F \arrow[ur] & . \end{tikzcd}$$

285 Si de plus les images directes $g'_*g'^*F$ et $g'_*f'_*g'^*F$ existent au sens strict, alors la flèche φ coïncide avec celle définie en XII 4. Si $f'^*f'_*g'^*F$ et $f'^*f'_*F$ existent au sens strict, elle coïncide encore avec la 2nde flèche définie en XII 4.

En particulier les deux flèches de changement de base XII 4 coïncident.

Par hypothèse, les flèches du diagramme (2.1.3.2) induisent des bijections

$$\operatorname{Hom}_{x'}(f'_*g'^*F, g^*f_*F) = \operatorname{Hom}_{f'}(g'^*F, g^*f_*F) = \operatorname{Hom}_{gf'}(g'^*F, f_*F).$$

Puisque $fg' = gf'$, $\operatorname{Hom}_{fg'}(g'^*F, f_*F)$ est identique à $\operatorname{Hom}_{gf'}(g'^*F, f_*F)$ et les flèches du diagramme (2.1.3.2) induisent des applications

$$\operatorname{Hom}_y(F,F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{fg'}(g'^*F, f_*F) = \operatorname{Hom}_{x'}(f'_*g'^*F, g^*f_*F),$$

et l'image de 1_F est la seule flèche de $\mathscr{E}_{x'}$ rendant (2.1.3.2) commutatif.

Par définition, dans XII 4, la flèche de changement de base ψ était celle rendant commutatif le diagramme suivant

(2.1.3.3)
$$\begin{tikzcd} f'_*g'^*F \arrow[d, "\psi"] & g'^*F \arrow[l] \arrow[r, equal] \arrow[d, "u_4"] & g'^*F \arrow[r] \arrow[d, "u_3"] & F \arrow[r, equal] \arrow[d, "u_2"] & F \arrow[d, "u_1"] \\ g'_*f_*F & f'^*g^*f_*F \arrow[l] \arrow[r, equal] & g'f^*f_*F \arrow[r] & f^*f_*F \arrow[r] & f_*F. \end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales et u_1 sont les flèches canoniques ; u_2 est donc la flèche d'adjonction, $u_3 = g'^*(u_2)$, u_4 se déduit de l'isomorphisme entre f'^*g^* et g'^*f^*, et la flèche ψ se déduit de u_4 par adjonction.

286 L'application composée de source g'^*F et de but f_*F est celle qui apparaît dans (2.1.3.2) et il en est donc de même dans le diagramme commutatif suivant, dont le carré

de gauche est extrait de (2.1.3.3)

$$\begin{tikzcd}
g'^*F \arrow[r, "u_4"] \arrow[d] & f'^*g^*f_*F \arrow[r] \arrow[d] & f_*F \arrow[d, equal] \\
f'_*g'^*F \arrow[r, "\psi"] & g^*f_*F \arrow[r] & f_*F.
\end{tikzcd}$$

Cela signifie que ψ vérifie la propriété caractéristique de φ.

La définition de φ est autoduale, ce qui dispense de démontrer la seconde partie de 2.1.3.

2.2. Catégories fibrées en catégories triangulées.

Définition 2.2.1. On appelle « catégorie additive sur une catégorie $\mathscr{B}$ » une catégorie $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{B}$ dont les ensembles de flèches $\mathrm{Hom}_f(X,Y)$ (pour $f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{B})$, X (resp. Y) au-dessus de la source (resp. du but) de f) ont été munis de lois de groupes abéliens, de sorte que :

(i) Quels que soient $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ dans $\mathscr{B}$ et X, Y, Z dans $\mathscr{A}$ au-dessus de x, y et z respectivement, la loi de composition :

$$\mathrm{Hom}_g(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_f(X,Y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{gf}(X,Z)$$

est biadditive.

(ii) Les catégories fibres sont additives.

On n'aura pas à utiliser ici que ces lois de groupe abélien, quand elles veulent bien exister, sont uniquement déterminées par $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et ρ.[49] Un $\mathscr{B}$-foncteur $F : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ entre catégories additives sur $\mathscr{B}$ est dit additif s'il induit des homomorphismes

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_1,f}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_2,f}(X,Y).$$

Définition 2.2.2. On appelle « catégorie abélienne sur une catégorie $\mathscr{B}$ » une catégorie $\mathscr{A}$ additive sur $\mathscr{B}$, dont les fibres sont abéliennes, et telle que pour toute flèche 287
$f : x \to y$ de $\mathscr{B}$ le bifoncteur

$$\mathrm{Hom}_f(X,Y) : \mathscr{A}_x^\circ \times \mathscr{A}_y \longrightarrow (\mathrm{Ab})$$

soit exact à gauche en X et Y.

On n'aura pas à utiliser ici que si $\mathscr{A}$ est une catégorie fibrée et cofibrée sur $\mathscr{B}$ (SGA 1 VI 6) elle est abélienne sur $\mathscr{B}$ dès que ses fibres sont des catégories abéliennes.

Définition 2.2.3. On appelle « catégorie triangulée sur une catégorie $\mathscr{B}$ » une catégorie $\mathscr{A}$ additive sur $\mathscr{B}$, munie d'un foncteur $T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ et dont les fibres $\mathscr{A}_x$ pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ sont munies d'ensembles Δ_x de triangles, ce de sorte que ;

(i) T est un $\mathscr{B}$-automorphisme additif de $\mathscr{A}$

(ii) chaque catégorie fibre $\mathscr{A}_x$, munie du foncteur T_x induit par T et de l'ensemble Δ_x, est une catégorie triangulée ([11] I 1.1.1).

[49] N.D.E. : ici ρ désigne le foncteur structurel $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

(iii) si les triangles (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') appartiennent à $\varDelta_x$ et $\varDelta_{x'}$ respectivement, tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[ddl, "w"'] & & & Z' \arrow[ddl, "w'"'] & \\
& & Y \arrow[ul, "v"'] \arrow[rrr, "g"] & & & Y' \arrow[ul, "v'"'] \\
X \arrow[urr, "u"] \arrow[rrr, "f"'] & & & X' \arrow[urr, "u'"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $u'f = gu$ peut se prolonger en un morphisme de triangles $(f, g, h) : (X, Y, Z) \to (X', Y', Z')$.

288 T sera appelé le foncteur de translation, on écrira souvent $A[1]$ plutôt que $T(A)$, $A[n]$ désignant alors $T^n(A)$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Les triangles appartenant aux ensembles $\varDelta_x$ seront dits distingués ou exacts.

Proposition 2.2.4. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée sur $\mathscr{B}$, x un objet de $\mathscr{B}$, (X, Y, Z, u, v, w) un triangle distingué de $\mathscr{A}_x$. Quels que soient $f : y \to x$ et l'objet $A \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}_y$, la suite infinie suivante est exacte

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \operatorname{Hom}_f(A, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_f(A, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_f(A, Z) \\ \longrightarrow \operatorname{Hom}_f(A, X[1]) \longrightarrow \operatorname{Hom}_f(A, Y[1]) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Enoncé analogue pour $f : x \to y$ et $A \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}_y$.

On laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition en paraphrasant Verdier [11] p. 4. On lui laisse aussi le soin de donner un sens à la proposition suivante et de la vérifier :

Proposition 2.2.5. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathscr{B}$. Pour tout foncteur $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ de but $\mathscr{B}$, la catégorie $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$ est additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathscr{B}$.

Exemple 2.2.6. La catégorie des faisceaux de modules sur des sites annelés variables est abélienne sur la catégorie des sites annelés.

Exemple 2.2.7. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie additive sur $\mathscr{B}$. La catégorie $C(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ des complexes de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{B}$ a pour objets les complexes des catégories fibres. Une flèche f de
289 (X^n, d) dans (Y^n, d) est un système de flèches $f^n : X^n \to Y^n$ tel que $df^n = f^{n+1}d$. On pose $p(f) = p(f^n)$ (cette flèche ne dépend pas de n car les $p(d)$ sont des identités). $C(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ est une catégorie additive sur $\mathscr{B}$. On définit un foncteur « de translation » en posant

$$(K[1])^n = K^{n+1} \quad , \quad (d[1])^n = -d^{n+1}.$$

Exemple 2.2.8. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie additive sur $\mathscr{B}$. La catégorie $K(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ des complexes de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{B}$ à homotopie près a les mêmes objets que $C(\mathscr{A}/\mathscr{B})$. On l'obtient en décrétant nulles, dans $C(\mathscr{A}/\mathscr{B})$, les flèches homotopes à zéro ; en d'autres termes, pour $f : x \to y$ dans $\mathscr{B}$, $X^\bullet \in \operatorname{Ob} C(\mathscr{A}/\mathscr{B})_x$ et $Y^\bullet \in \operatorname{Ob} C(\mathscr{A}/\mathscr{B})_y$, on pose

$$\operatorname{Hom}_f(X^\bullet, Y^\bullet) = H^0 \operatorname{Hom}^\bullet_f(X^\bullet, Y^\bullet)$$

Le foncteur de translation passe au quotient.

Si $F : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ est un foncteur de but $\mathscr{B}$, et si $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$, on laisse au lecteur le soin d'identifier $C(\mathscr{A}'/\mathscr{B}')$ à $C(\mathscr{A}/\mathscr{B}) \times_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$ et $K(\mathscr{A}'/\mathscr{B}')$ à $K(\mathscr{A}/\mathscr{B}) \times_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$. En particulier, les fibres de la catégorie $K(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ sont les catégories $K(\mathscr{A}_x)$ et, en tant que telles, sont triangulées.

Proposition 2.2.9. (i) Pour les structures additionnelles définies en 2.2.8, la catégorie $K(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ est triangulée sur $\mathscr{B}$.

(ii) La formation de la catégorie additive (resp. triangulée) $C(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ (resp. $K(\mathscr{A}/\mathscr{B})$) est compatible à tout changement de catégorie base $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$.

Les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2.3 se vérifient fibre par fibre. (iii) se vérifie **290**
en paraphrasant Verdier [11] p. 4.

Remarque 2.2.10. Ce qui précède s'applique aussi aux catégories $K^+(\mathscr{A}/\mathscr{B})$, $K^-(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ et $K^b(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ obtenues en se limitant respectivement aux complexes bornés inférieurement, supérieurement, ou bornés.

Remarque 2.2.11. Prenant pour $\mathscr{B}$ la catégorie finale, on retrouve les catégories usuelles de complexes.

2.2.12. Soit F un pseudo-foncteur d'une catégorie $\mathscr{B}^\circ$ dans (Cat). On sait (SGA 1 VI) que F définit une catégorie fibrée sur $\mathscr{B}$, de fibres les catégories $F(x)$. Quels que soient $f : x \to y$ dans $\mathscr{B}$ et $X \in \operatorname{Ob} F(x)$, $Y \in \operatorname{Ob} F(y)$, on a par définition

$$\operatorname{Hom}_f(X, Y) = \operatorname{Hom}_{F(x)}(X, F(f)(Y)). \tag{2.2.12.1}$$

On sait (ibidem) que la construction précédente définit une équivalence entre la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathscr{B}^\circ$ dans (Cat) et la 2-catégorie des catégories fibrées sur $\mathscr{B}$.

Partons d'un pseudo-foncteur de $\mathscr{B}^\circ$ dans la 2-catégorie ayant pour objets les catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées) et pour 1-flèches les foncteurs additifs (resp. exacts à gauche, resp. triangulés). On vérifie aussitôt que la catégorie définie par (2.2.12.1) est additive (resp. abélienne, resp. triangulée). Réciproquement :

Proposition 2.2.13. La construction précédente établit une équivalence entre **291**

(a) La 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathscr{B}^\circ$ dans la 2-catégorie ayant pour objets les catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées), et pour 1-flèches les foncteurs additifs (resp. exacts à gauche, resp. triangulés).

(b) La 2-catégorie des catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées) sur $\mathscr{B}$, qui sont fibrées sur $\mathscr{B}$.

La théorie développée en SGA 1 VI permet de ne vérifier que le point suivant :

. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathscr{B}$, $f : x \to y$ une flèche de $\mathscr{B}$ et supposons qu'un foncteur image réciproque $f^* : \mathscr{A}_y \to \mathscr{A}_x$ existe ; f^* est alors additif (resp. exact à gauche, resp. triangulé).

Le foncteur f^* donne lieu à des isomorphismes

$$\operatorname{Hom}_f(X, Y) \simeq \operatorname{Hom}_x(X, f^*(Y)).$$

Il faut prouver dans le cas triangulé, que f^* est triangulé pour l'isomorphisme $Tf^* = f^*T$ (T foncteur de translation) qui rend commutatif les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_f(X,Y) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}_x(X, f^*Y) \arrow[dr, equal] & \\
\operatorname{Hom}_f(TX, TY) \arrow[dr, equal] & & \operatorname{Hom}_x(TX, Tf^*Y) \\
& \operatorname{Hom}_x(TX, f^*TY) \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd} \tag{2.2.13.2}$$

292 Cas additif: Soit un diagramme

(2.2.13.3)
$$\begin{tikzcd} f^*X \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "f^*(u)"'] \arrow[d, shift left, "f^*(v)"] & X \arrow[d, shift right, "u"'] \arrow[d, shift left, "v"] \\ f^*X' \arrow[r, "p'"] & X'. \end{tikzcd}$$

On a $p'f^*(u+v) = (u+v)p = up + vp = p'f^*(u) + p'f^*(v) = p'(f^*(u) + f^*(v))$ et donc $f^*(u+v) = f^*(u) + f^*(v)$.

Cas abélien: par définition (2.2), le foncteur $\mathrm{Hom}(X, f^*Y) = \mathrm{Hom}_f(X, Y)$ est exact à gauche en Y, quel que soit X, dont f^* est exact à gauche.

Cas triangulé: soit (Y', Y, Y'') un triangle distingué dans $\mathscr{A}_y$ et soit (f^*Y', f^*Y, X'') un triangle distingué dans $\mathscr{A}_x$. En vertu de 2.2.3, le morphisme canonique entre les bases de ces triangles peut se prolonger en un morphisme de triangles, donnant lieu au diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[rr, "s"] \arrow[ddl] & & f^*Y'' \arrow[rr] \arrow[ddl] & & Y'' \arrow[ddl] & \\ & & f^*Y \arrow[ul] \arrow[rr, equal] & & f^*Y \arrow[ul] \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \\ f^*Y' \arrow[urr] \arrow[rr, equal] & & f^*Y' \arrow[urr] \arrow[rr] & & Y' \arrow[urr] & & \end{tikzcd} .$$

Prouvons que s est un isomorphisme, ce qui achèvera la démonstration. Quel que soit X dans $\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_x$, on dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, X'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y'[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y[1]) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y'') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y'[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y[1]) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_f(X, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_f(X, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_f(X, Y'') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_f(X, Y'[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_x(X, Y[1]). \end{tikzcd}$$

293 Les premières et dernières lignes sont exactes en vertu de 2.2.4. En vertu du lemme des cinq, l'application induite par s de $\mathrm{Hom}(X, X'')$ dans $\mathrm{Hom}(X, f^*Y'')$ est toujours bijective et s est donc un isomorphisme.

On a évidemment des résultats duaux pour les catégories cofibrées.

2.3. Formule triviale de dualité. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie sur une catégorie base $\mathscr{B}$, et soit S un ensemble de flèches de $\mathscr{A}$, chacune se projetant sur une identité de $\mathscr{B}$. La catégorie $\mathscr{A}(S^{-1})$ déduite de $\mathscr{A}$ par calcul de fractions est une catégorie sur $\mathscr{B}$ (vue la propriété universelle).

Soit $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ un foncteur ; on désigne par $\mathscr{A}'$ le produit fibré $\mathscr{A} \times_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$ et par S' l'image réciproque de S dans $\mathscr{A}'$. Le foncteur composé $\mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}(S^{-1})$ rend inversible les flèches de S', donc se factorise par $\mathscr{A}'(S'^{-1})$. On trouve ainsi un $\mathscr{B}'$-foncteur canonique

(2.3.1)
$$\mathscr{A}'(S^{-1}) \longrightarrow \mathscr{B}' \times_{\mathscr{B}} \mathscr{A}(S'^{-1}).$$

Lemme 2.3.2. Si $\mathscr{B}'$ est une sous-catégorie de $\mathscr{B}$, et si chaque fois qu'une flèche composée $h = f \circ g$ de $\mathscr{B}$ appartient à $\mathscr{B}'$, f et g appartiennent à $\mathscr{B}'$, alors le foncteur (2.3.1) est un isomorphisme.

Notons que (2.3.1) induit toujours une bijection sur les objets, et que, dans le cas présent, $\mathscr{B}' \times_{\mathscr{B}} \mathscr{A}(S^{-1})$ est une sous-catégorie de $\mathscr{A}(S^{-1})$. **294**

Rappelons la construction « explicite » de $\mathscr{A}(S^{-1})$ [2, Chap. I]. Etant donné deux objets X et Y de $\mathscr{A}$, on considère les « composés formels » $f_1 \dots f_n$ où chaque f_i est soit une flèche de $\mathscr{A}$, soit l'inverse d'une flèche de S. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}(S^{-1})}(X, Y)$ sera le quotient de l'ensemble de ces « composés formels » par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$\begin{aligned} &f_1 \dots uv \dots f_n \equiv f_1 \dots (u \circ v) \dots f_n && \text{pour } u, v \text{ dans } \mathrm{Fl}(\mathscr{A}) \\ &f_1 \dots ss^{-1} \dots f_n \equiv f_1 \dots f_n && \text{pour } s \in S \\ &f_1 \dots s^{-1}s \dots f_n \equiv f_1 \dots f_n && \text{pour } s \in S. \end{aligned}$$

Si on applique ces constructions à $\mathscr{A}$ et à la sous-catégorie $\mathscr{A}'$, on vérifie que $\mathscr{A}'(S^{-1})$ est identique à la sous-catégorie de $\mathscr{A}(S^{-1})$ image réciproque de $\mathscr{B}'$, du fait que si un « composé formel » $f_1 \dots f_n$ a pour composé dans $\mathscr{B}$ une flèche de $\mathscr{B}'$, l'image de chaque f_i sera aussi une flèche de $\mathscr{B}'$.

Supposons maintenant que $\mathscr{A}$ soit une catégorie triangulée sur $\mathscr{B}$, et que les ensembles $S_x = S \cap \mathrm{Fl}(\mathscr{A}_x)$ pour $x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B})$ soient des systèmes multiplicatifs saturés ([11] Chap. I § 2 n° 1).

Définition 2.3.3. Sous les hypothèses précédentes la catégorie $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ sera dite presque dérivable (resp. dérivable, resp. codérivable) relativement à S si, quel que soit le foncteur $F : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$, le foncteur (2.3.1) est un isomorphisme (resp. et si $\mathscr{A}(S^{-1})$ est fibrée, resp. cofibrée sur $\mathscr{B}$).

On désignera par I la catégorie du diagramme suivant **295**

(2.3.4) $$I : \underset{0}{\times} \xrightarrow{F} \underset{1}{\times}.$$

D'après 2.2.13, il revient au même de se donner une catégorie triangulée $\mathscr{A}$ sur I, fibrée (resp. cofibrée) sur I, ou de se donner ses fibres $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$ et le foncteur triangulé image réciproque $F^* : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_0$ (resp. et le foncteur triangulé image directe $F_* : \mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}_1$). Si $A_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_0$ et $A_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_1$, on a (2.2.12.1)

$$\mathrm{Hom}_F(A_0, A_1) = \mathrm{Hom}(A_0, F^* A_1)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_F(A_0, A_1) = \mathrm{Hom}(F_* A_0, A_1)$).

Proposition 2.3.5. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée sur I et S comme en (2.3.3).

(i) $\mathscr{A}$ est presque dérivable relativement à S, et $\mathscr{A}(S^{-1})$ est triangulée sur I.

(ii) Si $\mathscr{A}$ est fibrée (resp. cofibrée), le foncteur F^* (resp. F_*) est dérivable à droite (resp. à gauche) relativement à S_0 et S_1 (1.2.1) si et seulement si $\mathscr{A}$ est dérivable (resp. codérivable) sur I.

En vertu de 2.3.2, les catégories fibres de $\mathscr{A}(S^{-1})$ sont les catégories $\mathscr{A}_0(S_0^{-1})$ et $\mathscr{A}_1(S_1^{-1})$, où $S_i = S \cap \mathrm{Fl}(\mathscr{A}_i)$ $(i = 0, 1)$. Avec les notations du § 1 *n*° 2, les foncteurs $A_0 \to A_0^-$ et $A_1 \to A_1^+$ identifient $\mathscr{A}_0(S_0^{-1})$ et $\mathscr{A}_1(S_1^{-1})$ à des catégories de pro et ind-objets de $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$. Cela permet de définir une catégorie sur I, de fibres $\mathscr{A}_0(S_0^{-1})$ et

$\mathscr{A}_1(S^{-1})$, en posant, pour $A_0 \in \mathscr{A}_0$ et $A_1 \in \mathscr{A}_1$:

$$\mathrm{Hom}_F(A_0, A_1) = \mathrm{Hom}_F(A_0^-, A_1^+) = \varinjlim_{A_0' \xrightarrow{s} A_0} \varinjlim_{A_1 \xrightarrow{t} A_1'} \mathrm{Hom}(A_0', A_1'),$$

296 où s et t parcourent les éléments de S_0 et S_1 de but (de source) A_0 (A_1). La catégorie $\mathscr{A}$ s'envoie dans cette catégorie, et on vérifie aussitôt qu'elle vérifie la propriété universelle de $\mathscr{A}(S^{-1})$, sur I et après tout changement de base.

Pour vérifier (i), il suffit de prouver que cette catégorie, soit $\mathscr{A}(S^{-1})$, est triangulée, et il suffit de vérifier la condition 2.2.3 (iii). Soient donc (X_0, Y_0, Z_0) et (X_1, Y_1, Z_1) des triangles distingués de $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_1$, donnant lieu aux triangles distingués (X_0^-, Y_0^-, Z_0^-) et (X_1^+, Y_1^+, Z_1^+) de $\mathscr{A}_0(S_0^{-1})$ et $\mathscr{A}_1(S_1^{-1})$.

(2.3.5.1)
$$\begin{tikzcd} X_0^- \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X_1^+ \arrow[d] \\ Y_0^- \arrow[r, "v"] & Y_1^+. \end{tikzcd}$$

En vertu du lemme 1.2.2.1, les triangles (X_0^-, Y_0^-, Z_0^-) et (X_1^+, Y_1^+, Z_1^+) sont limites de triangles distingués ; il existe donc des morphismes de triangles distingués

(2.3.5.2)
$$\begin{aligned} (X_0^-, Y_0^-, Z_0^-) &\longrightarrow (X_0', Y_0', Z_0') \\ (X_1', Y_1', Z_1') &\longrightarrow (X_1^+, Y_1^+, Z_1^+), \end{aligned}$$

297 et un diagramme

$$\begin{tikzcd} X_0' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & X_1' \arrow[d] \\ Y_0' \arrow[r, "v'"] & Y_1', \end{tikzcd}$$

compatibles avec (2.3.5.1). La catégorie $\mathscr{A}$ étant triangulée sur I, ce diagramme peut se prolonger en un morphisme de triangles

$$(X_0', Y_0', Z_0') \longrightarrow (X_1', Y_1', Z_1').$$

Composant ce dernier avec les morphismes (2.3.5.2), on voit que le diagramme (2.3.5.1) peut se prolonger en un morphisme de triangles, ce qui établit 2.2.3 (iii).

Vérifions (ii), supposant par exemple $\mathscr{A}$ fibrée sur I. Si $A_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A}_1(S_1^{-1}))$, une image réciproque de A_1 dans $\mathscr{A}(S^{-1})$ est un objet B de $\mathscr{A}_0(S_0^{-1})$ tel que, dans $\mathscr{A}_0(S_0^{-1})$, on ait

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_0(S_0^{-1})}(A_0, B) &= \mathrm{Hom}_F(A_0^-, A_1^+) = \mathrm{Hom}(A_0^-, F^*(A_1^+)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_0(S_0^{-1})}(A_0, F^*(A_1^+)). \end{aligned}$$

Il existe un tel objet B si et seulement si le ind-objet $F^*(A_1^+)$ de $\mathscr{A}_0(S^-)$ est essentiellement constant (i.e. représentable), et B représente alors cet ind-objet, qui n'est autre que $RF(A_1)$ (1.2.1), d'où l'assertion.

Corollaire 2.3.6. *Avec les notations de 2.3.3, si $\mathscr{A}$ est presque dérivable sur $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{A}(S^{-1})$ est une catégorie triangulée sur $\mathscr{B}$.*

Tout d'abord, la catégorie fibre $\mathscr{A}(S^{-1})_x$ peut être identifiée à $\mathscr{A}_x(S_x^{-1})$: on applique
298 l'hypothèse au changement de base $\{x\} \to \mathscr{B}$. Cette catégorie est triangulée, munie d'un ensemble Δ_x de triangles, ce qui donne un sens à l'énoncé précédent. Pour vérifier la condition 2.2.3 (iii), il suffit de le faire après tout changement de base $I \to \mathscr{B}$, et l'assertion résulte de 2.3.5 (i).

Il résulte aussitôt de la démonstration de 2.3.5 (ii) que :

THÉORÈME 2.3.7. (formule triviale de dualité).

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée fibrée et cofibrée sur I, et désignons par F_* et F^* les foncteurs image directe et image réciproque. Soit $S = S_0 \cup S_1$ un système multiplicatif comme en 2.3.3. On suppose que LF_* est défini on $A_0 \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}(S_0^{-1})$ et que Rf^* est défini en $A_1 \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}_1(S_1^{-1})$. On a alors

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_0(S_0^{-1})}(A_0, RF^*A_1) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}(S^{-1})}(A_0, A_1) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_1(S_1^{-1})}(LF_*A_0, A_1).$$

La position des symboles R, L, * et $_*$ dans 2.3.7 n'est aberrante qu'en apparence ; en effet, dans la catégorie fibrée et cofibrée 0.2 des faisceaux sur des sites variables, les catégories fibres sont les catégories opposées des catégories usuelles de faisceaux.

2.4. Catégories fibrées en catégories dérivées.

2.4.0. On désigne dans ce n° par $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée cofibrée sur $\mathscr{B}$ et par S un système multiplicatif de morphismes de $\mathscr{A}$, tous au-dessus d'une identité, et tels que $S_x = S \cap \operatorname{Fl}(\mathscr{A}_x)$ soit un système multiplicatif saturé de $\mathscr{A}_x$ [11, I 1.2.1] pour tout $x \in \operatorname{Ob}(\mathscr{B})$.

On recherche un critère pour que $\mathscr{A}$ soit codérivable relativement à S (2.3.3), ce qui **299**
implique que $\mathscr{A}(S^{-1})$ soit triangulée sur $\mathscr{B}$ lorsqu'on la munit de l'ensemble des triangles isomorphes à l'image d'un triangle distingué de $\mathscr{A}$ (2.3.5).

PROPOSITION 2.4.1. Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et S comme ci-dessus. Pour que $\mathscr{A}$ soit codérivable relativement à S, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(∗) $\forall x \in \operatorname{Ob}\mathscr{B}$, $\forall A \in \operatorname{Ob}(\mathscr{A}_x)$, $\exists s : A' \to A$ dans S, $\forall g, f : x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$, f_*A' est déployé à gauche pour le foncteur g_*.

Désignons par $\mathscr{A}^1$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ formée des objets dont toutes les images directes sont déployés relativement à tous les foncteurs image directes. Alors 1.2.2 montre que $\mathscr{A}^1$ est sous-catégorie triangulée de $\mathscr{A}$, évidemment cofibrée. On pose $S^1 = S \cap \operatorname{Fl}(\mathscr{A}^1)$.

LEMME 2.4.1.1. Supposons que S soit stable par images directes. Alors, $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ est codérivable et $\mathscr{A}(S^{-1})$ peut se calculer par un calcul de fractions à droite.

Vérifions la condition c) de [2, I 2.2], si possible moins triviale que les autres. On se donne f et s ($s \in S$) et on doit trouver

(2.4.1.2)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed] & B' \\ A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"'] & B, \arrow[u, dashed, "t"'] \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif (2.4.1.2) avec $t \in S$. Soit F l'image de f dans $\mathscr{B}$. Par hy- **300**
pothèse $F_*(s)$ est encore dans S, de sorte que, d'après VERDIER, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_*(A') \arrow[r] & B' \\ F_*(A) \arrow[u, "F_*(s)"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

donc aussi un diagramme (2.4.1.2).

Du fait que $\mathscr{A}(S^{-1})$ se calcule par calcul de fractions à droite, il est trivial que sa formation commute au changement de base $c : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$.

Ce lemme s'applique en particulier à $\mathscr{A}^1$ et S^1 ; le lemme suivant implique donc 2.4.1 :

Lemme 2.4.1.3. *Sur $\mathscr{B}$ et après tout changement de base $c : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$, le foncteur canonique $\Phi : \mathscr{A}^1((S^1)^{-1}) \to \mathscr{A}(S^{-1})$ est une équivalence de catégorie.*

Construisons un foncteur quasi-inverse au foncteur Φ. Quel que soit $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, choisissons $s_A \in S$ de but A et de source $A^1 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^1$ avec $s_A = \mathrm{Id}_A$ pour $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^1$. Soit f une flèche de $\mathscr{A}$, de but A, de source B et d'image F dans $\mathscr{B}$. Puisque $s_B \in S$ et que $F_*A^1 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^1$, on peut trouver B', $s \in S^1$ et u rendant commutatif le diagramme suivant

(2.4.1.4)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "s_B"'] & B^1 \\
A^1 \arrow[u, "s_A"'] \arrow[r, "a"] & F_*A^1 \arrow[u] & B' . \arrow[l, "s"'] \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

301 La flèche $f^1 = us^{-1}a$ de $\mathscr{A}^1((S^1)^{-1})$ ne dépend alors que de f.

Soient f et g deux flèches composables, d'images F et G dans $\mathscr{B}$. Pour prouver que $(g\circ f)^1 = g^1\circ f^1$, contemplons le diagramme suivant, où figurent des diagrammes (2.4.1.4) pour f et g :

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[rrr, "g"] & & & C & & \\
A^1 \arrow[ur] \arrow[rr, "a"] & & F_*A^1 \arrow[ur] \arrow[rrr, "a'"] & & & (GF)_*A^1 \arrow[ur] & & & C^1 \arrow[ull] \\
& & & B^1 \arrow[uu] \arrow[rrr, "b"] & & & G_*B^1 \arrow[uu] & & \\
& & B' \arrow[uu, "s"] \arrow[ur, "u"'] \arrow[rrr, "b'"] & & & G_*B' \arrow[uu, "G_*s"'] \arrow[ur] & & C'' \arrow[ll, "r"] \arrow[r, "w"'] & C' . \arrow[ull, "t"'] \arrow[uu, "v"']
\end{tikzcd}$$

Puisque $t \in S$, il existe C'', $r \in S^1$ et w qui le rendent commutatif. Par définition, $g^1 \circ f^1 = vt^{-1}b\,u\,s^{-1}a$ et $(g\circ f)^1 = vw(G_*(s)r)^{-1}a'a$, et on conclut par la commutativité du diagramme.

On a donc défini un foncteur de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}^1((S^1)^{-1})$; il se factorise en $\Psi : \mathscr{A}(S^{-1}) \to \mathscr{A}^1((S^1)^{-1})$, la propriété universelle de $\mathscr{A}(S^{-1})$. Le composé $\Phi\Psi$ est isomorphe à l'identité car son composé avec le foncteur $J : \mathscr{A} \to \mathscr{A}(S^{-1})$ est isomorphe à J. On vérifie de même que $\Psi\Phi$ est isomorphe à l'identité.

Corollaire 2.4.2. *Avec les notations de 2.4.1, $\mathscr{A}$ est codérivable relativement à S dès que, pour tout ensemble fini B de flèches de $\mathscr{B}$, la condition $(*)$ est vérifiée lorsqu'on se limite à ne considérer que les images directes par les flèches de B.*

302 Quelle que soit la catégorie $\mathscr{B}'$ d'ensemble de flèches fini, la prop. 2.4.1 sera applicable après tout changement de catégorie de base $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$. On prendra pour $\mathscr{B}'$ les catégories des diagrammes suivants :

$$\underset{(0)}{*} \qquad \underset{(1)}{* \longrightarrow *} \qquad \underset{(2)}{* \longrightarrow * \longrightarrow *} \qquad \underset{(3)}{* \longrightarrow * \longrightarrow * \longrightarrow *}$$

Considérons les catégories $\mathscr{A}_x(S_x^{-1})$ ($x \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$). Etant donné $f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{B})$ et A_1, A_2 dans ces catégories au-dessus de la source et du but de f, on définit $\mathrm{Hom}_f(A_1, A_2)$ comme étant l'ensemble analogue défini après le changement de catégorie base de type (1) défini par f. On définit la composition des morphismes à l'aide de changements de catégorie base de type (3). On construit ainsi une catégorie $\mathscr{A}(S^{-1})^*$ sur $\mathscr{B}$, dont la formation est compatible à tout changement de base ; on vérifie qu'elle est solution du problème universel qui définit $\mathscr{A}(S^{-1})$ en utilisant les changements de base de type (0), (1) et (2).

Le résultat suivant est le dual de 2.4.2.

Proposition 2.4.3. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie triangulée fibrée sur $\mathscr{B}$ et S comme en 2.4.1. Pour que $\mathscr{A}$ soit dérivable relativement à S, il suffit que pour tout ensemble fini B de flèches de $\mathscr{B}$, on ait

($*'$) $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B})$, $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A}_x)$, $\exists s : A \to A'$ dans S, $\forall g, f : Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ dans B, f^*A' est déployé à droite pour le foncteur g^*.

3. Recollement de catégories fibrées ou cofibrées

3.1. Introduction. Soit $f : Y \to X$ un morphisme séparé de type fini d'un schéma **303**
Y dans un schéma X, ou une application continue d'un espace localement compact dans un espace localement compact. On sait alors définir un foncteur « image directe à support propre », noté $f_!$, de la catégorie des faisceaux abéliens sur Y dans la catégorie des faisceaux abéliens sur X (cf. 6.1 dans le cas des schémas, et Verdier [13] pour le cas des espaces localement compacts séparés). Lorsque Y et X sont des schémas de type fini sur $\mathbf{C}$, ces deux définitions sont compatibles en un sens évident. Malheureusement dans le cas des schémas, contrairement à ce qui se passe dans le cas des espaces localement compacts, les foncteurs dérivés du foncteur $f_!$ sont pathologique ; on peut toutefois définir un foncteur « image directe à support propre » raisonnable, directement de la catégorie $D^+(Y)$ dans $D^+(X)$. Pour le définir, on factorise le morphisme f en une immersion ouverte et un morphisme propre : $f = \overline{f}j$. Le foncteur $Rf_!$ cherché se définit alors comme composé du « prolongement par 0 » $j_!$ et du foncteur $R\overline{f}_*$, dérivé du foncteur image directe par $\overline{f}$.

Ces foncteurs $Rf_!$, « image directe à support propre » ne sont utilisables que si on vérifie pour eux un « formalisme de variance » incluant, pour un composé $f = gh$, une formule

$$Rf_! = Rg_! Rh_!$$

qui s'exprime le mieux en terme de catégories cofibrées. On dispose d'un tel formalisme séparément pour les « prolongements par zéro » et pour les images directes par **304**
un morphisme propre, et le problème est de recoller ces formalismes. Pour éviter d'être embouteillés plus tard par des calculs idiots, on se propose dans ce § de dresser la liste des vérifications élémentaires requises pour mener à bien un tel recollement. On le fera dans un cadre légèrement plus abstrait qu'il n'est indispensable, espérant que le résultat pourra resservir.

La construction esquissée plus haut du foncteur $Rf_!$ exige que le morphisme f puisse se factoriser en une immersion ouverte et un morphisme propre. Sur le modèle de Hartshorne [6, III 8 p. 189], on introduit au n° 2 la notion adéquate de morphisme compactifiable.

3.2. Morphismes compactifiables.

Définition 3.2.1. Un morphisme f d'un S-schéma X dans un S-schéma Y quasi-compact, quasi-séparé, est dit S-compactifiable s'il existe un S-schéma P propre sur S et une factorisation de f en un morphisme quasi-fini séparé j de X dans $P \times_S Y$ suivi de la projection de $P \times_S Y$ dans Y

$$\begin{tikzcd}
 & & P \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[urr, "j"] \arrow[r, "f"] \arrow[drr] & Y \arrow[dr] & & P \arrow[dl] \\
 & & S &
\end{tikzcd} .$$

Lorsque $S = Y$, on parlera simplement de morphisme compactifiable.

305 Proposition 3.2.2. (i) Un morphisme S-compactifiable est séparé de type fini.

(ii) Si Y est quasi-compact, quasi-séparé, un morphisme quasi-fini séparé de but Y est S-compactifiable.

(iii) Le composé de deux morphismes S-compactifiables est encore S-compactifiable.

(iv) Soit un diagramme de S-schémas quasi-compacts quasi-séparés

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r] & Y.
\end{tikzcd}$$

Si f est S-compactifiable, alors f' est S-compactifiable.

(v) Soit g un morphisme S-compactifiable ;[50] pour qu'un morphisme composé $g \circ f$ soit S-compactifiable, il faut que f le soit.

Les assertions (i) (ii) et (iv) sont triviales. Pour prouver (iii) et (v), considérons un composé $f = gh$, g étant S-compactifiable.

Supposons gh S-compactifiable, d'où un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & P \times_S Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] & P \times_S Z \arrow[d] \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, "g"] & Z.
\end{tikzcd}$$

Le composé vu est quasi-fini ; u est donc quasi-fini et (v) est prouvé.

Si h est compactifiable, on dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & Q \times_S P \times_S Z \arrow[d] & \\
 & Q \times_S Y \arrow[urr] \arrow[d] \arrow[ddr] & & P \times_S Z \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
X \arrow[ur] \arrow[r, "h"] \arrow[ddrr] & Y \arrow[urr] \arrow[rr, "g"] \arrow[ddr] & & Z \arrow[ddl] & \\
 & & Q \arrow[d] & & P \arrow[dll] \\
 & & S & &
\end{tikzcd} ,$$

306 et $f = fh$ se factorise par un morphisme quasi-fini séparé dans $(Q \times_S P) \times_S Z$.

[50] N.D.E. : il suffit de supposer que g est un morphisme quasi-compact quasi-séparé de S-schémas.

Nagata affirme dans [9] que tout morphisme de type fini entre schémas noethériens intègres séparés est compactifiable.[51] Le rédacteur avoue ne pas avoir compris la démonstration.

Fixons maintenant un schéma S et désignons par (S) la sous-catégorie de la catégorie des S-schémas dont les objets sont les S-schémas quasi-compacts, quasi-séparés et dont les flèches sont les S-morphismes S-compactifiables.[52]

Proposition 3.2.3. Dans la catégorie (S) :

(i) Les immersions ouvertes (resp. les morphismes propres) définissent une sous-catégorie (S,i) (resp. (S,p)) de (S) ayant mêmes objets que (S).
(ii) Les produits fibrés existent dans (S,p) et sont des produits fibrés dans (S).
(iii) Tout morphisme f est le composé $f = pj$ d'un morphisme propre p et d'une immersion ouverte.

En vertu de 3.2.2 (iii) (iv) et (v), les produits fibrés existent dans (S) et sont des pro- **307**
duits fibrés dans la catégorie de tous les schémas. Puisque le produit fibré $X = X_1 \times_Y X_2$ de deux schémas propres sur Y est encore propre sur Y, et qu'un schéma est propre sur X si et seulement si il est propre sur X_1 et X_2, la condition (ii) est vérifiée.

Si f est un morphisme de (S), il admet par hypothèse, dans (S), une factorisation $f = pj'$, où p est propre et j' quasi-fini séparé. En vertu de EGA IV 18.12.13, j' admet une factorisation $j' = qj$, où q est fini et j une immersion ouverte ; de plus, en vertu de 3.2.2 (ii), q et j sont dans (S). On a alors $f = (pq)j$, ce qui prouve (iii). L'assertion (i) résulte de 3.2.2 (iii).

3.2.4. Dans la suite de ce §, on suppose donnée une catégorie (S), munie de deux sous-catégories (S,i) et (S,p), telles que

(i) $\mathrm{Ob}(S) = \mathrm{Ob}(S,i) = \mathrm{Ob}(S,p)$;
(ii) les produits fibrés existent dans (S,p) et sont des produits fibrés dans (S) ;
(iii) $\forall f \in \mathrm{Fl}(S)$, $\exists p \in \mathrm{Fl}(S,p)$, $\exists j \in \mathrm{Fl}(S,i)$, $f = pj$.

Les flèches de (S,i) (resp. de (S,p)) s'appelleront les immersions ouvertes (resp. les morphismes propres).

Définition 3.2.5. (i) Une compactification d'un morphisme f de (S) (resp. d'un couple (f,g), resp. d'un triple (f,g,h) de morphismes composables) est un diagramme commutatif (3.2.5.1) (resp. (3.2.5.2), resp. (3.2.5.3)) dont les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et dont les flèches obliques sont propres.
(ii) Un morphisme de compactifications est un morphisme de diagrammes (3.2.5.1) **308**

[51]N.D.E. : plus généralement, tout morphisme de schémas séparé de type fini de but quasi-compact quasi-séparé est compactifiable. Voir la N.D.E. (47) page 649.

[52]N.D.E. : Grâce au théorème de compactification, on peut également travailler dans la sous-catégorie de la catégorie des schémas (absolus) dont les objets sont les schémas quasi-compacts quasi-séparés et dont les flèches sont les morphismes séparés de type fini (i.e. compactifiables). Notons que la stabilité des morphismes compactifiables par composition est équivalente à la forme générale du théorème de compactification.

(resp. ...) qui soit l'identité sur la 1ière ligne verticale et propre en tous les sommets

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \overline{Y} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

(3.2.5.1)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "g"'] & \overline{Z} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[dl, "\overline{g}"] & \overline{\overline{Z}} \arrow[dl, "\overline{\overline{g}}"] \\ \overline{Y} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \overline{Y} \arrow[dl, "\overline{f}"] & \\ X & & \end{tikzcd}$$

(3.2.5.2)

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "h"'] & \bullet \arrow[r, hook, "k'"] \arrow[dl, "\overline{h}"] & \bullet \arrow[r, hook, "k''"] \arrow[dl, "\overline{\overline{h}}"] & \bullet \arrow[dl, "\overline{\overline{\overline{h}}}"] \\ \bullet \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "g"'] & \bullet \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[dl, "\overline{g}"] & \bullet \arrow[dl, "\overline{\overline{g}}"] & \\ \bullet \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[dl, "\overline{f}"] & & \\ \bullet & & & \end{tikzcd}$$

(3.2.5.3)

Proposition 3.2.6. (i) Tout morphisme (resp. tout couple (f,g), resp. tout triple (f,g,h), de morphismes composables) admet une compactification.

(ii) La catégorie des compactifications de f est filtrante à gauche.[53]

(iii) Si des diagrammes $(3.2.5.2)_i$ $(i = 1,2)$ sont des compactifications de (f,g), il existe une compactification $(3.2.5.2)_3$ de (f,g) et des morphismes de compactifications de $(3.2.5.2)_3$ dans les compactifications $(3.2.5.2)_i$.

(i) Le cas d'un morphisme n'est autre que 3.2.4 (iii). Traitons le cas d'un triple ; avec les notations de (3.2.5.3), il suffit de construire successivement des compactifications de f, g et h, de $i\overline{g}$ et $j\overline{h}$, et enfin de $j'\overline{\overline{h}}$.

309 (ii) Soient $(3.2.5.1)_1$ et $(3.2.5.1)_2$ deux compactifications de f. La projection p de $\overline{Y}_1 \times_S \overline{Y}_2$ dans X est propre et Y s'y envoie par (i_1, i_2), qui (3.2.4 (iii)) peut se compactifier en $(i_1, i_2) = qj$. La compactification $f = (p \circ q)j$ domine $(3.2.5.1)_1$ et $(3.2.5.1)_2$.

Si r et s sont deux morphismes de $(3.2.5.1)_1$ dans $(3.2.5.1)_2$, le noyau K de la double flèche $\overline{Y}_1 \overset{r}{\underset{s}{\rightrightarrows}} \overline{Y}_2$ s'envoie par un morphisme propre dans $\overline{Y}_1$ et i_1 se factorise par K : soit $i_1 = ki$. Si $i = pi_3$ est une compactification de i, l'existence de la compactification $f = (\overline{f}_1 kp)i_3$ montre que l'axiome L_2 est satisfait.

(iii) Appliquons l'axiome L_1 des catégories filtrantes aux compactifications de f et g déduites des $(3.2.5.2)_i$ $(i = 1,2)$. On trouve ainsi $\overline{Y}_3$ et $\overline{Z}_3$ donnant lieu à des diagrammes commutatifs $(3.2.5.1)_i$ $(i = 1,2)$

$$\begin{tikzcd} & & \overline{Z}_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{\overline{Z}}_i \arrow[d] \\ \overline{Z}_3 \arrow[urr] \arrow[d, "g_3"] & & Y \arrow[r, hook] & \overline{Y}_i \\ Y \arrow[r, "i_3"'] \arrow[urr, equal] & \overline{Y}_3 \arrow[urr] & & \end{tikzcd},$$

[53] N.D.E. : « filtrante à gauche » signifie « cofiltrante » (I 2.7). Pour les axiomes L_1 et L_2 dans la démonstration de 3.2.6, cf. V 8.1.1.1.

et il reste à trouver une compactification de $i_3\overline{g}_3$ par $\overline{\overline{Z}}_3$, telle que $\overline{\overline{Z}}_3$ puisse s'envoyer par un morphisme propre dans $\overline{\overline{Z}}_i$, de façon à donner lieu à un cube commutatif ($i = 1, 2$). Si le but d'un morphisme entre compactifications de $i_3\overline{g}_3$ a cette propriété, la source l'a encore et en vertu de (ii), il suffira de s'occuper séparément des cas $i = 1$ et $i = 2$. Soit T le produit fibré de $\overline{Y}_3$ et $\overline{\overline{Z}}_i$ sur 310
$\overline{Y}_i$: alors T figure dans un cube commutatif analogue à celui qu'on cherche, sauf que la flèche k de $\overline{Z}_3$ dans T pourrait ne pas être une immersion ouverte. Posant $k = pj$ (p propre, j immersion ouverte) et remplaçant T par la source $\overline{\overline{Z}}_3$ de p, on trouve le cube cherché.

Remarque 3.2.7. La proposition 3.2.3 aurait encore été valable si, dans la définition 3.2.1 des morphismes compactifiables, on avait omis d'exiger que Y soit quasi-compact quasi-séparé et demandé en compensation que j soit une immersion ouverte quasi-compacte et non seulement un morphisme quasi-fini.

3.3. Recollement. Rappelons que les hypothèses 3.2.4 sont satisfaites.

3.3.1. Supposons donnés :

α) pour chaque $X \in \mathrm{Ob}(S)$, une catégorie $F(X)$,
β) une (S, i)-catégorie cofibrée F_i et une (S, p) catégorie cofibrée F_p,
γ) pour chaque $X \in \mathrm{Ob}(S)$, des isomorphismes entre $F(X)$, $(F_i)_X$ et $(F_p)_X$,
δ) un scindage normalisé de F_i et un scindage normalisé de F_p.

En vertu de (SGA 1 VI), il « revient au même » de se donner plutôt α) et :

(i) Pour tout morphisme propre $p : X \to Y$, un foncteur $p_* : F(X) \to F(Y)$,
(ii) pour tout couple composable (p, q) de morphismes propres, un isomorphisme de foncteur $c_{p,q} : p_* q_* \leftrightarrow (pq)_*$, 311
(i') et (ii'), données analogues pour (S, i),

ces données vérifiant les conditions suivantes :

(a) si p est une identité, alors p_*, $c_{p,q}$ et $c_{q,p}$ sont des identités,
(b) pour tout triple composable de morphismes propres, on a

$$c_{p,qr} \circ (p_* * c_{q,r}) = c_{pq,r} \circ (c_{p,q} * r_*),$$

(a') et (b'), conditions analogues pour (S, p).

Supposons donné de plus,

(iii) pour tout diagramme commutatif D

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p'"] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "j"'] & T \end{tikzcd} \qquad j, j' \in \mathrm{Fl}(S, i);\ p, p' \in \mathrm{Fl}(S, p),$$

un isomorphisme de foncteur $d(D) : p_* j'_* \leftrightarrow j_* p'_*$.

Proposition 3.3.2. Si des données (i) (ii) (i') (ii') (iii) vérifient les conditions (a) (b) (a') (b') ainsi que (c) et (c') énoncées ci-dessous, alors, il existe une et « essentiellement » une seule catégorie F cofibrée sur S, munie d'isomorphismes $F \times_S (S, i) = F_i$ et $F \times_S (S, p) = F_p$, compatibles à la donnée 3.3.1 γ) et tels que les isomorphismes $d(D)$ de (iii) soient les isomorphismes composés $j_* p'_* = (jp')_* = (pj')_* = p_* j'_*$.

(c) pour tout diagramme commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p_1"] & X_2 \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "p_2"] & X_3 \arrow[d, "p_3"] \\ Y_1 \arrow[r, hook, "j"] & Y_2 \arrow[r, hook, "j'"] & Y_3, \end{tikzcd}$$

312 dont les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et dont les flèches verticales sont propres, le triangle suivant d'isomorphismes d de (iii) est commutatif :

$$\begin{tikzcd} p_{3*}i'_*i_* \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & j'_*j_*p_{1*} \arrow[dl, dash] \\ & j'_*p_{2*}i_* & . \end{tikzcd}$$

(c') Pour tout diagramme commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_1"] & X_2 \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "i_2"] & X_3 \arrow[d, "i_3"] \\ Y_1 \arrow[r, "q"] & Y_2 \arrow[r, "q'"] & Y_3, \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont propres et dont les flèches verticales sont des immersions ouvertes, le triangle suivant d'isomorphismes d de (iii) est commutatif :

$$\begin{tikzcd} i_{3*}p'_*p_* \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & q'_*q_*i_{1*} \arrow[dl, dash] \\ & q'_*i_{2*}p_* & . \end{tikzcd}$$

313 Définition de f_*. Soit f un morphisme de Y dans X. Chaque compactification de f, de diagramme (3.2.5.1), définit un foncteur composé $\overline{f}_* i_*$ de $F(Y)$ dans $F(X)$. Un morphisme de compactifications définit un diagramme commutatif

(3.3.2.2)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, equal] & \overline{Y}_1 \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d] & \overline{Y}_2 \arrow[dl, "\overline{f}_2"] \\ X & . \end{tikzcd}$$

La donnée (iii) nous fournit donc un isomorphisme

$$\overline{f}_{2*}i_{2*} = \overline{f}_{2*} \circ (i_{2*} \circ 1_{Y*}) = \overline{f}_{2*} \circ (p_* \circ i_{1*}) = \overline{f}_{1*} \circ i_{1*}.$$

L'axiome (c') garantit de plus que l'isomorphisme associé à un composé de morphismes de compactification est le composé des isomorphismes associés à chacun d'eux. La catégorie des morphismes de compactification étant filtrante (3.2.6 (ii)), on obtient ainsi un système transitif d'isomorphismes entre les foncteurs associés aux diverses compactification de f. Choisissant l'une d'elles, on définit le foncteur f_*.

Homomorphismes de transitivité. Toute compactification d'un couple (f, g) de morphismes composables (diagramme (3.2.5.2)) définit une compactification de f, une de g, une de $f \circ g = (\overline{f}\,\overline{\overline{g}})(j'j)$, et un isomorphisme $c_{f,g} : (fg)_* \xrightarrow{\sim} f_*g_*$, composé des isomorphismes

$$(fg)_* = (\overline{g}\,\overline{\overline{g}})_*(j'j)_* = \overline{f}_*(\overline{\overline{g}}_* j'_*)j_* = \overline{f}_*(i_*\overline{g}_*)j_* = (\overline{f}_* i_*)(\overline{g}_* j_*) = f_*g_*$$

(où l'isomorphisme médian provient de (iii)). **314**

Prouvons que cet isomorphisme ne dépend pas de la compactification choisie de (f, g). En vertu de 3.2.6 (iii), il suffira de comparer les isomorphismes $c_{f,g}$ obtenus à partir de deux compactifications $(3.2.5.2)_i$ $(i = 1, 2)$ telles qu'existe un morphisme de compactification de la première dans la seconde. Les flèches de ces morphismes seront désignées par p.

Considérons le diagramme suivant d'isomorphismes de foncteurs. Pour faciliter sa lecture, on a omis d'écrire les $*$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{f}_2\overline{\overline{g}}_2 j'_2 j_2 \arrow[rrrr, dash] \arrow[drr, dash] \arrow[dd, dash] & & & & \overline{f}_2\overline{\overline{g}}_2 p j'_1 j_1 \arrow[rrrr, dash] \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \overline{f}_1\overline{\overline{g}}_1 j'_1 j_1 \arrow[dll, dash] \arrow[dd, dash] \\
 & & \overline{f}_2\overline{\overline{g}}_2 j'_2 p j_1 \arrow[d, dash] \arrow[u, phantom, "(1)"] \arrow[drrrr, phantom, "(4)"] & & & & \overline{f}_2 p \overline{\overline{g}}_1 j'_1 j_1 \arrow[d, dash] \arrow[u, phantom, "(2)"] & & \\
\overline{f}_2 i_2 \overline{g}_2 j_2 \arrow[rr, dash] \arrow[ur, phantom, "(3)"] & & \overline{f}_2 i_2 \overline{g}_2 p j_1 \arrow[drr, dash] & & & & \overline{f}_2 p i_1 \overline{g}_1 j_1 \arrow[rr, dash] \arrow[dll, dash] \arrow[urr, phantom, "(5)"] & & \overline{f}_1 i_1 \overline{g}_1 j_1 \\
 & & & & \overline{f}_2 i_2 1_Y \overline{g}_1 j_1 & & & & .
\end{tikzcd}$$

a) L'isomorphisme composé de la 1$^{\text{ière}}$ ligne est l'isomorphisme 3.3.2.1 entre deux définitions de $(fg)_*$. **315**

b) L'isomorphisme composé de la dernière ligne est l'isomorphisme 3.3.2.1 entre deux définitions de f_*g_*.

c) Les isomorphismes verticaux extrêmes sont les isomorphismes $c_{f,g}$ entre $(fg)_*$ et f_*g_* déduits de l'une ou l'autre compactification.

Le problème est donc de prouver que le bord extérieur du diagramme est commutatif. Un diagramme commutatif de foncteurs reste commutatif quand on compose chacun d'eux avec un même foncteur. Ceci rappelé, la commutativité de (1) résulte de (c) appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, equal] & \overline{Z}_1 \arrow[r, hook, "j'_1"] \arrow[d] & \overline{\overline{Z}}_1 \arrow[d] \\
Z \arrow[r, hook, "j_2"] & \overline{Z}_2 \arrow[r, hook, "j'_2"] & \overline{\overline{Z}}_2 .
\end{tikzcd}$$

La commutativité de (3) et (5) est triviale, celle de (2), qui concerne essentiellement des morphismes propres, l'est aussi. Reste à considérer l'hexagone (4).

Considérons le cube commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{Z}_2 \arrow[rr, hook, "j'_2"] \arrow[dd, "\overline{g}_2"] & & \overline{\overline{Z}}_2 \arrow[dd, "\overline{\overline{g}}_2"] \\
\overline{Z}_1 \arrow[ur] \arrow[rr, hook, "j'_1"] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\overline{g}_1"'] & & \overline{\overline{Z}}_1 \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\overline{\overline{g}}_1"] & \\
 & Y \arrow[rr, hook, "i_2"] \arrow[dl, equal] & & \overline{Y}_2 \\
Y \arrow[rr, hook, "i_1"'] & & \overline{Y}_1 \arrow[ur] & .
\end{tikzcd}
$$

316 Il y a six façons de parcourir les arêtes de ce cube $\overline{Z}_1$ à $\overline{Y}_2$, chacune « adjacente » à deux autres ; on dispose d'un isomorphisme entre les foncteurs composés associés à deux chemins adjacents (i.e. séparés par une seule face) et la commutativité de (4) résultera de la commutativité de l'hexagone ainsi obtenu.

La morale de ce genre de diagramme est qu'une arête représente un foncteur, une face un isomorphisme entre foncteurs composés et un volume une condition de compatibilité (entre les faces qui en sont le bord). On décomposera le cube en deux prismes à base triangulaire (par le « plan » $\overline{Z}_1\overline{\overline{Z}}_1Y\overline{Y}_2$) pour se ramener aux hypothèses (c').

De façon précise, on complète l'hexagone en le diagramme d'isomorphismes suivant (pour faciliter sa lecture, les $*$ ont été omis) :

$$
\begin{tikzcd}
 & & \overline{\overline{g}}_2 j'_2 p \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
i_2\overline{g}_2 p \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & & & \overline{\overline{g}}_2 p j'_1 \arrow[dd] \arrow[dl, dash] \\
 & i_2(g_2 p) \arrow[rr, dash] \arrow[dl, dash] & & (\overline{\overline{g}}_2 p) j'_1 \arrow[dr, dash] & \\
i_2 1_Y \overline{g}_1 \arrow[drr, dash] & & & & p\overline{\overline{g}}_1 j'_1 \arrow[dll, dash] \\
 & & p i_1 \overline{g}_1 & &
\end{tikzcd}
$$

317 Les triangles sont trivialement commutatifs et les pentagones le sont en vertu de (c').

Condition de cocycles. Vérifions que les isomorphismes $c_{f,g}$ construits en 3.3.2.3 vérifient une condition de cocycle pour un triple (f, g, h) de morphismes composables. Introduisons une compactification de (f, g, h), de diagramme (3.2.5.3) et considérons le diagramme d’isomorphismes de foncteurs suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\overline{f}i\overline{g}j\overline{h}k \arrow[r, dash, "c_{f,g}*h_*"] \arrow[d, dash, "f_**c_{g,h}"'] & \overline{f\overline{g}}j'j\overline{h}k \arrow[d, dash] \arrow[ddr, dash, "c_{fg,h}"] & \\
\overline{f}i\overline{g\overline{\overline{h}}}k'k \arrow[r, dash] \arrow[drr, dash, "c_{f,gh}"'] & \overline{f\overline{g}}j'\overline{\overline{h}}k'k \arrow[dr, dash] & \\
 & & \overline{f\overline{g\overline{\overline{h}}}}k''k'k.
\end{tikzcd}
$$

La commutativité du carré est triviale, celle des triangles résulte de (c) et (c'). La commutativité du bord extérieur étant ce qu’il fallait démontrer, ceci achève la démonstration de 3.3.2.

3.3.3. Supposons données sur (S, i) et (S, p) respectivement des catégories fibrées munies d’un scindage normalisé F_i et F_p, et supposons que F_i et F_p ont même fibre $F(X)$ en tout $X \in \operatorname{Ob} S$.

D’après SGA 1 VI, il « revient au même » de se donner plutôt :

(i bis) pour tout morphisme propre $p : X \to Y$, un foncteur $p^* : F(Y) \to F(X)$,

(ii bis) pour tout couple composable (p, q) de morphismes propres, un isomorphisme de foncteur $c_{p,q} : q^*p^* \leftrightarrow (pq)^*$,

(i' bis) et (ii' bis) données analogues pour (S, i), ces données vérifiant les conditions (a bis) (b bis) (a' bis) (b' bis) duales de 3.3.1 (a) (b) (a') (b'). **318**

Supposons donné de plus,

(iii bis) pour tout diagramme commutatif D

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p'"] & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[r, "j"] & T
\end{tikzcd}
\qquad j, j' \in \operatorname{Fl}(S, i);\ p, p' \in \operatorname{Fl}(S, p)
$$

un isomorphisme de foncteurs $d(D) : j'^*p^* \leftrightarrow p'^*j^*$.

On laisse au lecteur d’énoncer les conditions (c bis) et (c' bis) duales de 3.3.2 (c) et (c').

Des raisonnements parallèles à ceux qui précèdent prouvent alors la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. Si des données (i bis) (ii bis) (i' bis) (ii' bis) (iii bis) vérifient les conditions (a bis) (b bis) (a' bis) (b' bis) (c bis) (c' bis), il existe une et essentiellement une catégorie F cofibrée sur S et munie d’isomorphismes $F \times_S (S, i) = F_i$, $F \times_S (S, p) = F_p$, ces isomorphismes étant compatibles avec les identifications $F_{iX} = F_{pX}$ ($X \in \operatorname{Ob} S$) et tels que les isomorphismes $d(D)$ de (iii bis) deviennent les isomorphismes composés $p'^*j^* = (jp')^* = (pj')^* = j'^*p^*$.

On notera cependant que 3.3.4 n’est pas dual de 3.3.2, car les hypothèses faites sur (S, i) et (S, p) ne sont pas autoduales.

4. Résolutions. Application à la flèche de changement de base **319**

4.1. Résolutions plates. Rappelons que si $f : (X,\mathscr{A}) \to (Y,\mathscr{B})$ est un morphisme de sites (ou de topos) annelés, l'image réciproque par f d'un faisceau de $\mathscr{B}$-modules à gauche $\mathscr{M}$ est le faisceau de $\mathscr{A}$-modules à gauche $\mathscr{A} \otimes_{f^*\mathscr{B}} f^*\mathscr{M}$.

Proposition 4.1.1. Soient $f : (X,\mathscr{A}) \to (Y,\mathscr{B})$ un morphisme de sites annelés, K un faisceau de $\mathscr{A}$-modules à droite, et $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte de faisceaux de $\mathscr{B}$-modules à gauche. Si M et N sont plats, alors

(i) L est plat,
(ii) la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow K \otimes_{\mathscr{A}} f^*L \longrightarrow K \otimes_{\mathscr{A}} f^*M \longrightarrow K \otimes_{\mathscr{A}} f^*N \longrightarrow 0.$$

Factorisons f en les flèches $(X,\mathscr{A}) \xrightarrow{u} (X, f^{-1}\mathscr{B}) \xrightarrow{v} (Y,\mathscr{B})$. Le foncteur v^* est exact, et transforme Modules plats en Modules plats (V 1) de sorte qu'il suffit de prouver 4.1.1 pour u. L'isomorphisme

$$K \otimes_{\mathscr{A}} (\mathscr{A} \otimes_{f^{-1}\mathscr{B}} P) = K \otimes_{f^{-1}\mathscr{B}} P \tag{4.1.1.1}$$

nous ramène alors au cas où f est l'identité.

Soit une suite exacte $0 \to R \to P \to K \to 0$ avec P plat. Les lignes et colonnes du diagramme suivant sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & R \otimes L \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes L \arrow[r] \arrow[d] & K \otimes L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & K \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & K \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

320 Appliquons le diagramme du serpent au deux premières colonnes : on trouve

$$0 \xrightarrow{j} K \otimes L \to K \otimes M,$$

ce qui prouve (ii). Sans plus supposer P plat, on sait que dans le diagramme précédent les trois colonnes et deux lignes sont des suites exactes courtes ; la première ligne est donc exacte, i.e. L est plat.

4.1.2. Soit $\mathscr{S}$ une sous-catégorie de la catégorie des sites annelés.[54] Les faisceaux de modules sur les sites annelés de $\mathscr{S}$ forment une catégorie $\mathscr{M}$, abélienne sur $\mathscr{S}$ (2.2.2), fibrée et cofibrée, dont les fibres sont les opposées des catégories usuelles de faisceaux de modules sur un site. On désignera par $K(\mathscr{S})$ la catégorie $K(\mathscr{M})$ (2.2.8) et par $K^+(\mathscr{S})$ (resp. $K^-(\mathscr{S})$) la sous-catégorie pleine de $K(\mathscr{S})$, dont les catégories fibres sont les opposées des catégories $K^+(S)$ (resp. $K^-(S)$) pour $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{S}$. Les catégories $K(\mathscr{S})$, $K^+(\mathscr{S})$ et $K^-(\mathscr{S})$ sont triangulées sur $\mathscr{S}$, fibrées et cofibrées.

321 Soit $f : S \to S'$ une flèche de $\mathscr{S}$. Tout injectif est acyclique (1.2.3) pour le foncteur

[54]N.D.E. : la théorie vaut plus généralement pour des catégories $\mathscr{S}$ formées de sites annelés.

Rf_*, et tout faisceau de modules plats est acyclique pour le foncteur Lf^* (4.1.1 et 1.2.6), d'où des foncteurs dérivés (1.2.7)

$$Rf_* : D^+(S) \longrightarrow D^+(S') \tag{4.1.2.1}$$

$$Lf^* : D^-(S') \longrightarrow D^-(S). \tag{4.1.2.2}$$

Si Rf_* (resp. Lf^*) est de dimension finie, on peut dans (4.1.2.1) (resp. (4.1.2.2)) remplacer l'exposant $+$ (resp. $-$) par b, par $-$ (resp. $+$) ou le supprimer (1.2.10).[55]

On désigne par $D(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$, resp. $D^-(\mathcal{S})$) la catégorie déduite de $K(\mathcal{S})$ (resp. $K^+(\mathcal{S})$, resp. $K^-(\mathcal{S})$) en inversant les quasi-isomorphismes.

Scholie 4.1.3. (« Théorème trivial de dualité »).

(a) On suppose que tous les foncteurs Rf_* (resp. Lf^*) sont de dimension finie. Alors :

(i) La formation de $D(\mathcal{S})$ commute à tout changement de catégorie base $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$. La catégorie $D(\mathcal{S})$ est triangulée sur $\mathcal{S}$ (2.2.3), et ses fibres s'identifient aux opposées des catégories $D(S)$ pour $S \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}$.

(ii) La catégorie $D(\mathcal{S})$ est cofibrée (resp. fibrée) sur $\mathcal{S}$. Soit $f : S \to S'$; si Lf^* (resp. Rf_*) est de dimension finie, alors tout objet de $D(S')$ (resp. $D(S)$) a une image réciproque (resp. directe) par f au sens de la catégorie $D(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{S}$. Les foncteurs image réciproque et image directe s'identifient à Lf^* et Rf_*.

(iii) Tout objet de $D^-(S')$ (resp. $D^+(S)$) a une image réciproque (resp. directe) **322**
au sens de $D(\mathcal{S})$ et le foncteur image réciproque (resp. directe) s'identifie à Lf^* (resp. Rf_*).[56]

(b) (i) La formation de $D^-(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$) commute à tout changement de catégorie base $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$. La catégorie $D^-(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$ est triangulée sur $\mathcal{S}$, et ses fibres s'identifient aux opposées des catégories $D^-(S)$ (resp. $D^+(S)$).

(ii) La catégorie $D^-(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$) est fibrée (resp. cofibrée) sur $\mathcal{S}$; les foncteurs « image réciproque » (resp. « image directe ») s'identifient aux foncteurs dérivés Lf^* (resp. Rf_*).

(iii) Si $f : S \to S'$ est tel que Rf_* (resp. Lf^*) soit de dimension finie, tout objet de $D^-(S)$ (resp. $D^+(S')$) a une image directe au sens de $D^-(\mathcal{S})$ (resp. une image réciproque au sens de $D^+(\mathcal{S})$), et le foncteur « image directe » (resp. « image réciproque ») s'identifie à Rf_* (resp. Lf^*).

Il suffira de vérifier que dans chaque cas les hypothèses de 2.4.1 ou 2.4.3 sont remplies, les autres assertions se déduisant après un changement de base $\{S\} \to \mathcal{S}$, ou $I \to \mathcal{S}$, de 2.3.5 et 1.2.10. Dans le cas (b), les complexes de faisceaux plats (resp. flasques) satisfont aux hypothèses de 2.4.3 (resp. 2.4.1). Dans le cas (a), on utilisera 2.4.1 (resp. 2.4.3) de façon à n'avoir à considérer que des f tels que la dimension de Rf_* (resp. Lf^*) soit majorée par N fixe. Prouvons qu'il existe « assez » de complexes K dont les composantes ont leurs images directes (resp. réciproques) toutes acycliques pour les foncteurs image directe (réciproque) considérés. Soit K un complexe et K^* (resp. K_*) une résolu- **323**

[55] N.D.E. : en utilisant les résolutions de Spaltenstein, on peut supprimer les exposants inconditionnellement. Dans le cas commutatif, voir M. Kashiwara et P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer, 2010, cité [KS] dans la suite, 18.6.

[56] N.D.E. : les hypothèses de finitude de dimension dans (a) sont superflues. Cf. la N.D.E. précédente.

tion de Cartan-Eilenberg de K par des complexes à composantes flasques (resp. plates).[57] Si $n > N$, on voit que $f_*\tau''_{<n}(K^*) = \tau''_{<n}f_*(K^*)$ (resp. $f^*\tau''_{>-n}(K_*) = \tau''_{>-n}f^*(K_*)$) où τ'' désigne un tronqué relativement à la seconde différentielle. Pour $n > 2N$, on en déduit que $\tau''_{<n}(K^*)$ (resp. $\tau''_{>-n}(K_*)$) vérifie l'hypothèse de 2.4.1 (resp. 2.4.3), et tout complexe K est la source (resp. le but) d'un quasi-isomorphisme de but (resp. de source) un tel complexe.

4.1.4. Considérons un carré commutatif de sites annelés (4.1.4.1) (cf. 0.11)

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S. \end{tikzcd} \tag{4.1.4.1}$$

On peut considérer la sous-catégorie de la catégorie des sites réduite à ce diagramme ;[58] on utilise alors 2.1.3 pour définir un « morphisme de changement de base » de Lg^*Rf_* dans $Rf'_*Lg'^*$ lorsque 4.1.3 est applicable :

Proposition 4.1.5. La flèche 2.1.3 de changement de base, de Lg^*Rf_* dans $Rf'_*Lg'^*$, est définie dans chacun des cas suivants :

(i) On travaille dans les catégories D^+, et Lg^*, Lg'^* sont de dimension finie.
(ii) On travaille dans les catégories D^-, et Rf_*, Rf'_* sont de dimension finie.
(iii) On travaille dans les catégories dérivées entières, et Rf_*, Rf'_*, Lg^*, Lg'^* sont de dimension finie, ainsi que Lf^* et Lf'^* (ou : ainsi que Rg_* et Rg'_*).[59]

324 On notera que la dernière hypothèse de (iii) semble canularesque. Le rédacteur ne sait pas s'en débarrasser sauf lorsque les sites considérés ont assez de points (4.2.12). Les propriétés fonctorielles de cette flèche de changement de base s'obtiennent aussitôt à partir de la description 2.1.3.

4.1.6. Soit $(S, \mathscr{A})$ un site annelé, et considérons le foncteur « produit tensoriel »

$$\otimes\ :\ \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A}^\circ) \times \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S, C)$$

où C est le centre de $\mathscr{A}$.

La recette de 1.1.6, pour l'application de laquelle on définira le complexe simple associé à un double complexe par une somme, permet d'étendre ce foncteur en un foncteur encore noté $\otimes$:

$$\otimes\ :\ K(S, \mathscr{A}^\circ) \times K(S, \mathscr{A}) \longrightarrow K(S, C).$$

Proposition 4.1.7. Avec les notations précédentes :

(i) Le foncteur produit tensoriel est dérivable à gauche (1.2.1) en un foncteur « produit tensoriel total »

$$\overset{L}{\otimes}\ :\ D^-(S, \mathscr{A}^\circ) \times D^-(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D^-(S, C);$$

(ii) un couple (K, L) de complexes bornés supérieurement est déployé pour $\overset{L}{\otimes}$ dès que K ou L est à composantes plates.

La démonstration est standard.

[57]N.D.E. : on exige seulement que l'augmentation $K^p \to (K^*)^{p\bullet}$ (resp. $(K_*)^{p\bullet} \to K^p$) soit une résolution flasque (resp. plate) pour tout p.

[58]N.D.E. : il faut plutôt considérer la catégorie formée de sites annelés définie par ce diagramme, qui n'est pas une sous-catégorie stricto sensu de la catégorie des sites annelés en général. Cf. la N.D.E. (54) page 682.

[59]N.D.E. : les hypothèses de finitude de dimension dans (iii) sont superflues. Cf. la N.D.E. (55) page 683.

Notation 4.1.8. Si $K \in D^-(S, \mathscr{A}^\circ)$ et $L \in D^-(S, \mathscr{A})$, on désigne par $K \overset{L}{\otimes} L$ le produit tensoriel total de K et L. Le faisceau $H_k(K \overset{L}{\otimes} L) = H^{-k}(K \overset{L}{\otimes} L)$ se désigne par $\operatorname{Tor}_k(K, L)$ et s'appelle le $k^{\text{ième}}$ hypertor local de K et L. **325**

Soient $K \in D^-(S, \mathscr{A}^\circ)$ et $L \in D^-(S, \mathscr{A})$. Si $H^i(K) = 0$ pour $i > k$ et $H^i(L) = 0$ pour $i > \ell$, on vérifie que $H^i(K \overset{L}{\otimes} L) = 0$ pour $i > k+\ell$ et que $H^{k+\ell}(K \overset{L}{\otimes} L) = H^k(K) \otimes H^\ell(L)$. Fixons K et regardons $K \overset{L}{\otimes} L$ comme un foncteur en L. Si on applique la définition 1.2.9 de l'amplitude cohomologique comme intervalle de $\mathbf{Z}$, la borne supérieure de cet intervalle est de nature triviale. C'est le plus grand entier i tel que $H^i(K) \neq 0$. La borne inférieure est plus intéressante :

Définition 4.1.9. On dit qu'un complexe $K \in \operatorname{Ob} D^b(S, \mathscr{A}^\circ)$ est de tor-dimension $\leq n$ si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\mathscr{A}$-module L, $\operatorname{Tor}_k(K, L) = 0$ pour $k > n$.

(ii) Pour tout complexe de $\mathscr{A}$-modules L tel que $H^i(L) = 0$ pour $i < \ell$, $H^i(K \overset{L}{\otimes} L) = 0$ pour $i < \ell - n$.

(iii) Il existe un quasi-isomorphisme de but K et de source un complexe borné K', à composantes plates et nulles pour $i < -n$.

4.1.10. Voici quelques variations possibles :

(i) Si $K \in \operatorname{Ob} D^b(S, \mathscr{A}^\circ)$ est de tor-dimension finie et si $L \in \operatorname{Ob} D(S, \mathscr{A})$, alors le foncteur $\overset{L}{\otimes}$ est défini (1.2.1) en (K, L).

(ii) Si $K \in \operatorname{Ob} K^b(S, \mathscr{A}^\circ)$ a des composantes de tor-dimension finie, le foncteur $L \mapsto K \otimes L$ ($L \in K(S, \mathscr{A})$) est dérivable à gauche.

(iii) Si tout Module est de tor-dimension finie,[60] le foncteur $\otimes$ se dérive en un foncteur

$$\overset{L}{\otimes} : D(S, \mathscr{A}^\circ) \times D(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D(S, \mathscr{C}).$$

326

4.2. Résolutions flasques de Godement.

4.2.1. Soient S un topos et X un ensemble. Il revient au même de se donner une famille de points de S indexée par X ou de se donner un morphisme $k : \operatorname{Top}(X) \to S$ du topos défini par l'espace topologique discret X dans S. Pour que la dite famille soit conservative (IV 6.4.1), il faut et il suffit que pour tout faisceau F de S, la flèche d'adjonction de F dans $k_* k^* F$ soit un monomorphisme (cf. IV 6.4.0).

Définition 4.2.2. Soit $k : \operatorname{Top}(X) \to S$ une famille conservative de points d'un topos S. On appelle résolution de Godement ou résolution flasque canonique (relative à X) d'un faisceau abélien F de S, et on désigne par $\mathscr{C}^*_X(F)$ (ou simplement $\mathscr{C}^*(F)$), la résolution à droite suivante de F :

1) $\mathscr{C}^0(F) = k_* k^* F$ et $\epsilon : F \to \mathscr{C}^0(F)$ est la flèche d'adjonction.

2) Posons $d^{-1} = \epsilon$; on définit par récurrence, pour $n \geq 0$
$\mathscr{C}^{n+1}(F) = \mathscr{C}^0(\operatorname{coker} d^{n-1})$, et d^n comme flèche composée

$$d^n : \mathscr{C}^n(F) \to \operatorname{coker}(d^{n-1}) \to \mathscr{C}^0(\operatorname{coker}(d^{n-1})).$$

Proposition 4.2.3. Sous les hypothèses de 4.2.2,

(i) $\mathscr{C}^n(F)$ est un faisceau flasque V 4.1,

[60] N.D.E. : cette condition est superflue. Dans le cas où $\mathscr{A}$ est commutatif, voir [KS], 18.6, cité dans la N.D.E. (55) page 683.

(ii) $\mathscr{C}^n(F)$ est un foncteur exact en F,

(iii) la fibre en un point $x \in X$ du complexe $\mathscr{C}^*(F)$ est une résolution canoniquement scindée de F_x.

327 Les faisceaux $\mathscr{C}^n(F)$ sont flasques en tant qu'image directe de faisceaux (automatiquement flasques) sur l'espace topologique discret X.

Les foncteurs k^* et k_* sont exacts. Le foncteur $\mathscr{C}^0$ est donc exact. Prouvons par récurrence sur $n \geq 0$ que le foncteur $\mathscr{Z}^n(F) = \operatorname{coker}(d^{n-1})$ est exact, donc aussi $\mathscr{C}^{n+1} = \mathscr{C}^0\mathscr{Z}^n$. Posons $\mathscr{Z}^{-1}(F) = F$. Une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

définit pour $n \geq 0$ un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{Z}^{n-1}(F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{Z}^{n-1}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{Z}^{n-1}(F'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{C}^{n}(F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}^{n}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}^{n}(F'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{Z}^{n}(F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{Z}^{n}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{Z}^{n}(F'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & ,
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes, ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, que les 2 premières lignes. La 3ième ligne est donc exacte, et (ii) est prouvé.

Les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathscr{Z}^{n+1}(F) \longrightarrow \mathscr{C}^n(F) \longrightarrow \mathscr{Z}^n(F) \longrightarrow 0$$

sont des cas particuliers de la suite exacte courte

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{C}^0(F) \to \mathscr{Z}^0(F) \to 0 \tag{4.2.3.1}$$

328 (faire la substitution $F \mapsto \mathscr{Z}^{n-1}(F)$). Pour prouver (iii), il reste à prouver que la suite image réciproque de (4.2.3.1) par k est canoniquement scindée. La flèche composée

$$k^*F \xrightarrow{k^*(\epsilon)} k^*\mathscr{C}^0F = k^*(k_*k^*)F = (k^*k_*)k^*F \longrightarrow k^*F$$

est en effet l'identité.

Remarque 4.2.4. Si $(x_i)_{i\in X}$ est une famille conservative de points d'un site, à cette famille correspond une famille conservative de points du topos engendré, qui permet encore de définir les résolutions flasques canoniques.

Remarque 4.2.5. Si S est un topos annelé, les foncteurs $\mathscr{C}^n$ transforment Modules en Modules.

Remarque 4.2.6. Soit $\mathscr{S}$ une catégorie formée de sites. Supposons donné, pour chaque $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{S}$, un ensemble S^d et une famille conservative $k_S : \operatorname{Top}(S^d) \to S$ de points de

S indexés par S^d. Supposons que S^d soit fonctoriel en S et que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}(S^d) \arrow[r, "f^d"] \arrow[d, "k_S"] & \mathrm{Top}(T^d) \arrow[d, "k_T"] \\ S \arrow[r, "f"] & T \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Les résolutions flasques canoniques correspondantes sont alors « fonctorielles en S ».

Si $\mathscr{S}$ est la catégorie des espaces topologiques, on peut prendre S^d = ensemble sous-jacent. **329**

Si $\mathscr{S}$ est la catégorie des sites étales de schémas S localement de type fini sur un schéma S_0, et si pour chaque $s \in S_0$, $\overline{k(s)}$ est une clôture algébrique de $k(s)$, on peut prendre pour S^d l'ensemble des points de S à valeurs dans l'un des $\overline{k(s)}$.

On peut remplacer la condition « de type fini » par une condition de cardinal si les clôtures algébriques $\overline{k(s)}$ sont remplacées par des extensions algébriquement closes assez grandes.

4.2.7. Un des intérêts des résolutions flasques canoniques est qu'elles permettent de construire des complexes déployés à la fois pour des foncteurs du type « produit tensoriel » et pour des foncteurs du type « image directe ». Elles permettent par là une construction peut-être plus compréhensible des morphismes de changement de base (4.1.5).

Lemme 4.2.8. Soient $f : (S, \mathscr{A}) \to (S', \mathscr{B})$ un morphisme de sites annelés, $K \in \mathrm{Ob}\, K(S, \mathscr{A}^\circ)$ et $L \in \mathrm{Ob}\, K(S', \mathscr{B})$ des complexes et $k : \mathrm{Top}(X) \to S$ un ensemble conservatif de points de S. On suppose remplie l'une des conditions suivantes :

(a) Les cohomologies de K et L sont bornés supérieurement ;
(b) $\mathscr{A}$ est de tor-dimension finie sur $f^{-1}\mathscr{B}$ et $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S, \mathscr{A}^\circ)$ est de tor-dimension finie ;
(c) $L \in \mathrm{Ob}\, D^b(S', \mathscr{B})$ est de tor-dimension finie.

Alors le foncteur $(K, L) \mapsto K \otimes f^*L$ est dérivable à gauche (1.2.1) en (K, L) ; soit **330**
$\overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L} f^*$ son dérivé.

(i) Si x est un point de S, alors $(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L} f^* L)_x \simeq K_x \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}_{f(x)}} L_{f(x)}$.
(ii) Le couple (K, L) est déployé à gauche pour $\overset{\mathbf{L}}{\otimes} f^*$ (1.2.1) si et seulement si, pour tout $x \in X$, le couple $(K_x, L_{f(x)})$ est déployé à gauche pour le foncteur $\otimes_{\mathscr{B}_{f(x)}}$.
(iii) Sous les hypothèses (a) ou (b), le foncteur $K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} f^*L$ en L est d'amplitude cohomologique $\subset d$ (1.2.9) si et seulement si, $\forall x \in V$, le complexe K_x de $\mathscr{B}_{f(x)}$-modules est de tor-amplitude $\subset d$.[61]

Ce lemme, dont la démonstration est standard, exprime la « nature ponctuelle » du foncteur considéré.

4.2.9. Soit L un complexe. On appelle résolution de Godement (relative à X) de L le complexe simple (défini en terme de sommes) associé au complexe double $\mathscr{C}^*L$ (1.1.4). On appelle résolution de Godement tronquée à l'ordre n $\tau''_{\leq n}\mathscr{C}^*L$ le complexe simple associé au complexe double déduit de $\mathscr{C}^*L$ par troncature (1.1.15) dans le sens de la différentielle de Godement. En vertu de 4.2.3 (iii), L est point de X par point de

[61] N.D.E. : les hypothèse (a) (b) et (c) sont toutes superflues. Cf. la N.D.E. (55) page 683.

X homotope aux complexes $\tau''_{\leq n}\mathscr{C}^* L$ et $\mathscr{C}^* L$; ces complexes sont donc « aussi bons que L » vis-à-vis des foncteurs du type « produit tensoriel » (4.2.8).

Proposition 4.2.10. Soient $(S, \mathscr{A})$ un site annelé, X un ensemble conservatif de points de S et N, $M \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ avec N ou $M < \infty$. Soit A la sous-catégorie de $K(S)$ formée des complexes L tels que

(a) Si $N = \infty$, alors $H^i(L) = 0$ pour i assez grand ; si $M = \infty$, alors $H^i(L) = 0$ pour i assez petit.

331 (b) Quels que soient $x \in X$ et le $\mathscr{A}_x$-module Q de tor-dimension $\leq N$, le complexe L_x est déployé à gauche pour le foncteur $Q \otimes_{\mathscr{A}_x} *$.

(c) Quel que soit le morphisme de topos $f : S \to E$, de dimension cohomologique $\leq M$, le complexe L est déployé à droite pour le foncteur f_*.

Alors, l'inclusion de A dans $K(S)$ induit une équivalence entre la catégorie déduite de A en inversant les quasi-isomorphismes et la catégorie $D^*(S)$, $* = +$ si $N < M = \infty$, $* = -$ si $M < N = \infty$ et $* =$ blanc si N, $M < \infty$.

Soit K un complexe vérifiant (a). Si $N = \infty$, alors la flèche canonique $a : K_1 = \tau_{\leq i} K \to K$ est quasi-isomorphisme pour i assez grand. Si $N < \infty$, on pose $K_1 = K$. Soit K_1^* une résolution plate de Cartan-Eilenberg et posons $K_2 = \tau''_{\geq -N} K_1$ (troncature dans le sens de la nouvelle différentielle). La flèche composée de K_2 dans K est un quasi-isomorphisme, et K_2 vérifie (b).

Soit K un complexe vérifiant (a) et (b). Si $M = \infty$, alors $N < \infty$; pour i assez grand, $b : K \to \tau_{\geq i} K_1 = K_3$ est un quasi-isomorphisme et K_3 vérifie encore (a) et (b). Si $M < \infty$, on pose $K = K_3$. Soit $K_4 = \tau''_{\leq M}\mathscr{C}^* K_3$. Alors K_4 vérifie (a) (b) et (c) par 4.2.3 (iii).

La proposition résulte donc de deux applications successives de [11, I 2.4.2].

Variantes 4.2.11. Si $N < \infty$ (resp. si $M < \infty$, resp. si N, $M < \infty$) alors on aurait pu travailler de même avec des complexes bornés inférieurement (resp. supérieurement, resp. bornés).

332 4.2.12. Voici comment utiliser ces constructions pour définir le morphisme de changement de base 4.1.4 sous des hypothèses plus générales que celles de loc. cit., lorsque les sites considérés ont assez de points.

Soient un diagramme commutatif (cf. (0.11)) de sites

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S, \end{tikzcd} \tag{4.2.12.1}$$

$\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur S, $\mathscr{A}'$ un faisceau d'anneaux sur S' et L un complexe de $(\mathscr{A}', g^*\mathscr{A})$-bimodules sur S'. On suppose que :

(i) les sites X et X' admettent des familles conservatives de points, $k : Q \to X$ et $k' : Q' \to X'$, s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Q' \arrow[r, "g'_0"] \arrow[d, "k'"] & Q \arrow[d, "k"] \\ X' \arrow[r, "g'"] & X. \end{tikzcd} \tag{4.2.12.2}$$

(ii) L'une des hypothèses suivantes est remplie :

(a) Les foncteurs Rf_* et Rf'_* sont de dimension cohomologique finie, et L est borné supérieurement. On pose $s = -$.
(b) L est borné inférieurement, à composantes de tor-dimension uniformément bornée (comme $g^*\mathscr{A}$-modules). On pose $s = +$.
(c) L est borné, et les hypothèses de (a) et (b) sont remplies. On pose $s =$ blanc.

On désigne par $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^* : D^s(S, \mathscr{A}) \to D^s(S', \mathscr{A}')$ le foncteur dérivé gauche (1.2.1) du foncteur $K \mapsto L \otimes_{g^*\mathscr{A}} g^*K$ de $K^s(S, \mathscr{A})$ dans $K^s(S', \mathscr{A}')$. 333

On se propose de définir une flèche de changement de base

$$\varphi : L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^* Rf_* K \longrightarrow Rf'_*(f'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^* K) \tag{4.2.12.3}$$

pour K dans $D^s(X, \mathscr{A})$.[62]

En vertu de 4.2.10, il suffit de la définir, fonctoriellement en K, pour les complexes appartenant à la catégorie A de 4.2.10, pour

$$N \geq \sup_i \ (\text{tor-dim de } L^i \text{ sur } g^*)$$
$$M \geq \text{dimension cohomologique de } Rf_*.$$

Un tel complexe est déployé tant pour le foncteur Rf_* que pour le foncteur $f'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}'} \mathbf{L}g'^*$ (4.2.8). Les flèches canoniques

$$\alpha : f_* K \longrightarrow Rf_* K$$
$$\beta : f'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^* K \longrightarrow f'^* L \otimes g'^* K$$

sont donc des quasi-isomorphismes. Pour calculer le membre de gauche I de (4.2.12.3), il suffit donc de prendre une résolution gauche (i.e. un quasi-isomorphisme)

$$\gamma : K_1 \longrightarrow f_* K,$$

avec K_1 déployé pour $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*$; on a

$$I \simeq L \otimes g^* K_1.$$

De même, pour calculer la membre de droite II de (4.2.12.3), il suffit de prendre une résolution droite 334

$$\delta : f'^* L \otimes g'^* K \longrightarrow K_2,$$

avec K_2 déployé pour Rf'_* ; on a

$$II \simeq f'_* K_2.$$

On définit alors la flèche de changement de base comme le composé

$$I \simeq L \otimes g^* K_1 \xrightarrow{\gamma} L \otimes g^* f_* K \xrightarrow{c} f'_*(f'^* L \otimes g'^* K) \xrightarrow{\delta} f'_* K_2 \simeq II,$$

où la flèche c est la flèche de changement de base usuelle, au niveau des vrais complexes.

Cette flèche de changement de base a la propriété caractéristique suivante, qui rend en principe aisée la vérification de ses propriétés de compatibilité.

Proposition 4.2.13. Sous les hypothèses précédentes, soient $K \in \operatorname{Ob} C^s(X, \mathscr{A})$, $K_1 \in \operatorname{Ob} C^s(S, \mathscr{A})$ et $K_2 \in \operatorname{Ob} C^s(X', \mathscr{A})$. Soient de plus u un f-morphisme de K dans K_1, i.e. $u \in \operatorname{Hom}(K_1, f_* K) \simeq \operatorname{Hom}(f^* K_1, K)$, et v un morphisme de $f'^* L \otimes g'^* K$

[62] N.D.E. : des adjonctions dans les catégories dérivées non bornées permettent de définir une telle flèche sans les hypothèses (i) et (ii). Cf. la N.D.E. (55) page 683.

dans K_2. On déduit de u, v et de la flèche de changement de base usuelle un morphisme de complexes $c_{u,v} : L \otimes g^* K_1 \to f'_* K_2$. Soient u', v' et c'_{uv} les flèches composées

$$\begin{aligned} u' &: K_1 \xrightarrow{u} f_* K \to Rf_* K \\ v' &: L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^* K \to L \otimes g'^* K \xrightarrow{v} K_2 \\ c'_{u,v} &: L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^* K_1 \to L \otimes g'^* K_1 \xrightarrow{c_{uv}} f'_* K_2 \to Rf'_* K_2. \end{aligned}$$

335 Le diagramme suivant est commutatif

$$\text{(4.2.13.1)} \qquad \begin{tikzcd} L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^* Rf_* K \arrow[r, "\varphi"] & Rf'_*(f'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^* K) \arrow[d, "Rf'_*(v')"] \\ L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^* K_1 \arrow[u, "L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*(u')"] \arrow[r, "c'_{uv}"] & Rf'_* K_2. \end{tikzcd}$$

Supposons tout d'abord que $K_1 = f_* K$ et que $K_2 = f'^* L \otimes g'^* K$, et soit un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{tikzcd} K^a \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ K^c \arrow[r] & K^b \end{tikzcd}$$

tel que K^a soit déployé pour $f'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^*$, que K^b soit déployé pour Rf_* et que K^c soit déployé pour ces deux foncteurs : pour construire ce diagramme, on commence par construire K^a, puis on applique une résolution flasque canonique (éventuellement tronquée) à K^a et K.

Appliquons le foncteur f_* (resp. $L \otimes g'^*$) à ce diagramme, et résolvons les complexes du diagramme $(K_1, K_1^a, K_1^b, K_1^c)$ (resp. $(K_2, K_2^a, K_2^b, K_2^c)$) de façon à obtenir un cube commutatif, où $\approx$ désigne un quasi-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} & K'_1 \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dd] & & K_1 \arrow[dd] \\ K_1^{a'} \arrow[ur] \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dd] & & K_1^a \arrow[ur] \arrow[dd] & \\ & K_1^{b'} \arrow[rr, "\approx"] & & K_1^b \\ K_1^{c'} \arrow[ur, "\approx"] \arrow[rr, "\approx"] & & K_1^c \arrow[ur, "\approx"] & \end{tikzcd}$$

336 avec $K'_1, K_1^{a'}, K_1^{b'}, K_1^{c'}$ déployés pour le foncteur $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*$ (resp.

$$\begin{tikzcd}
& K_2 \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dd] & & K'_2 \arrow[dd] \\
K_2^a \arrow[ur] \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dd, "\approx"'] & & K_2^{a'} \arrow[ur] \arrow[dd, "\approx"] & \\
& K_2^b \arrow[rr, "\approx"] & & K_2^{b'} \\
K_2^c \arrow[ur] \arrow[rr, "\approx"] & & K_2^{c'} \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

avec K'_2, $K_2^{a'}$, $K_2^{b'}$, $K_2^{c'}$ déployés pour le foncteur Rf'_*). Utilisant les morphismes usuels de changement de base, on obtient un prisme commutatif de complexes sur S.

$$\begin{tikzcd}
& L\otimes g^*K'_1 \arrow[rr, "\textcircled{4}"'] \arrow[dd, "\textcircled{2}"] & & L\otimes g^*K_1 \arrow[rr, "\textcircled{4}"'] \arrow[dd] & & f'_*K_2 \arrow[rr, "\textcircled{4}"'] \arrow[dd] & & f'_*K'_2 \arrow[dd] \\
L\otimes g^*K_1^{a'} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & L\otimes g^*K_1^a \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & f'_*K_2^a \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & f'_*K_2^{a'} \arrow[ur, "\textcircled{3}"'] \arrow[dd, "\approx"'] & \\
& L\otimes g^*K_1^{b'} \arrow[rr] & & L\otimes g^*K_2^b \arrow[rr] & & f'_*K_2^b \arrow[rr] & & f'_*K_2^{b'} \\
L\otimes g^*K_1^{c'} \arrow[ur, "\textcircled{2}^{-1}", "\approx"'] \arrow[rr, "\textcircled{1}"'] & & L\otimes g^*K_2^c \arrow[ur] \arrow[rr, "\textcircled{1}"'] & & f'_*K_2^c \arrow[ur] \arrow[rr, "\textcircled{1}"'] & & f'_*K_{2'}^{c'} \arrow[ur, "\textcircled{3}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

et on conclut en notant que les flèches du diagramme (4.2.13.1) s'identifient aux flèches 337
composées suivantes :

pour φ : la composée des flèches ① ;

pour $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*(u')$: la composée des flèches ②, dont une flèche inverse d'un quasi-isomorphisme ;

pour $Rf'_*(v')$: la composée des flèches ③, dont une flèche inverse d'un quasi-isomorphisme ;

pour c'_{uv} : la composé des flèches ④.

Dans le cas général, posons $K'_1 = f_*K$ et $K'_2 = f'^*L \otimes g^*K$. On dispose alors d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
& L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*Rf_*K \arrow[r, "\varphi"] & Rf'_*(f'^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^*K) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*K_1 \arrow[ur] \arrow[r] & L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^*K'_1 \arrow[u] \arrow[r] & Rf'_*K'_2 \arrow[r] & Rf'_*K_2,
\end{tikzcd}$$

dont les triangles sont commutatifs, ainsi que le rectangle intérieur d'après ce qui précède. Le contour est donc commutatif, et ceci prouve 4.2.13.

338

4.3. Le théorème de changement de base. On se propose de reformuler en termes de catégories dérivées le théorème de changement de base pour les morphismes propres XII 5.1 (iii).

Théorème 4.3.1. Soit un diagramme cartésien de schémas

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

avec f propre. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des faisceaux d'anneaux de torsion sur S et S' et L un complexe borné supérieurement de $(\mathscr{A}', g^*\mathscr{A})$-bimodules. On suppose que la dimension des fibres de f est bornée. L'hypothèse 4.2.12 (a) est alors remplie, et la flèche de changement de base (4.2.12.3), entre foncteurs de $D^-(X, f^*\mathscr{A})$ dans $D^-(S', \mathscr{A}')$:

$$\varphi_K : L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g^* Rf_* K \longrightarrow Rf'_*(f'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}g'^* K),$$

est un isomorphisme.

Les foncteurs considérés sont triangulés et « way-out » [6, I 7], de sorte que, pour vérifier que φ_K est un isomorphisme, il suffit de vérifier que les $\varphi_{\mathscr{H}^i(K)}$ sont des isomorphismes. On peut donc supposer que K est réduit à un faisceau de $f^*\mathscr{A}$-modules (de torsion) placé en degré 0.

339 Pour vérifier que φ_K est un isomorphisme, il suffit de le vérifier après application du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathscr{A}'$-Modules dans celle des $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-Modules, où $n\mathscr{A} = n\mathscr{A}' = 0$.

Ceci permet de se ramener au cas où $\mathscr{A}' = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec $n\mathscr{A} = 0$. On peut alors remplacer L par un complexe isomorphe dans la catégorie dérivée, à composantes plates sur $g^*\mathscr{A}$, et borné supérieurement. Les foncteurs considérés étant triangulés et « way out » en L, il suffit de vérifier que φ_K est un isomorphisme après avoir remplacé L par une de ses composantes. On peut donc supposer que L est réduit à un faisceau de $g^*\mathscr{A}$-modules plats placé en degré 0. Il faut prouver que les flèches

$$\varphi^q : L \otimes g^* R^q f_* K \longrightarrow R^q f'_*(f'^* L \otimes g^* K)$$

sont des isomorphismes. Soit s un point géométrique de S', X_s la fibre de X' en s et K_s les images réciproques de K sur X_s. En vertu de XII 5.1 (iii), la fibre en s de φ^q est la flèche

$$\varphi^q_s : L_s \otimes H^q(X_s, K) \longrightarrow H^q(X_s, L_s \otimes K).$$

En vertu du théorème de D. Lazard [7], le $\mathscr{A}_s$-module plat L_s est limite inductive filtrante de $\mathscr{A}_s$-modules libres $L_{s,i}$; le foncteur $H^q(X_s, *)$ commute aux limites inductives filtrantes (VII 3.3). La flèche φ^q est donc limite inductive des flèches

$$\varphi^q_i : L_{s,i} \otimes H^q(X_s, K) \longrightarrow H^q(X_s, L_{s,i} \otimes K).$$

Ces dernières sont évidemment des isomorphismes, donc aussi φ^q_s, et φ^q est un isomorphisme.

340 Variantes 4.3.2. (i) Lorsque L est un complexe borné de composantes de tor-dimension finie sur $g^*\mathscr{A}$, les hypothèses (c) de 4.2.12 sont remplies, et on peut travailler dans la catégorie dérivée entière.[63]

(ii) Si L borné inférieurement, à composantes de tor-dimension uniformément bornée sur $g^*\mathscr{A}$, les hypothèses (b) de 4.2.12 sont remplies, même si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ ne sont pas de torsion ; la flèche de changement de base φ_K ($K \in D^+(X, f^*\mathscr{A})$) sera un isomorphisme si les faisceaux $\mathscr{H}^i(K)$ sont de torsion.

[63] N.D.E. : on peut travailler dans la catégorie dérivée entière sans ces hypothèses. Cf. la N.D.E. (55) page 683.

5. Les foncteurs image directe à support propre

5.1. La construction fondamentale. On se propose de suivre le programme indiqué en 3.1 et de définir le foncteur $Rf_!$ pour f un morphisme compactifiable (3.2). On montrera en appendice comment traiter le cas d'un morphisme séparé de type fini quelconque.[64]

5.1.1. Soient X un topos, U on ouvert de X (IV 8.3) et j le morphisme d'inclusion de U dans X. On a défini en IV 5.2 un foncteur « prolongement par le vide » de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur U dans celle des faisceaux d'ensembles sur X. Ce foncteur $j_!$ est adjoint à gauche au foncteur de restriction j^*.

On désigne encore par $j_!$ le foncteur de la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur U (resp. des faisceaux en groupes, resp. des faisceaux de $j^*\mathscr{A}$-modules pour $\mathscr{A}$ faisceau d'anneaux sur X) dans la catégorie analogue sur X, adjoint à gauche au foncteur **341**
de restriction j^* (IV 11.3.1). Ces trois foncteurs $j_!$ sont compatibles aux foncteurs d'oubli, de la catégorie des Modules dans celle des Groupes, et de la catégorie des Groupes dans celle des Ensembles pointés [64]. Si $i : F \to X$ est l'inclusion du fermé complémentaire de U, alors $j^*j_!$ est (canoniquement isomorphe à) l'identité et $i^*j_!$ est le foncteur constant de valeur l'objet initial (ou final, cela revient ici au même). Ceci caractérise d'ailleurs $j_!$. On en déduit que les trois foncteurs $j_!$ envisagés sont exacts et s'injectent dans les foncteurs j_* correspondants. On les appelle foncteurs de prolongement par zéro. La formule $(j_1j_2)^* = j_2^*j_1^*$ se transpose en un isomorphisme de transitivité

$$(j_1j_2)_! = j_{1!}j_{2!}.$$

Les foncteurs $j_!$ sont compatibles aux changements de base :

Lemme 5.1.2. Soient $f : X \to Y$ un morphisme de topos, V un ouvert de Y et U son image réciproque dans X :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j'"] & V \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Il existe alors un et un seul isomorphisme de changement de base $f^*j_! \xrightarrow{\sim} j'_!f'^*$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*j_! \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & j'_!f'^* \arrow[d, hook] \\ f^*j_* \arrow[r, "\alpha"] & j'_*f'^*, \end{tikzcd} \tag{5.1.2.1}$$

où α est la flèche de changement de base.

Preuve. La flèche de changement de base $\varphi : j^*f_* \to f'_*j'^*$ est trivialement un iso- **342**
morphisme. Elle se transpose en un isomorphisme de changement de base $\varphi' : j'_!f'^* \xrightarrow{\sim} f^*j_!$. Pour vérifier que le diagramme (5.1.2.1) est commutatif, il suffit de voir que sa restriction à U l'est, ce qui est trivial.

5.1.3. Sous les hypothèses de 5.1.1, avec X annelé par un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$, le foncteur $j_!$ sur les Modules est exact, donc passe trivialement aux catégories dérivées

[64]N.D.E. : Cf. la N.D.E. (47) page 649.

[64]Mais pas dans celle des Ensembles !

et définit un foncteur, encore noté $j_!$, de $D(U, j^*\mathscr{A})$ dans $D(X, \mathscr{A})$. On dispose encore d'isomorphismes de transitivité

$$(j_1 j_2)! = j_{1!} j_{2!}. \tag{5.1.3.1}$$

On a encore, au niveau des catégories dérivées, une formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{D(X)}(j_! K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(U)}(K, j^* L). \tag{5.1.3.2}$$

5.1.4. Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y, et annelons X par le faisceau d'anneaux image réciproque de $\mathscr{A}$. Supposons que la dimension des fibres de f soit majorée par un entier n (ce qui est le cas si Y est quasi-compact). On sait alors que pour chaque faisceau de $f^*\mathscr{A}$-modules F sur X, les faisceaux $R^q f_* F$ sont nuls pour $q > 2n$ (XII 5.3 bis). Le foncteur f_* admet donc un foncteur dérivé (1.2.10)

$$Rf_* : D(X, f^*\mathscr{A}) \longrightarrow D(Y, \mathscr{A}).$$

343 Si f est le composé gh de deux morphismes propres, on dispose d'une formule de transitivité $Rf_* = Rg_* Rh_*$, qu'on peut comme d'habitude exprimer en terme de catégories cofibrées (Scholie 4.1.3).

5.1.5. Soit un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j_1"'] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "j_2"'] & Y, \end{tikzcd} \tag{5.1.5.1}$$

dans lequel j_1 et j_2 sont des immersions ouvertes et f, g des morphismes propres dont la dimension des fibres est majorée par un entier n. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y, et annelons U, V et X par les images réciproques de $\mathscr{A}$. En vertu de (5.1.3.2), si $K \in D(U)$, définir une flèche

$$d : j_{2!} Rg_* K \longrightarrow Rf_* j_{1!} K \tag{5.1.5.2}$$

revient à définir une flèche

$$d' : Rg_* K \longrightarrow j_2^* Rf_* j_{1!} K.$$

Le produit fibré $X' = V \times_Y X$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "g"] & X' \arrow[r, hook, "j_2'"'] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, equal] & V \arrow[r, hook, "j_2"'] & Y, \end{tikzcd} \tag{5.1.5.3}$$

344 et, trivialement, on a $j_2^* Rf_* j_{1!} K \simeq Rf'_*(j_2'^* j_{1!} K) \simeq Rf'_* k_! K$.

La flèche k est une immersion ouverte propre ; on a donc $k_! = k_*$, d'où un isomorphisme $Rf'_* k_! K \simeq Rf'_* k_* K \simeq Rg_* K$, qui nous fournit l'isomorphisme d' cherché et le morphisme d. On voit de plus que la restriction de d à V est un isomorphisme.

Lemme 5.1.6. *Le morphisme (5.1.5.2) est un isomorphisme.*

Il reste à vérifier que la restriction de d à $Y - V = F$ est un isomorphisme. Soit $X'' = X \times_Y F$ et appliquons le théorème de changement de base pour un morphisme propre (4.3.1) au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "i'"'] \arrow[d, "f''"] & X \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "i"'] & Y, \end{tikzcd}$$

pour $\mathscr{A}' = i^*\mathscr{A}$ et $L = \mathscr{A}'[0]$. On trouve : $i^*Rf_*j_{1!}K \simeq Rf''_*i'^*j_{1!}K \simeq Rf''_*0 \simeq 0$, de sorte que les deux membres de (5.1.5.2) sont nuls en dehors de U et que d est un isomorphisme.

5.1.7. Soit S un schéma annelé par un faisceau d'anneaux de torsion $\mathscr{A}$. Pour tout S-schéma $\varphi : X \to S$, on pose $\mathscr{A}_X = \varphi^*\mathscr{A}$. Plaçons-nous dans le catégorie (S) des S-schémas quasi-compacts quasi-séparés et des morphismes S-compactifiables (3.2). En vertu de 3.2.3, cette catégorie, la sous-catégorie (S, i) des immersions ouvertes, et la sous-catégorie (S, p) des morphismes propres vérifient les hypothèses 3.2.4.

On se propose d'appliquer la théorie 3.3.2 aux données suivantes (notations de 3.3.1) **345**

α) $F(X) = D(X, \mathscr{A}_X)$ pour $\varphi : X \to S$ dans S :

(i) Pour $p : X \to Y$ propre, on prend pour foncteur p_* le foncteur Rp_*.

(ii) On utilise les isomorphismes de transitivité usuels $R(pq)_* = Rp_*Rq_*$.

(i') Pour une immersion ouverte $i : X \to Y$, on prend pour foncteur i_* le foncteur $i_!$.

(ii') On utilise les isomorphismes de transitivité (5.1.3.1).

(iii) Pour tout diagramme commutatif (5.1.5.1) on prend pour isomorphisme d l'isomorphisme (5.1.5.2).

On vérifie les conditions (a) (b) (c) (a') (b') (c') de 3.3.2, ce qui prouve le point (a) du :

THÉORÈME 5.1.8. (a) Dans la catégorie (S) définie dans 5.1.7, on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \to Y$ un foncteur

$$Rf_! : D(X, \mathscr{A}_X) \longrightarrow D(Y, \mathscr{A}_Y),$$

et pour tout morphisme composé $f = gh : X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$ des isomorphismes de transitivité $c_{g,h}$ entre $Rf_!$ et $Rg_!\ Rh_!$ de sorte que

(i) Les $c_{f,g}$ vérifient la « condition de cocycles »

$$(c_{f,g} * Rh_!) \circ c_{fg,h} = (Rf_! * c_{g,h}) \circ c_{f,gh}.$$

(ii) Lorsqu'on se restreint aux morphismes propres (resp. aux immersions ouvertes) on retrouve la théorie de variance 5.1.4 (resp. 5.1.3).

(iii) Pour tout diagramme (5.1.5.1), l'isomorphisme d (5.1.5.2) est l'isomorphisme **346** composé $c_{f,j_1} \circ c^{-1}_{j_2,g}$.

(b) Les foncteurs $Rf_!$ sont « way out » [6, I 7] et triangulés.

Tout foncteur $Rf_!$ est composé d'un foncteur Rg_*, pour g propre de but quasi-compact, donc à fibres de dimension bornée, et d'un foncteur $j_!$ pour j immersion ouverte. Ces foncteurs sont way out et triangulés, donc aussi $Rf_!$.

. Les isomorphismes de transitivité 5.1.8 (a) sont souvent utilisés via la suite spectrale « des foncteurs composés » qui s'en déduit, valable pour $K \in \operatorname{Ob} D(X, \mathscr{A}_X)$:

(5.1.8.2) $$E_2^{pq} = R^pg_!R^qh_!(K) \Longrightarrow R^{p+q}f_!(K).$$

Pour l'obtenir, on note que d'après 5.1.8 b) et VERDIER [12], pour tout $L \in \operatorname{Ob} D(Y, \mathscr{A}_Y)$, on dispose d'une suite spectrale

(5.1.8.3) $$E_2^{pq} = R^pg_!(\mathscr{H}^q(L)) \Longrightarrow R^{p+q}g_!(L),$$

et (5.1.8.2) est le cas particulier de (5.1.8.3) pour $L = Rh_! K$.

Définition 5.1.9. (i) On appelle « foncteurs image directe à support propre totaux » les foncteurs construits en 5.1.8. On omettra l'adjectif « total » lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion.

(ii) On appelle $q^{\text{ième}}$ foncteur image directe à support propre, et on désigne par $R^q f_!$, le foncteur composé $\mathscr{H}^q \circ Rf_!$.

(iii) Si X est un schéma sur un corps k séparablement clos, immergeable dans un
347 schéma propre sur k, on identifie faisceaux de modules sur $\operatorname{Spec}(k)$ et modules usuels, et on désigne le foncteur $R^q f_!$ par l'une des notations $H^q_c(X, \quad)$, $H^q_!(X, \quad)$, ou simplement $H^q_c(\quad)$ s'il n'y a pas danger de confusion. On l'appelle alors « $q^{\text{ième}}$ groupe d'hypercohomologie à support propre » , ou « $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie à support propre » si on l'applique à un complexe réduit au degré 0.

. La notation $Rf_!$ est abusive en ce que le foncteur $Rf_!$ n'est pas le dérivé droit du foncteur $f_!$ qui sera défini en 6.1.2. Certains préfèrent la notation $R_! f$.

5.1.10. Les ingrédients dans la démonstration de 5.1.8 sont le théorème de changement de base propre et l'identité entre j_* et $j_!$ lorsque j est une immersion ouverte propre. Cela permet d'énoncer diverses variantes à 5.1.8 ; on laisse au lecteur le soin de leur donner un sens précis et de les vérifier.

Variante 5.1.11. Dans la catégorie (S), on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \to Y$ un foncteur $f_!$ de la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Y et pour tout morphisme composé $f = gh$ des isomorphismes de transitivité vérifiant des conditions (i) (ii) (iii) analogues à celles de 5.1.8.

Voir 6.1.2 pour une description directe de ce foncteur.

348 Variante 5.1.12. On peut, pour tout morphisme compactifiable $f : X \to Y$, définir un foncteur $R^1 f_!$ de la catégorie des faisceaux de groupes ind-finis sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Y, avec pour toute compactification $f = \overline{f} j$ de f, un isomorphisme $R^1 f_! \simeq R^1 \overline{f}_* \circ f_!$.

On ne postule ici aucune formule de transitivité ; le seul problème est de montrer que le foncteur $R^1 f_!$ ne dépend pas de la compactification choisie de f. Soit $p : (\overline{f}_1, i_1) \to (\overline{f}_2, i_2)$ un morphisme de compactification, i.e. un diagramme

(5.1.12.1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"] \arrow[dd, "f"'] & \overline{X}_1 \arrow[d, "p"] \\
& \overline{X}_2 \arrow[dl, "\overline{f}_2"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$
.

où $\overline{f}_1 = \overline{f}_2 \circ p$, p étant propre. Si G est un faisceau de groupes sur X, on dispose d'une suite exacte d'ensembles pointés (avec α injectif)

$$0 \to R^1 \overline{f}_{2*}(p_* i_{1!} G) \xrightarrow{\alpha} R^1 \overline{f}_{1*}(i_{1!} G) \to \overline{f}_{2*} R^1 p_*(i_{1!} G),$$

et d'une flèche de $i_{2!}G$ dans $p_*i_{1!}G$, d'où par composition une flèche β de $R^1\overline{f}_{2*}i_{2!}G$ dans $R^1\overline{f}_{1*}i_{1!}G$. Raisonnant comme en 3.3.2.1, on voit que le problème est de prouver que cette flèche est toujours un isomorphisme lorsque G est ind-fini.

Si on applique le théorème de changement de base propre à p et au faisceau d'en- **349**
sembles $i_{1!}G$, on vérifie que $p_*i_{1!}G = i_{2!}G$, d'où la suite exacte

$$0 \to R^1\overline{f}_{2*}(i_{2!}G) \xrightarrow{\beta} R^1\overline{f}_{1*}(i_{1!}G) \to \overline{f}_{2*}R^1p_*i_{1!}G.$$

La flèche β est injective (car α l'est). Si on applique le théorème de changement de base propre à p et au faisceau en groupes G, supposé ind-fini, on trouve que $R^1p_*i_{1!}G = 0$. Donc β est un épimorphisme, ce qui achève de démontrer 5.1.12.

Définition 5.1.13. Pour tout site X, on désigne par $D_{\text{tors}}(X)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur X, formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont de torsion.

Variante 5.1.14. Dans la catégorie (S), on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \to Y$ un foncteur triangulé et « way out » [6, I 7]

$$Rf_! : D^+_{\text{tors}}(X) \longrightarrow D^+_{\text{tors}}(Y)$$

et pour tout morphisme composé $f = gh$ des isomorphismes de transitivité vérifiant des conditions (i) (ii) (iii) analogues à celles de 5.1.4.

Variante 5.1.15. Plaçons-nous dans la catégorie des S-schémas annelés par des faisceaux de torsion, les flèches étant les morphismes de schémas annelés induisant (0.8) un morphisme S-compactifiable de schémas. Pour toute flèche

$$f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B}),$$

soit $Rf_!$ le composé du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathscr{A}$-modules dans celle des **350**
$f^{-1}\mathscr{B}$-modules, et de $Rf_!$. Ces foncteurs jouissent des propriétés de variance des foncteurs $Rf_!$ usuels.

On notera toutefois que la notation $Rf_!$ n'est raisonnable ici que si $\mathscr{A}$ est fini sur $f^{-1}\mathscr{B}$, ainsi qu'on s'en rend compte en prenant $X = Y = \operatorname{Spec}(k)$, k algébriquement clos.

5.1.16. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, $j : U \to X$ un ouvert de X, $i : F \to X$ le fermé complémentaire, $\mathscr{A}_S$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathscr{A}_X$ son image réciproque sur X et $K \in \operatorname{Ob} D(X, \mathscr{A}_X)$.

La suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow j_!j^*K \longrightarrow K \longrightarrow i_!i^*K \longrightarrow 0$$

donne naissance à un triangle distingué dans $D(X, \mathscr{A}_X)$ Verdier [11, II 1.1.5]. Son image par $Rf_!$ est un triangle distingué (5.1.8 (b))

$$R(fj)_!j^*K \longrightarrow Rf_!K \longrightarrow R(fi)_!i^*K \longrightarrow R(fj)_!j^*K[1] \ldots \tag{5.1.16.1}$$

qui définit une suite exacte longue de cohomologie

$$\ldots \longrightarrow R^q(fj)_!j^*K \to R^qf_!K \to R^q(fi)_!i^*K \xrightarrow{j} R^{q+1}(fj)_!j^*K \to \ldots. \tag{5.1.16.2}$$

Dans le cas particulier où S est spectre d'un corps séparablement clos et où K est réduit à un faisceau $\mathscr{G}$ placé en degré 0, la suite (5.1.16.2) s'écrit

$$\ldots H^q_c(U, \mathscr{G}) \to H^q_c(X, \mathscr{G}) \to H^q_c(F, \mathscr{G}) \xrightarrow{j} H^{q+1}_c(U, \mathscr{G}) \ldots \tag{5.1.16.3}$$

5.1.17. Soit un diagramme de schémas S-compactifiables 351

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

avec u propre. On annèle X et Y par l'image réciproque d'un faisceau d'anneaux de torsion $\mathscr{A}_S$ sur S. Pour $K \in D(Y, \mathscr{A}_Y)$, la flèche évidente (d'adjonction) $K \to Ru_* u^* K$ définit par application du foncteur $Rg_!$ une flèche

$$u^* : Rg_! K \longrightarrow Rg_! Ru_* u^* K = Rg_! Ru_! u^* K \simeq Rf_! u^* K \tag{5.1.17.1}$$

(contravariance de la cohomologie à support propre vis-à-vis des morphismes propres).

Pour S spectre d'un corps algébriquement clos et K réduit à un faisceau $\mathscr{G}$ placé en degré 0, cette flèche s'écrit

$$u^* : H_c^q(Y, \mathscr{G}) \longrightarrow H_c^q(X, \mathscr{G}) \tag{5.1.17.2}$$

5.2. Le théorème de changement de base.

5.2.1. Soient $f : X \to Y$ un morphisme de topos, V un ouvert de Y, $U = f^{-1}(V)$ son image réciproque dans X, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur Y, $\mathscr{A}'$ un faisceau d'anneaux sur X et L un complexe borné supérieurement de $(\mathscr{A}', f^*\mathscr{A})$-bimodules :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "j'"] & V \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{5.2.1.1}$$

352 On dispose alors d'un isomorphisme de changement de base (5.1.2.1) entre foncteurs de $D(V, \mathscr{A})$ dans $D(X, f^*\mathscr{A})$: $f^* j_! \xrightarrow{\sim} j'_! f'^*$. De plus, on dispose d'un isomorphisme évident entre foncteurs de $D^-(U, f'^*\mathscr{A})$ dans $D^-(X, \mathscr{A}')$: $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^*\mathscr{A}} j'_! K \simeq j'_!(j'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^*\mathscr{A}} K)$. Pour le construire, il suffit de noter que si un complexe K est déployé pour le foncteur $j'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^*\mathscr{A}}$, alors le complexe $j'_! K$ est déployé pour le foncteur $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^*\mathscr{A}}$, et qu'on dispose d'un isomorphisme du type précédent au niveau des complexes. Composant ces deux isomorphismes, on obtient un isomorphisme de changement de base entre foncteurs de $D^-(V, \mathscr{A})$ dans $D^-(X, \mathscr{A}')$:

$$L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^*\mathscr{A}} f^* j_! K \xrightarrow{\sim} j'_!(j'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^*\mathscr{A}} f'^* K). \tag{5.2.1.2}$$

Si L est borné à composante de tor-dimension finie sur $f^*\mathscr{A}$,[65] cet isomorphisme est encore défini pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(V, \mathscr{A})$.

5.2.2. Soient $f : X \to S$ et $g : S' \to S$ des morphismes de schémas, et supposons que f soit le composé d'une immersion ouverte j et d'un morphisme propre p, dont la dimension des fibres soit bornée par un entier n (automatique pour S quasi-compact).

[65] N.D.E. : cette condition est superflue. Cf. la N.D.E. (55) page 683.

Ces morphismes s'insèrent dans un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, hook, "j'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dr, hook, "j"] \arrow[dd, "f"] & \\
& \overline{X}' \arrow[rr, "\overline{g}"] \arrow[dl, "p'"] & & \overline{X} \arrow[dl, "p"] \\
S' \arrow[rr, "g"'] & & S &
\end{tikzcd}\quad .$$

Soient $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathscr{A}'$ un faisceau d'anneaux de torsion **353**
sur S' et L un complexe borné supérieurement de $(\mathscr{A}', g^*\mathscr{A})$-bimodules. On annèle X et $\overline{X}$ (resp. X' et $\overline{X}'$) par les images réciproques $\mathscr{A}_X$ et $\mathscr{A}_{\overline{X}}$ (resp. $\mathscr{A}'_{X'}$ et $\mathscr{A}'_{\overline{X}'}$) de $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}'$) sur X et $\overline{X}$ (resp. X' et $\overline{X}'$). On dispose alors d'isomorphismes de changement de base (5.2.1.2) entre les foncteurs $p'^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \overline{g}^* j_! K$ et $j'_!(f'^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g'^*K)$ de $D^-(X, \mathscr{A}_X)$ dans $D^-(\overline{X}', \mathscr{A}'_{\overline{X}'})$, et d'isomorphismes de changement de base (4.3.1) entre les foncteurs $L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g^* Rp_* K$ et $Rp'_*(p'^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \overline{g}^* K)$ de $D^-(\overline{X}, \mathscr{A}_{\overline{X}})$ dans $D^-(S', \mathscr{A}')$. Par composition, on en déduit un isomorphisme de changement de base entre foncteurs de $D^-(X, \mathscr{A}_X)$ dans $D^-(S', \mathscr{A}')$

$$L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g^* Rp_* j_! K \xrightarrow{\sim} Rp'_* j'_!(f'^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g'^*K). \tag{5.2.2.1}$$

Lorsque L est borné à composantes de tor-dimension finie, les arguments précédents et 4.3.2 (i) permettent de définir l'isomorphisme de changement de base pour $K \in \operatorname{Ob} D(X, \mathscr{A}_X)$.[66]

Pour pouvoir référer à 5.1.8, supposons que S soit quasi-compact quasi-séparé. Les foncteurs $Rp_* j_! = Rf_!$ et $Rp'_* j'_! = Rf'_!$ ne dépendent alors que de f et f', ce qui donne un sens au

Lemme 5.2.3. *L'isomorphisme de changement de base (5.2.2.1) ne dépend pas de la compactification choisie $f = pj$ de X.*

Soit un morphisme de compactification $q : \overline{X}_1 \to \overline{X}_2$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"] \arrow[dd, "f"'] & \overline{X}_1 \arrow[d, "q"] \arrow[ddl, "p_1"] \\
& \overline{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
S &
\end{tikzcd}\quad . \tag{5.2.3.1}$$

L'isomorphisme de changement de base c_1 relatif à $\overline{X}_1$ s'obtient en « composant » ceux **354**
relatifs à j_1 et p_1, ou encore en composant ceux relatifs à j_1, q et p_2. L'isomorphisme c_2 relatif à $\overline{X}_2$ s'obtient en composant ceux relatifs à j_2 et p_2. Pour vérifier que $c_1 = c_2$, il suffit de vérifier que l'isomorphisme c'_1 relatif à j_2 s'obtient comme le composé c'_2 de ceux relatifs à j_1 et q. Désignons par un $'$ les flèches déduites par le changement de base

[66] N.D.E. : en combinant la N.D.E. précédente et la N.D.E. (62) page 689, on peut définir cet isomorphisme sans condition sur L ni l'hypothèse que la dimension des fibres de p soit bornée.

g des flèches (5.2.3.1) ; c'_1 et c'_2 sont des isomorphismes

$$c'_1, c'_2 : L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \overline{g}_2^* * j_{2!}K \xrightarrow{\sim} j'_{2!}(j'^*_2 * L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g'^*K).$$

D'après (5.1.3.2), pour vérifier que $c'_1 = c'_2$, il suffit de le vérifier après s'être restreint à $\overline{X}'_2$, ce qui est trivial.

Les isomorphismes de changement de base relatifs à deux compactifications entre lesquelles il existe un morphisme sont donc égaux, et on conclut par 3.2.6 (ii).

Lemme 5.2.4. *Soit $f = uv : X \to Y \to S$ un composé de morphismes S-compactifiables. Les isomorphismes de changement de base (5.2.2.1) relatifs à u, v et f donnent lieu à un diagramme commutatif (notations de (5.2.4.1) ci-dessous) :*

$$\begin{tikzcd}
L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g^* R(uv)_! K \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, equal] & & R(u'v')_!((u'v')^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g''^* K) \arrow[d, equal] \\
L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g^* Ru_! Rv_! K \arrow[r, "\sim"] & Ru'_!(u'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g'^* Rv_! K) \arrow[r, "\sim"] & Ru'_! Rv'_!(v'^* u'^* L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} g''^* K).
\end{tikzcd}$$

355 Choisissons une compactifications de (u, v) (3.2.5) :

(5.2.4.1)
$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g''"'] \arrow[d, "v'"'] & X \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, "v"'] & \overline{X} \arrow[r, hook, "j_2"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d] & \overline{\overline{X}} \arrow[dl, "p_3"] \\
Y' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "u'"'] & Y \arrow[r, hook, "j_3"] \arrow[d, "u"'] & \overline{Y} \arrow[dl, "p_2"] & \\
S' \arrow[r, "g"'] & S & &
\end{tikzcd}$$
.

Le lemme 5.2.4 exprime que l'isomorphisme de changement de base c_1 relatif à f est le composé c_2 de ceux relatifs à u et v. L'isomorphisme c_1 s'obtient en composant les isomorphismes de changement de base relatifs à j_1, j_2, p_3 et p_2. Pour c_2, on compose ceux relatifs à j_1, p_1, j_3, p_2. Il suffit donc de comparer les isomorphismes c'_1, composé de ceux relatifs à p_3 et j_2, et c'_2, composé de ceux relatifs à j_3 et p_1.

Soit le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}' \arrow[rr, "\overline{g}''"] \arrow[dr, hook, "j'_2"] \arrow[dd, "p'_1"'] & & \overline{X} \arrow[dr, hook, "j_2"] \arrow[dd, "p_1"] & \\
& \overline{\overline{X}}' \arrow[rr, "\overline{\overline{g}}"] \arrow[dd, "p'_3"] & & \overline{\overline{X}} \arrow[dd, "p_3"] \\
Y' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, hook, "j'_3"] \arrow[ddr, "u'"'] & & Y \arrow[dr, hook, "j_3"] \arrow[ddr, "u"] & \\
& \overline{Y}' \arrow[rr, "\overline{g}'"] \arrow[d, "p'_2"] & & \overline{Y} \arrow[d, "p_2"] \\
& S' \arrow[rr, "g"] & & S
\end{tikzcd}$$
,

$L' = p_2'^* L$, $K' = j_{1!}K$ et 356

$$c_1', c_2' : L' \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \overline{g}'^* R(j_3 p_1)_! K' \xrightarrow{\sim} R(j_3' p_1')_!((j_3' p_1')^* L' \otimes \overline{g}''^* K').$$

En vertu de (5.1.3.2), pour vérifier que $c_1' = c_2'$, il suffit de vérifier que $j_3'^*(c_1') = j_3'^*(c_2')$, ce qui est trivial.

Lemme 5.2.5. Soient des morphismes de schémas annelés par des faisceaux d'anneaux de torsion

$$(S'', \mathscr{A}'') \xrightarrow{g_2} (S', \mathscr{A}') \xrightarrow{g_1} (S, \mathscr{A}),$$

et $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, d'où un diagramme :

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "g_2'"'] \arrow[d, "f''"] & X' \arrow[r, "g_1'"'] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S'' \arrow[r, "g_2"'] & S' \arrow[r, "g_1"'] & S. \end{tikzcd}$$

On annèle X, X', X'' par $f^*\mathscr{A}$, $f'^*\mathscr{A}'$ et $f''^*\mathscr{A}''$. Alors, le diagramme 357

$$\begin{tikzcd} L(g_1 g_2)^* Rf_! \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, equal] & & Rf_!'' L(g_1' g_2')^* \arrow[d, equal] \\ Lg_2^* Lg_1^* Rf_! \arrow[r, "\sim"] & Lg_2^* Rf_!' Lg_1'^* \arrow[r, "\sim"] & Rf_!'' Lg_2'^* Lg_1'^* \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ce lemme se déduit aussitôt des résultats analogues pour les foncteurs $j_!$ et Rp_* pour p propre. On laisse au lecteur le soin de le moduler.

On résume les énoncés qui précèdent en le

Théorème 5.2.6. Le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base.

Variantes 5.2.7. (i) Les foncteurs $f_!$ (pour les faisceaux d'ensembles pointés : 5.1.11) et les foncteurs $R^1 f_!$ (pour les faisceaux en groupes : 5.1.12) commutent aux changement de base.

(ii) Les foncteurs $Rf_!$ (5.1.14) commutent aux changements de base.

(iii) Sous les hypothèses (5.2.2), si L est borné et à composantes de tor-dimension finie,[67] les foncteurs $Rf_! : D(X) \to D(S)$, commutent aux changements de base.

Le théorème 5.2.6 est essentiellement équivalent à la conjonction des deux corollaires 5.2.8 et 5.2.9 suivants. 358

Proposition 5.2.8. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, et $\mathscr{F}$ un faisceau de torsion sur X. Pour tout point géométrique s de S, soient X_s la fibre géométrique de X en s et $\mathscr{F}_s$ le faisceau induit. On a canoniquement

$$(R^q f_!(\mathscr{F}))_s = H_c^q(X_s, \mathscr{F}_s).$$

Corollaire 5.2.8.1. Si les fibres de f sont de dimension $\leq d$, le foncteur $Rf_!$ est de dimension cohomologique $\leq 2d$ (1.2.9) : pour tout faisceau de torsion $\mathscr{F}$, on a $R^i f_! \mathscr{F} = 0$ pour $i > 2d$. Le foncteur $R^{2d} f_!$ est donc exact à droite sur la catégorie des faisceaux de torsion.

[67]N.D.E. : comme on a remarqué en 5.2.2, ces hypothèses sont superflues.

On se ramène par changement de base (5.2.8) au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Si alors $\overline{X}$ est un schéma propre sur S contenant X comme ouvert de Zariski dense, $j : X \to \overline{X}$, on a $\dim(\overline{X}) = \dim(X) \leq d$. Pour $\mathscr{F}$ faisceau de torsion sur X et $i > 2d$, on a donc, par X 4.3, 59

$$H^i_c(X, \mathscr{F}) = H^i(\overline{X}, j_! \mathscr{F}) = 0.$$

Proposition 5.2.9. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, K un complexe borné supérieurement de $f^*\mathscr{A}$-modules à gauche et L un complexe borné supérieurement de $\mathscr{A}$-modules à droite. On a canoniquement

$$L \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathscr{A}}{\otimes}} Rf_!(K) = Rf_!(f^*L \overset{\mathbf{L}}{\underset{f^*\mathscr{A}}{\otimes}} K).$$

359 Cette proposition implique formellement le résultat suivant :

Théorème 5.2.10. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $K \in D^-(X, f^*\mathscr{A})$ et $d \in \mathbf{Z}$. Si K est de tor-dimension finie $\leq d$ (4.1.9), alors $Rf_!K$ est de tor-dimension finie $\leq d$.

Il suffit de vérifier que pour tout faisceau de $\mathscr{A}$-modules à droite L sur S, on a

$$\mathscr{H}^{-i}(L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} Rf_!K) = 0 \quad \text{pour} \quad i > d.$$

D'après 5.2.9, on sait que

$$\mathscr{H}^{-i}(L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} Rf_!K) = R^{-i}f_!(f^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} K),$$

de plus, par hypothèse,

$$\mathscr{H}^{-i}(f^*L \overset{\mathbf{L}}{\otimes} K) = 0 \quad \text{pour} \quad i > d,$$

et on conclut en remarquant que si un complexe M de faisceaux de modules sur X satisfait à $\mathscr{H}^{-i}(M) = 0$ pour $i > d$, alors on a encore $\mathscr{H}^{-i}(Rf_!M) = 0$ pour $i > d$.

Dans le cas particulier des faisceaux d'anneaux constants et noethériens, on a le résultat plus général :

Théorème 5.2.11. Soient $f : X \to S$ un morphisme de sites, A un anneau, C son centre et $d \in \mathbf{Z}$. On suppose que

(i) le foncteur $Rf_* : D^+(X, C) \to D^+(S, C)$ est de dimension cohomologique finie.
(ii) A est noethérien à droite.
(iii) S a assez de points.

360 Pour tout complexe $K \in \operatorname{Ob} D^-(X, A)$ de faisceaux de A-modules à gauche, si K est de tor-dimension finie $\leq d$, alors le complexe $Rf_*K \in \operatorname{Ob} D^-(S, A)$ est de tor-dimension $\leq d$.

Preuve. En vertu de (i), le foncteur f_* est dérivable en des foncteurs

$$Rf_* : D(X, A) \longrightarrow D(S, A)$$

et

$$Rf_* : D(X, C) \longrightarrow D(S, C).$$

D'après 4.2.8, il suffit de vérifier que pour tout point s de S, le complexe $(Rf_*K)_s$ de A-modules est de tor-dimension $\leq d$; il suffit pour cela que pour tout A-module à droite L de type fini on ait

$$H^{-i}(L \overset{L}{\otimes} Rf_*K) = 0 \quad \text{pour} \quad i > d.$$

Raisonnant comme en 5.2.10, on voit qu'il suffit pour cela que la « flèche de changement de base »

(5.2.11.1) $$L \overset{L}{\otimes} Rf_*K \longrightarrow Rf_*(L \overset{L}{\otimes} K)$$

soit un isomorphisme.

Soit L^* une résolution de L par des A-modules libres de type fini. Les foncteurs considérés étant way-out à droite, il suffit de prouver que (5.2.11.1) est un isomorphisme après avoir remplacé L par une quelconque composante de L^*, et on est ramené au cas trivial où L est libre de type fini.

Remarques 5.2.12. (i) L'hypothèse (iii) de 5.2.11 est sans doute inutile. **361**

(ii) Si on omet l'hypothèse noethérienne sur A, 5.2.11 reste valable lorsque les foncteurs $R^i f_*$ commutent aux limites inductives filtrantes.

(iii) L'hypothèse que S soit annelé par un faisceau d'anneaux constant est essentielle. On obtiendrait un contre-exemple en prenant pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement local, pour f l'inclusion du point générique η, pour faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ le faisceau valant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ au point générique et $\mathbf{Z}/n^2\mathbf{Z}$ au point fermé s ($n >$ 1 premier aux caractéristiques résiduelles) et pour faisceau le module $f^*\mathscr{A}$.

5.3. Théorème de comparaison et théorème de finitude.

5.3.1. À un schéma X de type fini sur $\mathbf{C}$ sont associés son site étale X_{et}, son site transcendant X_{cl} et un morphisme de sites (XI 4)

$$\epsilon : X_{\mathrm{cl}} \longrightarrow X_{\mathrm{et}}.$$

Si $j : U \to X$ est une immersion ouverte, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U_{\mathrm{cl}} \arrow[r] \arrow[d] & U_{\mathrm{et}} \arrow[d] \\ X_{\mathrm{cl}} \arrow[r] & X_{\mathrm{et}} \end{tikzcd}$$

identifie $U_{\widetilde{\mathrm{cl}}}$ à l'ouvert de $X_{\widetilde{\mathrm{cl}}}$ image réciproque de l'ouvert $U_{\widetilde{\mathrm{et}}}$ de $X_{\widetilde{\mathrm{et}}}$.

Si $p : Y \to X$ est un morphisme propre, l'application continue $p^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est propre et séparée. Pour le voir, on se ramène par le lemme de Chow au cas p projectif.

Soit $f : X \to S$ un morphisme compactifiable de schémas de type fini sur $\mathbf{C}$ et soit **362**
$f = pj$ une compactification de f.

(5.3.1.1) $$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{cl}} \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "j_{\mathrm{cl}}"] \arrow[dd, "f_{\mathrm{cl}}"'] & & X \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "f"] & \\ & \overline{X}_{\mathrm{cl}} \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dl, "p_{\mathrm{cl}}"] & & \overline{X} \arrow[dl, "p"] \\ S_{\mathrm{cl}} \arrow[rr, "\epsilon"] & & S & \end{tikzcd}.$$

Le foncteur $p_{\mathrm{cl}\,*} j_{\mathrm{cl}!}$ n'est autre que le foncteur image directe à support propre $f_{\mathrm{cl}!}$ (voir Verdier [13]). Si S_{cl}, donc X_{cl} est séparé, le foncteur $j_{\mathrm{cl}!}$ transforme faisceaux mous sur

X_{cl} en faisceau mous sur $\overline{X}_{\text{cl}}$ [4, II 3.5.5]. La question étant locale sur S, il transforme en tout cas faisceaux flasques sur X_{cl} en faisceaux sur $\overline{X}_{\text{cl}}$ acycliques pour le foncteur $p_{\text{cl}\,*}$. On a donc (cf. Verdier [13])

$$Rf_{\text{cl}} = Rp_{\text{cl}\,*}j_{\text{cl}!}.$$

5.3.2. D'après 5.1.2, on dispose d'un isomorphisme de changement de base, entre foncteurs de $D(X)$ dans $D(\overline{X}_{\text{cl}})$

$$\epsilon^* j_! \xrightarrow{\sim} j_{\text{cl}!}\epsilon^*.$$

363 D'après 4.2.12 ou 4.1.5, on dispose d'un morphisme de changement de base entre foncteurs de $D^+(\overline{X})$ dans $D^+(S_{\text{cl}})$:

$$\epsilon^* Rp_* \longrightarrow Rp_{\text{cl}\,*}\epsilon^*.$$

Par composition, on en déduit un morphisme de changement de base, entre foncteurs de $D^+_{\text{tors}}(X)$ dans $D^+_{\text{tors}}(S_{\text{cl}})$ (5.1.13)

$$\epsilon^* Rf_! \longrightarrow Rf_{\text{cl}!}\epsilon^*. \tag{5.3.2.1}$$

On vérifie comme en 5.2.3 qu'il ne dépend pas de la compactification choisie de f ; il vérifie une formule de transitivité du type 5.2.4.

Théorème 5.3.3. (Théorème de comparaison). Le morphisme (5.3.2.1) est un isomorphisme.

Par construction, il suffit de traiter le cas où f est propre. Les foncteurs considérés sont triangulés et « way-out » [6, I 7]. Il suffit donc de traiter le cas où K est réduit à un faisceau de torsion placé en degré 0, et on conclut par XVI 4.1 (i).

Variantes 5.3.4.

(i) Si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux de torsion sur S_{et}, on obtient de même un isomorphisme (5.3.2.1) entre foncteurs de $D(X, f^*\mathscr{A})$ dans $D(S, \epsilon^*\mathscr{A})$.

(ii) En bas degré, on trouve les variantes habituelles pour les faisceaux d'ensembles pointés et les faisceaux en groupes ind-finis.

364 Corollaire 5.3.5. Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbf{C}$, qui puisse se compactifier en un schéma propre sur $\mathbf{C}$, et F un faisceau de torsion sur X. On a alors

$$H^q_!(X, F) \xrightarrow{\sim} H^q_c(X_{\text{cl}}, \epsilon^* F).$$

Théorème 5.3.6. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable de présentation finie et A un anneau de torsion noethérien à gauche. Le foncteur $Rf_! : D(X, A) \to D(S, A)$ transforme complexes à cohomologie constructible en complexes à cohomologie constructible.

L'assertion est locale sur S, qu'on peut supposer affine. Par passage à la limite, on se ramène au cas S noethérien. Les complexes à cohomologie constructible forment une sous-catégorie triangulée de $D(S, A)$. La foncteur $Rf_!$ étant « way-out », on se ramène à vérifier que si $\mathscr{F}$ est un faisceau constructible de A-modules, les faisceaux $R^q f_!\mathscr{F}$ sont constructibles. Soit $f = pj$, avec p propre et j une immersion ouverte. On a $R^q f_!\mathscr{F} = R^q p_*(j_!\mathscr{F})$. Le faisceau $j_!\mathscr{F}$ est constructible et on conclut par XIV 1.1.

5.3.7. En bas degrés, on dispose d'énoncés analogues pour les images directes support propre d'un faisceau constructible d'ensembles ou de groupes ind-finis.

Corollaire 5.3.8. Soient X un schéma séparé de type fini sur un corps séparablement clos k et $\mathscr{F}$ un faisceau constructible de torsion sur X. On suppose que X puisse se compactifier en un schéma propre sur k.[68] Alors, les groupes $H^q_c(X, \mathscr{F})$ sont finis.

[68] N.D.E. : cette hypothèse est automatiquement vérifiée. Voir la N.D.E. (47) page 649.

5.4. Formule de Künneth. **365**

5.4.1. Soit un diagramme commutatif (0.11) de sites

(5.4.1.1)

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] \arrow[dd, "h"] & \\
X' \arrow[dd, "f"'] & & Y' \arrow[dd, "g"] \\
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}\quad .$$

On suppose S annelé par un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$, de centre $\mathscr{C}$; on désignera encore par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$ les images réciproques de ces faisceaux sur les sites de (5.4.1.1).

Si K est un faisceau de $\mathscr{A}$-modules à droite sur X et L un faisceau de $\mathscr{A}$-modules à gauche sur Y, on pose

$$K \underset{\mathscr{A}}{\boxtimes} L = p^* K \underset{\mathscr{A}}{\otimes} q^* L$$

(produit tensoriel externe). De même pour K (resp. L) sur X' (resp. Y'). Soit alors K un faisceau de $\mathscr{A}$-modules à droite sur X' et L un faisceau de $\mathscr{A}$-modules à gauche sur Y'. Les flèches de changement de base (2.1.3, XII 4.1) définissent

$$\begin{cases} p^* f_* K \longrightarrow h_* p'^* K \\ q^* g_* L \longrightarrow h_* q'^* L, \end{cases} \tag{5.4.1.2}$$

d'où, par produit tensoriel, une flèche **366**

$$f_* K \boxtimes_{\mathscr{A}} g_* L \longrightarrow h_* p'^* K \otimes_{\mathscr{A}} h_* q'^* L \longrightarrow h_*(K \boxtimes_{\mathscr{A}} L). \tag{5.4.1.3}$$

Supposons que les foncteurs

$$\begin{aligned}
Rf_* &: D^+(X', \mathscr{A}^\circ) \longrightarrow D^+(X, \mathscr{A}^\circ) \\
Rg_* &: D^+(Y', \mathscr{A}) \longrightarrow D^+(Y, \mathscr{A}) \\
Rh_* &: D^+(Z', \mathscr{C}) \longrightarrow D^+(Z, \mathscr{C})
\end{aligned}$$

soient de dimension cohomologique finie, et se prolongent donc aux catégories dérivées entières. Il s'impose alors, pour $K \in \operatorname{Ob} D^-(X', \mathscr{A}^\circ)$ et $L \in \operatorname{Ob} D^-(Y', \mathscr{A})$, de définir une flèche de Künneth

$$Rf_* K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} Rg_* L \longrightarrow Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L). \tag{5.4.1.4}$$

On ne la définira que si les sites considérés ont assez de points, de façon à pouvoir utiliser 4.2.10 et 4.2.8. En vertu de 4.2.10, il suffit de la définir pour un couple (K, L) déployé à gauche pour le foncteur $(K, L) \mapsto K \boxtimes_{\mathscr{A}} L$, K et L étant déployés à droite pour les foncteurs f_* et g_* et bornés supérieurement.

Soient K_1 une résolution plate de $f_* K$, L_1 une résolution plate de $g_* L$ et $u : K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L \to M$ une résolution de $K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L$, déployée pour le foncteur Rh_*. On dispose de morphismes

$$Rf_*K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} Rg_*L \simeq K_1 \boxtimes_{\mathscr{A}} L_1 \longrightarrow f_*K \boxtimes_{\mathscr{A}} g_*L \longrightarrow$$
$$\longrightarrow h_*(K \boxtimes_{\mathscr{A}} L) \longrightarrow h_*M \simeq Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L)$$

et on définit (5.4.1.4) comme leur composé.

367 Cette flèche a la propriété caractéristique suivante, de démonstration toute analogue à celle de 4.2.13 :

. Soient $K \in \operatorname{Ob} C^-(X', \mathscr{A}^\circ)$ et $L \in \operatorname{Ob} C^-(Y', \mathscr{A})$. Posons $K_1 = f_*K$, $L_1 = g_*K$, et $M_2 = K \boxtimes_{\mathscr{A}} L$. Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{tikzcd}
Rf_*K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} Rg_*L \arrow[rrr] & & & Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L) \arrow[d] \\
K_1 \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L_1 \arrow[u] \arrow[r] & K_1 \boxtimes_{\mathscr{A}} L_1 \arrow[r] & h_*M_2 \arrow[r] & Rh_*M_2.
\end{tikzcd}$$

On a une commutativité analogue (cf. 4.2.13) en partant plutôt de morphismes $K_1 \to f_*K$, $L_1 \to g_*K$ et $K \boxtimes_{\mathscr{A}} L \to M_2$.

La commutativité 5.4.1.5 rend en principe aisée la vérification des propriétés de compatibilité du morphisme de Künneth.

5.4.2. Soient un diagramme commutatif (5.4.1.1) de schémas et $\mathscr{A}$ un faisceau de torsion sur S. Supposons que f et g sont compactifiables (3.2.1), que $Z = X \times_S Y$ et que $Z' = X' \times_S Y'$. Factorisons f et g en un morphisme propre et une immersion ouverte ; on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "j_1"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & Z' \arrow[l, "p'"'] \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "j_3"] & Y' \arrow[d, "j_2"'] \arrow[dd, bend left=60, "g"] \\
\overline{X}' \arrow[d, "\overline{f}"] & \overline{Z}' \arrow[l, "\overline{p}"'] \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d, "\overline{h}"] & \overline{Y}' \arrow[d, "\overline{g}"'] \\
X & Z \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & Y
\end{tikzcd}$$

368 dans lequel on a posé $\overline{Z}' = \overline{X}' \times_S \overline{Y}'$. On dispose d'un isomorphisme de nature triviale, pour K et L complexes sur X' et Y'

$$j_{3!}(K \boxtimes_{\mathscr{A}} L) \xrightarrow{\sim} j_{1!}K \boxtimes_{\mathscr{A}} j_{2!}L. \tag{5.4.2.1}$$

En « composant » l'inverse de cet isomorphisme et la flèche de Künneth (5.4.1.4) relative à $(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}, j_{1!}K, j_{2!}L)$, on obtient, pour $K \in \operatorname{Ob} D^-(X', \mathscr{A})$ et $L \in \operatorname{Ob} D^-(Y', \mathscr{A})$, une flèche de Künneth

$$Rf_!K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} Rg_!L \longrightarrow Rh_!(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L), \tag{5.4.2.2}$$

dont on vérifie qu'elle ne dépend pas des compactifications choisies.

Théorème 5.4.3. Sous les hypothèses de 5.4.2, la flèche de Künneth en cohomologie à supports propres (5.4.2.2) est un isomorphisme.

Preuve. (a) Par construction, il suffit de vérifier ce résultat lorsque f et g (donc aussi h) sont propres.

(b) Soit un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & S_1 \arrow[d] & Y_1 \arrow[l, "q_1"'] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "p"] & S & Y. \arrow[l, "q"']
\end{tikzcd}
\tag{5.4.3.1}
$$

et soient $Z_1 = X_1 \times_{S_1} Y_1$, $X_1' = X' \times_X X_1$, $Y_1' = Y' \times_Y Y_1$ et $Z_1' = X_1' \times_{S_1} Y_1' = Z' \times_{Z_1} Z$, de sorte que l'on dispose d'un morphisme de diagrammes (5.4.1.1),

$$(S_1, X_1, Y_1, Z_1, X_1', Y_1', Z_1') \longrightarrow (S, X, Y, Z, X', Y', Z')$$

dont les flèches seront uniformément désignées par C.

On admettra que : **369**

Lemme 5.4.3.2. Le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
C^*(Rf_!K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} Rg_!L) \arrow[r, equal] \arrow[d] & C^*Rf_!K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} C^*Rg_!L \arrow[r, "\sim"] & Rf_{1!}C^*K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} Rg_{1!}C^*L \arrow[d] \\
C^*(Rh_!(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L)) \arrow[r, "\sim"] & Rh_{1!}(C^*(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L)) \arrow[r, equal] & Rh_{1!}(C^*K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} C^*L).
\end{tikzcd}
$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont des flèches de changement de base et les flèches verticales les flèches de Künneth pour les deux diagrammes (5.4.1.1) considérés.

Pour prouver 5.4.3, il suffit de prouver que la flèche de Künneth est un isomorphisme en tout point géométrique de Z. D'après 5.4.3.2, il suffit de le vérifier après un quelconque changement de base (5.4.3.1) tel que S_1 soit le spectre d'un corps algébriquement clos et p_1, q_1 des isomorphismes.

Après un tel changement de base, le diagramme (5.4.1.1) se réduit à un diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dd, "f\times g"] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & S &
\end{tikzcd}
\tag{5.4.3.3}
$$

et la flèche de Künneth à une flèche (5.4.4.1)

$$k : Rf_!K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} Rg_!L \longrightarrow R(f \times g)_!(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{A}} L). \tag{5.4.3.4}$$

(c) Soit un diagramme (5.4.3.3) dans lequel f et g sont propres. On admettra que : **370**

Lemme 5.4.3.5. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} Rf_!K \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathscr{A}}{\otimes}} Rg_!L \arrow[r] \arrow[d] & R(f\times g)_!(K \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathscr{A}}{\otimes}} L) \arrow[d, equal] \\ Rf_!(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} f^*Rg_!L) \arrow[r] & Rf_!Rp_!(p^*K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} q^*L). \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont la flèche de Künneth et la flèche de changement de base. Les flèches verticales sont une flèche de changement de base par f et un isomorphisme de transitivité. Le théorème 5.4.3 est conséquence de ce lemme et de 4.3.1.

Le lecteur courageux pourra vérifier que ce lemme reste valable si f et g ne sont pas nécessairement propres.

5.4.4. Soient S un schéma, $f_i : X_i' \to X_i$ $(i \in I)$ une famille finie de morphismes compactifiables de S-schémas, X le produit sur S des X_i, X' le produit sur S des X_i' et $f : X' \to X$ le produit des f_i. Si S est annelé par $\mathscr{A}$, comme en 5.4.1, et si on annèle les X_i et X_i' par l'image réciproque de $\mathscr{A}$, on a plus généralement un isomorphisme

$$\overset{\mathbf{L}}{\underset{i\in I}{\boxtimes}} Rf_{i!}(K_i) \xrightarrow{\sim} Rf_!(\overset{\mathbf{L}}{\underset{i\in I}{\boxtimes}} K_i), \tag{5.4.4.1}$$

pour $K_i \in \operatorname{Ob} D^-(X_i', \mathscr{A})$. La définition de cet isomorphisme, ainsi que celle des deux membres de (5.4.4.1) ne nécessite pas le choix d'un ordre total sur I.

371 5.5. Cohomologie des puissances symétriques. Le résultat principal de ce n° est le théorème 5.5.21, donnant en particulier la cohomologie à supports propres d'une puissance symétrique d'un schéma X sur un corps k algébriquement clos, pour des coefficients convenables (par exemple $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) en terme de la cohomologie à supports propres de X. L'analogue de ce théorème en topologie semi-simpliciale est bien connu, tout au moins pour la cohomologie à coefficients dans un anneau commutatif A ; il se vérifie au niveau des cochaînes semi-simpliciales. En effet, si X_* est un ensemble semi-simplicial, il existe une bijection continue canonique de la réalisation géométrique de la puissance symétrique n-ième $(X_*)^n/\mathfrak{S}_n$ de X_* dans la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de la réalisation géométrique de X_*, et cette bijection induit un isomorphisme sur la cohomologie.

5.5.1. Rappelons quelques propriétés (dues à D. Lazard) des modules plats, quelques propriétés (dues à Roby) des foncteurs TS^n et T^n, et quelques propriétés (dues à Dold et Puppe) des foncteurs dérivés de foncteurs non additifs.

. Tout module plat sur un anneau A est limite inductive filtrante de modules libres de type fini (Lazard [7, I 1.2]). Ce résultat implique les suivants :

. Le foncteur $\varinjlim$ est une équivalence de la catégorie des ind-objets (I 8.1) de la catégorie des A-modules libres de type fini (resp. projectifs de type fini) avec la catégorie des A-modules plats.

372 . Si A et B sont deux anneaux, tout foncteur $T : \operatorname{Mod}(A) \to \operatorname{Mod}(B)$ qui transforme module libre de type fini en module plat et commute aux limites inductives filtrantes, transforme module plat en module plat (Lazard [7, I 1.5]).

. Toute suite exacte de A-modules, avec L'' plat,

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

est limite inductive de suites exactes scindées (Lazard [7, I 2.3]).

5.5.2. Soient A un anneau commutatif et M un A-module.

. Pour tout entier n, on désigne par $TS^n(M)$ (ou $TS^n_A(M)$) le module des tenseurs symétriques de degré n de M. Désignant par $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n, on a par définition

$$TS^n(M) = (\bigotimes^n M)^{\mathfrak{S}_n}.$$

Si B est une A-algèbre, alors $TS^n(B)$ est une sous-algèbre de $\bigotimes^n B$. Si de plus B est commutatif, alors $\mathrm{Spec}(TS^n(B))$ est par définition la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de $\mathrm{Spec}(B)$ sur $\mathrm{Spec}(A)$:

$$\mathrm{Spec}(TS^n_A(B)) = \mathrm{Sym}^n_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(B) \underset{\text{dfn}}{=} (\mathrm{Spec}(B)/\,\mathrm{Spec}(A))^n/\mathfrak{S}_n.$$

. Rappelons (Roby [10, I 2 p. 219]) qu'une loi polynôme f d'un A-module M dans un A-module N est la donnée, pour toute A-algèbre commutative A', d'une application $f_{A'} : M \otimes_A A' \to N \otimes_A A'$, ces applications étant telles que pour tout homomorphisme de A-algèbres $u : A' \to A''$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A A' \arrow[r, "f_{A'}"] \arrow[d, "u"] & N \otimes_A A' \arrow[d, "u"] \\ M \otimes_A A'' \arrow[r, "f_{A''}"] & N \otimes_A A'' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. **373**

Une loi polynôme f est dite homogène de degré n (Roby [10, I 8 p. 226]) si, pour tout $a' \in A'$, on a identiquement

$$f_{A'}(a'x) = a'^n f_{A'}(x).$$

Une telle loi polynôme s'appellera aussi application n^{ique} (quadratique, cubique, ...) ; on notera leur ensemble

$$\mathrm{Hom}\, n^{\text{ique}}(M, N).$$

Plus généralement, si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille finie de A-modules et $\underline{n} = (n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers, une loi polynôme multihomogène de multidegré $\underline{n}$ des modules M_i dans N est une loi polynôme de $\oplus M_i$ dans N vérifiant identiquement, pour $a_i \in A'$,

$$f_{A'}((a_i x_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} a_i^{n_i} \cdot f_{A'}((x_i)_{i\in I}).$$

On notera $\mathrm{Hom}\, \underline{n}^{\text{ique}}((M_i), N)$ l'ensemble de ces lois polynômes.

. Pour tout module M, le foncteur covariant des A-modules dans les ensembles

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}\, n^{\text{ique}}(M, N)$$

est représentable par un A-module $\Gamma^n(M)$ (ou $\Gamma^n_A(M)$), muni d'une application n^{ique} **374**
universelle $\gamma^n : M \to \Gamma^n(M)$ (Roby [10, IV 1 p. 265]). Etant donné $(M_i)_{i\in I}$ et $\underline{n}$ comme en 5.5.2.2, le foncteur covariant

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}\, \underline{n}^{\text{ique}}((M_i), N)$$

est représenté par le module $\bigotimes_{i\in I} \Gamma^{n_i}(M_i)$, muni de la loi polynôme multihomogène (de multidegré $\underline{n}$) universelle $(m_i) \mapsto \bigotimes_{i\in I} \gamma^{n_i}(m_i)$.

. Les foncteurs TS^n et Γ^n commutent aux limites inductives filtrantes (pour le second, Roby [10, IV 7 p. 277]). Ils transforment modules libres en modules libres, donc modules plats en modules plats (5.5.1.2).

. L'application n^{ique} de M dans $TS^n(M)$ donnée par $m \mapsto \bigotimes^n m$ définit une application φ, dite canonique, de $\Gamma^n(M)$ dans $TS^n(M)$, vérifiant

$$\varphi(\gamma^n(m)) = \bigotimes^n m.$$

Cette application est un isomorphisme pour M libre de type fini (Roby [10, IV 5 p. 272]) donc aussi pour M plat (5.5.2.4 et 5.5.1.1).

Soit M un A-module et P une suite exacte

$$P : P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Soit $P_1' = P_1 \times P_0$, et soient j_0 et j_1 les morphismes de P_1' dans P_0 de coordonnées (d, Id) et $(0, \mathrm{Id})$. La suite

$$\Gamma^n(P_1') \underset{\Gamma^n(j_1)}{\overset{\Gamma^n(j_0)}{\rightrightarrows}} \Gamma^n(P_0) \longrightarrow \Gamma^n(M) \longrightarrow 0$$

375 est alors exacte (Roby [10, IV 10 p. 284]). Pour P une présentation plate de M, on en déduit une description du foncteur Γ^n via le foncteur TS^n

$$TS^n(P_1') \rightrightarrows TS^n(P_0) \to \Gamma^n(M) \to 0. \tag{5.5.2.5.1}$$

. Si $M = M' \oplus M''$, l'application n^{ique}

$$m \longmapsto (\gamma^{n'} m \otimes \gamma^{n''} m)_{n'+n''=n}$$

définit un isomorphisme, dit canonique (Roby [10, III 9 p. 262])

$$\Gamma^n(M) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n'+n''=n} \Gamma^{n'}(M) \otimes \Gamma^{n''}(M). \tag{5.5.2.6.1}$$

Si Σ est une suite exacte

$$\Sigma : 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

le module $\Gamma^n(M)$ est muni d'une filtration canonique (décroissante) et de morphismes

$$\Gamma^i(M'') \otimes \Gamma^{n-i}(M') \longrightarrow \mathrm{Gr}^i(\Gamma^n(M)). \tag{5.5.2.6.2}$$

Ces données sont caractérisées par les propriétés d'être fonctorielles en Σ et de vérifier une compatibilité évidente avec (5.5.2.6.1) pour Σ scindable. Les flèches (5.5.2.6.2) sont des isomorphismes pour Σ scindable, donc aussi pour M'' plat (5.5.1.4).

. Le foncteur Γ^n commute à l'extension des scalaires (Roby [10, III 8 p. 262]) (la propriété analogue pour TS^n est en général fausse).

. Si $u : M_1 \times M_2 \to N$ est une application bilinéaire, alors $\gamma^n \circ u$ est une loi polynôme bihomogène de bidegré (n, n) et définit donc (5.5.2.3) $u^n : \Gamma^n(M_1) \otimes \Gamma^n(M_2) \to \Gamma^n(N)$
376 vérifiant $u^n(\gamma^n x \otimes \gamma^n y) = \gamma^n u(x, y)$. En particulier, si B est une A-algèbre, le produit : $B \times B \to B$ induit un produit sur $\Gamma^n(B)$. Ce produit fait de $\Gamma^n(B)$ une A-algèbre, et l'application canonique de $\Gamma^n(B)$ dans $TS^n(B)$ est un homomorphisme d'algèbres.

5.5.3. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. On désignera par $\mathrm{ssimpl}^+(\mathscr{A})$ la catégorie des objets co-semi-simpliciaux[69] de $\mathscr{A}$, par $C^{\geq 0}(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes différentiels K avec $K^i = 0$ pour $i < 0$, et par $K^{\geq 0}(\mathscr{A})$ l'image de $C^{\geq 0}(\mathscr{A})$ dans $K(\mathscr{A})$. Si $K \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{ssimpl}^+(\mathscr{A})$, le complexe normalisé associé $N(K) \in \mathrm{Ob}\, C^{\geq 0}(\mathscr{A})$ est défini par

$$\begin{cases} N(K)^n = \text{intersection des noyaux des opérateurs de dégénérescence} \\ \qquad\qquad \text{de } K^n \text{ dans } K^{n-1} \\ d = \sum (-1)^i \partial_i. \end{cases} \tag{5.5.3.1}$$

[69] N.D.E. : on les appelle objets *cosimpliciaux* dans la terminologie moderne.

Si on désigne encore par K le complexe de composantes K^n, et de différentielle $d = \sum(-1)^i\partial_i$, alors $N(K)$ est un sous-complexe facteur direct dans K, et $K/N(K)$ est homotope à zéro.

D'après Dold-Puppe [1], le foncteur N est une équivalence de catégories

$$N\ :\ \mathrm{ssimpl}^+(\mathscr{A}) \longrightarrow C^{\geq 0}(\mathscr{A}).$$

Cette équivalence et son inverse transforment morphismes homotopes en morphismes homotopes. De plus, pour tout $K \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{ssimpl}^+(\mathscr{A})$, K^n est somme de copies de $N(K)^i$ ($i \leq n$) ; si **P** est une propriété d'objets de $\mathscr{A}$, stable par sommes finies et facteurs directs, on en déduit que les K^i ont la propriété **P** pour $i \leq n$ si et seulement si les $N(K)^i$ ont cette propriété pour $i \leq n$.

L'équivalence N est utilisée par Dold et Puppe pour étendre tout foncteur (non nécessairement additif) $T\ :\ \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ dans une catégorie quelconque $\mathscr{B}$ en un foncteur $C^{\geq 0}(T)$ (ou simplement T) de $C^{\geq 0}(\mathscr{A})$ dans $C^{\geq 0}(\mathscr{B})$ **377**

$$C^{\geq 0}(T) = NTN^{-1}. \tag{5.5.3.2}$$

Le foncteur $C^{\geq 0}(T)$ passe au quotient pour définir

$$T \quad \text{ou} \quad K^{\geq 0}(T)\ :\ K^{\geq 0}(\mathscr{A}) \longrightarrow K^{\geq 0}(\mathscr{B}). \tag{5.5.3.3}$$

. Si T est de degré $\leq n$, i.e. si le $(n+1)^{\text{ième}}$ « cross effect » est nul (Dold-Puppe [1, 4.18 p. 232]), alors, pour tout $K \in \mathrm{Ob}\,C^{\geq 0}(\mathscr{A})$ tel que $K^i = 0$ pour $i > m$, on a $[T(K)]^i = 0$ pour $i > nm$ (Dold-Puppe [1, 4.23 p. 233]).

. En particulier, si T est un foncteur de degré fini de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules, qui transforme objet plat en objet plat, alors un complexe plat borné a pour image un complexe plat borné.

Lemme 5.5.4. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne.

(i) Les quasi-isomorphismes dans $K^{\geq 0}(\mathscr{A})$ permettent un calcul des fractions à gauche et à droite.

(ii) Le foncteur évident est une équivalence entre la catégorie déduite de $K^{\geq 0}(\mathscr{A})$ en inversant les quasi-isomorphismes et la catégorie $D^{\geq 0}(\mathscr{A})$.

Le foncteur $\tau_{\geq 0}\ :\ C(\mathscr{A}) \to C^{\geq 0}(\mathscr{A})$ (1.1.13) passe au quotient pour définir un foncteur $\tau_{\geq 0}\ :\ K(\mathscr{A}) \to K^{\geq 0}(\mathscr{A})$, adjoint à gauche à l'inclusion de $K^{\geq 0}(\mathscr{A})$ dans $K(\mathscr{A})$. Le foncteur $\tau_{\geq 0}$ transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, et la flèche d'adjonction $X \to \tau_{\geq 0}(X)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^i(X) = 0$ pour $i < 0$. Le lemme 5.5.4 résulte donc de Verdier [11] et des points (i) et (ii) du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur : **378**

Lemme 5.5.4.1. Soient K une catégorie, K' une sous-catégorie pleine, S un ensemble de morphismes de K égal à l'image inverse de l'ensemble des isomorphismes de $K(S^{-1})$ (cf. [2, Chap. 1]) et S' sa trace dans K'. On suppose que l'inclusion i de K' dans K admet un adjoint à gauche τ, et que $\tau(S) \subset S'$.

(i) Le foncteur évident de $K'(S'^{-1})$ dans $K(S^{-1})$ est pleinement fidèle, et admet τ pour adjoint à gauche.

(ii) Si $K(S^{-1})$ peut se calculer par calcul de fractions à gauche (resp. à droite), alors $K'(S'^{-1})$ a la même propriété.

Si l'inclusion i n'a pas nécessairement d'adjoint à gauche, et si τ désigne le foncteur non partout défini adjoint à gauche à i, on a :

(iii) Si $K(S^{-1})$ peut se calculer par calcul de fractions à gauche (resp. à droite) et si pour tout $u \in S$, de but (resp. de source) dans K', $\tau(u)$ est défini et dans S', alors $K'(S'^{-1})$ admet un calcul de fractions à gauche (resp. à droite) et le foncteur $K'(S'^{-1}) \to K(S^{-1})$ est pleinement fidèle.

379 5.5.5. Soit $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un foncteur entre catégories abéliennes. Comme en 1.2.1, on définit les dérivés de T

$$LT : D^{\geq 0}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(D^{\geq 0}(\mathscr{B}))$$
$$RT : D^{\geq 0}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(D^{\geq 0}(\mathscr{B}))$$

par les formules

$$LT(K) = \text{“}\varprojlim_{s:K'\to K}\text{”}\ T(K')$$
$$RT(K) = \text{“}\varinjlim_{s:K\to K'}\text{”}\ T(K'),$$

où s parcourt la catégorie filtrante des quasi-isomorphismes de but (resp. de source) K.

On dit que T est dérivable à gauche (resp. à droite) en K si $LT(K)$ ($RT(K)$) est représentable. On dit que K est déployé à gauche (resp. à droite) pour T (ou, par abus de langage, déployé pour LT (resp. RT)) si la flèche canonique suivante est un isomorphisme :

$$LT(K) \xrightarrow{\sim} TK \text{ (resp. } TK \xrightarrow{\sim} RT(K)).$$

Proposition 5.5.6. *Soit F un foncteur de la catégorie des modules sur un anneau A dans une catégorie abélienne $\mathscr{B}$. Supposons que les limites inductives filtrantes dans $\mathscr{B}$ soient représentables et soient exactes, et que F commute aux limites inductives filtrantes. Alors tout complexe borné $M^\cdot \in \mathrm{Ob}\, K^{\geq 0}(A)$ de modules plats est déployé pour LF.*

380 La proposition résulte immédiatement des définitions, du lemme suivant, qui sera prouvé en 5.5.6.4, et du fait que les quasi-isomorphismes $u : N^\cdot \to M^\cdot$, avec $N^\cdot \in C^{b,\geq 0}(A)$ à composantes plates, forment un ensemble cofinal dans la catégorie des quasi-isomorphismes de but $M^\cdot$.

Lemme 5.5.6.1. *Soit $u : N^\cdot \to M^\cdot$ un quasi-isomorphisme entre complexes plats, objets de $C^{b,\geq 0}(A)$. Alors, $F(u)$ est un quasi-isomorphisme.*

Lemme 5.5.6.2. *Soient $\mathscr{A}$ une catégorie additive et d un intervalle borné supérieurement de $\mathbf{Z}$. On désigne par C^d (resp. $C^{d,b}$, resp. K^d, resp. $K^{d,b}$) la catégorie des complexes nuls en degrés $i \notin d$ (resp. et bornés, resp. à homotopie près). On a une équivalence*

$$\ell : \mathrm{Ind}(C^{d,b}(\mathscr{A})) \xrightarrow{\sim} C^d(\mathrm{Ind}\,\mathscr{A});$$

l'inverse de cette équivalence induit un foncteur

$$\ell' : K^d(\mathrm{Ind}\,\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(K^{d,b}(\mathscr{A})).$$

A) Prouvons que ℓ est pleinement fidèle. Soit donc K un complexe borné d'objets de $\mathscr{A}$ et $L = \text{“}\varinjlim\text{”}\, L_\alpha$ un ind-complexe. On a

$$\mathrm{Hom}(K,L) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varinjlim \mathrm{Hom}(K,L_\alpha) = \varinjlim Z^0(\mathrm{Hom}^\cdot(K,L_\alpha)) \simeq Z^0 \varinjlim_\alpha \mathrm{Hom}^\cdot(K,L_\alpha)$$
$$\xrightarrow{\sim} Z^0\,\mathrm{Hom}^\cdot(K,\ell L) = \mathrm{Hom}(K,\ell L),$$

l'avant-dernier isomorphisme provenant du fait que K est fini, de sorte que la $\varinjlim$ commute au passage du double au simple complexe. Ceci prouve l'assertion.

B) On laisse au lecteur le soin (assez fastidieux) de vérifier que ℓ est essentiellement surjectif en construisant, de gauche à droite, à partir d'un degré arbitrairement choisi, « suffisamment » de complexes bornés s'envoyant dans un complexe borné supérieurement de ind-objets K ; et de développer de même le point suivant : **381**

C) Si $\ell f : \ell \varinjlim K_\alpha \to \ell \varinjlim L_\beta$ est homotope à zéro : $f = dH + Hd$, alors, pour tout α, H se relève en $H^i_\alpha : K^i_\alpha \to L^{i-1}_{\beta(\alpha)}$ qui, pour β assez grand, définit une homotopie à zéro de $f_\alpha : K_\alpha \to L_{\beta(\alpha)}$.

. Soient A un anneau, d un intervalle borné supérieurement de $\mathbf{Z}$, $P(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini, $\mathrm{Pl}(A)$ la catégorie des A-modules plats. Désignons par $D^{\mathrm{Tor}\subset d}(A)$ l'image de $C^d(\mathrm{Pl}(A))$ dans $D(A)$ et par $D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)$ l'image de $C^{d,b}(P(A))$ dans $D(A)$. D'après 5.5.1.2, on a $\mathrm{Pl}(A) \simeq \mathrm{Ind}\, P(A)$. On a par ailleurs $K^{d,b}(P(A)) \simeq D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)$. On déduit dès lors de 5.5.6.2, et du fait que H^i commute aux limites inductives filtrantes, qu'il existe un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
C^d(\mathrm{Pl}(A)) \arrow[d] & \mathrm{Ind}\, C^{d,b}(P(A)) \arrow[l, "\varinjlim"', "\sim"] \arrow[d] \\
K^d(\mathrm{Pl}(A)) \arrow[r, "\ell'"] \arrow[d] & \mathrm{Ind}\, K^{d,b}(P(A)) \arrow[d, "\simeq"] \\
D^{\mathrm{Tor}\subset d}(A) \arrow[r, "\ell''"] & \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{parf}\subset d}(A).
\end{tikzcd}$$

. Prouvons 5.5.6.1. Avec les notations de 5.5.6.3, si d est un intervalle $[0,k]$, on dispose **382**
(car F commute aux $\varinjlim$) de diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
K^d(\mathrm{Pl}(A)) \arrow[r, "\ell'"] \arrow[d, "K^{\geq 0}(F)"'] & \mathrm{Ind}\, K^d(P(A)) \arrow[d, "\mathrm{Ind}(K^{\geq 0}(F))"'] \\
K^+(\mathscr{B}) \arrow[d, "H^i"'] & \mathrm{Ind}\, K^+(\mathscr{B}) \arrow[d, "\mathrm{Ind}(H^i)"'] \\
\mathscr{B} & \mathrm{Ind}\, \mathscr{B}. \arrow[l, "\varinjlim"']
\end{tikzcd}$$

Si u est comme en 5.5.6.1, alors, d'après 5.5.6.3, $\ell'(u)$ est un isomorphisme, et $H^i K^{\geq 0}(F)(u)$ est donc un isomorphisme, ce qu'il fallait prouver.

5.5.7. Soient X un schéma sur un schéma S et k un entier. On suppose que la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^k_S(X)$ est définie. Le lecteur qui voudrait ne pas faire cette hypothèse pourra se placer dans la catégorie des espaces algébriques (Artin[70]). On annèle S par un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathscr{A}$. À partir de 5.5.19, $\mathscr{A}$ sera supposé de torsion. On désignera encore par $\mathscr{A}$, par abus de notations, l'image réciproque de $\mathscr{A}$ sur un quelconque S-schéma.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de modules sur X ; le faisceau $\overset{k}{\boxtimes} \mathscr{F}$, produit tensoriel externe de n copies de $\mathscr{F}$, est un faisceau sur X^k/S, équivariant par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ sur X^k/S. Par passage aux invariants, il définit un faisceau $TS^k_{\mathrm{ext}}(\mathscr{F})$ sur $\mathrm{Sym}^k_S(X)$, **383**
appelé puissance tensorielle symétrique externe de $\mathscr{F}$.

[70]N.D.E. : dans le texte original, on cite ici un ouvrage non précisé, qui est probablement l'un des deux ouvrages d'Artin cités dans les notes en pages 739 et 751.

Pour raisonner « point par point », il est utile de travailler avec les points de $\mathrm{Sym}^k_S(X)$ décrits comme suit.

. Soit s un point géométrique de S. Un point x de $\mathrm{Sym}_S(X)$ à valeurs dans $k(s)$ définit un point géométrique de $\mathrm{Sym}_S(X)$. On désignera par $(x_1 \ldots x_k)$ un point de $(X/S)^k$ à valeurs dans $k(s)$ d'image x, par $y_1 \ldots y_\ell$ les éléments distincts de la suite $x_1 \ldots x_k$ et par n_i $(1 \leq i \leq \ell)$ la multiplicité de y_i dans cette suite $(\sum n_i = k)$.

Avec les notations de 5.5.7.1, et désignant par $\mathfrak{S}$ un groupe symétrique, on a

$$TS^k_{\mathrm{ext}}(F)_x \simeq \Big(\bigotimes_1^\ell \Big(\bigotimes^{n_i} F_{y_i}\Big)\Big)^{\prod_1^\ell \mathfrak{S}_{n_i}}, \tag{5.5.7.2}$$

les produits tensoriels étant pris sur $\mathscr{A}_S$. En particulier, pour F plat, on a, grâce à 5.5.2.5 :

$$TS^k_{\mathrm{ext}}(F)_x \xleftarrow{\sim} \bigotimes_1^\ell \Gamma^{n_i} F_{y_i}, \tag{5.5.7.3}$$

en utilisant un argument par récurrence sur ℓ, utilisant la platitude des $\Gamma^{n_i} F_{y_i}$ (5.5.2.4) et le fait suivant : si G (resp. H) est un groupe fini opérant sur un A-module M (resp. N), et si M et N^H sont plats, alors $M^G \otimes_A N^H \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N)^{G\times H}$.

5.5.8. Soit F un Module sur X, et P une présentation plate de F

$$P : P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

384 On définit P_1', j_0 et j_1 comme en 5.5.2.5, et on définit $\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)$ (foncteur Γ externe) comme le conoyau de la double flèche $(TS^k_{\mathrm{ext}}(j_0), TS^k_{\mathrm{ext}}(j_1))$. Avec les notations de 5.5.7.1, on déduit de (5.5.7.3) et 5.5.2.5 des isomorphismes

$$\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)_x \simeq \bigotimes_1^\ell \Gamma^{n_i}(F_{y_i}). \tag{5.5.8.1}$$

De cette formule, on déduit que $\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)$, qui a priori dépend fonctoriellement de P, ne dépend, à isomorphisme unique près, que de F.

5.5.9. On dispose d'un morphisme fonctoriel

$$\alpha : \Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F) \longrightarrow TS^k_{\mathrm{ext}}(F).$$

Le couple (Γ, α) est caractérisé par les deux propriétés :

(i) Pour F plat, α est un isomorphisme

(ii) Avec les notations de 5.5.2.5, pour toute présentation

$$P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\epsilon} F \longrightarrow 0$$

de F, la suite

$$\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(P_1') \rightrightarrows \Gamma^k_{\mathrm{ext}}(P_0) \to \Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F) \to 0$$

est exacte.

On a de plus :

(iii) Les foncteurs TS^k et Γ^k commutent aux limites inductives filtrantes (d'après (5.5.7.2), (5.5.8.1), 5.5.2.4).

(iv) Le foncteur Γ^k commute à toute extension $\mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ de l'anneau de base.

385 (v) Le foncteur Γ^k commute à tout changement de base $S' \to S$: pour tout carré

cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S, \end{tikzcd}$$

on a

$$\mathrm{Sym}^k_g(g')^*\Gamma^k_{\mathrm{ext}} \simeq \Gamma^k_{\mathrm{ext}}g'^*.$$

((5.5.8.1) et 5.5.2.7).

(vi) Le foncteur Γ^k commute aux images inverses par tout morphisme radiciel $i : X' \to X$ (par exemple une immersion fermée) : on a

$$\mathrm{Sym}^k_S(i)^*\Gamma^k_{\mathrm{ext}} \simeq \Gamma^k_{\mathrm{ext}}i^*$$

(5.5.8.1).

(vii) Pour $j : X' \to X$ une immersion, on a

$$\mathrm{Sym}^k_S(j)_!\Gamma^k_{\mathrm{ext}} \simeq \Gamma^k_{\mathrm{ext}}j_!$$

(5.5.8.1).

5.5.10. Soient k_1, k_2 et $k = k_1 + k_2$ trois entiers ≥ 0. On dispose alors d'un morphisme fini ( ) :[71]

$$\vee_{k_1k_2} : \mathrm{Sym}^{k_1}_S(X) \times_S \mathrm{Sym}^{k_2}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^k_S(X).$$

Si F_i $(i = 1, 2)$ est un Module sur $\mathrm{Sym}_S{}^{k_i}(X)$, on désigne par $F_1 \vee F_2$ le faisceau sur $\mathrm{Sym}^k_S(X)$

$$F_1 \vee F_2 = \vee_{k_1k_2*}(F_1 \boxtimes F_2).$$

5.5.11. Soit une suite exacte de Modules sur X **386**

$$\Sigma : 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0.$$

Avec les notations 5.5.7.1, on dispose, grâce à (5.5.8.1) et 5.5.2.6, d'une filtration sur $\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)_x$, et de morphismes :

$$\sum_{\Sigma_1^\ell i_\alpha = i} \bigotimes_1^\ell \Gamma^{i_\alpha}(F'_{y_\alpha}) \otimes \bigotimes_1^\ell \Gamma^{n_i - i_\alpha}(F''_{y_\alpha}) \longrightarrow \mathrm{Gr}^i(\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)_x).$$

Le premier membre n'est autre que $(\Gamma^i_{\mathrm{ext}}(F') \vee \Gamma^{k-i}_{\mathrm{ext}}(F''))_x$. On vérifie facilement que ces données, construites point par point, proviennent d'une (unique) filtration en $k+1$ crans de $\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)$, et de morphismes (uniques)

(5.5.11.1) $$\Gamma^i_{\mathrm{ext}}(F') \vee \Gamma^{k-i}_{\mathrm{ext}}(F'') \longrightarrow \mathrm{Gr}^i(\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F)).$$

Si la suite exacte Σ est scindée, on a plus précisément (vérification point par point à partir de (5.5.2.6.1)).

(5.5.11.2) $$\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F' \oplus F'') \simeq \bigoplus_{k_1+k_2=k} \Gamma^{k_1}_{\mathrm{ext}}(F') \vee \Gamma^k_{\mathrm{ext}}(F'').$$

Si la suite exacte Σ est scindable point par point, ou si F'' est plat, les morphismes (5.5.11.1) sont des isomorphismes (cf. 5.5.1.4).

[71] N.D.E. : je n'ai pas trouvé de références pour la finitude de $\vee_{k_1k_2}$ en général.

5.5.12. Soit $u : X \to Y$ un morphisme de S-schémas. On suppose que les puissances symétriques $\mathrm{Sym}^k_S(X)$ et $\mathrm{Sym}^k_S(Y)$ existent. Soient F un Module sur X, G un Module sur Y et $v \in \mathrm{Hom}(u^*G, F) \simeq \mathrm{Hom}(G, u_*F)$ un u-homomorphisme de F dans G (0.2). Si $\prod^n u$ est la puissance cartésienne $n^{\text{ième}}$ de u, l'homomorphisme v induit un
387 $\prod^n u$-homomorphisme $\boxtimes^n v$ de $\boxtimes^n F$ dans $\boxtimes^n G$. Par passage aux invariants, celui-ci définit

$$TS^n(v) : TS^n_{\mathrm{ext}}(F) \xrightarrow[\mathrm{Sym}^n_S(u)]{} TS^n_{\mathrm{ext}}(G).$$

On déduit de la définition 5.5.8 qu'il existe un et un seul $\mathrm{Sym}^n(u)$-homomorphisme $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(v)$, fonctoriel en (F, G, v),

$$\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(v) : \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(F) \xrightarrow[\mathrm{Sym}^n_S(u)]{} \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(G) \tag{5.5.12.0}$$

rendant commutatif le diagramme suivant (cf. (0.2) pour le sens (inhabituel) des flèches) :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(F) \arrow[r, "\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(v)", "\text{sur } \mathrm{Sym}^n_S(u)"'] & \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(G) \\
TS^n_{\mathrm{ext}}(F) \arrow[u, "\alpha", "\text{sur Id}"'] \arrow[r, "TS^n_{\mathrm{ext}(v)}", "\text{sur } \mathrm{Sym}^n_S(u)"'] & TS^n_{\mathrm{ext}}(G). \arrow[u, "\alpha", "\text{sur Id}"']
\end{tikzcd}$$

On utilisera cette flèche surtout comme « flèche de Künneth symétrique » : pour $G = u_*F$, et v la flèche canonique, la flèche $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(v)$ s'identifie à un homomorphisme de Modules

$$k^n : \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(u_*F) \longrightarrow \mathrm{Sym}^n(u)_*\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(F). \tag{5.5.12.1}$$

5.5.13. Soit la condition :
. $K \in \mathrm{Ob}\, K^{b,\geq 0}(X, \mathscr{A})$ et, pour tout point géométrique x de X, le complexe K_x est homotope à un complexe de modules plats $L_x \in \mathrm{Ob}\, C^{b,\geq 0}(\mathscr{A}_x)$.

388 Lemme 5.5.13.2. La sous-catégorie $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(X, \mathscr{A})$ de $D^b(X, \mathscr{A})$ formée des complexes de tor-dimension ≤ 0 4.1.9 est équivalente à la catégorie qui se déduit de la catégorie des complexes $K \in \mathrm{Ob}\, K^{b,\geq 0}(X, \mathscr{A})$ vérifiant (5.5.13.1) en inversant les quasi-isomorphismes. Cette construction peut se faire indifféremment par calcul de fractions à gauche ou à droite.

Soit P la sous-catégorie de $K^-(X, \mathscr{A})$ formée des complexes point par point homotopes à un complexe de modules plats. On sait (Verdier [11, I 2.4.2]) que $D^-(X, \mathscr{A})$ se déduit de P en inversant les quasi-isomorphismes, par calcul de fractions à droite ou à gauche. On applique alors 5.5.4.1 à l'inclusion de $K^{b,\geq 0}(X, \mathscr{A}) \cap P$ dans P. En effet, si K est de tor-dimension ≤ 0, et point par point homotope à des complexes de modules plats L_x, alors $\tau_{\geq 0}(K)$ est point par point homotope aux $\tau_{\geq 0}(L_x)$, et ceux-ci sont encore des complexes de modules plats, de sorte que $\tau_{\geq 0}(K)$ vérifie 5.5.13.1.

5.5.14. D'après 5.5.6.1, (5.5.7.2) ou (5.5.8.1) et 5.5.2.4, tout quasi-isomorphisme $v : K' \to K$ entre complexes vérifiant (5.5.13.1) induit des quasi-isomorphismes

$$TS^k(v) : TS^k_{\mathrm{ext}}(K') \xrightarrow{\approx} TS^k_{\mathrm{ext}}(K)$$
$$\Gamma^k(v) : \Gamma^k_{\mathrm{ext}}(K') \xrightarrow{\approx} \Gamma^k_{\mathrm{ext}}(K).$$

Il en résulte que les foncteurs Γ^k et TS^k sont dérivables (5.5.5) sur la sous-catégorie $D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(X,\mathscr{A})$ de $D^b(X,\mathscr{A})$, et que les complexes vérifiant 5.5.13.1 sont déployés à gauche pour ces foncteurs. D'après 5.5.2.4, Γ^k et TS^k induisent des foncteurs 389

(5.5.14.1) $$LTS^k : D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(X,\mathscr{A}) \longrightarrow D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(\mathrm{Sym}^k_S(X),\mathscr{A})$$

(5.5.14.2) $$L\Gamma^k : D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(X,\mathscr{A}) \longrightarrow D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(\mathrm{Sym}^k_S(X),\mathscr{A}).$$

De plus, le morphisme canonique α (5.5.9) induit d'après 5.5.9 (i) un isomorphisme entre les foncteurs (5.5.14.1) et (5.5.14.2)

(5.5.14.3) $$\alpha : L\Gamma^k \xrightarrow{\sim} LTS^k.$$

. Les isomorphismes de 5.5.9 (iv) (v) (vi) (vii) passent à la catégorie dérivée et définissent des isomorphismes :

(iv') Pour $\mathscr{A}'$ une $\mathscr{A}$-algèbre, on a

$$L\Gamma^k_{\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}}(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{A}' \simeq L\Gamma^k_{\mathrm{ext}_{\mathscr{A}'}}(K \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathscr{A}}{\otimes}} \mathscr{A}').$$

(v') Pour tout changement de base $g : S' \to S$, on a

$$\mathrm{Sym}^k_g(g')^* L\Gamma^k_{\mathrm{ext}} K \simeq L\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(g'^* K).$$

(vi') Pour tout morphisme radiciel $i : X' \to X$, on a

$$\mathrm{Sym}^k_S(i)^* L\Gamma^k_{\mathrm{ext}} K \simeq L\Gamma^k_{\mathrm{ext}} i^* K.$$

(vii') Pour $j : X' \to X$ une immersion, on a :

$$\mathrm{Sym}^k_S(j)_! L\Gamma^k_{\mathrm{ext}} \simeq L\Gamma^k_{\mathrm{ext}} j_!.$$

5.5.15. Soit une suite exacte de complexes plats de $C^{\ge 0}(X,\mathscr{A})$,

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0,$$

et appliquons le foncteur Γ^k_{ext} (5.5.3). On trouve (comme en 5.5.11) que le Module semi-simplicial $\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(N^{-1}K)$ sur $\mathrm{Sym}^k_S(X)$ admet une filtration dont les quotients successifs 390 sont les Modules semi-simpliciaux $\Gamma^{k'}_{\mathrm{ext}}(N^{-1}K') \vee \Gamma^{k''}_{\mathrm{ext}}(N^{-1}K'')$ $(k'+k''=k)$.

Passant à la catégorie dérivée on trouve que $L\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(K)$ est représenté par un complexe filtré dont les quotients successifs représentent les objets $L\Gamma^i_{\mathrm{ext}}(K') \overset{\mathbf{L}}{\vee} L\Gamma^{k-i}_{\mathrm{ext}}(K'')$ de la catégorie dérivée (appliquer 5.5.2.4 et le théorème de Eilenberg-Zilber-Cartier (isomorphisme dans $\mathscr{K}$ d'un objet semi-simplicial double et de sa diagonale : Dold-Puppe [1, 2.9 p. 213]).

Dans la catégorie dérivée, cette construction peut déjà se faire à partir d'une suite exacte de complexes vérifiant 5.5.13.1.

* En termes plus intrinsèques, soit Δ un « vrai triangle » d'objets de $D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(X,\mathscr{A})$, i.e. un objet de la « catégorie dérivée filtrée » avec $\mathrm{Gr}^i(\Delta) = 0$ pour $i \neq 0, 1$ et $\mathrm{Gr}^i(\Delta) \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\le 0}(X,\mathscr{A})$ (Deligne, in Appendice à Verdier [12], ou 2.5.1, 2.5.2).

La construction précédente fournit alors un objet $L\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(\Delta)$ de la catégorie dérivée filtrée de $\mathrm{Sym}^k_S(X)$, des isomorphismes

$$\mathrm{Gr}^i(L\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(\Delta)) \simeq L\Gamma^i_{\mathrm{ext}}(\mathrm{Gr}^1(\Delta)) \overset{\mathbf{L}}{\vee} L\Gamma^{k-i}_{\mathrm{ext}}(\mathrm{Gr}^0(\Delta))$$

et, désignant par $|\quad|$ le complexe sous-jacent à un complexe filtré, un isomorphisme

$$|L\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(\Delta)| \simeq L\Gamma^k_{\mathrm{ext}}(|\Delta|).{}_*$$

LEMME 5.5.16. Soit N un entier. La catégorie $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(X,\mathscr{A})$ se déduit de la catégorie des complexes $K \in \operatorname{Ob} K^{b,\geq 0}(X,\mathscr{A})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessous en inversant les quasi-isomorphismes :

391 (i) condition (5.5.13.1).

(ii) Le complexe K est déployé pour tout foncteur image directe de dimension cohomologique $\leq N$, relatif à un isomorphisme de topos $f : \widetilde{X}_{\mathrm{et}} \to T$.

Qu'il y ait un calcul des fractions à droite résulte de 5.5.13 et du fait que, via les résolutions flasques canoniques tronquées (4.2.9), tout complexe K vérifiant (i) s'envoie dans un complexe vérifiant (i) et (ii).

5.5.17. Soit un morphisme de S-schémas $u : X \to Y$. On suppose que $\operatorname{Sym}^n_S(X)$ et $\operatorname{Sym}^n_S(Y)$ existent, qu'il existe un entier N tel que le foncteur u_* soit de dimension $\leq N$ sur la catégorie des $\mathscr{A}$-Modules, et que le foncteur Ru_* transforme complexes bornés de tor-dimension ≤ 0 en complexes de tor-dimension ≤ 0. Ces deux dernières conditions sont automatiques si u est propre, $\mathscr{A}$ de torsion et Y cohérent (i.e. quasi-compact, quasi-séparé) (5.2.8.1, 5.2.10).[72]

Soit $K \in \operatorname{Ob} K^{b,\geq 0}(X,\mathscr{A})$ un complexe vérifiant les conditions (i) et (ii) de 5.5.16, avec N comme ci-dessus. D'après 5.5.14, la flèche

$$\beta : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K) \xrightarrow{\sim} \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K)$$

est un quasi-isomorphisme. De même, la flèche

$$\gamma : u_*K \xrightarrow{\sim} Ru_*K$$

est un quasi-isomorphisme.

392 On définit la flèche de Künneth symétrique de $L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}Ru_*(K)$ dans $R\operatorname{Sym}^n(u)_*L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K)$ comme le composé

$$\begin{aligned}(5.5.17.1)\quad k^n : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}Ru_*K \underset{\gamma}{\xleftarrow{\sim}} L\Gamma^n u_*K \to \Gamma^n_{\mathrm{ext}}u_*K \xrightarrow[5.5.12.1]{} \operatorname{Sym}^n_S(u)_*\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K)\\ \longrightarrow R\operatorname{Sym}^n_S(u)_*\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K) \underset{\beta}{\xleftarrow{\sim}} R\operatorname{Sym}^n_S(u)_*L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K).\end{aligned}$$

Il résulte de 5.5.16 que les morphismes (5.5.17.1) définissent un morphisme entre foncteurs de $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(X,\mathscr{A})$ dans $D^+(\operatorname{Sym}^n_S(Y),\mathscr{A})$

$$(5.5.17.2)\qquad k^n : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}Ru_* \longrightarrow R\operatorname{Sym}^n_S u_*L\Gamma^n_{\mathrm{ext}},$$

appelé encore morphisme de Künneth symétrique.

Ce morphisme est caractérisé par la propriété 5.5.18 ci-dessous.

. Soient S, X, Y et u comme plus haut, $K \in \operatorname{Ob} C^{b,\geq 0}(X,\mathscr{A})$ un complexe de tor-dimension ≤ 0, $K_1 \in \operatorname{Ob} C^{b,\geq 0}(Y,\mathscr{A})$ et $K_2 \in \operatorname{Ob} C^b(\operatorname{Sym}^n_S(X),\mathscr{A})$. Soit v un u-homomorphisme (0.2) de K dans K_1, et soit t un homomorphisme (au sens ordinaire, comme tous ceux qui suivent) de $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K)$ dans K_2. On dispose de morphismes

a) $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(v) : \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K_1) \to \operatorname{Sym}^n_S(u)_*\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K)$ (5.5.12.0)

b) $\operatorname{Sym}^n_S(u)_*(t) : \operatorname{Sym}^n_S(u)_*\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K) \to \operatorname{Sym}^n_S(u)_*K_2$,

de composé

$$\varphi' : \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K_1) \longrightarrow \operatorname{Sym}^n_S(u)_*K_2,$$

[72] N.D.E. : la cohérence de Y peut être remplacée par la condition plus faible que la dimension des fibres de u est bornée.

définissant, par composition

$$\varphi : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K_1) \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}^n(u)_* K_2.$$

De plus, v et t induisent : **393**

$$\begin{cases} v' : K_1 \longrightarrow Ru_* K \\ t' : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K \longrightarrow K_2. \end{cases}$$

On a alors :

Proposition 5.5.18. Sous les hypothèses 5.5.17.3, le diagramme suivant est commutatif dans $D^+(\mathrm{Sym}_S(Y), \mathscr{A})$:

$$\begin{tikzcd}
L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_* K \arrow[r, "k^n"', "\text{(Künneth symétrique)}"'] \arrow[r, "k^n"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K \arrow[d, "R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_*(t')"'] \\
L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K_1 \arrow[u, "L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(v')"] \arrow[r, "\varphi"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_* K_2.
\end{tikzcd}$$

La démonstration est toute pareille à celle de 5.4.1.5 et laissée au lecteur.

5.5.19. On suppose dorénavant $\mathscr{A}$ de torsion. Soit $u : X \to Y$ un morphisme compactifiable de S-schémas :

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X} \arrow[dr, "\overline{u}"] & \\
X \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

On suppose que $\mathrm{Sym}^n_S(X)$, $\mathrm{Sym}^n_S(\overline{X})$ et $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ existent. Pour tout Module F sur X, **394**
on a alors

(5.5.19.1) $$\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(j_! F) \simeq \mathrm{Sym}^n_S(j)_! \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(F),$$

et cet isomorphisme passe trivialement aux catégories dérivées (5.5.14.4 (vii')). On définit le morphisme de Künneth symétrique entre foncteurs de $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(X, \mathscr{A})$ dans $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(\mathrm{Sym}^n_S(Y), \mathscr{A})$[73]

(5.5.19.2) $$k^n_u \quad \text{ou} \quad k^n : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}$$

comme étant le composé

$$\begin{aligned} L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! \overset{\mathrm{dfn}}{\simeq} L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} R\overline{u}_* j_! &\xrightarrow{(5.5.17.2)} R\,\mathrm{Sym}^n_S(\overline{u})_* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}\,j!} \\ &\xrightarrow[(5.5.14.4\ (\mathrm{vii'}))]{\sim} R\,\mathrm{Sym}^n_s(\overline{u})_* \,\mathrm{Sym}^n_S(j)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \\ &\to R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \end{aligned}$$

[73] N.D.E. : Comment montrer que $\mathrm{Sym}_S(u)$ est de type fini en général ? Cette condition est nécessaire pour que $R\,\mathrm{Sym}_S(u)_!$ soit défini.

5.5.20. On laisse au lecteur le soin de faire les vérifications suivantes, faciles en principe en utilisant 5.5.18.

. (Caractère intrinsèque). Le morphisme (5.5.19.2) est indépendant du choix de la compactification $\bar{u}$ de u.

. (Transitivité). Soit un diagramme de S-schémas

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z,$$

395 avec u et v quasi-projectifs ; on suppose que $\mathrm{Sym}^n_S(Z)$ existe (donc aussi $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ et $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ (SGA 1 V 1.7, EGA II 4.5.4)). Le diagramme de foncteurs suivant est alors commutatif

$$\begin{tikzcd}
L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} R(vu)_! \arrow[rr, "k^n_{vu}"] \arrow[d, equal] & & R\,\mathrm{Sym}^n_S(vu)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \arrow[d, equal] \\
L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Rv_! Ru_! \arrow[r, "k^n_v"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(v)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! \arrow[r, "k^n_u"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(v)_! R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}.
\end{tikzcd}$$

. Le morphisme de Künneth symétrique est compatible aux changements de base ou d'espace du type 5.5.9 (iv) (v) (vi). De façon plus précise, on a les compatibilités suivantes avec les morphismes 5.5.14.4 (iv') (v') (vi').

(iv'') Pour toute $\mathscr{A}$-algèbre $\mathscr{A}'$, et tout S-morphisme quasi-projectif $u : X \to Y$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_!(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathscr{A}' \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "k^n_u"] & L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(Ru_!(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathscr{A}') \arrow[r, "\sim"] & L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_!(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathscr{A}') \arrow[d, "k^n_u"] \\
R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathscr{A}' \arrow[r, "\sim"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!(L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathscr{A}') \arrow[r, dash, "\sim"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathscr{A}')
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

396 (v'') Pour tout changement de base $g : S' \to S$, donnant lieu à un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "u'"] \arrow[dd] & & X \arrow[dr, "u"] \arrow[dd] & \\
& Y' \arrow[rr, "g''"] \arrow[dl] & & Y \arrow[dl] \\
S' \arrow[rr, "g"'] & & S &
\end{tikzcd},$$

le diagramme de foncteurs, tout analogue à (iv''), est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^n_g(g'')^* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "k^n_u"] & L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} g''^* Ru_! \arrow[r, "\sim"] & L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru'_! g'^* \arrow[d, "k^n_{u'}"] \\
\mathrm{Sym}^n_g(g'')^* R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \arrow[r, "\sim"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u')_!\, \mathrm{Sym}^n_g(g')^* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \arrow[r, dash, "\sim"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u')_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} g'^*.
\end{tikzcd}$$

(vi'') Pour tout changement de base radiciel $g : Y' \to Y$, donnant lieu à un diagramme cartésien de S-schémas

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "u'"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd}$$

le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Sym}^n_S(g)^* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "k^n_u"] & L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} g^* Ru_! \arrow[r, "\sim"] & L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru'_! g'^* \arrow[d, "k^n_{u'}"] \\ \operatorname{Sym}^n_S(g)^* R\operatorname{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \arrow[r, "\sim"] & R\operatorname{Sym}^n_S(u')_! g'^* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \arrow[r, dash, "\sim"] & R\operatorname{Sym}^n_S(u')_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} g'^* \end{tikzcd}$$

Théorème 5.5.21. (Formule de Künneth symétrique). Soient S un schéma cohérent 397
(= quasi-compact quasi-séparé) annelé par un faisceau d'anneaux commutatifs de torsion $\mathscr{A}$, à fibres des anneaux noethériens. On annèle chaque S-schéma par l'image réciproque de $\mathscr{A}$. Soit $u : X \to Y$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs. Quels que soient l'entier $n \geq 0$ et $K \in \operatorname{Ob} D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(X, \mathscr{A})$, la flèche de Künneth symétrique (5.5.17.2)

$$k^n : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! K \longrightarrow R\operatorname{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K$$

est un isomorphisme dans $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(\operatorname{Sym}^n_S(Y), \mathscr{A})$.

La démonstration de ce théorème occupera toute la suite de 5.5.

Remarque 5.5.21.1. L'hypothèse de quasi-projectivité sert seulement à assurer que u admet une compactification $\bar{u}$

$$X \xrightarrow{j} \overline{X} \xrightarrow{\bar{u}} Y$$

telle que les schémas $\operatorname{Sym}^n_S(X)$, $\operatorname{Sym}^n_S(\overline{X})$ et $\operatorname{Sym}^n_S(Y)$ existent pour tout n. Le langage des espaces algébriques devrait permettre de remplacer cette hypothèse par la seule hypothèse que u est compactifiable.

La première partie de la démonstration consiste à ramener par dévissage 5.5.21 à un 398
cas « irréductible » :

Lemme 5.5.22. Le théorème 5.5.21 est impliqué par le cas particulier suivant :

$(*)$ Pour tout corps algébriquement clos k, toute courbe projective et lisse X sur k et tout nombre premier ℓ, les flèches de Künneth symétriques (obtenues pour $Y = S = \operatorname{Spec}(k)$, $\mathscr{A} = \mathbf{Z}/\ell$, $K = \mathbf{Z}/\ell$; voir explications ci-dessous)

$$L\Gamma^n(R\Gamma(X, \mathbf{Z}/\ell)) \longrightarrow R\Gamma(\operatorname{Sym}^n_k(X), \mathbf{Z}/\ell) \tag{5.5.22.1}$$

sont des isomorphismes ($n \geq 0$).

Dans (5.5.22.1), le symbole Γ a un malencontreux double usage : dans l'expression $R\Gamma$, il désigne le foncteur « sections globales » ; dans l'expression $L\Gamma^n$, il désigne le foncteur 5.5.2.3. On utilise dans cette formule l'isomorphisme $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\mathbf{Z}/\ell) \simeq \mathbf{Z}/\ell$.

Soient donnés S, X, Y, u et $\mathscr{A}$ comme en 5.5.21.

Lemme 5.5.22.2. Soit une suite exacte de complexes dans $C^{b,\geq 0}(X, \mathscr{A})$, de tor-dimension ≤ 0 :

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0.$$

Si les flèches de Künneth k^n $(n \geq 0)$ relatives à deux des complexes K', K et K'' sont toutes des isomorphismes, alors les flèches de Künneth relatives au troisième sont aussi des isomorphismes.

399 On se ramène au cas où u est projectif, et où les complexes K', K, K'' vérifient les conditions (i) et (ii) de 5.5.16, pour N au moins égal au double de la dimension des flèches de u. Les flèches de Künneth symétriques sont alors données par (5.5.17.1).

Montrons par récurrence sur n que si pour $i \leq n$ et deux des complexes K', K, K'', les flèches k^i sont des isomorphismes, alors les flèches k^i $(i \leq n)$ sont des isomorphismes pour le troisième.

Pour le voir, on note que grâce à 5.5.15, le morphisme

$$\text{(a)} \qquad k^n : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_* K \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}^n(u)_* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K$$

peut se représenter par un morphisme de complexes filtrés

$$k'^n : K_0 \longrightarrow K_1$$

de filtration finie, ce morphisme induisant sur les quotients successifs des flèches isomorphes aux flèches composées

$$(\mathrm{b}_i) \qquad L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} Ru_* K' \overset{\mathbf{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}} Ru_* K'' \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}^n(u)_* (L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} K' \overset{\mathbf{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}} K'')$$

suivantes :

$$\begin{aligned}
L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} Ru_* K' \overset{\mathbf{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}} Ru_* K'' &\xrightarrow{k^i \overset{\mathbf{L}}{\vee} k^{n-i}} R\,\mathrm{Sym}^i(u)_* L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} K' \overset{\mathbf{L}}{\vee} R\,\mathrm{Sym}^{n-i}(u)_* L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}}(K'') \\
&\underset{\mathrm{defn}}{=} \vee_{i,n-i*}(R\,\mathrm{Sym}^i(u)_* L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} K' \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} R\,\mathrm{Sym}^{n-i}(u)_* L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}}(K'')) \\
&\xrightarrow[\sim]{5.4.3} \vee_{i,n-i*}(R\,\mathrm{Sym}^i(u) \times R\,\mathrm{Sym}^{n-i}(u))_* (L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} K' \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}} K'')
\end{aligned}$$

$$= R\,\mathrm{Sym}^n(u)_* \vee_{i,n-i*} (L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} K' \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}} K'') \overset{\mathrm{dfn}}{=} R\,\mathrm{Sym}^n(u)_* (L\Gamma^i_{\mathrm{ext}} K' \overset{\mathbf{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{\mathrm{ext}} K'').$$

400 D'après l'hypothèse de récurrence (et la formule de Künneth), ces flèches sont des quasi-isomorphismes pour $i \neq 0, n$. Deux quelconques des assertions suivantes impliquent donc la troisième : (a) est un quasi-isomorphisme ; (b_0) est un quasi-isomorphisme ; (b_n) est un quasi-isomorphisme. Il s'agit là des trois flèches qui étaient en question, C.Q.F.D.

. Supposons vraie l'assertion $(*)$ envisagée dans 5.5.22, et prouvons 5.5.21. Soient donc S, X, Y, $\mathscr{A}$, K et u comme en 5.5.21. Le problème est local sur S, qu'on peut supposer affine. Tout complexe K est extension successive de complexes de la forme $i_! i^* K$ pour i inclusion dans X d'une partie affine localement fermée. Par dévissage (5.5.22.2), on peut donc supposer K de la forme $i_! K_1$, pour une immersion $i : X_1 \to X$ de source affine. La compatibilité 5.5.20.2 permet de remplacer X par X_1, K par K_1 et de supposer donc u affine. Factorisons u comme un composé $u = u_1 \ldots u_k$ de morphismes à fibres de dimension ≤ 1. La compatibilité 5.5.20.2 montre qu'il suffit de prouver que les flèches k^n relatives aux u_i et à un quelconque complexe K sont des isomorphismes. On est ainsi ramené au cas S affine, u de dimension relative ≤ 1.

. Pour que k^n soit un isomorphisme, il suffit que ses restrictions aux flèches géométriques de $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ le soient ; la compatibilité 5.5.20.3 (v'') nous ramène donc à supposer S spectre d'un corps algébriquement clos k.

. Pour tout point rationnel y de $\mathrm{Sym}^n_k(Y)$, il existe une partie réduite finie Y' de Y 401
telle que y soit dans l'image de $\mathrm{Sym}^n_k(Y')$. La compatibilité 5.5.20.3 (vi'') nous permet donc de supposer que Y est somme d'un nombre fini de copies de $\mathrm{Spec}(k)$.

. Si $Y = \amalg Y_i$, alors tout complexe K sur X est somme de complexes concentrés sur l'un des schémas $X_i = u^{-1}(Y_i)$. Par dévissage (5.5.22.2) et d'après la compatibilité 5.5.20.3 (vi''), il suffit de prouver 5.5.21 pour chacun des morphismes $u_i : X_1 \to Y_i$. Par 5.5.22.5, ceci nous ramène au cas où

$$Y = S = \mathrm{Spec}(k),\ k \text{ algébriquement clos, } \dim X \leq 1.$$

Le faisceau $\mathscr{A}$ se réduit maintenant à un anneau noethérien A. La proposition suivante permettra de se ramener au cas où A est un corps.

Proposition 5.5.23. Soient A un anneau noethérien (commutatif), $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(A)$ un complexe borné supérieurement de A-modules et n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) K est de tor-dimension $\leq n$

(ii) Pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$ et tout $i < -n$, $H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x)) = 0$.

On a (i) $\Rightarrow$ (ii) trivialement. Supposons (ii). Pour prouver (i), nous prouverons par récurrence noethérienne sur le fermé F de $\mathrm{Spec}(A)$ que si un module N vérifie $N_x = 0$ pour $x \notin F$, alors $H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A N) = 0$ pour $i < -n$.

Soit I l'unique idéal qui définisse F tel que A/I soit réduit, et soit N_k le sous-module 402
de N annulé par I^k. On a $N = \varinjlim N_k$. Puisque les foncteurs Tor commutent aux limites inductives filtrantes, on se ramène au cas où il existe k tel que $N = N_k$, de sorte que N est extension successive de modules tués par I, et la suite exacte longue de cohomologie nous ramène au cas où N est déjà un A/I-module.

Soit η un point maximal de F, et définissons des A/I-modules M_1 et M_2 par la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \otimes k(\eta) \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0. \tag{5.5.23.1}$$

On a $(M_j)_\eta = 0$ ($j = 1, 2$). Si pour chaque fermé $G \subset F$ avec $\eta \notin G$ on désigne par $M_{j,G}$ le sous-module de M_j formé des sections de M_j à support dans G, on a

$$M_j = \varinjlim_{\eta \notin G} M_{j,G}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et un passage à la limite, on a donc

$$H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M_j) = 0 \quad \text{pour} \quad i < -n.$$

Le module $N \otimes k(\eta)$ est un vectoriel sur $k(\eta)$, donc une somme de copies de $k(\eta)$. Par hypothèse, on a

$$H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} (N \otimes k(\eta))) = 0 \quad \text{pour} \quad i < -n.$$

Si I est l'image de la flèche i de (5.5.23.1), on dispose de suites exactes

$$H^{i-1}(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} M_2) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} I) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} (N \otimes k(\eta)))$$
$$H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} M_1) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} N) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} I),$$

dont on tire que $H^i(K \overset{\mathbf{L}}{\otimes} N) = 0$ pour $i < -n$, C.Q.F.D. 403

Corollaire 5.5.24. Pour qu'une flèche $u : K \to L$ dans $D^-(A)$ soit un isomorphisme, il suffit que pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$, la flèche

$$u_x : K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A k(x) \longrightarrow L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A k(x)$$

soit un isomorphisme dans $D^-(k(x))$.

Soit M le cône (mapping cylinder) de u. Par hypothèse, on a $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A k(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$. D'après 5.5.23, on a donc $M = 0$, et u est un isomorphisme.

. Poursuivons la démonstration de 5.5.22, interrompue en 5.5.23. D'après la compatibilité 5.5.20.3 (iv'') et 5.5.24, le morphisme k^n relatif à $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\geq 0}(X, A)$ est un isomorphisme si et seulement si les morphismes k^n relatifs aux $K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A k(x) \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\geq 0}(X, k(x))$ sont des isomorphismes, pour $x \in \mathrm{Spec}(A)$. Ceci nous ramène au cas où A est un corps de caractéristique $\ell > 0$.

. La suite exacte (où C désigne un cône)

$$0 \longrightarrow K[-1] \longrightarrow CK[-1] \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

montre que les flèches k^n sont des isomorphismes pour K si et seulement si elles le sont pour $K[-1]$ (5.5.22.2).

404 . Les suites exactes

$$0 \longrightarrow \sigma_{\geq n} K \longrightarrow K \longrightarrow \sigma_{\leq n} K \longrightarrow 0$$

montrent que pour les flèches de Künneth soient un isomorphisme, pour K complexe plat, il suffit qu'elles le soient pour les composantes de K, placées en degré 0 (5.5.22.2 et 5.5.25.2).

. Soit donc K un faisceau de A-vectoriels. Ce faisceau est limite inductive de faisceaux constructibles (IX 2.7.2), automatiquement plats puisque A est un corps, et par passage à la limite, on se ramène au cas K constructible, réduit au degré zéro.

. Si un complexe K est facteur direct d'un complexe L, le morphisme k^n relatif à K est facteur direct du morphisme k^n relatif à L, donc un isomorphisme si ce dernier en est un. La méthode de la trace (IX 5.8) s'applique donc et il suffit de traiter le cas où F est de la forme $j_! A_{X'}$, pour $j : X' \to X$ quasi-fini. La compatibilité 5.5.20.2 permet de remplacer X par X', d'où la réduction

$$X \text{ est de dimension} \leq 1 \text{ et } K = A_X.$$

. On peut supposer X réduit. Si $j : U \to X$ est l'ouvert de lissité de X, de complément $i : F \to X$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^* A_X \longrightarrow A_X \longrightarrow i_! i^* A_X \longrightarrow 0$$

nous ramène par dévissage aux cas où X est soit une courbe lisse, soit un ensemble fini. De plus, la formule

$$A_X = A \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell} (\mathbf{Z}/\ell)_X$$

ramène par 5.5.20.3 (iv'') au cas où $A_X = \mathbf{Z}/\ell$.

405 Si X est une courbe, on plonge X dans la courbe projective et lisse correspondante, et un nouveau dévissage ramène à l'un des deux cas suivants

(i) X est une courbe projective et lisse, $Y = S = \mathrm{Spec}(k)$ avec k algébriquement clos, $\mathscr{A} = \mathbf{Z}/\ell$, $K = \mathbf{Z}/\ell$.

(ii) X est une somme d'un nombre fini de copies de $\mathrm{Spec}(k)$, $Y = S = \mathrm{Spec}(k)$ (k algébriquement clos), $\mathscr{A} = \mathbf{Z}/\ell$, $K = \mathbf{Z}/\ell$.

Un ultime dévissage de $(\mathbf{Z}/\ell)_X$ en les faisceaux $(\mathbf{Z}/\ell)_{X'}$, pour X' composante connexe de X, ramène dans (i) et (ii) à supposer X connexe. Le cas (ii) est alors trivial. Ceci prouve 5.5.22.

Lemme 5.5.26. Le théorème 5.5.21 est conséquence des deux cas particuliers suivants de l'assertion $(*)$ de 5.5.22 :

Cas 1. On suppose que $k = \mathbf{C}$.
Cas 2. On suppose que k est de caractéristique $p > 0$ et que $\ell = p$.

Avec les notations de 5.5.22, désignons par p la caractéristique de k. Si $p = 0$, le principe de Lefschetz (s'appuyant ici sur la compatibilité 5.5.20.3 (v''), et sur XII 5.4) permet de se ramener au cas où $k = \mathbf{C}$.

Reste à traiter le cas où $p > 0$ et où $\ell \neq p$. La courbe X se remonte en une courbe X' sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt sur k (SGA 1 III 7.4). Posons $S = \operatorname{Spec}(W(k))$, soit le diagramme

$$\begin{tikzcd} X'_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] & X' \arrow[d, "f'"] & X \arrow[l] \arrow[d, "f"] \\ \eta \arrow[r] & S & \operatorname{Spec}(k), \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et soient f_n, f'_n et $f_{\eta n}$ les projections respectives de $\operatorname{Sym}^n_k(X)$, $\operatorname{Sym}^n_S(X')$ et $\operatorname{Sym}^n_\eta(X'_\eta)$ **406**
sur $\operatorname{Spec}(k)$, S et η. On sait que f'_n est un morphisme projectif et lisse (la projectivité est évidente ; pour la lissité, le plus simple est de se ramener au cas où $X' = \mathbf{P}^1_S$, auquel cas $\operatorname{Sym}^n_S(X') \simeq \mathbf{P}^n$ comme il résulte du théorème des fonctions symétriques élémentaires). D'après le théorème de spécialisation XVI 2.2, les faisceaux $R^i f'_{n*}(\mathbf{Z}/\ell)$ sont localement constants sur S. Il en est de même des faisceaux $L^i\Gamma^n(Rf'_*\mathbf{Z}/\ell)$. Pour vérifier que la flèche de (5.5.22.1) relative à X sur k est un isomorphisme, il suffit donc d'après 5.5.20.3 (v'') de prouver l'énoncé analogue pour la fibre générique géométrique $X_{\overline{\eta}}$ de X sur S. Le corps $k(\overline{\eta})$ est de caractéristique 0, et, vu la première réduction, ceci prouve 5.5.26.

Pour prouver 5.5.21 dans les deux cas particuliers 5.5.26, on comparera le morphisme de Künneth symétrique d'une part à son analogue transcendant (5.5.27 et 5.5.28) d'autre part à son analogue cohérent (5.5.29 à 5.5.37).

5.5.27. Si $p : X \to S$ est une application continue entre espaces topologiques, avec S annelé par un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathscr{A}$, les constructions 5.5.7, 5.5.8 s'appliquent telles quelles pour définir un foncteur Γ^n_{ext} des modules sur X dans les modules sur $\operatorname{Sym}^n_S(X) = X^n/\mathfrak{S}_n$. Les sorites 5.5.7 à 5.5.18 se transposent. De même, si S, X et Y sont des espaces topologiques localement compacts séparés

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} ,$$

et si les fibres de u sont de dimension cohomologique bornée, le sorite 5.5.19, 5.5.20 du **407**
morphisme de Künneth symétrique en cohomologie à support propre se transpose.

Si $p : X \to S$ est un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbf{C}$, les foncteurs Γ^n et $L\Gamma^n$ commutent aux foncteurs « passage au transcendant ». Enfin, si $X, Y, S, \mathscr{A}, K$ sont comme en 5.5.21, avec S séparé de type fini sur $\mathbf{C}$, et si on désigne génériquement par ϵ

les morphismes de sites de type $\epsilon : X_{\mathrm{cl}} \to X_{\mathrm{et}}$, le diagramme suivant est commutatif :

(5.5.27.1)
$$\begin{tikzcd} \epsilon^* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_! K \arrow[r, "k^n"] \arrow[d] & \epsilon^* R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K \arrow[d] \\ L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru^{\mathrm{an}}_! \epsilon^* K \arrow[r, "k^{n\ \mathrm{an}}"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u^{\mathrm{an}})_! L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} \epsilon^* K. \end{tikzcd}$$

5.5.28. D'après la compatibilité (5.5.27.1), et un cas élémentaire du théorème de comparaison (XI 4.4 ou XVI 4.1), pour traiter le cas 1 de 5.5.26, il suffit de vérifier que si X est une courbe projective non singulière complexe, alors l'analogue topologique de (5.5.22.1) est un isomorphisme.

L'espace topologique X^{an} est triangulable (ce fait est ici trivial, car X est un revêtement ramifié de la sphère de Riemann). L'analogue topologique du lemme de dévissage 5.5.22.2 nous ramène alors à prouver

408 (∗) Si D est un simplexe fermé (de dimension 0, 1 ou 2), la flèche de Künneth symétrique topologique

(5.5.28.1)
$$k^n : L\Gamma^n R\Gamma(D, \mathbf{Z}/\ell) \longrightarrow R\Gamma(\mathrm{Sym}^n(D), \mathbf{Z}/\ell)$$

est un isomorphisme.

On a
$$R\Gamma(D, \mathbf{Z}/\ell) = \mathbf{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0,$$
et donc
$$L\Gamma^n R\Gamma(D, \mathbf{Z}/\ell) = \mathbf{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0.$$

D'autre part, $\mathrm{Sym}^n(D)$ est contractible, et on a encore
$$R\Gamma(\mathrm{Sym}^n(D), \mathbf{Z}/\ell) = \mathbf{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0.$$

Les H^i des deux membres de (5.5.28.1) sont donc nuls, et la flèche induite sur le H^0 s'identifie à l'identité de $\mathbf{Z}/\ell$.

5.5.29. Pour l'application que nous avons en vue, il y a intérêt à regarder un faisceau quasi-cohérent sur un schéma X comme étant un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}$-modules sur le site étale de X.

Soit $p : X \to S$ un morphisme quasi-projectif de schémas (cf 5.5.21.1 [73]). Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules sur X_{et}, alors

a) On désigne par $\bigotimes^n \mathcal{F}$ le faisceau de modules sur $(X/S)^n_{\mathrm{et}}$ produit tensoriel des $\mathcal{O}_{(X/S)^n}$-modules images réciproques de $\mathcal{F}$ sur $(X/S)^n_{\mathrm{et}}$;

b) le faisceau $\bigotimes^n \mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{G}_n$-équivariant. Par passage aux invariants, il définit un faisceau $TS^n_{\mathrm{ext}}(\mathcal{F})$ sur $\mathrm{Sym}^n_S(X)$: si σ est la projection de $(X/S)^n$ sur $\mathrm{Sym}^n_S(X)$, on a

(5.5.29.1)
$$TS^n_{\mathrm{ext}}(\mathcal{F}) = (\sigma_* \bigotimes^n \mathcal{F})^{\mathfrak{S}_n}.$$

409 Supposons que p soit plat ; comme en 5.5.8, on définit alors le foncteur Γ^m_{ext} comme étant le $0^{\text{ième}}$ dérivé gauche du foncteur TS^n_{ext}. Avec les notations de 5.5.2.5 et 5.5.8, si
$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

[73] Tout ce qui suit, y inclus 5.5.34, est valable en supposant seulement que X et Y admettent des faisceaux inversibles amples relativement à S (sans supposer X et Y de type fini sur S).

est une présentation plate de $\mathscr{F}$, alors la suite

$$TS^n_{\mathrm{ext}}(P'_1) \underset{j_1}{\overset{j_0}{\rightrightarrows}} TS^n_{\mathrm{ext}}(P_0) \longrightarrow \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\mathscr{F})$$

est exacte. Si x est un point géométrique de $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ comme en 5.5.7.1, on a (cf. (5.5.8.1))

(5.5.29.2) $$\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\mathscr{F})_x = \mathscr{O}_x \otimes_C \Big(\bigotimes_1^{\ell} \Gamma^{n_i}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}_{y_i})\Big),$$

avec $$C = \bigotimes_1^{\ell} \mathrm{Sym}^{n_i}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_{y_i}).$$

Il suffit en effet de vérifier cette formule dans le cas trivial où les fibres de $\mathscr{F}$ sont libres. On notera que $\mathscr{O}_x$ est plat sur C, étant l'hensélisé strict de C au point fermé image de x.

5.5.30. Supposons X et S affines, p plat et $\mathscr{F}$ quasi-cohérent. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et soit $F = H^0(X, \mathscr{F})$, de sorte que $\mathscr{F}$ est le faisceau $F^{\sim}$ défini par le B-module F. On lit alors sur (5.5.29.1) que

$$TS^n_{\mathrm{ext}}(\mathscr{F}) = TS^n_A(F)^{\sim},$$

et, par dérivation, on a donc

(5.5.30.1) $$\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\mathscr{F}) = \Gamma^n_A(F)^{\sim}.$$

Le foncteur Γ^n_{ext} apparaît donc comme un foncteur Γ^n « relatif à A », ce que (5.5.29.2) **410**
exprimait déjà sous forme locale.

5.5.31. On désignera par $D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}(X, \mathscr{O}_X)$ la sous-catégorie de $D^b(X, \mathscr{O}_X)$ formé des complexes de $\mathscr{O}_X$-modules qui, en tant que complexes de $p^{-1}(\mathscr{O}_S)$-modules sont de tor-dimension ≤ 0.

Soit la condition

. $K \in \mathrm{Ob}\, C^{b,\geq 0}(X, \mathscr{O}_X)$ et, en chaque point géométrique x de X, K_x est homotope à un complexe de $\mathscr{O}_{X,x}$-modules, à degrés positifs, plat sur $\mathscr{O}_{S,p(x)}$.

Le morphisme p étant plat, de sorte qu'il y a « assez » de $\mathscr{O}_X$-modules plats sur S, on vérifie comme en 5.5.13.2 que $D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}(X, \mathscr{O}_X)$ se déduit de la catégorie des complexes $K \in \mathrm{Ob}\, K^{b,\geq 0}(X, \mathscr{O}_X)$ vérifiant (5.5.31.1) en inversant les quasi-isomorphismes.

On lit sur (5.5.29.2) et 5.5.6.1 que si $u : K \to L$ est un quasi-isomorphisme entre complexes vérifiant (5.5.31.1), alors $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(u)$ (au sens de Dold-Puppe) est encore un quasi-isomorphisme. Le foncteur Γ^n_{ext} se dérive dès lors en

(5.5.31.2) $$L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} : D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}(\mathrm{Sym}^n_S(X), \mathscr{O}_{\mathrm{Sym}^n_S(X)})$$

5.5.32. On désignera par $D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}_{\mathrm{qcoh}}(X, \mathscr{O}_X)$ la sous-catégorie de $D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}(X, \mathscr{O}_X)$ formée des complexes à cohomologie quasi-cohérente.

Des arguments standards permettent, comme en 5.5.17, de définir une flèche de Kün- **411**
neth symétrique du type suivant :

Soit $u : X \to Y$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs et plats sur S ; pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}_{\mathrm{qcoh}}(X, \mathscr{O}_X)$, la flèche de Künneth symétrique k^n dans $D^{b,\mathrm{tor}_S\leq 0}_{\mathrm{qcoh}}(\mathrm{Sym}^n_S(Y), \mathscr{O})$ est une flèche

(5.5.32.1) $$k^n : L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} Ru_* K \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}^n_S\, u_* L\Gamma^n_{\mathrm{ext}} K.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les propriétés formelles de (5.5.32.1) qui seront utilisées, notamment la suivante :

Lemme 5.5.33. Si S est de caractéristique $p > 0$, et si $u : X \to S$ est propre et plat, le diagramme de flèches de Künneth symétriques (5.5.17.2) et (5.5.32.1) est commutatif ($Y = S$, $K = \mathbf{Z}/p$ ou $\mathscr{O}_X$) :

$$\begin{tikzcd} L\Gamma^n_{\mathbf{Z}/p} Ru_*(\mathbf{Z}/p) \arrow[r, "k^n"] \arrow[d] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_*(\mathbf{Z}/p) \arrow[d] \\ L\Gamma^n_{\mathscr{O}} Ru_*(\mathscr{O}) \arrow[r, "k^n"] & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_*\mathscr{O} \end{tikzcd} .$$

Proposition 5.5.34. Sous les hypothèses de 5.5.32, la flèche de Künneth symétrique (5.5.32.1) est un isomorphisme.

a) La question est locale sur S, qu'on peut supposer affine.
b) Pour tout point x de $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$, il existe un ouvert affine Y_1 de Y tel que x soit dans $\mathrm{Sym}^n_S(Y_1)$. Par localisation, on peut donc supposer Y affine.
412 c) Tout complexe K du type considéré peut se représenter par un complexe K_0 de modules quasi-cohérents sur S, nul en degrés < 0. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement affine de X, alors K admet une résolution finie par des sommes de complexes de la forme $j_* j^* K$ pour j inclusion d'un ouvert affine (complexe de Čech alterné). Utilisant l'analogue quasi-cohérent du lemme de dévissage 5.5.22.2, ceci nous ramène au cas où il existe un ouvert affine $j : X_1 \hookrightarrow X$ de X et $K_1 \in D^{b,\mathrm{tor}_S \leq 0}_{\mathrm{qcoh}}(X_1, \mathscr{O})$ tel que $K = Rj_* K_1$.
d) Vu l'analogue quasi-cohérent de la transitivité 5.5.20.2, il suffit de prouver 5.5.34 pour uj et j. La réduction b), appliquée à j, nous ramène enfin au cas où X, Y et S sont affines. On peut alors représenter K par un complexe $K_2 \in C^{b,\geq 0}(X, \mathscr{O}_X)$ à composantes S-plates et quasi-cohérentes (4.1.9). Les foncteurs Ru_* et $L\Gamma^n$ se calculent alors sans plus devoir résoudre K_2, et il reste à noter que, d'après (5.5.30.1), pour $\mathscr{F}$ quasi-cohérent sur X, on a
$$\Gamma^n_{\mathrm{ext}} u_* \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_S(u)_* \Gamma^n_{\mathrm{ext}} \mathscr{F},$$
les deux membres s'identifiant à
$$\Gamma^n_A(F)^\sim \quad \text{pour} \quad \mathscr{F} = F^\sim,$$

C.Q.F.D.

5.5.35. Traitons le cas 2 de 5.5.26. Avec les notations de 5.5.22, le diagramme suivant est commutatif (5.5.33) :

$$\begin{tikzcd} L\Gamma^n(R\Gamma(X, \mathbf{Z}/p)) \arrow[r, "k^n", "1"'] \arrow[d] & R\Gamma(\mathrm{Sym}^n_k(X), \mathbf{Z}/p) \arrow[d] \\ L\Gamma^n(R\Gamma(X, \mathscr{O})) \arrow[r, "k^n", "2"'] & R\Gamma(\mathrm{Sym}^n_k(X), \mathscr{O}), \end{tikzcd} \tag{5.5.35.1}$$

413 et d'après 5.5.34, la flèche ② est un isomorphisme. L'endomorphisme de Frobenius $F : x \to x^p$ de $\mathscr{O}$ agit p-linéairement sur $R\Gamma(X, \mathscr{O})$ et sur $R\Gamma(\mathrm{Sym}^n_k(X), \mathscr{O})$. Il agit donc aussi p-linéairement sur $L\Gamma^n(R\Gamma(X, \mathscr{O}))$. On vérifie que k^n et F commutent.

La théorie d'Artin-Schreier nous fournit des suites exactes
$$0 \longrightarrow H^i(X, \mathbf{Z}/p) \longrightarrow H^i(X, \mathscr{O}) \xrightarrow{F-I} H^i(X, \mathscr{O}) \longrightarrow 0,$$
et de même pour $\mathrm{Sym}^n_S(X)$. Pour déduire que ① est un isomorphisme du fait que ② en soit un, il nous reste à vérifier le

Lemme 5.5.36. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $K \in C^{\geq 0}(\mathbf{Z}/p)$ un complexe de $\mathbf{Z}/p$-vectoriels de dimension finie, $L \in C^{\geq 0}(k)$ un complexe de k-vectoriels de dimension finie, F un endomorphisme p-linéaire de L et $u : K \to L$ un morphisme. On suppose que $H^*(Fu) = H^*(u)$, et que les suites

$$0 \longrightarrow H^i(K) \longrightarrow H^i(L) \xrightarrow{F-I} H^i(L) \longrightarrow 0$$

sont exactes. Alors, les suites 414

$$0 \longrightarrow H^i(\Gamma^n K) \longrightarrow H^i(\Gamma^n L) \xrightarrow{F-I} H^i(\Gamma^n L) \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Puisque $H^*(Fu) = H^*(u)$ et que $\mathbf{Z}/p$ est un corps, il existe une homotopie

$$Fu - u = dH + Hd.$$

Le corps k étant parfait, on peut écrire

$$FH_0 - H_0 = H.$$

Remplaçant u par $u - (dH_0 + H_0 d)$, on peut supposer que $Fu = u$.

Le foncteur S qui à chaque k-vectoriel V muni d'un endomorphisme p-linéaire F associe le $\mathbf{Z}/p$-vectoriel V^S des $v \in V$ tels que $Fv = v$ est un foncteur exact. L'hypothèse signifie donc que morphisme

$$K \longrightarrow L^S$$

est un quasi-isomorphisme. Reste à prouver que le foncteur S commute au foncteur Γ^n. Ce point résulte aisément du lemme bien connu suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 5.5.37. Un vectoriel de dimension finie V sur un corps parfait k, muni d'un endomorphisme p-linéaire F, admet une et une seule décomposition

$$V = V_0 + V_n$$

avec $V^S \otimes k \xrightarrow{\sim} V_0$, $F(V_n) \subset V_n$ et $F|V_n$ nilpotent.

Ceci achève la démonstration de 5.5.21.

6. Le foncteur $f_!$ 415

On se propose de donner une construction directe du foncteur $f_!$ de 5.1.11. On utilisera ensuite cette construction pour définir le « morphisme trace » (6.2.3) pour les morphismes plats quasi-finis de présentation finie.

6.1. Nouvelle construction du foncteur $f_!$. Soit $f : X \to S$ un morphisme localement de type fini. Une partie P de X est dite propre sur S si elle est l'image d'un sous-schéma de X propre sur S.

Proposition 6.1.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme localement de type fini et quasi-séparé.

(i) Une partie de X propre sur S est localement fermée, et est fermée si f est séparé.
(ii) Si f est séparé, la réunion de deux parties de X propres sur S est propre sur S.
(iii) Pour tout S-schéma U, désignons par $\Phi_X(U)$ l'ensemble des parties de $U \times_S X$ propres sur U. Le foncteur Φ_X est un faisceau pour la topologie fpqc. Si f est séparé, Φ_X est un faisceau d'ensembles ordonnés filtrants pour la relation d'inclusion.

Les assertions (i) et (ii) sont triviales, et la seconde assertion de (iii) résulte de (ii). **416**
Le foncteur $U \mapsto \mathscr{P}(U \times_S X)$ est un faisceau pour toute topologie pour laquelle les recouvrements soient surjectifs. Il résulte de EGA IV 2.3.14 et EGA IV 2.7.1 (vii) que Φ_X en est un sous-faisceau.

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau étale d'ensembles pointés sur un schéma X, rappelons (IV 8.5.2) que le support d'une section s de $\mathscr{F}$ est le complémentaire du plus grand ouvert où $s = 0$, 0 désignant la section marquée.

Définition 6.1.2. Soient $f : X \to S$ un morphisme localement de type fini et séparé, et $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles pointés sur X. On désigne par $f_!\mathscr{F}$ le sous-faisceau de $f_*\mathscr{F}$ dont les sections sur U (étale sur S) sont les sections de $\mathscr{F}$ sur $U \times_S X$ à support propre sur U.

Il résulte de 6.1.1 que $f_!\mathscr{F}$ est effectivement un faisceau.

On vérifie aisément que :

Lemme 6.1.3. Si f est le composé gh de deux morphismes séparés localement de type fini, il existe un et un seul isomorphisme de foncteur $f_! \simeq g_!h_!$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_! \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, hook] & g_!h_! \arrow[d, hook] \\ f_* \arrow[r, equal] & g_*h_*. \end{tikzcd}$$

417 Si f est une immersion ouverte (resp. un morphisme propre) le foncteur $f_!$ est le foncteur de prolongement par zéro (resp. le foncteur f_*). D'après 6.1.3, les définitions 6.1.2 et 5.1.11 coïncident donc dans leur domaine commun de validité.

Les propriétés du foncteur $f_!$ vérifiées dans le § 5 restent valable dans le cas plus général 6.1.2.

Proposition 6.1.4. Soit $f : X \to S$ un morphisme séparé localement de type fini.

(i) Le foncteur $f_!$ est exact à gauche (i.e. commute aux limites projectives finies) et commute aux limites inductives filtrantes.

(ii) Si f est quasi-fini, le foncteur $f_!$ est un foncteur exact de la catégorie des faisceaux abéliens sur X dans celle des faisceaux abéliens sur S.

(iii) Pour tout diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

il existe un isomorphisme de changement de base rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} g^*f_! \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, hook] & f'_!g'^* \arrow[d, hook] \\ g^*f_* \arrow[r] & f'_*g'^*, \end{tikzcd}$$

dans lequel la seconde flèche horizontale est la flèche de changement de base XII 4.1.

Preuve. Quel que soit $U \in \operatorname{Ob} S_{\text{et}}$, on a 418

$$f_!\mathscr{F}(U) = \varinjlim_{P\in\Phi(U)} \Gamma_P(\mathscr{F}),$$

et pour U quasi-compact quasi-séparé, le foncteur $\mathscr{F} \mapsto f_!\mathscr{F}(U)$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives filtrantes, comme limite inductive filtrante (6.1.1 (iii)) de foncteurs ayant ces propriétés.

Ceci prouve (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (iii) (prendre comme changements de bases les points géométriques de S).

L'assertion (iii) est de nature locale sur S, qu'on peut supposer affine. Soit I l'ensemble ordonné filtrant des ouverts de X de type fini sur S. Si $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ est un ouvert de X, $(fj)_!(\mathscr{F}|U) = f_!(j_!(\mathscr{F}|U))$ s'envoie dans $f_!(\mathscr{F})$. De plus

$$f_!(\mathscr{F}) = \varinjlim_{U\in I}(fj)_!(\mathscr{F}|U).$$

Ceci permet de supposer X de type fini sur S et d'appliquer le lemme de Chow (EGA II 2ième éd.)[74] pour trouver un morphisme projectif et surjectif : $p^0 : X^0 \to X$ tel que fp^0 soit compactifiable. Soit $X^1 = X^0 \times_X X^0$ et p^1 la flèche naturelle de X^1 dans X. La suite

$$0 \to \mathscr{F} \to p^0_* p^{0*}\mathscr{F} \rightrightarrows p^1_* p^{1*}\mathscr{F}$$

est exacte (VIII 9.2).

Compte tenu de la fonctorialité de la flèche de changement de base, et de (i), il suffit de vérifier (iii) pour les faisceaux $p^0_* p^{0^*}\mathscr{F}$ et $p^1_* p^{1^*}\mathscr{F}$. Par le changement de notations ($p^1 \mapsto p^0$) on se ramène donc à supposer $\mathscr{F}$ de la forme $p^0_*\mathscr{G}$. L'assertion (iii) pour le couple 419
$(f, p^0_*\mathscr{G})$ équivaut à l'assertion (iii) pour les couples $(p^0_*, \mathscr{G})$ et $(fp^0_*, \mathscr{G})$. On conclut par 5.2.7 (i), applicable car p^0 et fp^0 sont compactifiables.

Contre-exemple 6.1.6. Le foncteur $Rf_!$ ne coïncide en général pas avec le foncteur dérivé du foncteur $f_!$. Si X est affine sur un corps algébriquement clos k, on a en effet

$$f_!\mathscr{F} = \bigoplus_{x\in X(k)} H^0_x(\mathscr{F}),$$

et le $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé de $f_!$ vaut donc en $\mathscr{F}$

$$\bigoplus_{x\in X(k)} H^i_x(\mathscr{F}).$$

Par contre, si X est lisse et irréductible, et de dimension 1,

$$H^2_c(X, \mu_{\ell^n}) \simeq \mathbf{Z}/\ell^n$$

pour ℓ premier à la caractéristique de k.

6.2. Le morphisme trace en dimension relative 0. Le résultat principal de ce n° est le théorème 6.2.3. Il est recommandé au lecteur de ne pas lire les préliminaires techniques 6.2.1, 6.2.2. Ceux-ci permettent, dans la démonstration de 6.2.3, de ne considérer que des morphismes f finis, réduction qui, via EGA IV 18.12, est de toute façon assez évidente.

6.2.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme quasi-fini séparé. Quel que soit $U \in \operatorname{Ob} S^{\text{et}}$, 420
désignons par $\Psi_f(U)$ la catégorie des couples formés d'un ensemble pointé fini I, de point marqué noté 0, et d'une décomposition de f^*U en parties ouvertes et fermées $f^*U = \coprod_{i\in I} V_i$, avec V_i fini sur U pour $i \neq 0$. Un morphisme de $\varphi = (V_i)_{i\in I}$ dans $\varphi' = (V_i')_{i\in I'}$ est un morphisme σ de I' de dans I tel que pour $i \in I$, on ait $V_i = \bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)} V_j'$. On dit que φ' raffine φ s'il existe un morphisme de φ dans φ'.

Soient $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur S, $U \in \operatorname{Ob} S_{\text{et}}$, $\varphi = (V_i)_{i\in I} \in \operatorname{Ob} \Psi_f(U)$, $I^* = I\backslash\{0\}$, et f_i la projection de V_i sur U. On a

$$f_! f^* \mathscr{F}|U = f_{0!} f_0^*(\mathscr{F}|U) \oplus \bigoplus_{i\neq 0} f_{i*} f_i^*(\mathscr{F}|U),$$

d'où une flèche composée

$$\tau_\varphi : \mathscr{F}^{I^*}|U \longrightarrow \bigoplus_{i\neq 0} f_{i*} f_i^*(\mathscr{F}|U) \longrightarrow f_! f^* \mathscr{F}|U. \tag{6.2.1.1}$$

Si $\sigma : I \to J$ est un morphisme d'ensembles pointés, on désigne par ${}^t\sigma : \mathscr{F}^{J^*} \to \mathscr{F}^{I^*}$ la flèche de coordonnées ${}^t\sigma^i{}_j = \mathrm{Id}$ si $\sigma(i) = j$, et ${}^t\sigma^i{}_j = 0$ si $\sigma(i) \neq j$. Si $\sigma : I' \to I$ est un morphisme de φ dans φ', le diagramme

(6.2.1.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}^{I^*}|U \arrow[rr, "{}^t\sigma"] \arrow[dr, "\tau_\varphi"'] & & \mathscr{F}^{I'^*}|U \arrow[dl, "\tau_{\varphi'}"] \\
& f_! f^* \mathscr{T}|U &
\end{tikzcd}$$

421 est commutatif. De plus, ${}^t(\sigma\rho) = {}^t\rho{}^t\sigma$. Les $\Psi_f(U)$ forment une catégorie fibrés Ψ_f sur S_{et} ; les constructions précédentes commutent à la localisation et définissent donc un S_{et}-foncteur $\varphi = (V_i)_{i\in I} \in \Psi_f(U) \mapsto \mathscr{F}^{I^*}|U$ de Ψ dans la S_{et}-catégorie des faisceaux sur des ouverts étales de S, et un morphisme de foncteurs $\tau_\varphi : \mathscr{F}^{I^*}|U \to f_! f^* \mathscr{F}|U$.

Proposition 6.2.2. (i) *La catégorie Ψ_f est localement filtrante à droite (V 8.1.1) sur S_{et}.*

(ii) *Les flèches (6.2.1.1) définissent un isomorphisme*

$$\tau : \varinjlim_{\varphi=(V_i)_{i\in I}\in\Psi_f(U)} \mathscr{F}^{I^*}|U \xrightarrow{\sim} f_! f^* \mathscr{F}|U.$$

Si S est strictement local de point fermé s, le S-schéma X admet une décomposition $\varphi \in \Psi_f(S)$ en parties ouvertes et fermées $X = \coprod_{i\in I} X_i$ indexée par un ensemble pointé I telle que la fibre de X_0 en s soit vide, que les X_i ($i \neq 0$) soient finis sur S et que la fibre de X_i ($i \neq 0$) en s soit réduite à un point (EGA IV 18.12.1). Une telle décomposition est un élément final de $\Psi_f(S)$. De plus, en vertu de 6.1.4 (iii) (ou parce que c'est évident) la fibre en s de la flèche τ_φ (6.2.1.1) est un isomorphisme.

Dans le cas général, soit x un point géométrique de S et Ψ_x la fibre de Ψ_f en x,

$$\Psi_x = \varinjlim_{U(x)} \Psi_f(U),$$

pour U voisinage étale de x. Soit S_x le localisé strict de S en x, $X_x = X \times_S S_x$ et f_x :
422 $X_x \to S_x$. Les sorites de passage à la limite montrent que la catégorie Ψ_x est équivalents

[74] N.D.E. : voir [C, 2.6], cité dans la N.D.E. (47) page 649.

à la catégorie $\Phi_{f_x}(S_x)$, donc filtrante à droite. Il en résulte que Ψ_f est localement filtrante à droite. De plus, la fibre en x de τ s'identifie à la flèche

$$\tau_x \,:\, \varinjlim_{\Psi_x} \mathscr{F}_x^{I_x} \longrightarrow (f_! f^* \mathscr{F})_x$$

et, d'après ce qui précède, cette flèche est un isomorphisme.

THÉORÈME 6.2.3. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f \,:\, X \to S$, séparé, plat de présentation finie et quasi-fini, et tout faisceau abélien $\mathscr{F}$ sur S, un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f \,:\, f_! f^* \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$$

de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Var 1) Tr_f est fonctoriel en $\mathscr{F}$.

(Var 2) Tr_f est compatible à tout changement de base, i.e. pour tout diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} f'_! f'^* g^* \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{f'} * g^*"] & f'_! g'^* f^* \arrow[r, equal] & g^* f_! f^* \arrow[d, "g^* * \mathrm{Tr}_f"] \\ g^* \arrow[rr, equal] & & g^* \end{tikzcd} .$$

(Var 3) Tr_f est compatible avec la composition, i.e. si f est le composé $f = gh$ de deux morphismes séparés, plats, de présentation finie et quasi-finis, le diagramme suivant est commutatif : **423**

$$\begin{tikzcd} f_! f^* \arrow[r, equal] \arrow[ddr, "\mathrm{Tr}_f"'] & g_! h_! h^* g_* \arrow[d, "g_! * \mathrm{Tr}_h * g^*"] \\ & g_! g^* \arrow[d, "\mathrm{Tr}_g"] \\ & \mathrm{Id} . \end{tikzcd}$$

(Var 4) (Normalisation). Si f est fini de rang constant n, l'homomorphisme composé

$$\mathscr{F} \to f_* f^* \mathscr{F} = f_! f^* \mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_f} \mathscr{F}$$

est la multiplication par n.

Notons tout d'abord que les conditions (Var 2) à (Var 4) impliquent que

LEMME 6.2.3.1. Si $X = X' \amalg X''$, alors, posant $f' = f|X'$ et $f'' = f|X''$, le morphisme Tr_f :

$$f_! f^* \mathscr{F} = f'_! f'^* \mathscr{F} \oplus f''_! f''^* \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$$

est somme de $\mathrm{Tr}_{f!}$ et $\mathrm{Tr}_{f''}$.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, hook, "j'"] & & \\
& X \arrow[r, "f"] & S \\
X'' \arrow[ur, hook, "j''"'] & &
\end{tikzcd}$$

424 Si on applique (Var 2) à j', pour le changement de base par j', et (Var 4) pour l'application identique, on voit que

$$\mathrm{Tr}_{j'} : j'_! j'^* f^* \mathcal{F} \longrightarrow f^* \mathcal{F}$$

est l'application canonique définie par la décomposition de $f^*\mathcal{F}$ en somme directe

$$f^*\mathcal{F} = j'_! j'^* f^* \mathcal{F} \oplus j''_! j''^* f^* \mathcal{F}.$$

Si on applique (Var 3) à $f' = f \circ j'$, on voit que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
f'_! f'^* \mathcal{F} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_{f'}"'] & & f_! f^* \mathcal{F} \arrow[dl, "\mathrm{Tr}_f"] \\
& \mathcal{F} &
\end{tikzcd},$$

ce qui, joint à l'énoncé analogue pour f'', n'est autre que 6.2.3.1.

Soit $f : X \to S$ un morphisme quasi-fini séparé plat de présentation finie. Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\, S_{\mathrm{et}}$, soit $\Psi'_f(U)$ la sous-catégorie pleine de $\Psi_f(U)$ (6.2.1) formée des décompositions $(V_i)_{i\in I}$ telle que, pour $i \neq 0$, V_i soit localement libre de rang constant
425 sur U. Les catégories $\Psi'_f(U)$ forment une sous-catégorie fibrée de Ψ_f, cofinale dans Ψ_f.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des faisceaux abéliens sur S. D'après 6.2.2 (ii), il revient au même de se donner un morphisme $g : f_! f^* \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ou de se donner, pour chaque décomposition $\varphi = (V_i)_{i\in I} \in \Psi'_f(U)$, un morphisme $g_\varphi : \mathcal{F}^{I^*}|U \to \mathcal{G}|U$, compatible aux morphismes ${}^t\sigma$ de (6.2.1.2). Si f_i est la projection de V_i sur U, g_φ est la flèche de coordonnées les flèches composées :

$$g^i_\varphi : \mathcal{F}|U \to f_{i*} f_i^* \mathcal{F}|U \to f_! f^* \mathcal{F}|U \xrightarrow{g} \mathcal{G}|U.$$

On en déduit qu'il existe une et une seule flèche Tr_f, compatible à la localisation étale et vérifiant (Var 4) et 6.2.3.1. Il est clair que cette flèche vérifie (Var 1) et (Var 2).

Pour vérifier (Var 3), on se ramène par changement de base au cas facile où S est le spectre d'un corps algébriquement clos.

6.2.4. Une pondération d'un morphisme quasi-fini séparé $f : X \to S$ est la donnée, pour chaque point géométrique x de X d'un entier $n(x)$, ne dépendant que du point de X image de x, cette donnée vérifiant :

(∗) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\, S_{\mathrm{et}}$ et la partie ouverte et fermée X_1 de $f^{-1}(U)$, finie sur U, la fonction qui à chaque point géométrique s de U associe le nombre $\sum_{x\in X_1(s)} n(x)$ est localement constante.

Si $f = gh$ est le composé de deux morphismes pondérés, on pondère f en posant $n_f(x) = n_h(x) \cdot n_g(h(x))$.

426 Si le morphisme f' se déduit par un changement de base g d'un morphisme pondéré f, on pondère f' en posant $n_{f'}(x) = n_f(g'(x))$.

Les arguments qui précèdent prouvent en fait :

Proposition 6.2.5. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme quasi-fini séparé pondéré $f : X \to S$ et tout faisceau abélien $\mathscr{F}$ sur S, un morphisme trace $\mathrm{Tr}_f : f_! f^* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$, qui soit fonctoriel en $\mathscr{F}$, compatible aux changements de base et à la composition, et vérifie :

(Var 4′) Si f est fini et s'il existe un entier n tel que, pour tout point géométrique s de S, on ait $\sum_{x \in X(s)} n(x) = n$, alors la flèche composée

$$\mathscr{F} \longrightarrow f_* f^* \mathscr{F} = f_! f^* \mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_f} \mathscr{F}$$

est la multiplication par n.

Exemple 6.2.6. Soient S un schéma réduit et noethérien géométriquement unibranche (par exemple normal), et $f : X \to S$ un morphisme quasi-fini séparé. Pour tout point géométrique x de X d'image s dans S, soit $\mathscr{O}_x$ (resp. $\mathscr{O}_s$) l'anneau strictement local de X en x (resp. de S en s). Le schéma $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s)$ est réduit et a un unique point maximal η. De plus, $\mathscr{O}_x$ est fini sur $\mathscr{O}_s$. On pose $n(x) = \mathrm{rg}_\eta(\mathscr{O}_x)$. On vérifie que $n(x)$ est une pondération de f, d'où un morphisme trace Tr_f.

6.2.7. Soit $u : X \to Y$ un morphisme séparé quasi-fini plat de présentation finie. **427**
Le morphisme trace (6.2.3) étant fonctoriel, il définit, pour tout complexe de faisceaux abéliens K sur Y, un morphisme de complexes

$$\mathrm{Tr}_u : u_! u^* K \longrightarrow K. \tag{6.2.7.1}$$

On appellera encore, au choix, morphisme trace, morphisme de Gysin ou morphisme u_* tout morphisme déduit de (6.2.7.1) ou 6.2.3 par application d'un foncteur. Par exemple les suivants.

Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

avec g séparé localement de type fini. Pour tout faisceau abélien $\mathscr{F}$ sur Y, le morphisme trace définit un morphisme

$$\mathrm{Tr}_u \quad \text{ou} \quad u_* : f_! u^* \mathscr{F} \simeq g_! u_! u^* \mathscr{F} \xrightarrow{g_!(\mathrm{Tr}_u)} g_! \mathscr{F}. \tag{6.2.7.2}$$

Si g est compactifiable, et si K est un complexe borné inférieurement à cohomologie de torsion, ou un complexe de $g^*\mathscr{A}$-modules pour $\mathscr{A}$ faisceau d'anneaux de torsion sur S, le morphisme trace (6.2.7.1) induit de même

$$\mathrm{Tr}_u \quad \text{ou} \quad u_* : Rf_! u^* K \simeq Rg_! u_! u^* K \xrightarrow{Rg_!(\mathrm{Tr}_u)} Rg_! K, \tag{6.2.7.3}$$

$$\mathrm{Tr}_u \quad \text{ou} \quad u_* : R^q f_! u^* K \simeq R^q g_! u_! u^* K \xrightarrow{R^q g_!(\mathrm{Tr}_u)} R^q g_! K. \tag{6.2.7.4}$$

Pour S spectre d'un corps algébriquement clos, (6.2.7.4) est un morphisme **428**

$$u_* : \mathbf{H}^q_c(X, u^* K) \longrightarrow \mathbf{H}^q_c(Y, K). \tag{6.2.7.5}$$

On voit donc que la cohomologie à supports propres présente un caractère covariant vis-à-vis des morphismes quasi-finis.

6.2.8. Soient $u : X \to Y$ comme en 6.2.7, $\Delta_n = [0, n]$ l'ensemble type à $(n+1)$-éléments et X_n le produit fibré itéré $(n+1)^{\text{uple}}$ de X au-dessus de Y. Les X_n forment un schéma simplicial augmenté vers Y (cf. VBIS). On désignera par $u_n : X_n \to Y$ le morphisme d'augmentation. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau abélien sur Y, les faisceaux $\mathscr{F}_n = u_{n!}u_n^*\mathscr{F}$ forment, en vertu (6.2.7.2) (appliqué après le changement de langage $S \mapsto Y$, $X \mapsto X_n$, $Y \mapsto Y$ ou X_m), un faisceau simplicial augmenté vers $\mathscr{F}$. Le faisceau différentiel des « chaînes non dégénérées » de ce faisceau simplicial a par définition pour $n^{\text{ième}}$ composante le quotient de $\mathscr{F}_n$, conoyau de la somme directe des opérateurs de dégénérescence de but $\mathscr{F}_n$ et des morphismes $\sigma - \epsilon(\sigma)$ pour σ opérateur de symétrie.

Proposition 6.2.9. Sous les hypothèses précédentes, pour u étale séparé de type fini surjectif et pour tout faisceau abélien $\mathscr{F}$ sur Y, on a

(i) Les faisceaux $\mathscr{F}_n$ forment une résolution (gauche) de $\mathscr{F}$.
(ii) Le complexe différentiel des chaînes non dégénérées du faisceau simplicial $(\mathscr{F}_n)$ est une résolution (gauche) de $\mathscr{F}$. Si les fibres géométriques de u ont toutes au plus d points, cette résolution est de longueur $\leq d$.

429 Par changement de base, il suffit de vérifier cet énoncé pour Y le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas 6.2.8 se ramène au calcul de l'homologie simplicial d'un simplexe.

Soient $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini du schéma Y, $\mathscr{F}$ un faisceau abélien sur Y et, pour chaque partie P de I, soit j_P l'inclusion de $U_P = \cap_{i\in P} U_i$ dans Y. Supposons choisi un ordre total sur I. Si $X = \coprod_{i\in I} U_i$ et si u est la projection de X sur Y, la résolution 6.2.9 (ii) de $\mathscr{F}$ est donnée par

$$(\mathscr{F}_n)_{n\ \text{dég}} = \bigoplus_{|P|=n+1} j_{P!}j_P^*\mathscr{F}. \tag{6.2.9.1}$$

Cette résolution garde un sens pour I infini.

6.2.10. Sous les hypothèses de 6.2.9, soient $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y et $K \in \mathrm{Ob}^-(Y, \mathscr{A})$. On annèle X par $u^*\mathscr{A}$. La résolution 6.2.9 (i) (resp. 6.2.9 (ii)), étant fonctorielles en $\mathscr{F}$, définit une résolution de K par un double complexe K_1. Cette résolution s'appelle la résolution de Cech extraordinaire (resp. extraordinaire alternée) de K.

Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

avec g compactifiable. Avec les notations de 6.2.8, si f_n est la projection de X_n sur S, on
430 a $Rf_{n!} = Rg_!u_{n!}$. Le complexe K_1, filtré par le degré semi-simplicial, définit donc une suite spectrale

$$E_1^{-p,q} = R^q f_{p!}(u_p^* K) \Longrightarrow R^{-p+q} g_! K. \tag{6.2.10.1}$$

Les différentielles d_1 proviennent des flèches simpliciales, de sorte que

$$E_2^{-p,q} = \check{\mathscr{H}}^p(R^q f_{p!}(u_p^* K)) \Longrightarrow R^{-p+q} g_! K. \tag{6.2.10.2}$$

Sous les hypothèses de (6.2.9.1), on trouve de même une suite spectrale

$$E_1^{-p,q} = \bigoplus_{|P|=p+1} R^q f_{p!}(j_p^* K) \Longrightarrow R^{-p+q} g_! K. \tag{6.2.10.3}$$

Les suites spectrales (6.2.10.1) et (6.2.10.3) s'appellent les suites spectrales de localisation en haut.

Proposition 6.2.11. Si f est un morphisme étale, séparé de type fini, le foncteur $f_!$ est un adjoint à gauche du foncteur f^*, et admet le morphisme trace pour flèche d'adjonction.

On sait que si X est un objet d'un site S, le foncteur f^* de restriction des faisceaux abéliens à X admet un adjoint à gauche $f_!$. Si F est un faisceau abélien sur X, $f_! F$ est le faisceau engendré par la préfaisceau

$$V \longrightarrow \bigoplus_{\xi \in \mathrm{Hom}(V,X)} F(\xi).$$

Dans le cas étale, notons provisoirement ce foncteur $f_!^0$. De sa propriété d'adjonction résulte aussitôt que sa formation commute à tout changement de base. Le morphisme trace définit un morphisme t de $f_!\mathscr{F}$ dans $f_!^0\mathscr{F}$, compatible à tout changement de base. **431**
Il suffit de voir que t est un isomorphisme fibre par fibre, i.e. pour S spectre d'un corps séparablement clos, où cela est trivial.

. On prendra garde que cette interprétation de $f_!^0$ est spécifique au cas du site étale et ne s'étend pas au site fpqf d'un préschéma, par exemple.

6.3. Variante de la trace pour des coefficients continus. On démontre dans ce n° les assertions de Grothendieck [5, n° 6], et on applique ces résultats à la définition d'un « morphisme trace » pour des faisceaux fppf convenables.

6.3.1. Soit A un anneau commutatif. Si L et M sont deux A-modules projectifs de type fini, l'application $u \mapsto \bigwedge^m u$, de $\mathrm{Hom}(L, M)$ dans $\mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m M)$, est compatible à tout changement de base et m^{ique} (5.5.2.2). D'après 5.5.2.3, elle définit un morphisme

$$\bigwedge^m : \Gamma^m \mathrm{Hom}(L, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m M) \tag{6.3.1.1}$$

tel que, après tout changement de base, pour $u \in \mathrm{Hom}(L, M)$, on ait $\bigwedge^m(\gamma^m(u)) = \bigwedge^m u$. Puisque $\mathrm{Hom}(L, M)$ est plat, ce morphisme s'identifie (5.5.2.5) à un morphisme

$$\bigwedge^m : TS^m \mathrm{Hom}(L, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m M). \tag{6.3.1.2}$$

N.B. On peut aussi définir un tel homomorphisme dès que 2 est inversible dans A : un élément symétrique de $\bigotimes^m \mathrm{Hom}(L, M)$ définit un homomorphisme symétrique de $\bigotimes^m L$ dans $\bigotimes^m M$, et celui-ci passe au quotient pour définir un homomorphisme de $\bigwedge^m L$ dans $\bigwedge^m M$.

Etant donnés trois A-modules projectifs de type fini, le diagramme **432**

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^m \mathrm{Hom}(L, M) \otimes \Gamma^m \mathrm{Hom}(M, N) & \longrightarrow & \Gamma^m \mathrm{Hom}(L, N) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \bigwedge^m \otimes \bigwedge^m} & & \big\downarrow{\scriptstyle \bigwedge^m} \\ \mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m M) \otimes \mathrm{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^m N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m N), \end{array} \tag{6.3.1.3}$$

dans lequel les flèches horizontales sont déduites des flèches de composition (et, pour la première, de (5.5.2.8)), est commutatif. Ceci traduit la formule $\bigwedge^m(vu) = \bigwedge^m v \circ \bigwedge^m u$.

Si L est un A-module libre de rang n, (6.3.1.2) définit un morphisme canonique

$$\det : \Gamma^n \operatorname{End}_A(L) = TS^n \operatorname{End}_A(L) \longrightarrow A, \tag{6.3.1.4}$$

qui est un homomorphisme d'algèbres d'après (6.3.1.3). Par définition, on a

$$\det(u^{\otimes n}) = \det(u; L). \tag{6.3.1.5}$$

Si L est de plus un module sur une A-algèbre B, (6.3.1.4) définit par composition un homomorphisme d'algèbres

$$\det_L : TS^n_A(B) \longrightarrow A. \tag{6.3.1.6}$$

Lemme 6.3.2. Supposons que L s'insère dans une suite exacte

$$E : 0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

avec L' (resp. L'') localement libre de rang n_1 (resp. n_2). Soient $n = n_1 + n_2$, α le mor-
433 phisme « gradué associé » du groupe $\operatorname{End}(E)$ des endomorphismes de l'extension E dans $\operatorname{End}(L') \oplus \operatorname{End}(L'')$ et, pour X et Y deux A-modules plats, soit β le morphisme de $TS^n(X \oplus Y)$ dans $TS^{n_1}(X) \otimes TS^{n_2}(Y)$ déduit de l'isomorphisme (5.5.2.6)

$$TS^n(X \oplus Y) \simeq \bigoplus_{n'+n''=n} TS^{n'}(X) \otimes TS^{n''}(Y).$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
TS^n(\operatorname{End}(E)) \arrow[r, "TS^n(\alpha)"] \arrow[d] & TS^n(\operatorname{End}(L') \oplus \operatorname{Ens}(L'')) \arrow[r, "\beta"] & TS^{n_1}(\operatorname{End}(L')) \otimes TS^{n_2}(\operatorname{End}(L'')) \arrow[d, "\det \otimes \det"] \\
TS^n(\operatorname{End}(L)) \arrow[rr, "\det"] & & A.
\end{tikzcd}$$

D'après la propriété universelle 5.5.2 de TS^n, il suffit de vérifier que pour $u \in \operatorname{End}(E)$ les deux images de $u^{\otimes n}$ coïncident. Si $\alpha u = (u', u'')$, ces images sont respectivement $\det(u)$ et $\det(u').\det(u'')$, d'où la conclusion.

Lemme 6.3.3. Soient A un anneau commutatif, B une A-algèbre commutative, C une B-algèbre non nécessairement commutative, E un B-module libre de rang n sur A, et F un C-module libre de rang m sur B. On suppose C plat sur A. D'après la propriété universelle 5.5.2.2 de Γ^{nm} et 5.5.2.3, il existe une unique flèche $\sigma : TS^{nm}_A(C) \to TS^n_A TS^m_B(C)$ telle qu'après tout changement d'anneaux $A \to A'$, on ait $\sigma(c^{\otimes nm}) = (c^{\otimes m})^{\otimes n}$. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd}
TS^n_A(B) \arrow[d, "\det_E"] & TS^n_A TS^m_B(C) \arrow[l, "TS^n_A(\det_F)"'] \\
A & TS^{nm}_A(C). \arrow[l, "\det_{E\otimes_B F}"] \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

434 Preuve. D'après 5.5.2.2 et 5.5.2.3, il suffit de montrer que les deux images d'un élément $u^{\otimes nm}$ de $TS^{nm}_A(C)$ coïncident. Ces images sont $\det_E(\det_F(u))$ et $\det_{E\otimes_B F}(u)$; elles s'expriment en termes de A, B, E, F et $u \in \operatorname{End}_B(F)$ et, pour vérifier qu'elles coïncident, on peut au préalable remplacer B par son image (commutative) B_1 dans $\operatorname{End}(E)$, et F par

$F \otimes_B B_1$. La formule à prouver est alors la formule de calcul par bloc des déterminants (Bourbaki, Alg. Chap. 8 § 12 lemme 2 p. 140).

Lorsque C n'est plus nécessairement plat sur A, la même démonstration fournit plus généralement un diagramme commutatif d'algèbres

(6.3.3.1)
$$\begin{tikzcd} \Gamma_A^n(B) \arrow[d, "\det_E"'] & \Gamma_A^n\Gamma_B^n(C) \arrow[l, "\Gamma_A^n(\det_F)"'] \\ A & \Gamma_A^{nm}(C). \arrow[l, "\det_{E\otimes_B F}"'] \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

6.3.4. Si B est une A-algèbre commutative, $\mathrm{Spec}(TS^n(B))$ n'est autre que la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de $\mathrm{Spec}(B)$ sur $\mathrm{Spec}(A)$, i.e. le quotient de $(\mathrm{Spec}(B)/\mathrm{Spec}(A))^n$ par la groupe symétrique (SGA 1 V 1).

Si X est un S-schéma séparé sur S, on dira qu'un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur **435**
X est fini localement libre (resp. et de rang n) sur S si son support est fini sur S et si son image directe est localement libre de rang fini (resp. de rang n) sur S. Par support de $\mathscr{F}$, on entendra encore le sous-schéma de X défini par l'annulation de $\mathscr{F}$ (qui est un Idéal quasi-cohérent, $\mathscr{F}$ étant quasi-cohérent de type fini).

Si $\mathscr{F}$ est fini localement libre sur S, de rang n et de support E, le schéma E est affine sur S ; par globalisation sur S, $\mathscr{F}$ définit, via (6.3.1.6), une section $\sigma_E(\mathscr{F})$ de $\mathrm{Sym}^n_S(E)$, d'où, par fonctorialité, une section $\sigma(\mathscr{F})$ de l'espace algébrique [74] $\mathrm{Sym}^n_S(X)$,

(6.3.4.1)
$$\sigma(\mathscr{F}) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(X)/S).$$

En particulier, si $f : S' \to S$ est fini localement libre de rang n, on obtient, pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{S'}$, une section canonique

(6.3.4.2)
$$t \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(S')/S).$$

Proposition 6.3.5. *Soient X un schéma séparé sur S et $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ deux $\mathscr{O}_X$-modules finis localement libres de rang n_1 et n_2 sur S. On pose $n = n_1 + n_2$. Soit d la flèche canonique $d : \mathrm{Sym}^{n_1}_S(X) \times \mathrm{Sym}^{n_2}_S(X) \to \mathrm{Sym}^n_S(X)$. Si $\mathscr{F}$ est une extension de $\mathscr{F}_1$ par $\mathscr{F}_2$, on a*

$$\sigma(\mathscr{F}) = d(\sigma(\mathscr{F}_1), \sigma(\mathscr{F}_2)).$$

On peut remplacer X par le support (fini sur S) de $\mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2$ et supposer S affine. **436**
Traduite en terme d'anneaux, la proposition résulte alors de 6.3.2.

Lemme 6.3.6. *Si X est un schéma séparé sur S, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module fini localement libre de rang n sur S et si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X, on a*

$$\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}).$$

Remplaçons X par le support (6.3.4) de $\mathscr{F}$. Localement sur S, $\mathscr{L}$ est alors isomorphe à $\mathscr{O}_X$, et l'assertion devient triviale.

Le lecteur vérifiera :

[74] M. Artin, Algebraization of formal moduli I, dans *Global Analysis : Papers in Honor of K. Kodaira*, Princeton University Press, 1969, 21–71. On n'aura à utiliser la construction précédente que lorsque $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ existe en tant que schéma, ce qui est le cas pour X quasi-projectif sur S.

Proposition 6.3.7. Pour tout diagramme de S-schémas séparés sur S

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

et tout $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ fini localement libre de rang n sur S, le $\mathscr{O}_Y$-module $u_*\mathscr{F}$ est fini localement libre de rang n sur S, et

$$(\mathrm{Sym}^n_S\, u)(\sigma(\mathscr{F})) = \sigma(u_*\mathscr{F}).$$

. Notons enfin que la construction des morphismes σ (6.3.4.1) et t (6.3.4.2) est compatible à tout changement de base, ce qui a un sens d'après 5.5.2.7.

437

Application 1. Le cas des courbes lisses.

6.3.8. Soit $f : X \to S$ une courbe lisse et quasi-projective sur S, i.e. un morphisme lisse quasi-projectif purement de dimension relative 1. La théorie des schémas de Hilbert Grothendieck [5]) montre que le faisceau fpqc $\mathrm{Div}^n_{X/S}$ qui, à chaque S-schéma S', associe l'ensemble des diviseurs relatifs sur $X' = X \times_S S'$ qui sont finis sur S et de degré n, est un faisceau représentable.

Pour chaque diviseur relatif E sur X, fini de degré n sur S, on dispose d'un élément canonique (6.3.4.2) $t(E) \in \mathrm{Sym}^n_S(E)$, d'image $\sigma(E)$ dans $\mathrm{Sym}^n_S(X)$. Cette construction, étant compatible à tout changement de base, définit

(6.3.8.1) $$\sigma : \mathrm{Div}^n_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_S(X) : E \longrightarrow \sigma(\mathscr{O}_E).$$

Chaque section s de f définit un diviseur relatif fini sur S de degré 1, le diviseur $s(S)$. Le morphisme

$$(X/S)^n \longrightarrow \mathrm{Div}^n_{X/S} : (s_i)_{0<i\leq n} \longmapsto \sum s_i(S)$$

est symétrique, et induit donc un morphisme

(6.3.8.2) $$\alpha : \mathrm{Sym}^n_S(X) \longrightarrow \mathrm{Div}^n_{X/S}.$$

Proposition 6.3.9. Les morphismes σ et α de 6.3.8 sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Preuve. a) $\sigma\alpha = \mathrm{Id}$. Il suffit de prouver que la flèche composée

$$(X/S)^n \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sym}^n_S(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Div}^n_{X/S} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Sym}^n_S(X)$$

438 est π. Pour $n = 1$, l'assertion est claire ; le cas général s'en déduit via le

Lemme 6.3.9.1. Avec les notations de 6.3.5 et (6.3.8.1), on a

$$\sigma(E + F) = d(\sigma(E), \sigma(F)).$$

Ce lemme résulte de 6.3.5, 6.3.6 et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-F) \otimes \mathscr{O}_E \longrightarrow \mathscr{O}_{E+F} \longrightarrow \mathscr{O}_F \longrightarrow 0.$$

b) On sait que $\mathrm{Div}^n_{X/S}$ est lisse sur S (il n'y a pas d'obstruction à relever infinitésimalement des diviseurs sur une courbe (cf. SGA 3 XI 1)). Le morphisme $\alpha\pi$: $(X/S)^n \to \mathrm{Div}^n_{X/S}$ est un morphisme quasi-fini surjectif entre schémas lisses sur S de source à fibres équidimensionnelles. Il est donc plat (EGA 0_{IV} 17.3.5), donc $\alpha\pi$ est un épimorphisme de faisceaux fppf, donc α l'est aussi. Compte tenu de a), ceci achève la démonstration de 6.3.9.

Lemme 6.3.10. Soient k un anneau commutatif, M un k-module libre et u un endomorphisme de M. Désignons par $N_{\det(u-T)=0}$ la norme de $k[T]/\det(u-T)$ à k. Pour $P \in k[T]$, on a alors

$$N_{\det(u-T)=0}(P(T)) = \det(P(u), M).$$

Il s'agit de vérifier une identité algébrique entre les coefficients de la matrice de u et les coefficients de P. Pour prouver 6.3.10, il suffit donc (grâce à des arguments familiers) de traiter le cas où k est un corps algébriquement clos et où u est semi-simple, de valeurs propres a_i.

On a alors 439

$$\begin{aligned}&\det(u-T) = \Pi(a_i - T)\\ &N_{\det(u-T)=0}(P(T)) = \Pi\, P(a_i) \quad \text{et}\\ &\det(P(u), M) = \Pi\, P(a_i).\end{aligned}$$

. Soient $f : X \to S$ un morphisme quasi-projectif, de présentation finie, plat à fibres purement de dimension 1 et Cohen-Macaulay ; ces conditions sont donc vérifiées si X est une courbe lisse quasi-projective sur S. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module, fini localement libre sur S. Le module $\mathscr{F}$ étant nul sur un ouvert dense fibre par fibre de X, on dispose d'une flèche canonique $\psi : \mathscr{O}_X \to \det^*(\mathscr{F})$ (SGA 6 XI ou Mumford [8, Chap. 5 § 3]). On désignera par $\delta(\mathscr{F})$ le diviseur défini par l'idéal annulateur de $\operatorname{coker}(\psi)$ (Ibidem) ; ce diviseur est fini sur S.

Proposition 6.3.11.1. Sous les hypothèses 6.3.11.0 et avec les notations de 6.3.8 et (6.3.4.1), si $\mathscr{F}$ est de rang n, alors $\delta(\mathscr{F})$ est de degré n et

$$\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\delta(\mathscr{F})).$$

Démonstration. a) Cas f lisse. On se ramène de façon standard au cas S local artinien à corps résiduel algébriquement clos. L'additivité (6.3.5) de σ permet de supposer le support de $\mathscr{F}$ concentré en un point rationnel x de X. On vérifie aussitôt que si T est une uniformisante en x, définissant $p : X \to \mathbf{A}^1_S$, alors $p_*(\mathscr{O}_{\delta(\mathscr{F})}) \simeq \mathscr{O}_{\delta(p_*\mathscr{F})}$ (car les constructions effectuées commutent au passage au complété). On se ramène par là et 6.3.7 au cas où $X = \mathbf{A}^1_S$.

Si $X = \mathbf{A}^1_S$ et si S est affine, $S = \operatorname{Spec}(k)$, alors $\mathscr{F}$ s'identifie à un k-module localement libre M, muni d'un endomorphisme u (l'action de T). Le module M, en tant que $k[T]$-module, admet la résolution 440

$$0 \to k[T] \otimes_k M \xrightarrow{\varphi} k[T] \otimes_k M \xrightarrow{\epsilon} M \to 0,$$

où $\epsilon(P \otimes m) = P(u)(m)$ et où $\varphi(1 \otimes m) = 1 \otimes um - T \otimes m$. De la formule $\varphi = u - T$, on déduit que le diviseur $\delta(\mathscr{F})$ admet pour équation $\det(u - T, M) = 0$.

Pour vérifier 6.3.11.1, il suffit de montrer que, après tout changement de base et pour toute φ section de $\mathscr{O}_X$, on a

$$\det{}_k(\varphi, M) = \det{}_k(\varphi, \mathscr{O}_{\delta(\mathscr{F})}) (= N_{\delta(\mathscr{F})/S}(\varphi)).$$

Pour $\varphi = P(T)$, c'est ce qu'affirme 6.3.10.

b) Cas général. Explicitions d'abord l'énoncé à prouver sous la forme plus concrète suivante :

Corollaire 6.3.11.2. Sous les hypothèses 6.3.11.0 sur $f : X \to S$, soient M un module localement libre de type fini sur X, et u un endomorphisme de M tel que $\det u$ soit une section de $\mathscr{O}_X$ régulière sur chaque fibre X_s (d'où résulte que $\operatorname{Coker} u = M/u(M)$ et $\operatorname{Coker} \det u = \mathscr{O}_X / \det u$ sont tous deux plats de présentation finie sur S et à supports quasi-finies). Supposons que le support commun[75] de ces faisceaux soit fini sur S, de sorte qu'ils définissent des faisceaux localement libres de type fini sur S. Alors pour toute section φ de $\mathscr{O}_X$, les déterminants par rapports à $\mathscr{O}_S$ de φ opérant sur Coker u et sur Coker det u sont égaux :

$$\det_S(\varphi, M/u(M)) = \det_S(\varphi, \mathscr{O}_X/\det u). \tag{6.3.11.3}$$

441 On notera que cet énoncé implique l'égalité des rangs des deux Modules localement libres envisagés sur S, par raison d'homogénéité (lorsqu'on y remplace φ par $T\varphi$, T une section « indéterminée » de $\mathscr{O}_S$). D'ailleurs, remplaçant φ par $1+T\varphi$, où T est une telle indéterminée (de façon précise, on fait un changement de base $S' = S[T] \to S$), on déduit de (6.3.11.3) la formule en apparence plus générale

$$\mathrm{Pol}_S(\varphi, M/uM)(T) = \mathrm{Pol}_S(\varphi, \mathscr{O}_X/\det u)(T) \tag{6.3.11.4}$$

sur les polynômes caractéristiques.

Pour prouver (6.3.11.3), nous allons nous ramener au cas lisse déjà prouvé. Par localisation étale sur S, on se ramène au cas où S est strictement local de point fermé s, puis par additivité on se ramène au cas où le support de $M/u(M)$ a un seul point sur X_s, soit x. Quitte à faire une extension plate de la base, on peut supposer l'extension résiduelle $k(x)/k(s)$ triviale, et quitte à remplacer X par un voisinage assez petit de x, et à ajouter à φ une fonction qui induise l'opération nulle sur $M/u(M)$ et sur $\mathscr{O}_X/\det u$ (ce qui ne modifie pas la formule à prouver), on voit aisément qu'on peut supposer que φ induit une section de $\mathscr{O}_{X_s}$ régulière en x, donc (quitte à rapetisser X) définit un morphisme quasi-fini et plat

$$p : X \longrightarrow X' = S[T].$$

Par localisation étale sur X et sur X', on peut donc supposer qu'on a un morphisme fini et plat p comme dessus, avec X' lisse sur S, et $\varphi = p^*(\varphi')$, où φ' est une section de $\mathscr{O}_{X'}$. Posons alors

$$\begin{aligned} M' &= p_*(M) \quad , \quad u' = p_*(u),\\ P &= \operatorname{Coker} u \quad , \quad Q = \operatorname{Coker} \det u,\\ P' &= \operatorname{Coker} u' \quad , \quad Q' = \operatorname{Coker} \det u'. \end{aligned}$$

442 On sait qu'on a

$$\det u' = N_{X/X'} \det u, \quad \text{donc} \quad Q' = \operatorname{Coker} N_{X/X'}(\det u).$$

On a trivialement

$$\det_S(\varphi, P) = \det_S(\varphi', P'),$$

et d'après la formule (6.3.11.3) prouvée dans le cas lisse,

$$\det_S(\varphi', P') = \det_S(\varphi', Q'),$$

de sorte qu'il reste à prouver la formule

$$\det_S(\varphi', Q') = \det_S(\varphi, Q),$$

qui équivaut à la formule (6.3.11.3) à établir. On voit donc que la validité de celle-ci dépend que de la section det u de $\mathscr{O}_X$, ou encore qu'elle équivaut à la même

[75] N.D.E. : le support de M/uM au sens de 6.3.4 est un sous-schéma du support de $\mathscr{O}/\det u$ défini par un Nilidéal.

formule dans le cas où M est remplacé par $\mathcal{O}_X$, et φ par $\det u$. Mais dans le cas $M = \mathcal{O}_X$ la formule (6.3.11.3) est tautologique ! Cela achève la démonstration.

Remarque 6.3.11.5. Dans le cas où S est artinien, l'égalité des rangs sur S de $\operatorname{Coker} u$ **443**
et $\operatorname{Coker} \det u$ (notations de 6.3.11.2) est un cas particulier de EGA IV 21.10.17.3, dont (6.3.11.3) peut être considéré comme une version « relative ».

Proposition 6.3.12. Soient X et Y deux courbes quasi-projectives de présentation finie, plates à fibres CohenMacaulay sur S, et $u : X \to Y$ un morphisme quasi-fini et plat.

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Div}^n_{X/S} \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & \mathrm{Div}^n_{Y/S} \arrow[d, "\sigma_Y"'] \\ \mathrm{Sym}^n_S(X) \arrow[r, "\mathrm{Sym}^n(u)"] & \mathrm{Sym}^n_S(Y) \end{tikzcd}$$

est alors commutatif [75].

Puisque $u_*(D) = \delta(u_*\mathcal{O}_D)$, 6.3.12 résulte de 6.3.7 et 6.3.11.1.

Application 2. Le morphisme trace.

6.3.13. Soit G un faisceau abélien sur le grand site fppf d'un schéma S (0.10). Supposons que G vérifie la condition suivante.

. Pour tout morphisme affine plat de présentation finie $f : X \to Y$ de S-schémas, et pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Sym}^n_Y(X), G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S((X/Y)^n, G)$$

est injectif et a pour image l'ensemble des morphismes symétriques de $(X/Y)^n$ dans G. **444**

Cette condition est stable par changement de base.

Soit $f : T \to S$ un morphisme fini localement libre de rang n. Soit pr_i la $i^{\text{ème}}$ projection de $(T/S)^n$ dans T, et t la section (6.3.4.2) de $\mathrm{Sym}^n_S(T)$. Si $u \in G(T)$, alors $\sum \mathrm{pr}_i^*(u)$ est un élément symétrique de $G((T/S)^n)$ et définit donc

$$u_n \in G(\mathrm{Sym}^n_S(T)).$$

On pose

$$\mathrm{Tr}_f(u) = t^*(u_n).$$

Lorsque f est fini localement libre, on définit $\mathrm{Tr}_f(u)$, localement sur S, par la formule précédente. Cette construction est compatible à tout changement de base et définit donc un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : f_*f^*G \longrightarrow G. \tag{6.3.13.2}$$

6.3.14. La condition (6.3.13.1) est vérifiée dans les cas suivants

a) Si G est représentable, par définition des puissances symétriques.
b) Pour G l'image réciproque sur S_{fppf} d'un faisceau sur le petit site étale de S (0.10).
c) Pour G défini par un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent G_0.

L'énoncé c) se ramène à (5.5.2.7).

Proposition 6.3.15. Pour G vérifiant (6.3.13.1), on a : **445**

[75] Le morphisme u_* est défini parce qu'on se limite aux diviseurs *finis* sur S. On prend par exemple pour définition $u_*(D) = \delta(u_*\mathcal{O}_D)$, formule qui coïncide avec EGA IV 21.5.5 pour u fini.

(i) Le morphisme Tr_f est fonctoriel en G, donc additif.
(ii) Sa formation est compatible à tout changement de base $S' \to S$.
(iii) Si $T = \coprod_i T_i$, de sorte que $f_* G \simeq \sum f_{i*} G$, on a $\mathrm{Tr}_f = \sum \mathrm{Tr}_{f_i}$.
(iv) Si T est de rang constant n sur S, le morphisme composé

$$G \longrightarrow f_* f^* G \xrightarrow{\mathrm{Tr}_f} G$$

est la multiplication par n.
(v) Le morphisme trace est compatible à la composition (cf. 6.2.3 Var 3).

Les assertions (i) et (ii) sont claires, et (iii) et conséquence facile de 6.3.5. Avec les notations de 6.3.13, si $u \in G(S)$, alors u_n est n fois l'image réciproque de u, de sorte que $\mathrm{Tr}_f(f^* u) = t^*(u_n) = nu$.

Pour prouver (v), on se ramène, par localisation étale sur S et utilisant (iii), à prouver que pour

$$f = gh \,:\, S'' \xrightarrow{h} S' \xrightarrow{g} S,$$

avec g et h finis localement libres de rangs constants n et m, le diagramme

$$\begin{tikzcd} G(S'') \arrow[rr, "\mathrm{Tr}_h"] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_f"'] & & G(S') \arrow[dl, "\mathrm{Tr}_g"] \\ & G(S) & \end{tikzcd} \tag{6.3.15.1}$$

est commutatif. Pour $u \in G(S'')$, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}^n_S(S') \arrow[rr, "\mathrm{Sym}^n(t)"] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_h(u)_n"] & & \mathrm{Sym}^n_S\,\mathrm{Sym}^m_{S'}(S'') \arrow[dl, "(u_m)_n"'] \arrow[dd] \\ & G & \\ S \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, shift left, "\mathrm{Tr}_g\,\mathrm{Tr}_h(u)"] \arrow[ur, shift right, "\mathrm{Tr}_{gh}(u)"'] \arrow[rr, "t"] & & \mathrm{Sym}^{nm}_S(S''). \arrow[ul, "u_{nm}"] \end{tikzcd} \tag{6.3.15.2}$$

446 La flèche verticale de droite est définie car S'' est plat sur S ; chaque triangle est commutatif et (v) sera donc conséquence de la commutativité du bord extérieur.

Traduisant en terme d'anneaux, c'est une conséquence du cas particulier $B = E$ et $C = F$ de 6.3.3.

6.3.16. Soit maintenant $f : T \to S$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau fppf sur T, on définit son image directe à support propre $f_! \mathscr{F}$ sur S comme le préfaisceau qui à S'/S associe l'ensemble des sections de $\mathscr{F}$ sur T' dont le support est propre sur S'. Ce préfaisceau est un faisceau d'après 6.1.1. Avec la notation de 6.1.1, on peut aussi l'exprimer comme limite inductive locale (V 8.2).

$$f_! \mathscr{F}(U) = \varinjlim_{V \in \Phi(U)} f_*(\mathscr{F}|V),$$

447 formule qui rend compte du fait assez évident que les propriétés de $f_!$ se ramène à celles de f'_* pour f' fini. On trouve ainsi :

Proposition 6.3.17. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : T \to S$ séparé quasi-fini plat de présentation finie et pour tout faisceau fppf G sur S vérifiant (6.3.13.1), un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : f_! f^* G \longrightarrow G$$

vérifiant :

(i) Pour f fini on retrouve le morphisme (6.3.13.2).

(ii) Les conditions (Var 1) à (Var 4) de 6.2.3 sont remplies, mutadis mutandis.

Le morphisme quasi-fini f induit un diagramme commutatif (cf. (0.11)) de sites (dans lequel α_* est le foncteur « restriction »)

$$\begin{tikzcd} T_{\mathrm{fppf}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & T_{\mathrm{et}} \arrow[d, "f_{\mathrm{et}}"] \\ S_{\mathrm{fppf}} \arrow[r, "\alpha"] & S_{\mathrm{et}}. \end{tikzcd}$$

On a, pour G sur T_{fppf},

$$f_! \alpha_* \simeq \alpha_* f_!.$$

On dispose aussi d'un morphisme « de changement de base » 448

$$c : f_{\mathrm{et}}^* \alpha_* \longrightarrow \alpha_* f^*.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité suivante entre les morphisme traces 6.2.3 et 6.3.17. Pour G sur S_{fppf} vérifiant (6.3.13.1), le diagramme suivant est commutatif :

(6.3.17.1)
$$\begin{tikzcd} f_{\mathrm{et}!} f_{\mathrm{et}}^* \alpha_* G \arrow[r, "f_! c"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"', "(6.2.3)"] & f_{\mathrm{et}!} \alpha_* f^* G \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \alpha_* f_! f^* G \arrow[d, "\alpha_* \mathrm{Tr}_f"', "(6.3.17)"] \\ \alpha_* G \arrow[rr, equal] & & \alpha_* G. \end{tikzcd}$$

En termes plus concrets, ceci signifie que si G est un faisceau fppf sur S, qui par restriction au site étale définit un faisceau étale $\alpha_* G$, et si u est une section à support propre de l'image réciproque $f_{\mathrm{et}}^*(\alpha_* G)$, d'image u_1 dans $f^* G$, les éléments $\mathrm{Tr}_f(u)$ (au sens 6.2.3) et $\mathrm{Tr}_f(u_1)$ (au sens 6.2.17) coïncident dans $G(S)$.

Exemple 6.3.18. Soit $f : S' \to S$ un morphisme fini localement libre de rang n et $u \in \Gamma(S', \mathscr{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_S(S', \mathbf{E}_S^1)$.[76] Le morphisme u définit un morphisme

$$\mathrm{Sym}(u) : \mathrm{Sym}_S^n(S') \longrightarrow \mathrm{Sym}_S^n(\mathbf{E}_S^1) = \mathrm{Spec}(S[\sigma_1 \dots \sigma_n],$$

où les σ_i sont des fonctions symétriques élémentaires (cf. Bourbaki, Alg. 5, App. I n° 2[77]). On a alors (par un calcul facile laissé au lecteur) :

(6.3.18.1)
$$[\mathrm{Sym}(u) \circ t]^*(\sigma_i) = \sigma_i(u),$$

où $t \in \Gamma\,(\mathrm{Sym}_S^n(S')/S)$ est l'élément canonique (6.3.4.2), et où on désigne par $\sigma_i(u)$ le 449
$i^{\text{ième}}$ coefficient du polynôme caractéristique de la multiplication par u dans $f_* \mathscr{O}_{S'}$. On en déduit que les applications « trace »

$$\begin{cases} \mathbf{G}_a(S') \longrightarrow \mathbf{G}_a(S) \\ \mathbf{G}_m(S') \longrightarrow \mathbf{G}_m(S) \end{cases}$$

[76]N.D.E. : ici $\mathbf{E}_S^1$ désigne la droite affine sur S.

[77]N.D.E. : référence à vérifier. Probablement IV § 6 n° 1 dans la nouvelle version.

sont respectivement la trace et la norme usuelles ; en effet, le morphisme $\mathrm{Sym}^n_S(\mathbf{E}^1_S) \to \mathbf{E}^1_S$ déduit de la loi additive (resp. multiplicative) sur $\mathbf{E}^1_S$ est donné par la fonction σ_1 (resp. σ_n) sur $\mathrm{Sym}^n_S(\mathbf{E}^1_S) \simeq \mathrm{Spec}(S[\sigma_1, \dots, \sigma_n])$.

On déduit alors de (6.3.17.1) que pour n inversible sur S le diagramme de faisceaux étales

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & f_*\mu_n \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"', "(6.2.3)"] & f_*\mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "N_f"] & f_*\mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "N_f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{6.3.18.2}$$

est commutatif.

Proposition 6.3.19. Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

450 dans lequel X et Y sont des courbes lisses quasi-projectives sur S et u un morphisme quasi-fini.

(i) Si D est un diviseur sur X fini sur S (voir note p. 743) et g une section de G_Y sur Y, on a
$$\mathrm{Tr}_{D/S}(u^*g) = \mathrm{Tr}_{(u_*D)/S}(g).$$

(ii) Si E est un diviseur sur Y fini sur S, g une section de G_X sur X et si u est fini, on a
$$\mathrm{Tr}_{E/S}(\mathrm{Tr}_{X/Y}(g)) = \mathrm{Tr}_{(u^*E)/S}(g).$$

Preuve. (i) Soit g_n la section de G sur $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ déduite de g (6.3.13). D'après 6.3.12, on a
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{D/S}(u^*g) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \sigma(D)^*(u^*g)_n &= \sigma(D)^*(\mathrm{Sym}^n_S(u)^*g_n) = (\mathrm{Sym}^n_S(u)\circ\sigma(D))^*(g_n)\\ &= \sigma(u_*D)^*(g_n) = \mathrm{Tr}_{u_*D}(g_n).\end{aligned}$$

(ii) La formule (ii) résulte de 6.3.15 (ii) et (v) :
$$\mathrm{Tr}_{E/S}(\mathrm{Tr}_{X/Y}(g)) = \mathrm{Tr}_{E/S}(\mathrm{Tr}_{u^*E/E}(g)) = \mathrm{Tr}_{u^*E/S}(g).$$

Application 3. Trace d'un torseur.

6.3.20. Soit G un faisceau sur le grand site fppf de S qui vérifie (6.3.13.1). Soit $u : X \to Y$ un morphisme fini localement libre de S-schémas et K un G_X-torseur sur X. Supposons que, localement fppf sur Y, le torseur K sur X soit trivial. Tel est le cas si K est trivial localement pour la topologie étale.

451 Proposition 6.3.21. Sous les hypothèses 6.3.20, il existe à isomorphisme unique près un et un seul torseur $\mathrm{Tr}_u(K)$ sous G_Y sur Y, muni d'un morphisme Tr_u ou $\mathrm{Tr}^K_u : u_*K \to \mathrm{Tr}_u(K)$, qui, pour g section locale (au sens fppf) de G sur Y et k section locale de u_*K, vérifie
$$\mathrm{Tr}^K_u(gk) = \mathrm{Tr}_u(g)\cdot\mathrm{Tr}^K_u(k).$$

Le problème est local sur Y ; on peut donc supposer K trivial : $K = G_X$. Une solution du problème est de prendre $K = G_Y$ et pour morphisme trace le morphisme (6.3.13.2). On vérifie aussitôt que c'est la seule.

Le foncteur trace 6.3.21 est défini en particulier lorsque G vérifie la condition suivante

Pour tout S-schéma X, tout torseur sous G_X sur X est localement trivial pour la topologie étale. Cette condition est vérifiée pour G un groupe lisse, pour G image réciproque d'un faisceau sur le petit site étale de S, ou pour G défini par un faisceau quasi-cohérent sur S.

On a par construction

$$\mathrm{Tr}_u(K) = u_*(K) \times_{u_*G_X} G_Y. \tag{6.3.21.2}$$

6.3.22. Pour définir un foncteur trace sous des hypothèses plus générales, le point clef est, pour $f : X \to T$ un morphisme quasi-projectif plat de présentation finie de S-schémas, de définir un foncteur raisonnable $K \mapsto K_n$ des G_X-torseurs sur X dans les G_Z-torseurs sur $Z = \mathrm{Sym}^n_T(X)$. On a tout d'abord, f_n désignant la projection de **452**
$\mathrm{Sym}^n_T(X)$ sur T, le lemme suivant, qui se démontre comme 6.3.21 :

Lemme 6.3.22.1. Avec les notations précédentes et si, localement sur T, le torseur K est trivial, alors il existe, à isomorphisme unique près, un et un seul torseur K_n sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, muni d'un morphisme $\alpha : f_*K \to f_{n*}(K_n)$, qui pour g section locale (fppf) de f_*G_X et k section locale de f_*K vérifie $\alpha(gk) = g_n \cdot \alpha(k)$ (notation de 6.3.13 pour g_n ; la définition de g_n ici utilise l'hypothèse de platitude etc.).

Le cas général se traitera par une descente un peu canulée. Tout d'abord :

Proposition 6.3.23. Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd} \tag{6.3.23.1}$$

de T-schémas plats de présentation finie et quasi-projectifs, avec u étale surjectif. Alors, le système semi-simplicial des schémas $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1})$ est un hyperrecouvrement pour la topologie étale du schéma $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$.

Preuve. a) On aura à utiliser le résultat auxiliaire.

. Soient (X, Y, T) comme plus haut, $t \in T$, Z un T-schéma somme d'un nombre fini de T-schémas $\mathrm{Spec}(k_i)$, pour k_i extension finie de k_t,[78] et un diagramme commutatif de T-schémas **453**

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, hook', "x"'] \arrow[dr, hook, "y"] & \\ X_t \arrow[rr, "u"] & & Y_t, \end{tikzcd} \tag{6.3.23.3}$$

tel que x et y soient des immersions fermées. Soit $z \in \mathrm{Sym}^n_T(Z)$, et soient $x(z)$ et $y(z)$ ses images dans $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ et $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$. Alors, $\mathrm{Sym}^n_T(u)$ est étale en $x(z)$.

La formation du schéma $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ est compatible à tout changement de base $T' \to T$ (5.5.2.7). Par réduction au cas noethérien, on en déduit que $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ est de présentation finie sur T ; il est par ailleurs plat sur T (5.5.2.4). Grâce au critère de platitude fibre par fibre, on se ramène pour prouver (6.3.23.2) au cas T spectre d'un corps. Le complété de $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ en z a alors pour algèbre affine la limite projective des algèbres affines localisées en $x(z)$ des schémas $\mathrm{Sym}^n_T(Z_k)$, pour

[78]N.D.E. : ici k_t désigne le corps résiduel de T en t.

Z_k voisinage infinitésimal de Z dans X. Par hypothèse, u induit des isomorphismes entre les voisinages infinitésimaux de Z dans X et dans Y. Le complété de $\mathrm{Sym}^n_T(u)$ en $x(z)$ et $y(z)$ est donc un isomorphisme, et ceci prouve (6.3.23.2).

On déduit de 6.3.23.2 que le schéma somme, pour $z \in \mathrm{Sym}^n_T(Z)$, des hensélisés en $y(z)$ de $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$ ne dépend que de Z et du T-schéma X^h_Z somme des hensélisés de X en les divers points de Z. On désignera ce schéma par la notation $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T(X^h_Z)$; il est fonctoriel en X^h_Z.

454 b) Par passage à la limite, pour prouver 6.3.23, il suffit de montrer que pour $y \in \mathrm{Sym}^n_T(Y)$, fermé dans sa fibre, l'image réciproque sur l'hensélisé de $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$ en y du schéma simplicial $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1})$ est un hyperrecouvrement pour la topologie étale. Ce problème est local sur T pour la topologie étale ; on se ramène par là au cas où il existe un diagramme (6.3.23.3) avec $y = x(z)$ (en tuant les extensions résiduelles par une extension séparable de k_t). Le système semi-simplicial considéré se déduit alors du système

$$\mathrm{Sym}^{h\,n}_T((X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{k+1}), \quad \text{augmenté vers} \quad \mathrm{Sym}^{h\,n}_T(Y^h_Z)$$

par changement de base, de sorte qu'il suffit de considérer ce dernier. Le système semi-simplicial des $(X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{k+1}$ est semi-simplicialement homotope au système constant Y^h_Z, car $X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z$ admet une section. Le système $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T((X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{h+1})$ est donc de même homotope à $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T(Y^h_Z)$, et en particulier en est un hyperrecouvrement. Ceci prouver 6.3.23.

6.3.24. Soient $f : Y \to T$ un morphisme quasi-projectif plat de présentation finie de S-schémas, et K un G_Y-torseur sur Y. Considérons le problème suivant :

. Définir, pour tout morphisme $u : X \to Y$, avec X quasi-projectif plat de présentation finie sur T, un torseur $(u^*K)_n$ sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, et pour tout $v : X' \to X$ un isomorphisme $c_v : (v^*u^*K)_n \simeq \mathrm{Sym}^n_T(v)^*(u^K)_n$, de sorte que

455 (i) les isomorphismes c_v sont compatibles à la composition ;

(ii) pour u^*K localement trivial sur T, on retrouve le torseur de 6.3.22.1, et sa variance.

D'après 6.3.23, la question d'existence et d'unicité d'une solution à 6.3.24.0, pour tout torseur déduit de K par une image réciproque du type envisagé en 6.3.24.0, est une question locale pour la topologie étale sur Y. En particulier, si G vérifie (6.3.21.1), le problème 6.3.24.0 admet une et une seule solution.

Supposons maintenant que G vérifie :

(6.3.24.1). Pour tout entier n et pour tout diagramme de S-schémas affines

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & T & \end{tikzcd},$$

avec f et g plats de présentation finie et u fini localement libre surjectif, le schéma semi-simplicial tronqué $(\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1}))_{0 \le k \le 2}$, augmenté vers $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$, est de descente (Giraud [3]) pour la catégorie des G-torseurs.

6.3.24.1 bis. On déduit de façon standard de 6.3.23 que la condition (6.3.24) implique la condition analogue, où on suppose seulement f et g plats de présentation finie quasi-projectifs et u plat surjectif. Localement pour la topologie étale, u admet en effet des quasi-sections finies localement libres et on conclut par 6.3.23 et Giraud [3] appliqué à un diagramme formant carré de données de descente.

Etant donné un G_Y-torseur K sur un T-schéma Y quasi-projectif plat de présentation finie, il existe par définition un morphisme fidèlement plat de présentation finie $u : X \to Y$ tel que u^*K soit trivial.[79] Si u_i désigne la projection de $(X/Y)^{i+1}$ sur Y $(i \geq 0)$, les torseurs $(u_i^*K)_n$ (6.3.22.1) sur les schémas $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{i+1})$ forment une donnée de descente $(i = 0, 1, 2)$ sur ce schéma semi-simplicial augmenté vers $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$. Supposons que G vérifie la condition : **456**

(6.3.24.2). Les données de descentes construites plus haut sont toutes effectives (cf. 6.3.24).

Alors, on désignera par K_n le torseur sur $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$ (déterminé à isomorphisme unique près) défini par cette donnée de descente.

6.3.25. Supposons que G vérifie (6.3.21.1) ou les conditions (6.3.24) (456). On laisse au lecteur le soin de donner un sens au formulaire suivant et de le vérifier :

. Changement de base. Soit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T' \arrow[r, "g"'] & T. \end{tikzcd}$$

Désignons par g'_n la flèche de $\mathrm{Sym}^n_{T'}(X')$ dans $\mathrm{Sym}^n_T(X)$. Pour X torseur sous G sur X, on a

$$g'^*_n K_n \simeq (g'^* K)_n.$$

Soit maintenant $f : X \to T$ et K un G_X-torseur sur X. **457**

. Changement de groupe. Soit $r : G_1 \to G_2$ un morphisme entre groupes vérifiant tous deux (6.3.21.1) ou (6.3.24), (456). On a

$$r(K_n) \simeq r(K)_n.$$

. Additivité en K. On a

$$(K' + K'')_n \simeq K'_n + K''_n.$$

. Additivité en n. Soient n_1 et n_2 deux entiers, $n = n_1 + n_2$ et

$$\alpha : \mathrm{Sym}_T{}^{n_1}(X) \times_T \mathrm{Sym}_T{}^{n_2}(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_T(X)$$

la flèche canonique ; on a alors

$$\alpha^* K_n \simeq \mathrm{pr}_1^* K_{n_1} + \mathrm{pr}_2^* K_{n_2}.$$

. Multiplicativité en n. Soient n et m deux entiers et α la flèche canonique de $\mathrm{Sym}^n_T(\mathrm{Sym}^m_T(X))$ dans $\mathrm{Sym}^{nm}_T(X)$ (cf. 6.3.3). On a

$$\alpha^*(K_{nm}) \simeq (K_m)_n.$$

6.3.26. Supposons que G vérifie (6.3.21.1) ou (6.3.24), (456). Si $f : X \to T$ est un morphisme fini localement libre de rang n entre S-schémas, si t est la section (6.3.4.3) de $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, et si K est un G_X-torseur sur X, on définit un G_T-torseur $\mathrm{Tr}_f(K)$ sur T par la formule

$$\mathrm{Tr}_f(K) = t^*(K_n). \tag{6.3.26.1}$$

Si f est localement libre, on définit $\mathrm{Tr}_f(K)$, localement sur T, par la même formule. Cette définition, via un isomorphisme canonique et fonctoriel, est équivalente à la définition 6.3.21 dans leur domaine commun de validité (la définition 6.3.21 fournissant une solution au problème de descente posé). On déduit aussitôt de (6.3.25.1), (6.3.25.2) et **458**

[79]N.D.E. : on peut supposer T affine. Alors il existe u comme énoncé qu'on peut même supposer affine pour pouvoir ensuite appliquer l'alinéa précédent.

(6.3.25.3) que le foncteur Tr_f est compatible aux changements de base $T' \to T$, compatible aux changements de groupe $r : G_1 \to G_2$, compatible à l'addition des torseurs.

La commutativité du bord extérieur du diagramme (6.3.15.2), et (6.3.25.1) (6.3.25.4) fournissent une compatibilité à la composition des morphismes :

$$\mathrm{Tr}_{fg}(K) \simeq \mathrm{Tr}_f(\mathrm{Tr}_g(K)).$$

6.3.27. Dans le cas particulier des courbes relatives, on a de plus :

Construction 6.3.27.1. Si $f : X \to S$ est une courbe lisse et quasi-projective sur S, D_1 et D_2 deux diviseurs relatifs finis sur S et K un G-torseur sur X, on a, posant $\mathrm{Tr}_{D/S}(K) = \mathrm{Tr}_{D/S}(K|D)$, un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Tr}_{D_1+D_2}(K) \simeq \mathrm{Tr}_{D_1}(K) + \mathrm{Tr}_{D_2}(K).$$

Cet isomorphisme se déduit aussitôt de l'isomorphisme (6.3.25.4) et de 6.3.9.1. Enfin les arguments de 6.3.19 fournissent encore :

Construction 6.3.27.2. Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

459 dans lequel X et Y sont des courbes lisses quasi-projectives sur S et u un morphisme quasi-fini.

(i) Si D est un diviseur sur X fini sur S et K un torseur sous G sur Y, on a (cf. note p. 743) :

$$\mathrm{Tr}_{D/S}(u^*K) \simeq \mathrm{Tr}_{(u_*D)/S}(K).$$

(ii) Si E est un diviseur sur Y fini sur S, K un torseur sous G sur X et si u est fini, on a

$$\mathrm{Tr}_{E/S}(\mathrm{Tr}_{X/Y}(K)) \simeq \mathrm{Tr}_{u^*E/S}(K).$$

Proposition 6.3.28. Soient A et B deux R-algèbres (commutatives) et $u : A \to B$ un homomorphisme qui fasse de B un A-module localement libre de type fini et fidèle. Alors le complexe co-semi-simplicial d'algèbres $(TS^n_R(\bigotimes_A^{k+1} B))_{k\geq 0}$ est, en tant que $TS^n_R(A)$-module différentiel co-semi-simplicial, une résolution scindée de $TS^n_R(A)$.

Preuve. Le complexe de modules associé au module co-semi-simplicial $TS^n_R(\bigotimes_A^{k+1} B)$ ne dépend que du A-module B, muni d'un homomorphisme de modules $u : A \to B$. En tant que A-module, B peut s'écrire $B = A \oplus L$, et ceci permet d'expliciter un opérateur d'homotopie.

Rappelons que :

Proposition 6.3.29. Soient A un anneau, B^* une A-algèbre co-semi-simpliciale, et $c : A \to B^*$ le morphisme structural. Pour que le foncteur image réciproque de modules (= extension des scalaires) ϵ^* soit fidèle (resp. pleinement fidèle) il suffit que la suite de A-modules

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B^0$$

460 (resp. $0 \to A \to B^0 \xrightarrow{j_0 - j_1} B^1$) soit exacte, et le reste après tensorisation par un quelconque A-module.

La démonstration est triviale et laissée au lecteur.

On déduit de façon standard de (6.3.28) (6.3.29) le

Corollaire 6.3.30. La condition (6.3.24) est vérifiée par tout groupe affine G.

(Utiliser qu'un torseur sous G est représentable par un schéma affine sur T.)

Il ne devrait pas être difficile d'étendre 6.3.30 à tout groupe G représentable par un espace algébrique [79]. Je conjecture que la condition (456) est vérifiée par tout groupe représentable par un espace algébrique, et plat. On a l'énoncé canularesque :

Proposition 6.3.31. Soit une suite exacte sur S

$$0 \to G \xrightarrow{r} G' \xrightarrow{u} H \to 0.$$

Supposons que G' et H, donc G vérifient (6.3.13.1), que G' vérifie (6.3.21.1) et que G vérifie (6.3.24). Alors, G vérifie (456).

Ceci s'applique par exemple à un groupe affine noyau d'un épimorphisme de groupes représentables et lisses.

Preuve de 6.3.31. Soit K un G-torseur sur X. Par 6.3.23, la question est locale sur X **461**
pour la topologie étale ; il suffit donc de traiter le cas où $r(K)$ est trivial. Les G-torseurs K tels que $r(K)$ soit trivial s'identifient aux G'-torseurs triviaux K' munis d'un isomorphisme $k : H \xrightarrow{\sim} u(K')$. Posons $Z = \mathrm{Sym}^n_T(X)$. Le morphisme de torseurs triviaux k induit $k_n : H_Z \xrightarrow{\sim} u(K'_n)$, et le G-torseur correspondant sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ représente la donnée de descente considérée.

7. Appendice

462

7.0. Préliminaires. Nous utiliserons dans cet appendice les résultats de VBIS, dont nous conservons les notations.

7.0.1. Soit $\mathrm{Sch}_!$ la catégorie dont les objets sont les schémas quasi-compacts et quasi-séparés, les morphismes étant les morphismes de schémas séparés de type fini : on désigne par $\mathscr{E}$ la catégorie bifibrée au-dessus de $\mathrm{Sch}_!$, à catégories fibres des catégories opposées à des topos, définie par les faisceaux étales sur les schémas (Vbis 4.3.0). On se fixe une fois pour toutes un objet R de $\mathrm{Sch}_!$ et on désigne par $\mathscr{E}_R$ la catégorie bifibrée au-dessus de $\mathrm{Sch}_{!R}$ déduit de $\mathscr{E}$. Soit enfin $\mathscr{A}$ un anneau du topos $\underline{\Gamma}(\mathscr{E}_R)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\mathscr{A}$ est une section cocartésienne de $\mathscr{E}_R$ au-dessus de $\mathrm{Sch}^\circ_{!R}$.

(ii) Pour tout schéma X de $\mathrm{Sch}_{!R}$, $\mathscr{A}_X$ est un faisceau de torsion.

Ceci posé, nous travaillerons avec la catégorie $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(\mathscr{E}_R), \mathscr{A})$ (1.3.5).

On se propose de définir, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathrm{Sch}_{!R}$, un foncteur $Rf_! : D(X, \mathscr{A}_X) \to D(Y, \mathscr{A}_Y)$, coïncidant avec le foncteur précédemment défini lorsque f est compactifiable, et faisant des catégories $D(X, \mathscr{A}_X)$ pour X variable une catégorie cofibrée au-dessus de $\mathrm{Sch}_{!R}$.[80]

[79] Algebraic Spaces par M. Artin. Yale University, Whittemore Lectures, May 1969.

[80] N.D.E. : Tout morphisme de $\mathrm{Sch}_!$ est compactifiable d'après le théorème de compactification de Nagata (voir la N.D.E. (47) page 649). Cet appendice montre comment éviter l'usage du théorème de compactification dans la définition de $Rf_!$ en s'appuyant sur le lemme de Chow (7.0.6).

7.0.2. Bien que tout les résultats de cet appendice soient énoncés dans le cadre explicité en 7.0.1, on pourrait les transcrire avec des modifications évidentes dans le cadre suivant : on prend pour section de $\underline{\Gamma}(\mathscr{E}_R)$ la section constante de valeur le faisceau constant $\mathbf{Z}$ et on se limite pour tout schéma X à la catégorie dérivée $D^*_{\mathrm{tors}}(X)$ définie par les complexes de faisceaux de groupes abéliens dont les faisceaux de cohomologie sont de torsion (4.3.1).

463 Lemme 7.0.3. Soit un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "j"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{7.0.3.1}$$

où f, f' sont propres et j, j' sont des immersions. Alors pour tout complexe $K^{\boldsymbol{\cdot}}$ de $D^+_{\mathrm{tors}}(X')$, la flèche canonique[81]

$$j_! \circ R^+ f'_*(K^{\boldsymbol{\cdot}}) \longrightarrow R^+ f_* \circ j_!(K^{\boldsymbol{\cdot}})$$

est un isomorphisme.

En vertu du « lemma on way-out functors » ([6] I 7.1), il suffit de montrer que pour tout entier i et pour tout faisceau F de torsion, la flèche

$$j_! \circ R^i f'_*(F) \longrightarrow R^i f_* \circ j_!(F) \tag{7.0.3.2}$$

est un isomorphisme.

En prenant les images fermées de j et j' on est ramené au cas où j et j' sont des immersions ouvertes dont les images sont partout denses : la propreté de f et de f' entraîne alors que le diagramme (7.0.3.1) est cartésien. Dans ces conditions, le théorème du changement de base pour un morphisme propre, sous la forme XII 5.2, montre que, pour tout point géométrique ξ de Y, la flèche $(j_! \circ R^i f'_*(F))_\xi \to (R^i f_* \circ j_!(F))_\xi$ est un isomorphisme.

Construction 7.0.4. Soient D une catégorie, X et Y deux D-objets de $\mathrm{Sch}_{!R}$ tels que pour toute flèche $\alpha \to \beta$ de D, les morphismes $X_\beta \to X_\alpha$ et $Y_\beta \to Y_\alpha$ soient propres. Soit $j : X \to Y$ un morphisme tel que pour tout objet α de D, $j_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ soit une immersion : l'isomorphisme (7.0.3.2) pour $i = 0$ vérifie les conditions de compatibilités usuelles et permet de construire un foncteur exact :

$$j_! : \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(\overline{X}), \mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(\overline{Y}), \mathscr{A})$$

464 (cf. 1.2.5 pour les notations) qui induit un foncteur triangulé, encore noté $j_!$:

$$j_! : D(\underline{\Gamma}(\overline{X}), \mathscr{A}) \longrightarrow D(\underline{\Gamma}(\overline{Y}, \mathscr{A}))$$

Alors, pour tout objet α de D, on a un diagramme commutatif, où $j_{\alpha!}$ désigne le foncteur « prolongement par 0 » usuel :

$$\begin{tikzcd} D(\underline{\Gamma}(\overline{X}), \mathscr{A}) \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "Re^*_\alpha"'] & D(\underline{\Gamma}(\overline{Y}), \mathscr{A}) \arrow[d, "Re^*_\alpha"] \\ D(X_\alpha, \mathscr{A}_{X_\alpha}) \arrow[r, "j_{\alpha!}"'] & D(Y_\alpha, \mathscr{A}_{Y_\alpha}). \end{tikzcd}$$

[81] N.D.E. : la définition de cette flèche est semblable à celle de (5.1.5.2) modulo un dévissage facile.

Construction 7.0.5. Soit un diagramme commutatif dans $\mathrm{Sch}_{!R}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd} \tag{7.0.5.1}$$

où i, i' sont des immersion, f un morphisme propre et f' un morphisme propre surjectif. Il définit un diagramme commutatif d'objets simpliciaux de $\mathrm{Sch}_{!R}$

$$\begin{tikzcd} {[X'|Y']} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "u_{f'}"'] & {[X|Y]} \arrow[d, "u_f"] \\ C^{\Delta}_{Y'} \arrow[r, "i"'] & C^{\Delta}_{Y} \end{tikzcd} \tag{7.0.5.2}$$

où $j_n : [X'|Y']_n \to [X|Y]_n$ est une immersion pour tout n. Avec ces notations, on a un isomorphisme canonique

$$i_! \xrightarrow{\sim} R^+\overline{u}_{f*} \circ j_! \circ L^+\overline{u}^*_{f'}.$$

En prenant les images fermées de i et i' on peut supposer que i et i' sont des immersions ouvertes dont les images sont partout denses. Le diagramme (7.0.5.1) est alors cartésien et f est surjectif. De plus, pour tout entier n, j_n est une immersion ouverte et **465**
le diagramme

$$\begin{tikzcd} {[X'|Y']_n} \arrow[r, "j_n"] \arrow[d] & {[X|Y]_n} \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Dès lors $L^+\overline{u}^*_f \circ i_!$ est isomorphe à $j_! \circ L^+\overline{u}^*_{f'}$: utilisant le fait que u_f est une augmentation de descente cohomologique (4.3.1), on trouve une suite d'isomorphismes

$$i_! \xrightarrow{\sim} R^+\overline{u}_{f*} \circ L^+(\overline{u}^*_f) \circ i_! \xrightarrow{\sim} R^+\overline{u}_{f*} \circ j_! \circ L^+\overline{u}^*_{f'}$$

d'où l'isomorphisme voulu.[82]

Enfin, nous utiliserons la variante suivante du lemme de Chow, dont la démonstration se trouvera dans EGA II 2ième édition,[83] et qui est une amélioration de (XII 7.1) :

Lemme 7.0.6. Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé et $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ S & \end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) p est propre et surjectif

---

[82]N.D.E. : plus directement, sans supposer f' surjectif, on a encore une suite de flèches canoniques

$$i_! \longrightarrow i_! R^+\overline{u}_{f'*} L^+\overline{u}^*_{f'} \xrightarrow{\sim} R^+\overline{u}_{f*} j_! L^+ u^*_{f'},$$

dont la deuxième est un isomorphisme (7.0.3). Lorsque f' est surjectif la première en est aussi d'après la descente cohomologique et le composé coïncide avec l'isomorphisme construit dans le texte.

[83]N.D.E. : Voir [C, 2.6], cité dans la N.D.E. (47) page 649.

(ii) il existe un ouvert dense U de X tel que p induise un isomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur U

466 (iii) f' est quasi-projectif.

7.1. Définition de $R^+ f_!$.

DÉFINITION 7.1.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Une pseudo-compactification de f consiste en la donnée d'un diagramme commutatif

(7.1.1.0)
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "p_1"'] & T_1 \arrow[ddl, "f_1"] \\ X \arrow[d, "f"'] & \\ S & \end{tikzcd}$$

où p_1 est propre et surjectif, j_1 est une immersion et f_1 est propre.

7.1.2. Soit $f : X \to S$ un morphisme de $\mathrm{Sch}_{!R}$: d'après le lemme de Chow (7.0.6), f possède une pseudo-compactification (p_1, j_1, f_1). Le diagramme (7.1.1.0) définit un morphisme
$$[X_1|X] \xrightarrow{j_1} [T_1|S]$$
encore noté j_1, tel que j_{1n} soit une immersion pour tout n. On pose alors $R^{+(1)} f_! = R^+ \overline{u}_{f_1 *} \circ j_{1!} \circ L^+ \overline{u}^*_{p_1}$ de sorte que l'on obtient un foncteur triangulé de $D^+(X, \mathscr{A}_X)$ dans $D^+(S, \mathscr{A}_S)$.

CONSTRUCTION 7.1.3. Pour tout couple $((p_1, j_1, f_1), (p_2, j_2, f_2))$ de pseudo-compactifications de f, on a un isomorphisme $\alpha_{12} : R^{+(1)} f_! \to R^{+(2)} f_!$ tel que pour toute autre pseudo-compactification (p_3, j_3, f_3), on ait $\alpha_{23} \circ \alpha_{12} = \alpha_{13}$.

a) On définit un système simplicial double $[[X_1, X_2|X]]$ en posant
$$[[X_1, X_2|X]]_{[n]\times[m]} = [X_1|X]_n \times [X_2|X]_n$$
De même on pose
$$[[X_1|X]]_{[n]\times[m]} = [X_1|S]_n,$$
les morphismes $[[X_1|X]]_{[n]\times[m]} \to [[X_1|X]]_{[n]\times[m']}$ induits par les morphismes $[m'] \to [m]$ étant tous égaux à l'identité. On définit de la même manière les systèmes simpliciaux doubles $[[T_1, T_2|S]]$ et $[[T_1|S]]$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & {[[T_1, T_2|S]]} \arrow[rr] \arrow[drr, "u_{f_1 f_2}"] & & {[[T_1|S]]} \arrow[d, "u_{f_1}"] \\ {[[X_1, X_2|X]]} \arrow[ur, "j_{12}"] \arrow[rr] \arrow[ddrr, "u_{p_1 p_2}"'] & & {[[X_1|X]]} \arrow[ur, "j_1"'] \arrow[dd, "u_{p_1}"] & C_S^{\Delta\times\Delta} \\ & & & \\ & & C_X^{\Delta\times\Delta} \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

où j_{12} est une immersion degré par degré. Le procédé de calcul exposé dans Vbis 2.3 permet de construire un morphisme **467**

$$R^{+(1)} f_! \xrightarrow{\alpha_1} R^+ \overline{u_{f_1 f_2}}_* \circ j_{12!} \circ L^+ \overline{u_{p_1 p_2}}^* = R^{+(1,2)} f_!$$

qui s'obtient à partir d'un morphisme de triple complexes de faisceaux sur S.

b) α_1 est un isomorphisme :

Pour démontrer ceci, on peut fixer le premier indice n provenant de $\big[[T_1, T_2]\big]_{[n]\times[m]}$ dans le morphisme de triple complexes précédent et regarder le morphisme de double complexes ainsi obtenu. On vérifie que ce morphisme n'est autre que l'isomorphisme défini dans le lemme 7.0.5 pour le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{[X_1|X]_n \times X_2} \arrow[r] \arrow[d] & {[T_1|S]_n \times T_2} \arrow[d] \\
{[X_1|X]_n} \arrow[r] & {[T_1|S]_n}
\end{tikzcd}$$

c) On construit de la même manière un isomorphisme

$$R^{+(2)} f_! \xrightarrow{\alpha_2} R^+ \overline{u_{f_1 f_2}}_* \circ j_{12!} \circ L^+ \overline{u_{p_1 p_2}}^*$$

et l'on pose $\alpha_{12} = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$.

Pour vérifier la relation $\alpha_{23} \circ \alpha_{12} = \alpha_{13}$, on utilise un objet simplicial triple : on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient un diagramme commutatif : **468**

$$\begin{tikzcd}
R^{+(2,3)} f_! \arrow[dr] & & R^{+(2)} f_! \arrow[ll] \arrow[rr] & & R^{+(1,2)} f_! \arrow[dl] \\
 & & R^{+(1,2,3)} f_! & & \\
R^{+(3)} f_! \arrow[uu] \arrow[dr] & & & & R^{+(1)} f_! \arrow[uu] \arrow[dl] \\
 & & R^{+(1,3)} f_! \arrow[uu] & &
\end{tikzcd}$$

Construction 7.1.4. Soient $Z \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} X$ deux morphismes de $\mathrm{Sch}_{!R}$. Pour tout triple $((p_1, j_1, f_1), (p_2, j_2 g_2), (p_3, j_3, (fg)_3))$, où (p_1, j_1, f_1) est une pseudo-compactification de f, (p_2, j_2, g_2) une pseudo-compactification de g et $(p_3, j_3, (fg)_3)$ une pseudo-compactification de fg, on a un isomorphisme $R^{+(1)} f_! \circ R^{+(2)} g_! \xrightarrow{\sim} R^{+(3)} (fg)_!$ compatible avec les isomorphismes α_{ij} définis précédemment.

Nous procéderons en plusieurs étapes :

. Soit (p_1, j_1, f_1) (resp. (p_2, j_2, f_2)) une pseudo-compactification de $f : Y \to X$ (resp. de $g : Z \to Y$) :

(7.1.4.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[d, "g"] & Z_2 \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, hook, "j_2"] & T_2 \arrow[dll, "g_2"] \\
T_1 \arrow[drr, "f_1"'] & Y_1 \arrow[l, hook', "j_1"'] \arrow[r, "p_1"] & Y \arrow[d, "f"] & & \\
 & & X & &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $Z' = Z \times_Y Y_1 \to Y_1$ déduit de g par changement de base est muni d'une pseudo-compactification :

(7.1.4.1.2)
$$\begin{tikzcd}
T_2' = T_2 \times_Y Y_1 \arrow[ddr, "g_2'"'] & Z_2 \times_Y Y_1 = Z_2' \arrow[l, hook', "j_2'"'] \arrow[d, "p_2'"] \\
 & Z \times_Y Y_1 = Z' \arrow[d, "g'"] \\
 & Y_1
\end{tikzcd}$$

469 On choisit maintenant une pseudo-compactification de $j_1 \circ g_2'$[84]

(7.1.4.1.3)
$$\begin{tikzcd}
T_{12} \arrow[dd, "g_2''"'] & T_2'' \arrow[l, hook', "j_1'"'] \arrow[d, "p"] \\
 & T_2 \times_Y Y_1 = T_2' \arrow[d, "g_2'"] \\
T_1 & Y_1 \arrow[l, hook', "j_1"']
\end{tikzcd}$$

qui définit une pseudo-compactification du composé fg : on notera $R^{+(12)}(fg)_!$ le foncteur correspondant.

. Les données précédentes permettent de définir un isomorphisme $R^{+(12)}(fg)_! \xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_!$:

On dispose d'un diagramme commutatif, où $Z_2'' = T_2'' \times_{T_2'} Z_2'$ et toutes les flèches se déduisent naturellement de (7.1.4.1.1), (7.1.4.1.2) et (7.1.4.1.3).

(7.1.4.2.1)
$$\begin{tikzcd}
{[T_{12}|X]} \arrow[dr, "g_2''"'] & & {[T_2''|Y]} \arrow[ll, "j_1'"'] \arrow[dr, "g_2'p"] & {[Z_2''|Z]} \arrow[l, "j_2''"'] \arrow[d, "l"] \arrow[r, "r"] & C_Z^{\Delta} \arrow[d, "g"] \\
 & {[T_1|X]} \arrow[drrr, "u_{f_1}"'] & & {[Y_1|Y]} \arrow[ll, "j_1"'] \arrow[r, "u_{p_1}"'] & C_Y^{\Delta} \arrow[d, "f"] \\
 & & & & C_X^{\Delta}
\end{tikzcd}$$

[84]N.D.E. : dans le texte original, on a pris une compactification, qui est possible grâce au théorème de compactification. Le but de l'appendice étant d'éviter ce théorème (cf. la N.D.E. (80) page 751), l'éditeur s'est permis de la remplacer par une pseudo-compactification et de légèrement modifier 7.1.4.2. Une autre solution serait de se borner aux pseudo-compactifications (p_1, j_1, f_1) dont f_1 est *projectif*.

On va définir une flèche naturelle : **470**

$$\beta\ :\ R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \longrightarrow R^{+(12)}(fg)_!$$

dont on va montrer que c'est un isomorphisme.

Pour cela nous utiliserons deux lemmes :

Lemme 7.1.4.2.2. Soit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "p_1"'] & T_1 \arrow[d, "h'"] \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "h"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

où h, h' sont propres, p_1 est propre et surjectif et j, j_1 sont les immersions. Alors la flèche canonique

$$R^+h_* \circ j_! \longrightarrow R^{+(1)}f_!$$

est un isomorphisme.

En effet, d'après (7.0.5) la flèche

$$j_! \longrightarrow R^+\overline{u}_{h'*} \circ j_{1!} \circ L^+\overline{u}^*_{p_1}$$

est un isomorphisme. D'où le résultat en appliquant R^+h_*.

Lemme 7.1.4.2.3. Avec les notations du diagramme (7.1.4.2.1), les flèches canoniques

$$R^{+(1)}f_! \circ R^+\overline{u}_{p_1*} \longrightarrow R^+\overline{u}_{f_1*} \circ j_{1!}$$
$$R^{+(2)}g_! \circ R^+\overline{r}_* \longrightarrow R^+\overline{u}_{p_1*} \circ R^+(g'_2p)_* \circ j''_{2!}$$

sont des isomorphismes.

Nous n'établirons que le premier isomorphisme, laissant au lecteur le soin d'en déduire le deuxième. **471**

Avec des notations évidentes et les notations de 7.1.3 a), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & {[Y_1|Y]} \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dd, "\overline{u}_{p_1}"] & & {[T_1|X]} \arrow[dd, "\overline{u}_{f_1}"] \\
{[[Y_1,Y_1|Y]]} \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "q"'] & & {[[T_1,T_1|X]]} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & Y \arrow[rr, "f"] & & X \\
{[Y_1|Y]} \arrow[ur, "\overline{u}_{p_1}"] \arrow[rr, "j_1"] & & {[T_1|X]} \arrow[ur, "\overline{u}_{f_1}"'] &
\end{tikzcd}$$

où q et k sont les deux projections de $[[Y_1,Y_1|Y]]$ à $[Y_1|Y]$. Grâce à la descente cohomologique, $R^+\overline{u}_{f_1*} \circ j_{1!}$ s'identifie à $R^+\overline{u}_{f_1*} \circ j_{1!} \circ R^+q_*L^+q^*$, qui, d'après 7.0.3 appliqué aux faces antérieure et supérieure du cube ci-dessus, s'identifie à $R^+\overline{u}_{f_1*} \circ j_{1!} \circ R^+k_* \circ L^+q^*$. En vertu du théorème de changement de base, ce dernier foncteur s'identifie à $R^+\overline{u}_{f_1*} \circ j_{1!} \circ L^+\overline{u}_{p_1*} \circ R^+\overline{u}_{p_1*}$, qui est par définition $R^{+(1)}f_! \circ R^+\overline{u}_{p_1*}$.[85]

[85]N.D.E. : la démonstration dans le texte original est légèrement différente et utilise 7.1.4.2.2.

Le lemme (7.1.4.2.3) étant établi, on dispose d'une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
R^{+(12)}(fg)_! &= R^+\overline{u}_{f_1*}\circ R^+g_2''\circ j_{1!}'\circ j_{2!}''\circ L^+\overline{r}^*\\
&\xleftarrow{\sim} R^+\overline{u}_{f_1*}\circ j_{1!}\circ R^+(g_2'p)_*\circ j_{2!}'\circ L^+\overline{r}^*\\
&\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_!\circ R^+\overline{u}_{p_1*}\circ R^+(g_2'p)_*\circ j_{2!}'\circ L^+\overline{r}^*\\
&\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_!\circ R^{+(2)}g_!\circ R^+\overline{r}_*\circ L^+\overline{r}^*\\
&\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_!\circ R^{+(2)}g_!
\end{aligned}$$

472 dont le composé donne β.

. Si $(p_3, j_3, (fg)_3)$ est une pseudo-compactification de fg, on définit un isomorphisme

$$R^{+(1)}f_!\circ R^{+(2)}g_! \xrightarrow{\gamma_{123}} R^{+(3)}fg_!$$

en composant $\alpha_{(12)3}$ avec β.

. Soient maintenant $(p_{1'}, j_{1'}, f_{1'})$ et $(p_{2'}, j_{2'}, g_{2'})$ deux autres pseudo-compactifications de f et de g et un diagramme (7.1.4.1.3) ; on vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R^{+(12)}(fg)_1 \arrow[d, "\alpha_{(12)(1'2')}"'] & R^{+(1)}f_1\circ R^{+(2)}g_! \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha_{11'}*\alpha_{22'}"] \\
R^{+(1'2')}(fg)_! & R^{+(1')}f_!\circ R^{+(2')}g_! \arrow[l, "\beta'"]
\end{tikzcd}$$

en considérant un diagramme du type (7.1.4.2.1) où les objets simpliciaux sont remplacés par des objets simpliciaux doubles.

On en conclut que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R^{+(3)}(fg)_! \arrow[d, "\alpha_{33'}"'] & R^{+(1)}f_!\circ R^{+(2)}g_! \arrow[l, "\gamma_{123}"'] \arrow[d, "\alpha_{11'}*\alpha_{22'}"] \\
R^{+(3')}(fg)_! & R^{+(1')}f_!\circ R^{+(2')}g_! \arrow[l, "\gamma_{1'2'3'}"']
\end{tikzcd}$$

pour toute pseudo-compactification $(p_{3'}, j_{3'}, (fg)_{3'})$ de fg, ce qui achève la démonstration de 7.1.4.

7.1.5. En choisissant pour tout morphisme f de $\mathrm{Sch}_{!R}$ une pseudo-compactification, de telle manière qu'à un morphisme identique soit associée la pseudo-compactification triviale, on définit pour tout morphisme $f : X \to Y$ un foncteur triangulé

$$R^+f_! : D^+(X, \mathscr{A}_X) \longrightarrow D^+(Y, \mathscr{A}_Y)$$

473 et tout couple (f, g) de morphisme, un isomorphisme

$$R^+fg_! \overset{c_{fg}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} R^+f_!\circ R^+g_!$$

De plus si f est une identité, $R^+f_!$ est le foncteur identique et c_{fg} est l'identité.

Proposition 7.1.6. La correspondance $f \to R^+f_!$ définit un pseudo-foncteur normalisé de $\mathrm{Sch}_{!R}$ dans la 2-catégorie des catégories. En d'autres termes, les catégories $D^+(X, \mathscr{A}_X)$ pour X objet de $\mathrm{Sch}_{!R}$ peuvent être organisées en catégorie cofibrée sur $\mathrm{Sch}_{!R}$ en posant, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathrm{Sch}_{!R}$:

$$\mathrm{Hom}_f(K, L) = \mathrm{Hom}(R^+f_!K, L)$$

avec $K \in D^+(X, \mathscr{A}_X)$ et $L \in D^+(Y, \mathscr{A}_Y)$.

Il s'agit de voir que l'identification $R^+fg_! \xrightarrow[\sim]{c_{fg}} R^+f_! \circ R^+g_!$ est compatible avec les composés triples. Soit donc $h : T \to Z$, $g : Z \to Y$ et $f : Y \to X$ trois morphismes de $\mathrm{Sch}_{!R}$: en vertu de ce qui précède, il suffit, pour vérifier cette compatibilité, de la vérifier après un choix arbitraire de pseudo-compactifications pour h, g et f.

On dispose d'un diagramme :

(7.1.6.1)
$$\begin{tikzcd}
T_5 & T_4 \arrow[l, hook'] \arrow[dr] & T_3 \arrow[l, hook'] \arrow[dr] & T' \arrow[l, hook'] \arrow[r, "p_3"] \arrow[d] & T \arrow[d, "h"] \\
T_5 \arrow[r, phantom] & T_3 \arrow[dr] & T_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dr] & Z' \arrow[l, hook'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g"] \\
 & & T_1 \arrow[drr] & Y_1 \arrow[l, hook'] \arrow[r, "p_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\
 & & & & X
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches obliques sont propres et où p_1, p_2 et p_3 sont propres et surjectifs.

Un diagramme du type (7.1.4.4) construit sur (7.1.6.1) permet alors de conclure.

Proposition 7.1.7. Si $f : X \to S$ est un morphisme compactifiable, le foncteur $Rf_!$ **474**
coïncide avec celui défini dans l'exposé XVII.

En effet, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "p_1"'] & T_1 \arrow[d, "h'"] \\
X \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "h"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

auquel on applique (7.1.4.2.2).

Définition 7.1.8. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathrm{Sch}_!$, le foncteur $R^+f_!$ que l'on vient de définir s'appellera le foncteur image directe à supports propres (au sens des catégories dérivées). Le foncteur $H^q \circ R^+f_!$, noté $R^qf_!$, s'appellera le $q^{\text{ième}}$ foncteur image directe à supports propres.

Avec ces notations, on laisse au lecteur le soin de vérifier la

Construction 7.1.9. Soit (π_1, j_1, f_1) une pseudo-compactification de $f : X \to Y$ et désignons par π_1^n le morphisme canonique $[X_1|X]_n \to X$. Alors, pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X, \mathscr{A}_X)$, il existe deux suites spectrales birégulières :

(7.1.9.1) $$E_1^{pq} = R^qf_!(K^p) \Longrightarrow R^{p+q}f_!(K^\cdot)$$

(7.1.9.2) $$E_1^{pq} = R^q(f \circ \pi_1^p)_!(\pi_1^{p*}(K^\cdot)) \Longrightarrow R^{p+q}f_!(K^\cdot)$$

(Prendre par exemple la résolution flasque canonique de $j_{1!} \circ L^+\overline{u}_{p_1}^*(K^\cdot)$ (cf. XVII (4.2)), puis son image directe par u_{f_1}).

7.2. Quelques propriétés de $^+{}_!$. 475

Proposition 7.2.1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathrm{Sch}_{!R}$ de dimension relative $\leq d$. Alors le foncteur $R^+f_!$ est de dimension cohomologique $\leq 2d$.

Il s'agit de montrer que pour tout faisceau F de $\mathscr{A}_X$-modules sur X, on a $R^if_!(F) = 0$ pour $i > 2d$. (On en déduit alors, par un argument standard, que pour tout complexe $K^\bullet$ de $D^+(X, \mathscr{A}_X)$ tel que $H^i(K^\bullet) = 0$ pour $i > k$, on a $R^if_!(K^\bullet) = 0$ pour $i > k + 2d$).

Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. On définit (6.2.9) une résolution gauche $K^\bullet_{\mathscr{U}} \to F$ de F en posant :

$$K^n_{\mathscr{U}} = \bigoplus_{|P|=-n+1} j_{P!}j_P^*(F)$$

où pour chaque partie P de I, j_P est l'inclusion de $\cup_{i\in P}U_i$ dans X.

On déduit de (7.1.9.1) une suite spectrale

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{|P|=-p+1 \\ P\subset I \text{ non vide}}} R^p(fj_P)_!j_P^*(F) \Longrightarrow R^{p+q}f_!(F)$$

et le fait que fj_P soit compactifiable, cas justiciable de l'exposé XVII, montre que $E_1^{pq} = 0$ pour $p > 0$ et $q > 2d$; on en déduit alors que $R^nf_!(F) = 0$ pour $n > 2d$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 7.2.2. Soient $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathrm{Sch}_{!R}$ et $K^\bullet$ un objet de $D^b(X, \mathscr{A}_X)$ de tor-dimension finie. Alors $R^+f_!(K^\bullet)$ est de tor-dimension finie.

Comme précédemment, soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. La fonctorialité de $K^n_{\mathscr{U}}$ permet de fabriquer une résolution gauche bornée de $K^\bullet$ par des complexes de tor-dimension finie, car cette dernière propriété se vérifie point par point (4.1.9) : nous noterons $K^{\bullet\bullet}_{\mathscr{U}}$ le double complexe ainsi obtenu, le deuxième indice correspondant à celui de $K^\bullet$. Avec les conventions de (Vbis 2.3.2), on dispose pour tout entier n d'une suite exacte, où l'opération $\sigma_{\leq n}$ est prise dans $C^+(C^+(\mathrm{Mod}(X, \mathscr{A}_X))$:

$$0 \longrightarrow (-1)^{n+1}K^{n+1,\bullet}_{\mathscr{U}} \longrightarrow (\sigma_{\leq n+1}(K^{\bullet\bullet}_{\mathscr{U}}))_s \longrightarrow (\sigma_{\leq n}(K^{\bullet\bullet}_{\mathscr{U}}))_s \longrightarrow 0$$

476 d'où un triangle distingué dans $D^+(X, \mathscr{A}_X)$:

$$\begin{tikzcd} & K^{n+1,\bullet}_{\mathscr{U}} \arrow[dr] & \\ (\sigma_{\leq n}(K^{\bullet\bullet}_{\mathscr{U}}))_s \arrow[ur] & & (\sigma_{\leq n+1}(K^{\bullet\bullet}_{\mathscr{U}}))_s \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Utilisant le fait que $R^+f_!(K^{n+1,\bullet}_{\mathscr{U}})$ est de tor-dimension finie pour tout $\sim$ (5.2.10), on en déduit que $R^+f_!((\sigma_{\leq 0}(K^{\bullet\bullet}_{\mathscr{U}}))_s) = R^+f_!(K^\bullet)$ est de tor-dimension finie.

Remarque 7.2.3. L'argument précédent ne permet pas d'affirmer que $R^+f_!(K^\bullet)$ est de tor-dimension $\leq k$ dès que $K^\bullet$ est de tor-dimension $\leq k$ (cf. 7.3.7).

Proposition 7.2.4. Soit un diagramme cartésien dans $\mathrm{Sch}_{!R}$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Alors pour tout complexe $K^{\bullet}$ de $D^{+}(X, \mathscr{A}_X)$, le morphisme canonique

$$g^{*} \circ R^{+} f_{!}(K^{\bullet}) \xrightarrow{\mathrm{ch}_{K^{\bullet}}} R^{+} f'_{!} \circ g'^{*}(K^{\bullet})$$

est un isomorphisme.

Soit (π_1, j_1, f_1) une pseudo-compactification de f : on en déduit par changement de base une pseudo-compactification (π'_1, j'_1, f'_1) de f' et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& T'_1 \arrow[rr] \arrow[dddl, "f'_1"] & & T_1 \arrow[dddl, "f_1"] \\
X'_1 \arrow[ur, "j'_1"] \arrow[rr] \arrow[d, "\pi'_1"'] & & X_1 \arrow[ur, "j_1"'] \arrow[d, "\pi_1"] & \\
X' \arrow[rr, "g'"'] \arrow[d, "f'"'] & & X \arrow[d, "f"] & \\
S' \arrow[rr, "g"'] & & S &
\end{tikzcd}$$

qui permet de définir la flèche ch_K. **477**

On dispose alors, d'après (7.1.9.2), d'un morphisme de suites spectrales birégulières :

$$\begin{tikzcd}
g^{*} \circ R^{q}(f \circ \pi_1^{p})_{!}(\pi_1^{p*}(K^{\bullet})) \arrow[r] \arrow[d, "u_1^{pq}"] & g^{*} \circ R^{p+q} f_{l}(K^{\bullet}) \arrow[d, "\mathrm{ch}_K"] \\
R^{q}(f' \circ \pi_1'^{p})_{!}(\pi_1'^{p}(g'^{*}(K^{\bullet}))) \arrow[r] & R^{+} f'_{!} \circ g'^{*}(K^{\bullet})
\end{tikzcd}$$

et $\mathrm{ch}_{K^{\bullet}}$ est un isomorphisme puisqu'il en est de même pour les u_1^{pq} d'après (5.2.6).

7.3. Définition de $Rf_!$. Nous nous proposons maintenant d'étendre « de façon raisonnable » le foncteur $R^{+} f_{!}$ en un foncteur $Rf_{!} : D(X, \mathscr{A}_X) \to D(Y, \mathscr{A}_Y)$, pour tout morphisme f de $\mathrm{Sch}_{!R}$.

7.3.1. Soit (p_1, j_1, f_1) une pseudo-compactification de f et F un $\mathscr{A}_X$-module : prenant la résolution flasque canonique de $j_{1!} \circ L\overline{u}^{*}_{p_1}(F)$ (cf. 4.2), puis son image directe par f_1, puis le complexe simple associé au complexe double ainsi construit, on obtient un complexe de $\mathscr{A}_Y$-modules :

$$\text{(7.3.1.1)} \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{X}^{0}(F) \xrightarrow{S^{1}(F)} \mathscr{X}^{1}(F) \ldots \mathscr{X}^{n}(F) \xrightarrow{S^{n}(F)} \mathscr{X}^{n+1}(F) \ldots .$$

fonctoriel en F et isomorphe dans $D^{+}(Y, \mathscr{A}_Y)$ à $R^{+} f_{!}(F)$. **478**

D'après 7.2.1 $H^{i}(\mathscr{X}^{\bullet}(F)) = 0$ pour $i > 2d$, où d est un entier tel que la dimension relative de f soit $\leq d$, de sorte que le complexe

$$\text{(7.3.1.2)} \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{X}^{0}(F) \longrightarrow \mathscr{X}^{1}(F) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathscr{X}^{2d-1}(F) \longrightarrow \operatorname{Ker} S^{2d}(F) \longrightarrow 0$$

est canoniquement isomorphe dans $D^{+}(Y, \mathscr{A}_Y)$ au complexe (7.3.1.1). De plus :

Lemme 7.3.2. *Les foncteurs $\mathscr{X}^{0}, \mathscr{X}^{1}, \ldots, \mathscr{X}^{2d-1}$, $\operatorname{Ker} S^{2d}$ sont exacts en F.*

L'exactitude des foncteurs $\mathscr{X}^n$ résulte de l'exactitude de la résolution flasque canonique et du fait que l'image directe par un morphisme d'une suite exacte courte de faisceaux flasques est encore une suite exacte courte.

Pour voir l'exactitude de $\operatorname{Ker} S^{2d}$, on considère, pour une suite exacte courte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ de faisceaux sur X, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} S^{2d}(F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{X}^{2d+1}(F') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{X}^{2d+2}(F') \dots \arrow[d] \\
\ker S^{2d}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{X}^{2d+1}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{X}^{2d+2}(F) \dots \arrow[d] \\
\ker S^{2d}(F'') \arrow[r] & \mathscr{X}^{2d+1}(F'') \arrow[r] & \mathscr{X}^{2d+2}(F'') \dots
\end{tikzcd}$$

et la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \sigma_{\geq 2d+1}(\mathscr{X}^{\bullet}(F')) \longrightarrow \sigma_{\geq 2d+1}(\mathscr{X}^{\bullet}(F)) \longrightarrow \sigma_{\geq 2d+1}(\mathscr{X}^{\bullet}(F'')) \longrightarrow 0$$

permet de conclure.

On dispose maintenant du lemme général suivant :

Lemme 7.3.3. *Soient A et B deux catégories abéliennes et $\mathrm{Je}^{\bullet}$ un objet de $C^b(\mathscr{F}ex(A,B))$ où $\mathscr{F}ex(A,B)$ désigne la catégorie des foncteurs exacts de A dans B. Alors, en associant à tout complexe $K^{\bullet}$ de $C(A)$ le complexe simple associé au double complexe $\mathrm{Je}^{\bullet}(K^{\bullet})$ on obtient un foncteur triangulé $K(A) \to K(B)$ qui préserve les quasi-isomorphismes.*

479 On écrit le foncteur en question comme un composé

$$C(A) \longrightarrow C^b(C(B)) \xrightarrow{(\quad)_s} C(B)$$

où le foncteur $(\quad)_s$ est le foncteur complexe simple associé et on utilise (Vbis 2.3.2.2. Remarque) : les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 7.3.4. Montrer que pour tout complexe $K^{\bullet}$ de $D^+(X, \mathscr{A}_X)$, la flèche canonique

$$\tau_{\leq 2d}\mathscr{X}^{\bullet}(K^{\bullet}) \longrightarrow \mathscr{X}^{\bullet}(K^{\bullet})$$

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés.

On remarquera pour cela que la flèche canonique

$$\varinjlim_{k \geq 2d} (\tau_{\leq k}\mathscr{X}^{\bullet}(K^{\bullet}))_s \longrightarrow (\mathscr{X}^{\bullet}(K^{\bullet}))_s$$

est un isomorphisme, puis que les faisceaux de cohomologie d'un complexe commutent aux limites inductives filtrantes.

7.3.5. Soit $R^{(1)}f_! : D(X, \mathscr{A}_X) \to D(Y, \mathscr{A}_Y)$ le foncteur défini par (7.3.1.2) grâce à 7.3.3. En vertu de 7.3.4 on peut le calculer directement à partir de (7.3.1.1) et on peut vérifier qu'il « ne dépend pas » de la pseudo-compactification choisie. Il faudrait alors vérifier les énoncés 7.1.3, 7.1.4 et 7.1.6 en supprimant les exposants $+$, ce que le rédacteur n'a pas eu le courage de faire.

Définition 7.3.6. Le foncteur $Rf_! : D(X, \mathscr{A}_X) \to D(Y, \mathscr{A}_Y)$ construit en 7.3.5 s'appelle encore foncteur image directe à supports propres.

7.3.7. On peut alors montrer que le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base et que les énoncés (5.2.9) et (5.2.10) restent vrais pour tout morphisme de $\mathrm{Sch}_{!R}$, ce qui justifie les constructions que l'on vient de faire.

Bibliographie

[1] A. Dold and D. Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. Ann. Inst. Fourier **11** (1961), 201–312. 480

[2] Gabriel-Zisman. Calculus of fraction and homotopy theory, Ergebnisse, Bd 35, Springer 1967.

[3] J. Giraud. Méthode de la descente, Mémoire n° 2 de la Société Mathématique de France (1964).

[4] R. Godement. Théorie des faisceaux, Hermann, 1958. Act. Scient. Ind. n° 1252, (Paris).

[5] A. Grothendieck. TDTE IV : les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki 221. Mai 1961. Repris dans FGA.

[6] R. Hartshorne. Residues and Duality. Lecture Notes in Mathematics n° 20. Springer 1966.

[7] D. Lazard. Thèse — Paris 1968.

[8] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34, Springer-Verlag, 1965.

[9] M. Nagata, « A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety », *J. Math. Kyoto Univ.* **3** (1963), 89–102

[10] N. Roby. Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules. Ann. E.N.S. **80** (1963), 231–348.

[11] J.L. Verdier. Catégories dérivées (état 0), multicopié par l'I.H.E.S.

[12] J.L. Verdier. Catégories dérivées (à paraître dans Grundlehren der Math. Wiss, Springer).

[13] J.L. Verdier. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Séminaire Bourbaki 300. Nov 1965.

EXPOSÉ XVIII

La formule de dualité globale

P. Deligne

0. Introduction 481

0.1. Le présent exposé est consacré à la dualité de Poincaré. Cette dualité est construite sur le modèle de Verdier [1], qui traite le cas des espaces topologiques séparés localement compacts. On montre à priori que le foncteur $Rf_!$ de l'exposé XVII admet un adjoint à droite $Rf^!$ et on établit bon nombre de ses propriétés, avant de le calculer plus explicitement dans le cas des morphismes lisses.

La possibilité d'une telle construction semble reposer sur les propriétés suivantes du foncteur $Rf_!$

a) Pour l'existence d'un adjoint $Rf^!$ et ses propriétés formelles :
   (I) le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base ;
   (II) les foncteurs $R^if_!$ commutent aux limites inductives filtrantes ; ils sont nuls pour i assez grand ;
   (III) le foncteur $Rf_!$ peut se calculer « au niveau des complexes », i.e. à partir d'un foncteur entre catégories de complexes.

b) Pour le calcul de cet adjoint dans le cas où f est lisse :
   (IV) le calcul de $Rf_!((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_U)$ pour U « petit ».

0.2. Au § 3 n° 1, qui est indépendant des §§ 1, 2, on construit le foncteur $Rf^!$; on y utilise des constructions spéciales à la situation, et non seulement (I) (II) et (III). Cela rend ce n° assez déplaisant ; le rédacteur confesse ne pas toujours avoir bien compris ce qui se passait.

Le § 2 est consacré au point (IV) ; il est purement formel à partir du § 1, où est étudiée 482
la cohomologie des courbes.

Au § 1, on établit nettement plus qu'il n'est nécessaire pour le § 2, en étudiant aussi le cas de coefficients continus. Ce paragraphe a été profondément influencé par Serre [6]. Les points utiles pour la suite sont :

a) le n° 1.1, consacré au morphisme trace dans le cas des courbes, et généralisé en 2.9 ;
b) le théorème d'effacement 1.6.9. Le lecteur prêt à admettre un argument transcendant peut lire le n° 1.6, à partir de 1.6.6 (2^e démonstration), indépendamment des n° 1.2 à 1.5[86]. L'ingrédient essentiel de 1.6.9 est l'une ou l'autre forme de la dualité de Poincaré pour les courbes lisses sur un corps algébriquement clos, et le lemme d'acyclicité XV 2.6 (préliminaire au théorème de changement de base lisse XVI 1.1). Sa conclusion est généralisée en 2.14.

Le n° 3.2 recueille les fruits du § 2.

[86]N.D.E. : En première lecture, on ne saurait trop recommander de suivre ce chemin : après le x 1.1, passer directement aux x 2 et x 3.

0.3. La méthode de Verdier en dualité de Poincaré permet de définir le foncteur $Rf^!$ pour f compactifiable. Cette généralité a pour contrepartie que les compatibilités à vérifier ne sont pas familières, et parfois, même pour les plus triviales, telles 3.2.3, de démonstration abracadabrante. Le rédacteur avoue ne pas en avoir démontré autant qu'il aurait dû.

Le lecteur intéressé pourra sans difficulté, à partir de l'appendice à l'exposé XVII, étendre la définition de $Rf^!$ au cas des morphismes séparés de type fini de but, un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé).

0.4. Le résultat principal 3.2.5 est énoncé en termes concrets qui permettraient de revenir formellement au point de vue qui avait été celui du séminaire oral, où le foncteur
483 $Rf^!$ était défini seulement pour les morphismes lissifiables via une factorisation par un morphisme lisse et une immersion. On trouvera une esquisse de la démonstration du séminaire oral dans Verdier [16].

1. Cohomologie des courbes

484

1.1. Le morphisme trace.

1.1.1. Soient n un entier ≥ 1 et X un schéma sur lequel n soit inversible. Le faisceau $\boldsymbol{\mu}_n$ (IX 3.1) sur X est alors un faisceau de modules localement libre de rang 1 sur le faisceau d'anneaux constant $\mathbf{Z}/n$. Pour $i \in \mathbf{Z}$, on désigne par la notation $\mathbf{Z}/n(i)$ sa puissance tensorielle $i^{\text{ème}}$.

$$\mathbf{Z}/n(i) = \mathscr{H}om(\mathbf{Z}/n, \mathbf{G}_m)^{\otimes i}. \tag{1.1.1.1}$$

Si $n = dn'$, l'application d'exponentiation par d établit un isomorphisme

$$\boldsymbol{\mu}_n \otimes_{\mathbf{Z}/n} \mathbf{Z}/n' \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{n'},$$

d'où des isomorphismes, dits canoniques :

$$\mathbf{Z}/n(i) \otimes_{\mathbf{Z}/n} \mathbf{Z}/n' \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/n'(i). \tag{1.1.1.2}$$

Si F est un faisceau abélien tel que $nF = 0$, on pose

$$F(i) = F \otimes_{\mathbf{Z}/n} \mathbf{Z}/n(i). \tag{1.1.1.3}$$

Si déjà $n'F = 0$, l'isomorphisme (1.1.1.2) permet d'identifier $F \otimes_{\mathbf{Z}/n} \mathbf{Z}/n(i)$ et $F \otimes_{\mathbf{Z}/n'} \mathbf{Z}/n'(i)$, de sorte que $F(i)$ ne dépend que de F et non du choix de n. Plus généralement, si F est un faisceau de torsion premier aux caractéristiques résiduelles de X (XVII 0.13), et si ${}_mF$ est le noyau de la multiplication par m dans F, on définit $F(i)$ comme étant la limite inductive, pour m inversible sur X tendant multiplicativement vers l'infini

$$F(i) = \varinjlim_{m} {}_mF(i). \tag{1.1.1.4}$$

Le foncteur $F \mapsto F(i)$ est exact. Si $f : Y \to X$ est un morphisme de schémas (resp. un morphisme de schémas quasi-compact quasi-séparé), et si F est un faisceau de tor-
485 sion sur X (resp. sur Y), premier aux caractéristiques résiduelles de X, on a $f^*(F(i)) \simeq (f^*F)(i)$ (resp. on a $(f_*F)(i) \simeq f_*(F(i))$). Si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux sur X, annulé par n inversible sur X, il se prolonge en un foncteur exact $K \mapsto K(i)$ de $D(X, \mathscr{A})$ dans $D(X, \mathscr{A})$. Ce foncteur commute aux foncteurs image réciproque et aux foncteurs image directe.

Les foncteurs $F \mapsto F(i)$ s'appellent parfois les foncteurs de « twist à la Tate »

Définition 1.1.2. Une courbe plate sur un schéma S est un morphisme $f : X \to S$ plat de présentation finie et séparé à fibres purement de dimension un.

L'expression « purement de dimension un » n'exclut pas le schéma vide. Contrairement à EGA II 7.4.2, on admet ici qu'une courbe sur un corps soit vide, mais on exige qu'elle soit séparée.

Lorsque S est le spectre d'un corps, on parlera simplement de courbe sur S ; une courbe sur un corps est quasi-projective[87].

1.1.3. Soit X une courbe sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p premier à un entier $n \geq 1$. Supposons d'abord X réduite, et soit $\overline{X}$ une courbe complète sur k dont X soit un ouvert dense.

Le complément $Y = \overline{X} - X$ est de dimension 0. La suite exacte de cohomologie (XVII 5.1.16.3) induit donc un isomorphisme

$$H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}/n(1)). \tag{1.1.3.1}$$

On dispose de plus d'un isomorphisme IX 4.7 (donné par la théorie de Kummer)

$$H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}/n(1)) = \mathrm{Pic}(\overline{X})/n = (\mathbf{Z}/n)^c \tag{1.1.3.2}$$

où c désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X, ou de $\overline{X}$, cela revient au même.

Si X n'est plus nécessairement réduite, et si c est l'ensemble de ses composantes **486**
irréductibles, désignons, pour $i \in c$, par n_i la multiplicité de X au point générique η_i de la $i^{\text{ème}}$ composante irréductible de X :

$$n_i = \lg(O_{X,\eta_i}).$$

On sait que l'application de restriction de $H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1))$ dans $H^2_c(X_{\mathrm{red}}, \mathbf{Z}/n(1))$ est un isomorphisme, d'où, via (1.1.3.1) et (1.1.3.2) appliqués à X_{red} un isomorphisme canonique entre $H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1))$ et $(\mathbf{Z}/n)^c$. On désignera par Tr_X ou simplement Tr la flèche composée

$$\mathrm{Tr} : H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1)) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Z}/n)^c \xrightarrow{t} \mathbf{Z}/n, \tag{1.1.3.3}$$

où

$$t((a_i)_{i\in c}) = \sum n_i a_i.$$

Si F est un groupe abélien annulé par n, on dispose d'un isomorphisme

$$H^2_c(X, F(1)) \xleftarrow{\sim} F \otimes H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1))$$

et donc via (1.1.3.3) d'un morphisme trace

$$\mathrm{Tr} : H^2_c(X, F(1)) \longrightarrow F. \tag{1.1.3.4}$$

[87]N.D.E. : Dans EGA II 7.4.10, cet énoncé n'est établi que sous une hypothèse supplémentaire de normalité sur X et il est annoncé (EGA II 7.4.12) qu'une démonstration dans le cas général apparaîtra dans EGA V, qui n'a pas paru. Le lecteur pourra corriger en exercice cette lacune. Ceci est de toute façon sans conséquence pour la construction du morphisme trace, puisqu'elle peut se faire en procédant d'abord localement (sur des ouverts quasi-projectifs) puis en recollant les morphismes traces comme dans la démonstration de 1.1.6.

Si $n = n'd$, le diagramme

$$(1.1.3.5)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] \arrow[d, "x^d"'] & \mathbf{G}_m \arrow[r, "x^n"] \arrow[d, "x^d"'] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r, "x^{n'}"] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif et donc aussi le diagramme

$$(1.1.3.6)\qquad \begin{tikzcd} H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (\mathbf{Z}/n)^c \arrow[d] \\ H^2_c(X, \mathbf{Z}/n'(1)) \arrow[r, "\sim"] & (\mathbf{Z}/n')^c \end{tikzcd}$$

487 d'après la définition IX 4.7 de l'isomorphisme (1.1.3.2).

La flèche (1.1.3.4) ne dépend donc que de F, et non du choix de l'entier n premier à p tel que $nF = 0$. Par passage à la limite, on la définit pour tout groupe abélien F de torsion premier à p.

Le lemme suivant résulte aussitôt des définitions.

LEMME 1.1.4. Sous les hypothèses précédentes, si, pour $i \in c$, U_i est un ouvert non vide de X contenu dans la $i^{\text{ème}}$ composante irréductible, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in c} H^2_c(U_i, F(1)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\bigoplus_{i\in c} Tr_{U_i}"'] & & H^2_c(X, F(1)) \arrow[dl, "Tr_X"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

LEMME 1.1.5. Soient X et Y deux courbes sur un corps algébriquement clos k, $u : X \to Y$ un morphisme quasi-fini et plat et n un entier premier à l'exposant caractéristique p de k.

Le diagramme suivant, dans lequel Tr_u est la flèche (XVII 6.2.3), est alors commutatif

$$\begin{tikzcd} H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[rr, "Tr_u"] \arrow[dr, "Tr_X"'] & & H^2_c(Y, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[dl, "Tr_Y"] \\ & \mathbf{Z}/n & \end{tikzcd}.$$

Le lemme 1.1.4 permet de se réduire au cas où X et Y sont irréductibles, X_{red} et Y_{red} étant de plus lisses. Si e (resp. f) est la multiplicité de X (resp. Y) au point générique, et si $e = df$, les triangles marqués $+$ du diagramme suivant sont commutatifs :

(1.1.5.1)
$$\begin{tikzcd}
H^2_c(X, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd, "\mathrm{Tr}_u"'] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_X"] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "+"] & & H^2_c(X_{\mathrm{red}}, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[dd, "d\,.\,\mathrm{Tr}_{u_{\mathrm{red}}}"] \arrow[dl, "e\,.\,\mathrm{Tr}_{X_{\mathrm{red}}}"'] \\
& \mathbf{Z}/n & \\
H^2_c(Y, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[ur, "\mathrm{Tr}_Y"] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "+"] & & H^2_c(Y_{\mathrm{red}}, \mathbf{Z}/n(1)), \arrow[ul, "f\,.\,\mathrm{Tr}_{Y_{\mathrm{red}}}"']
\end{tikzcd}$$

Son contour est commutatif, ainsi qu'on le déduit de la commutativité du diagramme **488**

$$\begin{tikzcd}
u_!\mathbf{Z}/n_X(1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_u"] & u_{\mathrm{red}_!}\mathbf{Z}/n_{X_{\mathrm{red}}}(1) \arrow[d, "d\,.\,\mathrm{Tr}_{u_{\mathrm{red}}}"] \\
\mathbf{Z}/n_Y(1) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{Z}/n_{Y_{\mathrm{red}}}(1).
\end{tikzcd}$$

Il suffit de vérifier cette dernière compatibilité au point générique de Y, ce qui est trivial.

Pour établir la commutativité du triangle de gauche dans (1.1.5.1), il ne reste donc plus qu'à établir celle du triangle de droite. On peut donc dorénavant supposer de plus que X et Y sont réduits[88].

Soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les courbes complètes lisses contenant X et Y comme ouverts denses (EGA II 7.4.11). Le morphisme u se prolonge en un morphisme plat $\bar{u} : \overline{X} \to \overline{Y}$ (EGA II 7.4.9) et, d'après 1.1.4, il suffit de vérifier 1.1.5 pour $\bar{u}$.

D'après (XVII 6.3.18.2), le diagramme de faisceaux sur $\overline{Y}$, dans lequel N désigne la norme,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{u}_*\boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{\bar{u}}"] & \bar{u}_*\mathbf{G}_m \arrow[r, "x^n"] \arrow[d, "N"] & \bar{u}_*G_m \arrow[r] \arrow[d, "N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r, "x^n"] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

est commutatif, donc aussi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\overline{X})/n \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "N"] & H^2_c(\overline{X}, \mathbf{Z}/n(1)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{\bar{u}}"] \\
\mathrm{Pic}(\overline{Y})/n \arrow[r, "\sim"] & H^2_c(\overline{Y}, \mathbf{Z}/n(1)),
\end{tikzcd}$$

et il reste à noter que si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible de degré 1 sur $\overline{X}$, sa norme est **489**
encore de degré 1 (ce fait résultant de la compatibilité EGA IV 21.10.17, compte tenu de la définition EGA IV 21.5.5 de la norme d'un diviseur).

Proposition 1.1.6. Il est d'une et d'une seule façon possible de définir, pour toute courbe plate compactifiable $f : X \to S$ et pour tout faisceau de torsion F sur S, premier

[88] N.D.E. : Ce paragraphe a été ajouté dans cette édition, et les deux suivants ont été modifiés.

aux caractéristiques résiduelles de S, un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f \,:\, R^2 f_!(f^*F(1)) \longrightarrow F,$$

fonctoriel en F, de formation compatible à tout changement de base (cf. XVII 6.2.3, (VAR 2)) et qui, pour S le spectre d'un corps algébriquement clos, coïncide avec le morphisme trace (1.1.3.4).

Le morphisme Tr_f nous est donné fibre par fibre ; son unicité est donc claire.

Soit $p \,:\, \mathbf{P}^1_S \to S$ la droite projective sur S et n un entier inversible sur S. On a $\mathbf{Pic}_S(\mathbf{P}^1_S) = \mathbf{Z}_S$, d'où par la théorie de Kummer (IX 3.2) un morphisme $\mathbf{Z}/n \to R^1p_*\mathbf{Z}/n(1)$, dont on vérifie fibre par fibre (XII 5.2) que c'est un isomorphisme. Son inverse Tr_p induit fibre par fibre le morphisme trace (1.1.3.4).

Soit $f \,:\, X \to S$ une courbe plate sur S telle qu'il existe un S-morphisme quasi-fini et plat u de X dans $\mathbf{P}^1_S$. En vertu de 1.1.5, le morphisme composé $\mathrm{Tr}_p \circ \mathrm{Tr}_u$ (XVII 6.2.3) admet pour fibre en un quelconque point géométrique de S le morphisme trace (1.1.3.4). En particulier, il ne dépend pas du choix de u.

490 Supposons que X soit une réunion de sous-schémas ouverts U_i tels qu'il existe un morphisme quasi-fini et plat de U_i dans $\mathbf{P}^1_S$. Si α_i (resp. α_{ij}) est l'inclusion de U_i (resp. $U_{ij} = U_i \cap U_j$) dans X, la suite

$$\sum R^2(f\alpha_{ij})_!\mathbf{Z}/n(1) \rightrightarrows \sum R^2(f\alpha_i)_!\mathbf{Z}/n(1) \to R^2 f_!\mathbf{Z}/n(1) \to 0.$$

est exacte, d'après (XVII 6.2.9) et l'exactitude à droite de $R^2 f_!$ (puisque $R^3 f_! = 0$). On vérifie fibre par fibre, par 1.1.5, que la somme des morphismes trace $\sum\limits_i R^2(f\alpha_i)_!\mathbf{Z}/n(1) \to \mathbf{Z}/n$, se factorise par un morphisme trace Tr_f de $R^2 f_!\mathbf{Z}/n(1)$ qui, fibre par fibre, induit (1.1.3.4).

Pour un X général, soit $j \,:\, X' \to X$ le plus grand ouvert de X tel que $f|X'$ soit un morphisme de Cohen-Macaulay (cf. EGA IV 12.1.1 (vi)). Tout point x de X' a un voisinage U_x dans X' tel qu'il existe un S-morphisme quasi-fini u_x de U_x dans $\mathbf{P}^1_S$. Ce morphisme est automatiquement plat (EGA IV 11.3.10 et 15.4.2) et X' vérifie donc les hypothèses précédentes. De plus, X' est dense fibre par fibre dans X ; le morphisme de $R^2(fj_!)\mathbf{Z}/n(1)$ dans $R^2 f_!\mathbf{Z}/n(1)$ est donc un isomorphisme comme on le voit fibre par fibre et la flèche composée

$$\mathrm{Tr}_f \,:\, R^2 f_!\mathbf{Z}/n(1) \xleftarrow{\sim} R^2(fj)_!\mathbf{Z}/n(1) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{fj}} \mathbf{Z}/n$$

induit fibre par fibre (1.1.3.4).

Si F vérifie $nF = 0$, on a (XVII 5.2.6)

$$R^2 f_!\mathbf{Z}/n(1) \otimes F \xrightarrow{\sim} R^2 f_!(f^*F(1)) \tag{1.1.6.1}$$

et on définit Tr_f comme la flèche composée

$$\mathrm{Tr}_f \,:\, R^2 f_!(f^*F(1)) \xleftarrow{\sim} R^2 f_!\mathbf{Z}/n(1) \otimes F \to F.$$

Dans le cas général, on définit Tr_f comme limite inductive des morphismes trace relatifs aux faisceaux ${}_nF$ pour n inversible sur S. Ces flèches induisent fibre par fibre (1.1.3.4) et commutent donc à tout changement de base, C.Q.F.D.

491 On vérifie fibre par fibre à l'aide de 1.1.4, 1.1.5 et (1.1.6.1), les résultats suivants :

Lemme 1.1.7. Soient $f \,:\, Y \to S$ une courbe plate compactifiable sur S, $u \,:\, X \to Y$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie, et F un faisceau de torsion sur

S, de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} R^2(fu)_!(fu)^*F(1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{fu}"] & R^2f_!(u_!u^*)f^*F(1) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_u"] & R^2f_!f^*F(1) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] \\ F \arrow[rr, equal] & & F, \end{tikzcd}$$

Lemme 1.1.8. Soient $u : Y \to S$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie, $f : X \to Y$ une courbe plate S-compactifiable (XVII 3.2.1), et F comme en 1.1.7. Le diagramme suivant est commutatif[89] :

$$\begin{tikzcd} R^2(uf)_!(uf)^*F(1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{uf}"] & u_!R^2f_!f^*u^*F(1) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_f"] & u_!u^*F \arrow[d, "\mathrm{Tr}_u"] \\ F \arrow[rr, equal] & & F \end{tikzcd}$$

On vérifie de même à partir de (1.1.3.2) :

Lemme 1.1.9. Si $f : X \to S$ est une courbe lisse compactifiable, et si les fibres géométriques de f sont irréductibles, alors le morphisme trace (1.1.6) est un isomorphisme.

1.2. 1-acyclicité de l'espace projectif. Dans ce n°, on utilise en principe toujours la topologie fppf (XVII 0.10).

1.2.1. Soient ϵ un Module localement libre sur un schéma S, supposé partout de rang ≥ 2, $p : \mathbf{P}(\epsilon) \to S$ le fibré projectif correspondant et G un faisceau abélien sur le grand site fppf de S (XVII 0.10). Chaque couple (K_0, φ) formé d'un torseur K_0 sous G et d'un homomorphisme $\varphi : \mathbf{G}_{mS} \to G$ définit un p^*G-torseur $K(K_0, \varphi)$ sur $\mathbf{P}(\epsilon)$, somme de K_0 et de l'image par φ du $\mathbf{G}_m$-torseur $\mathscr{O}(1)$[90]. 492

$$K(K_0, \varphi) = K_0 + \varphi\mathscr{O}(1). \tag{1.2.1.1}$$

On fait des couples (K_0, φ) une catégorie en posant

$$\mathrm{Hom}((K_0, \varphi), (K_0', \varphi')) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad \varphi \neq \varphi' \\ \mathrm{Hom}(K_0, K_0') & \text{si} \quad \varphi = \varphi'. \end{cases}$$

Le torseur $K(K_0, \varphi)$ dépend alors fonctoriellement de (K_0, φ). Il est compatible à la localisation, et définit donc un foncteur du champ sur S des couples (K_0, φ) dans le champ sur S des p^*G-torseurs sur $\mathbf{P}(\epsilon)$ (= le champ ayant pour sections sur U/S les p^*G-torseurs

[89]N.D.E. : Cette compatibilité mérite qu'on lui consacre quelques arguments. Pour la vérifier, on peut tout d'abord se ramener par changement de base au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k. On peut ensuite supposer que Y est connexe et non vide, auquel cas $Y \to S$ admet une (unique) section $S \to Y$ qui est une immersion fermée définie par un idéal nilpotent. Les arguments de la démonstration de 1.1.6 permettent de supposer que $X = \mathbf{P}^1_Y$. Il ne reste plus alors qu'à observer que la multiplicité de Y est égale à la multiplicité de X en son point générique. Voir aussi la démonstration de la commutativité de (2.9.3).

[90]N.D.E. : Dans ce n°, on identifie de façon implicite les fibrés en droites et les $\mathbf{G}_m$-torseurs par la correspondance qui associe à un fibré en droites le faisceau de ses sections inversibles, sur lequel $\mathbf{G}_m$ agit par multiplication. Le lecteur soucieux des détails sera probablement intéressé de savoir que, suivant la convention de Grothendieck, le schéma projectif $\mathbf{P}(\epsilon)$ est le fibré des hyperplans de ϵ et que de même le fibré vectoriel épointé $\mathbf{V}(\epsilon)^* \to \mathbf{P}(\epsilon)$ est un ouvert de $\mathbf{V}(\epsilon)$ qui est le spectre de l'Algèbre symétrique de ϵ.

sur $U \times_S \mathbf{P}(\epsilon)$). Ces champs sont des champs en groupoïde (= tout morphisme au-dessus d'un U/S est un isomorphisme).

THÉORÈME 1.2.2. Sous les hypothèses 1.2.1, si G est un schéma en groupe commutatif plat de présentation finie sur S, alors le foncteur K de 1.2.1 est une équivalence.

. Cet énoncé équivaut à la conjonction de

$$G \xrightarrow{\sim} p_* p^* G \quad \text{et}$$

$$\mathscr{H}om(\mathbf{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} R^1 p_* p^* G.$$

En effet, un morphisme de champs en groupoïde est une équivalence si et seulement si il induit un isomorphisme sur le faisceau engendré par le préfaisceau des classes d'isomorphie d'objets (2e formule) et un isomorphisme sur le faisceau des automorphismes d'un objet local quelconque (1re formule).

On donnera deux démonstrations (1.2.4 et 1.2.5) de la pleine fidélité[91].

493 LEMME 1.2.3. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et plat. On suppose que $f_* \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$ universellement et $R^1 f_* \mathscr{O}_X = 0$ universellement. Tout S-morphisme de X dans un S-schéma en groupes de type fini G se factorise alors par f et une section de G ; plus précisément, $G \xrightarrow{\sim} f_* f^* G$.

Il suffit de prouver la 1re assertion.

D'après le lemme de rigidité (MUMFORD [4, 6.1. p. 115] ; on notera que MUMFORD n'utilise par l'hypothèse noethérienne faite sur S), il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Supposons tout d'abord que G soit un schéma abélien, et soit G^* le schéma abélien dual. Puisque $G = G^{**}$, la donnée de $\varphi : X \to G$ équivaut à la donnée d'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $X \times G^*$, trivialisé le long de $X \times \{e\}$ et algébriquement équivalent à zéro sur les fibres de la projection pr_1 de $X \times G^*$ sur X. Si $x : S \to X$ est un point rationnel de X, on a $\mathscr{L} \sim \mathrm{pr}_2^*(x \times G^*)^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ avec $\mathscr{M}$ trivialisé le long de $x \times G^*$ et $X \times \{e\}$. La donnée de $\mathscr{M}$ équivaut à la donnée d'un morphisme de schémas de G^* dans $\mathbf{Pic}_{X/S}$, transformant e en e. Puisque $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, on a $\mathbf{Pic}^0_{X/S} = 0$[92], $\mathscr{M} \sim \mathscr{O}$ et $\mathscr{L} \sim \mathrm{pr}_2^* \mathscr{L}'$ avec $\mathscr{L}'$ algébriquement équivalent à zéro sur G^*, donc définissant $g \in G(S)$ tel que $\varphi = g \circ f$.

Dans le cas général, G est extension d'un schéma abélien A par un groupe affine G_0. Le résultat précédent nous ramène au cas où $A = 0$, et on a alors

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}(H^0(X, \mathscr{O}_X), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(X, G).$$

LEMME 1.2.4. Sous les hypothèses 1.2.1, si G est un schéma en groupes de présentation finie sur S ou est défini par un faisceau quasi-cohérent sur S, alors le foncteur (1.2.1.1) est pleinement fidèle.

A. Prouvons que si $K(K_0, \varphi)$ est isomorphe à $K(K_0', \varphi')$, alors $\varphi = \varphi'$. Pour G quasi-cohérent, on a $\varphi = \varphi' = 0$, et l'assertion est vide. Pour G de présentation
494 finie, d'après (SGA 3 IX 5.1), il suffit de prouver l'assertion pour S spectre d'un corps algébriquement clos k. Soit alors T le plus grand sous-tore de G, et $H = G/T$. La suite exacte de cohomologie fournit

$$0 \to H^0(\mathbf{P}(\epsilon), T) \to H^0(\mathbf{P}(\epsilon), G) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathbf{P}(\epsilon), H) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbf{P}(\epsilon), T) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathbf{P}(\epsilon), G).$$

[91]N.D.E. : À propos de l'essentielle surjectivité, il convient d'avertir le lecteur que la démonstration utilisera la technique générale de démonstration expliquée dans l'introduction des EGA .

[92]N.D.E. : Cela résulte de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Lie}(\mathbf{Pic}_{X/S}) = H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ qui s'obtient en comparant ces deux groupes avec le noyau de $\mathrm{Pic}(X \times_k \mathrm{Spec}(k[\epsilon])) \to \mathrm{Pic}(X)$ (où $S = \mathrm{Spec}(k)$). Pour plus de détails sur les propriétés des schémas de Picard, on renvoie à [6].

D'après 1.2.3, $H^0(\mathbf{P}(\epsilon), G) \sim G(k)$ et $H^0(\mathbf{P}(\epsilon), H) \sim H(k)$, de sorte que α est surjectif et δ nul. Si $Y(T) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$, on a $T \sim G_m \otimes Y(T)$ et $H^1(\mathbf{P}(\epsilon), T) \sim Y(T)$. L'injectivité de β exprime donc l'injectivité de la flèche canonique, définie par $\mathscr{O}(1)$, $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, G) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T) \to H^1(\mathbf{P}(\epsilon), G)$, et ceci prouve l'assertion.

B. Prouver que le foncteur (1.2.1.1) est pleinement fidèle est une question locale sur S. On se ramène donc à supposer que $\mathbf{P}(\epsilon)/S$ admet une section s et il est loisible de se donner un isomorphisme $s^*\mathscr{O}(1) \sim \mathscr{O}$[93]. Si $K(K_0, \varphi)$ est isomorphe à $K(K_0', \varphi')$, on a $\varphi = \varphi'$ par A et $K_0 \sim s^*K(K_0, \varphi) \sim s^*K(K_0', \varphi') \sim K_0'$. Grâce à la formule

$$\mathrm{Hom}(K(K_0, \varphi), K(K_0', \varphi')) \sim \mathrm{Hom}(K(K_0 - K_0', \varphi - \varphi'), G_{\mathbf{P}(\epsilon)}), \tag{1.2.4.1}$$

il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{tors}\,.}(G, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{tors}\,.}(p^*G, p^*G).$$

Ceci résulte de 1.2.3.

1.2.5. Voici une autre démonstration, plus künnethesque, de la pleine fidélité. La question est locale sur S ; d'après (1.2.4.1), il suffit donc de vérifier que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(\epsilon)}(G, K(G, \varphi)) \begin{cases} = \varnothing & \text{si} \quad \varphi \neq 0 \\ \xleftarrow{\sim} G(S) & \text{si} \quad \varphi = 0. \end{cases}$$

C'est exactement ce qu'exprime le lemme suivant[94] :

Lemme 1.2.6. Soient ϵ un module localement libre partout de rang ≥ 2 sur S, G un schéma en groupes de présentation finie sur S, $\varphi : \mathbf{G}_m \to G$ un homomorphisme de groupes, $\mathbf{V}(\epsilon)$ le fibré vectoriel défini par ϵ, $\mathbf{V}(\epsilon)^*$ le fibré vectoriel épointé correspondant 495
et $\Psi : \mathbf{V}(\epsilon)^* \to G$ un S-morphisme vérifiant l'identité suivante entre S-morphismes de $\mathbf{G}_m \times \mathbf{V}(\epsilon)^*$ dans G :

$$\Psi(\lambda v) = \Psi(v)\varphi(\lambda).$$

Alors, $\varphi = e$, et Ψ se factorise par la projection p de $\mathbf{P}(\epsilon)$ sur S.

Il suffit de prouver la seconde assertion. On se ramène aussitôt au cas S noethérien, puis, par (SGA 3 IX 5.1) et le lemme de rigidité (Mumford [6, 6.1 p. 115]) appliqué à $\mathbf{P}(\epsilon)$ au cas où S est le spectre d'un corps. Soient n un entier, W_n et G_n les voisinages infinitésimaux du $n^{\text{ième}}$ ordre de la section nulle dans $\mathbf{V}(\epsilon)$ et G, $\mathfrak{g}_n$ l'algèbre affine de G_n et $P_n(\Psi) : \mathbf{V}(\epsilon)^* \to \mathscr{H}om_S(W_n, G)$ la partie principale du $n^{\text{ième}}$ ordre de Ψ[95]. Toute

[93] N.D.E. : On a ajouté dans cette édition cette donnée supplémentaire, nécessaire, qui manquait dans l'édition originale.

[94] N.D.E. : Cette traduction mérite quelques éléments d'explication. Le fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}(\epsilon)$ devient canoniquement trivialisé après image inverse par la projection canonique $\mathbf{V}(\epsilon)^* \to \mathbf{P}(\epsilon)$. Après image inverse sur $\mathbf{V}(\epsilon)^*$, le G-torseur $K(G, \varphi)$ est donc aussi canoniquement trivialisé. *Via* cette identication, un isomorphisme $G \to K(G, \varphi)$ induit donc un automorphisme du G-torseur trivial au-dessus de $\mathbf{V}(\epsilon)^*$, c'est-à-dire un S-morphisme $\mathbf{V}(\epsilon)^* \to G$. Pour provenir de $\mathbf{P}(\epsilon)$, ce morphisme doit vérifier une compatibilité semblable à celle qui est énoncée et réciproquement par descente fidèlement plate. À vrai dire, il semble au relecteur que la bonne condition à énoncer serait $\Psi(\lambda v) = \varphi(\lambda)^{-1}\Psi(v)$, mais c'est sans conséquence puisque l'on peut appliquer le lemme à Ψ^{-1} au lieu de l'appliquer à Ψ. La condition $\Psi(\lambda v) = \varphi(\lambda)\Psi(v)$ présente dans l'édition originale donne aussi un énoncé correct (puisque l'on peut remplacer φ par φ^{-1}) mais elle a été changée pour qu'il ne soit pas nécessaire de modifier la démonstration.

[95] N.D.E. : En termes plus concrets, $P_n(\Psi)$ est le morphisme qui correspond par adjonction au morphisme $\mathbf{V}(\epsilon)^* \times_S W_n \to G$ (que nous noterons aussi P_n) obtenu en composant Ψ et le morphisme $\mathbf{V}(\epsilon)^* \times_S W_n \to \mathbf{V}(\epsilon)^*$ induit par l'addition sur $\mathbf{V}(\epsilon)$ sur ces sous-schémas. En termes des foncteurs des

section de $\mathscr{H}om_S(W_n, G)$ définit, en translatant à droite par l'inverse de l'image de la section nulle, un morphisme de W_n dans G_n qui transforme 0 en e, ceci définit

$$\Psi_1 = P_n(\Psi).\Psi^{-1} : \mathbf{V}(\epsilon)^* \longrightarrow \mathscr{H}om_S(W_n, G_n).$$

L'hypothèse implique que Ψ_1 commute aux homothéties, que l'on fait agir sur le second membre par transport de structure à partir de leur action sur $W_n \subset \mathbf{V}(\epsilon)$[96]. L'algèbre affine de W_n est $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{Sym}^i(\epsilon)$. Vu son homogénéité, Ψ_1 est donc défini par une section, sur $\mathbf{P}(\epsilon)$, du $\mathscr{O}_{\mathbf{P}(\epsilon)}$-module

$$\sum_{i=0}^{n} p^* \mathscr{H}om(\mathfrak{g}_n, \mathrm{Sym}^i(\epsilon))(-i).$$[97]

Les composantes d'indice $i > 0$ de ce module n'ont d'autre section que la section nulle, et on en conclut que

$$\Psi_1 = 0.$$

Ceci, valant pour tout n, implique que Ψ se factorise par une section de G.

Cette seconde démonstration s'étend pour prouver la variante analytique suivante de 1.2.4. Lorsque G est affine, la démonstration de 1.2.2 peut se faire indépendamment de cette variante.

496 1.2.7. Soient L le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet $\mathscr{O}$, U_m le groupe rigide analytique « fibre générique » du complété formel de $\mathbf{G}_m$ et $\mathscr{O}(1)^\wedge$ le U_m-torseur sur $\mathbf{P}_L^r$ complété formel de $\mathscr{O}(1)$. Si G est un groupe rigide analytique sur L, le foncteur $(K_0, \varphi) \mapsto p^*K_0 + \varphi\mathscr{O}(1)^\wedge$ (cf. 1.2.1) est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des couples (K_0, φ) formés d'un G-torseur sur $\mathrm{Spec}(L)$ et de $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, G)$, dans la catégorie des p^*G-torseurs sur $\mathbf{P}_L^r$[98].

Lemme 1.2.8. Soient k un corps d'exposant caractéristique p et $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ un schéma propre sur k vérifiant $H^0(X, \mathscr{O}_X) = k$ et $\mathbf{Pic}_X^\tau = 0$[99]. Pour tout schéma en groupe affine commutatif de type fini G sur k, ne contenant pas de tores, on a $R^1 f_*(f^*G) = 0$.

Il suffit de montrer qu'après tout changement de base, $c : S \to \mathrm{Spec}(k)$, le foncteur f^* de la catégorie des G-torseurs sur S dans celle des G-torseurs sur X_S est une équivalence. Ce problème est local sur $\mathrm{Spec}(k)$, de sorte que pour le résoudre on peut se ramener au cas où X a un point rationnel, où G est extension successive de groupes $\mathbf{G}_a$, α_p, $\boldsymbol{\mu}_p$, $\mathbf{Z}/p$ et $\mathbf{Z}/\ell_i$ pour ℓ_i premier à p et où $\mathbf{Z}/\ell_i \sim \boldsymbol{\mu}_{\ell i}$.

---

points de ces S-schémas, on peut l'interpréter plus concrètement en disant que si v est une section de $\mathbf{V}(\epsilon)^*$ et t une section de W_n, alors $P_n(\Psi)(v, t) = \Psi(v + t)$.

[96]N.D.E. : Avec les notations ci-dessus, on peut caractériser Ψ_1 par la relation $\Psi_1(v, t).\Psi(v) = \Psi(v+t)$. On en déduit aussitôt que si λ est une section de $\mathbf{G}_m$, alors $\Psi_1(\lambda v, \lambda t) = \Psi_1(v, t)$, ce qui correspond à la commutation aux homothéties annoncée pourvu que l'on fasse agir correctement $\mathbf{G}_m$ sur $\mathscr{H}om_S(W_n, G_n)$, à savoir qu'une section λ de $\mathbf{G}_m$ agisse par composition à droite avec la multiplication par l'*inverse* de λ sur W_n.

[97]N.D.E. : Pour vérifier cette affirmation en détail, on peut commencer par définir l'image inverse de cette section sur $\mathbf{V}(\epsilon)^*$; on obtient alors tautologiquement une section $s = (s_0, \ldots, s_n)$ du fibré trivial obtenu est tensorisant le faisceau structural avec l'espace vectoriel $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{H}om(\mathfrak{g}_n, \mathrm{Sym}^i(\epsilon))$. Elle vérifie la relation $s_i(v) = \lambda^i s_i(\lambda v)$. Ceci constitue bien une donnée de descente pour obtenir une section sur $\mathbf{P}(\epsilon)$ comme voulu. Il est également possible d'argumenter en disant que les sections s_i s'étendent à $\mathbf{V}(\epsilon)$ tout entier (puisque l'origine est un fermé de codimension ≥ 2 dans $\mathbf{V}(\epsilon)$). Par densité de $\mathbf{G}_m$ dans ^{1}, ces sections étendues s_i vérifient la relation $s_i(v) = \lambda^i s_i(\lambda v)$ pour $\lambda \in {}^1$. En faisant $\lambda = 0$, on obtient $s_i = 0$ pour $i > 0$.

[98]N.D.E. : Le lecteur pourra trouver une introduction au langage de la géométrie analytique rigide dans [13]. L'inexistence de sections non-triviales pour les faisceaux $\mathscr{O}(n)$ pour $n < 0$ dans ce contexte résulte par exemple d'une version rigide de GAGA, voir [9].

[99]N.D.E. : On trouvera une définition de $\mathbf{Pic}^\tau$ dans un cadre plus général en 1.6.4.

On sait que $\mathrm{Lie}(\mathbf{Pic}_X) = H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$. D'après 1.2.3 et l'existence d'une section, les foncteurs f^* considérés sont pleinement fidèles ; il suffit donc de prouver que $R^1 f_*(f^*G) = 0$, ou, par dévissage, que

$$R^1 f_* \mathbf{G}_a = R^1 f_* \alpha_p = R^1 f_* \boldsymbol{\mu}_p = R^1 f_* \mathbf{Z}/p = R^1 f_* \mathbf{Z}/\ell_i = 0.$$

Pour $\mathbf{G}_a$, cela résulte de ce que $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$. Le cas de α_p (resp. $\mathbf{Z}/p$) s'en déduit via 1.2.3, par la suite exacte longue de cohomologie définie par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \alpha_p \longrightarrow \mathbf{G}_a \xrightarrow{x^p} \mathbf{G}_a \longrightarrow 0$$

(resp. $$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/p \longrightarrow \mathbf{G}_a \xrightarrow{x-x^p} \mathbf{G}_a \longrightarrow 0 \qquad (p \neq 1)).$$

Le cas de $\mathbf{Z}/\ell_i$ (resp. de $\boldsymbol{\mu}_p$) se déduit de l'isomorphisme $\mathbf{Z}/\ell_i \sim \boldsymbol{\mu}_{\ell_i}$, de 1.2.3 et de la suite **497**
exacte longue déduite de la suite exacte de Kummer

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow 0.$$

Lemme 1.2.9. *Soient S un schéma local artinien, $\bar{s}$ un point géométrique de S, $f : X \to S$ un morphisme propre et plat, et G un schéma en groupe commutatif plat de type fini sur S. On suppose f lisse ou G affine. Si $H^0(X_{\bar{s}}, \mathscr{O}) = k(\bar{s})$, si $\mathbf{Pic}^{\tau}_{X_{\bar{s}}} = 0$ et que $G_{\bar{s}}$ ne contient pas de sous-groupe $\mathbf{G}_m$, alors le foncteur f^* de la catégorie des G-torseurs sur S dans celle des f^*G-torseurs sur X est une équivalence.*

a. Le problème posé est local sur S lorsqu'on prend pour morphismes de localisation les morphismes $u : S' \to S$ finis et plats. Ceci permet de supposer que f admet une section x[100]. Le foncteur f^* est alors pleinement fidèle, d'après 1.2.3 et l'existence de x, et il reste à montrer que tout torseur, trivialisé le long de x, est trivial.
b. Supposons que S soit le spectre d'un corps. Si G est affine, l'assertion résulte de 1.2.8. Si X est lisse, et si G est extension d'une variété abélienne A par un groupe affine G_0, désignons par G^n l'image réciproque de ${}_nA$ dans G. Le groupe $H^1(X, A)$ est de torsion (Raynaud [5, XIII 2.6]), donc réunion des images des $H^1(X, {}_nA)$. Le groupe $H^1(X, G)$ est dès lors réunion des images des $H^1(X, G^n)$. Les groupes G^n étant affines, on conclut encore par 1.2.8.
c. Prouvons le cas général (en supposant l'existence d'une section x) par récurrence sur la longueur de S. Soit $i : S_0 \hookrightarrow S$ un sous-schéma défini par un idéal I de carré nul et de longueur 1.

Les G-torseurs P sur X, tels que x^*P soit trivial, sont d'après l'hypothèse de récurrence des déformations du G-torseur trivial P_0 sur $X \times S_0$. Si G est lisse, et si L est l'algèbre de Lie de G_s, ces déformations sont classifiées par

$$H^1(X_s, f^*(L \otimes I)) = 0,$$

ce qui prouve 1.2.9 dans ce cas. **498**

Pour G plat sur S, cet argument se généralise en terme du complexe de Lie L de G_s. Si $L \cap (G_s/k(s))$ est le complexe cotangent relatif de G_s, ce complexe $L \in D^b(k(s))$ est le dual de $Le^*(L \cap (G_s/k(s)))$. On a $H^i(L) = 0$ pour $i \neq 0, 1$(Illusie [3, VII 2.4.1]).

Les déformations sur S (resp. sur X) du G-torseur trivial sur S_0 (resp. sur X_0) sont classifiées par $H^1(L \otimes I)$ (resp. par $H^1(X_s, f^*(L \otimes I))$ (Illusie [3, VII 2.4.4 (ii)]). Par hypothèse, on a $H^1(X_s, \mathscr{H}^0(f^*(L \otimes I))) = 0$ (car $H^1(X_s, \mathscr{O}) = 0$) et $H^1(L \otimes I) \sim H^0(X_s, \mathscr{H}^1(f^*L \otimes I)))$. On en conclut que

$$H^1(L \otimes I) \xrightarrow{\sim} H^1(X_s, f^*(L \otimes I)),$$

[100]N.D.E. : L'existence d'une section après un tel changement de base peut se déduire de 2.3 et 2.4.

ce qui signifie que toute déformation sur X du G-torseur trivial sur X_0 est image réciproque d'une et d'une seule déformation à S du G-torseur trivial sur S_0. Si cette déformation est triviale le long d'une section, elle est donc triviale, ce qui prouve 1.2.9.

1.2.10. Prouvons 1.2.2 lorsque S est artinien. Soit T le plus grand sous-tore de G ; puisqu'on dispose déjà de la pleine fidélité (1.2.4), le problème est local sur S pour la topologie étale : on peut supposer T diagonalisable : $T \sim \mathbf{G}_m^n$. Par 1.2.3, et 1.2.9 la suite exacte de cohomologie fournit

$$R^1 f_* T \xrightarrow{\sim} R^1 f_* G,$$

et l'assertion en résulte, puisqu'elle est triviale pour $G = T$ et que $\operatorname{Hom}(\mathbf{G}_m, T) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\mathbf{G}_m, G)$ (cf. 1.2.2.1).

1.2.11. Prouvons 1.2.2 lorsque S est noethérien local complet. Soit s une section de p[101].

Si K est un G-torseur sur $\mathbf{P}(\epsilon)$, il existe par 1.2.10 un unique couple $(\widehat{\varphi}, \widehat{\Psi})$ formé d'un
499 homomorphisme formel $\widehat{\varphi} : \mathbf{G}_m \to G$ et d'un isomorphisme formel $\widehat{\Psi} : \widehat{p^* s^* K + \varphi \mathscr{O}(1)} \xrightarrow{\sim} \widehat{K}$[102][103]. Si G est affine, alors $\widehat{\varphi}$ est algébrisable (SGA 3 IX 7.1). Admettons provisoirement que, ainsi qu'on le prouvera en (1.2.13), $\widehat{\varphi}$ est toujours algébrisable en $\varphi : \mathbf{G}_m \to G$.

Si $K_0 = s^* K$, et si $K_1 = p^* K_0 + \varphi \mathscr{O}(1)$, on dispose d'un isomorphisme formel $\widehat{\Psi} : \widehat{K_1} = \widehat{K(K_0, \varphi)} \xrightarrow{\sim} \widehat{K}$, i.e. d'une trivialisation formelle de $K - K_1$. En vertu de GAGA formel, cette section est algébrique, ce qui prouve 1.2.11. Plus précisément, si G est quasi-affine, alors $K - K_1$ est représentable et on utilise EGA III 5.1.4. Dans le cas général, on procède de même avec l'espace algébrique $K - K_1$.

1.2.12. Algébricité de $\widehat{\varphi}$: vérification préliminaire pour un trait de base. Supposons que S soit un trait complet, $S = \operatorname{Spec}(V)$, et soit L le corps des fractions de V.

a) Sur L, il existe un unique triple $(K_{0L}, \varphi_L, \Psi_L)$:

$$\Psi_L : K(K_{0L}, \varphi_L) \xrightarrow{\sim} K | \operatorname{Spec}(L).$$

b) D'après (1.2.10) (1.2.11), et avec les notations de 1.2.7, on dispose d'une application rigide analytique $\widehat{\varphi_L} : U_m \to \widehat{G}$, d'un $\widehat{G}$-torseur $\widehat{K_0}$ et d'un isomorphisme rigide analytique

$$\widehat{\Psi} : p^* \widehat{K_0} + \widehat{\varphi_L} \widehat{\mathscr{O}(1)} \xrightarrow{\sim} \widehat{K}.$$

D'après l'assertion d'unicité 1.2.7, $\widehat{\varphi_L}$ s'identifie à l'application déduite de φ_L. Le morphisme formel $\widehat{\Psi}$ de 1.2.11 induit donc sur $\boldsymbol{\mu}_n$ une application qui coïncide avec l'application déduite de l'application algébrique $\varphi_L : \mathbf{G}_m \to G$.

1.2.13. Algébricité de $\widehat{\varphi}$. L'application formelle $\widehat{\varphi} : \mathbf{G}_m \to G$ de 1.2.11 induit, pour ℓ inversible sur S, des applications

$$\varphi_\ell : T_\ell(\widehat{\mathbf{G}_m}) = T_\ell(\mathbf{G}_m) \longrightarrow T_\ell(G).$$

500 D'après (1.2.12) et (EGA II 7.1.9), pour tout point t de S, il existe un morphisme algé-

[101]N.D.E. : Comme plus haut, il convient de se donner aussi un isomorphisme $s^* \mathscr{O}(1) \sim \mathscr{O}$.

[102]N.D.E. : Il faut demander que cet isomorphisme devienne l'isomorphisme évident après application de s^*.

[103]N.D.E. : Il faut comprendre ici que si A est l'anneau de S, I son idéal maximal et $S_n = \operatorname{Spec}(A/I^n)$, un morphisme formel consiste en la donnée d'un système compatible de morphismes entre objets au-dessus de S_n pour tout n. La question de l'algébricité est de savoir si ce système compatible provient par image inverse d'une donnée similaire sur S.

brique $\varphi_t : \mathbf{G}_{m_t} \to G_t$ tel que $T_\ell(\varphi_t) = T_\ell(\varphi)_t$. D'après (SGA 3 XV 4.1 bis) $\widehat{\varphi}$ est donc algébrisable.

1.2.14. Prouvons 1.2.2. Par passage à la limite, on se ramène au cas S noethérien, puis S noethérien local d'algèbre affine A. Soit s une section de p. Soit K un G-torseur sur $\mathbf{P}(\epsilon)$. Sur $S' = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$, il existe un et un seul homomorphisme $\varphi' : \mathbf{G}_{mS'} \to G_{S'}$ tel que l'image réciproque K' de K sur $\mathbf{P}(\epsilon) \times_S S'$ soit de la forme $K(K_0', \varphi')$. Cet homomorphisme φ' se descend en $\varphi : \mathbf{G}_m \to G$. Pour prouver la surjectivité essentielle du foncteur 1.2.1, il est loisible de remplacer K par $K - \varphi\mathscr{O}(1)$, i.e. de supposer que $\varphi = 0$. Sur S', il existe alors un et un seul isomorphisme $\Psi : p'^* s^* K' \xrightarrow{\sim} K'$, induisant l'identité sur la section s. Ce morphisme se descend à S (descente fpqc de morphismes de torseurs fppf), et ceci prouve 1.2.2.

Variantes 1.2.15. La conclusion de 1.2.2 est encore vérifiée dans les cas suivants.

(i) G est défini par un Module quasi-cohérent sur S.
(ii) G est image réciproque d'un faisceau de torsion sur le petit site étale de S.

Dans le cas (i), que les flèches (1.2.2.1) soient des isomorphismes est standard, compte tenu de ce que la cohomologie fppf de G coïncide avec sa cohomologie pour la topologie de Zariski.

Dans le cas (ii), les flèches (1.2.2.1) sont des isomorphismes d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et la simple connexité de $\mathbf{P}_k^r$ pour k algébriquement clos.

1.3. Intégration des torseurs.

1.3.1. Soient S un schéma et G un faisceau abélien sur le grand site fppf de S, vérifiant les 3 conditions suivantes.

.

(i) Pour tout espace projectif $p : \mathbf{P}_S^r \to S$, avec $r \geq 1$, on a, dans le grand site fppf de S (XVII 0.10) **501**

$$G \xrightarrow{\sim} p_* p^* G \quad \text{et}$$
$$\mathscr{H}om(\mathbf{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} R^1 p_* p^* G$$

(ii) Pour tout n et tout S-morphisme affine lisse $f : X \to T$, si K_1 et K_2 sont deux G-torseurs sur $\mathrm{Sym}_T^n(X)$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(K_1, K_2)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes symétriques de l'image réciproque de K_1 sur $(X/T)^n$ dans l'image réciproque de K_2 sur $(X/T)^n$.

Cette condition équivaut à la conjonction de :

(ii') $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Sym}_T^n(X), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S((X/T)^n, G)^{\sigma_n}$, et

(ii'') Si l'image réciproque sur $(X/T)^n$ d'un torseur K sur $\mathrm{Sym}_T^n(X)$ admet une section symétrique, alors K est trivial.

(iii) G vérifie soit la condition (XVII 6.3.21.1), soit les conditions (6.3.24) et (456).

La conclusion de 1.2.2 est donc vérifiée (cf. 1.2.2.1), ainsi que le formulaire XVII 6.3.26.

La condition (i) est discutée en 1.2.2 et 1.2.15. La condition (ii) est vérifiée dès que G est représentable de présentation finie, ou image réciproque d'un faisceau sur le petit site étale de S, ou plat quasi-cohérent. La condition 1.3.1.1 est donc vérifiée dans chacun des cas suivants.

.

(a) G est lisse de présentation finie (1.2.2 et XVII 6.3.21.1).

(b) G est image réciproque d'un faisceau de torsion sur le petit site étale de S (1.2.15 (ii) et XVII 6.3.21.1).

(c) G est affine, et noyau d'un épimorphisme de groupes lisses (1.2.2 et XVII 6.3.3.1).

(d) G est défini par un faisceau quasi cohérent plat sur S (1.2.15 (i) et XVII 6.3.21.1).

502 1.3.2. Soit $f : X \to S$ une courbe projective et lisse sur un schéma S, à fibres géométriques connexes non vides. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X « suffisamment » relativement ample au sens suivant.

. Pour tout point géométrique s de S, si X_s est de genre g, alors

$$\deg_{X_s}(\mathscr{L}) > 2g-2,$$
$$\deg_{X_s}(\mathscr{L}) \geq 1 \quad \text{si} \quad g=0, \quad \text{et} \quad \deg_{X_s}(\mathscr{L}) \geq 2 \quad \text{si} \quad g=1$$

On a alors $R^1 f_*\mathscr{L} = 0$, et $f_*\mathscr{L}$ est localement libre de formation compatible à tout changement de base, et partout de rang ≥ 2. Si une section s de $f_*\mathscr{L}$ ne s'annule en aucun point, le schéma D_s des zéros de s, regardé comme section de $\mathscr{L}$ sur X, est un diviseur relatif (EGA IV 21.15.2), fini localement libre sur S puisque X/S est de dimension relative 1. On a canoniquement

$$s : \mathscr{O}(D_s) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}.$$

Le diviseur D_s ne dépend de s qu'à multiplication par une section de $\mathscr{O}_S^*$ près. La construction précédente nous fournit donc un diviseur relatif $Z_{\mathscr{L}}$ sur le schéma déduit de X par le changement de base

$$p : \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L})^\vee) \longrightarrow S.$$

Soit K un torseur sous G_X, et soit $K|Z_{\mathscr{L}}$ son image réciproque sur $Z_{\mathscr{L}}$. La trace de ce torseur (XVII 6.3.26), de $Z_{\mathscr{L}}$ à $\mathbf{P}(f_*(\mathscr{L})^\vee)$ est un torseur $K_{\mathscr{L}}$ sur $\mathbf{P}(f_*(\mathscr{L})^\vee)$:

$$K_{\mathscr{L}} = \operatorname{Tr}_{Z_{\mathscr{L}}/\mathbf{P}}(K|Z_{\mathscr{L}}).$$

En vertu de 1.2.2, il existe un triple, unique à isomorphisme unique près, formé d'un G-torseur $\langle \mathscr{L}, K]$ sur S, d'un morphisme $\varphi_{\mathscr{L},K} : \mathbf{G}_m \to G$ et d'un isomorphisme

$$K_{\mathscr{L}} \simeq p^*\langle \mathscr{L}, K] + \varphi_{\mathscr{L},K}\mathscr{O}(1).$$

503 1.3.3. Si on note additivement la composition des torseurs, on a canoniquement

$$\langle \mathscr{L}, K_1 + K_2] \simeq \langle \mathscr{L}, K_1] + \langle \mathscr{L}, K_2] \tag{1.3.3.1}$$
$$\varphi_{\mathscr{L},K_1+K_2} = \varphi_{\mathscr{L},K_1} + \varphi_{\mathscr{L},K_2}. \tag{1.3.3.2}$$

Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux faisceaux inversibles sur X vérifiant (1.3.2.1), et $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$. Le produit tensoriel des sections définit un morphisme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}_1)^\vee)\times_S\mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}_2)^\vee) \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dd, "p_{12}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[rr, "\pi"] & & \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L})^\vee) \arrow[dd, "p"] \\
\mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}_1)^\vee) \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}_2)^\vee) \arrow[dl, "p_2"] & \\
 & S \arrow[rr, equal] & & S.
\end{tikzcd}$$

On a $\pi^* Z_{\mathscr{L}} \simeq Z_{\mathscr{L}_1} + Z_{\mathscr{L}_2}$, d'où un isomorphisme (XVII 6.3.27.1)

$$\pi^* K_{\mathscr{L}} = \mathrm{pr}_1^* K_{\mathscr{L}_1} + \mathrm{pr}_2^* K_{\mathscr{L}_2}. \tag{1.3.3.3}$$

On dispose d'un isomorphisme canonique

$$\pi^* \mathscr{O}(1) \simeq \mathrm{pr}_1^* \mathscr{O}(1) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}(1),$$

de sorte que (1.3.3.3) se réécrit

$$\begin{aligned}\pi^*(p^*\langle \mathscr{L}, K] + \varphi_{\mathscr{L},K}\mathscr{O}(1)) &= p_{12}^*\langle \mathscr{L}, K] + \mathrm{pr}_1^* \varphi_{\mathscr{L},K}\mathscr{O}(1) + \mathrm{pr}_2^* \varphi_{\mathscr{L},K}\mathscr{O}(1)\\ &= p_{12}^*\langle \mathscr{L}_1, K] + p_{12}^*\langle \mathscr{L}_2, K] + \mathrm{pr}_1^* \varphi_{\mathscr{L}_1,K}\mathscr{O}(1) + \mathrm{pr}_2^* \varphi_{\mathscr{L}_2,K}\mathscr{O}(1).\end{aligned}$$

On en déduit, par une double application de 1.2.2, un isomorphisme canonique

$$\langle \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2, K] = \langle \mathscr{L}_1, K] + \langle \mathscr{L}_2, K] \tag{1.3.3.4}$$

et une identité 504

$$\varphi_{\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2, K} = \varphi_{\mathscr{L}_1,K} = \varphi_{\mathscr{L}_2,K}.$$

On voit donc que $\varphi_{\mathscr{L},K}$ ne dépend que de K, et on pose

$$\deg(K) = \varphi_{\mathscr{L},K}. \tag{1.3.3.5}$$

On a donc

$$K_{\mathscr{L}} \simeq p^*\langle \mathscr{L}, K] + \deg(K)\mathscr{O}(1). \tag{1.3.3.6}$$

$$\deg(K_1 + K_2) = \deg(K_1) + \deg(K_2). \tag{1.3.3.7}$$

Soit $\mathscr{U}$ un faisceau inversible localement facteur direct $f_*\mathscr{L}$, définissant une section u de $\mathbf{P}((f_*\mathscr{L})^\vee)$. Soit D_u le diviseur relatif défini par les sections locales inversibles de $\mathscr{U}$.

$$u^*\mathscr{O}(1) \simeq \mathscr{U}^\vee$$

et on déduit donc de (1.3.3.6) que

$$u^* K_{\mathscr{L}} = \mathrm{Tr}_{D_u/S}(K) \simeq \langle \mathscr{L}, K] - \deg(K)\mathscr{U}^{104}. \tag{1.3.3.8}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité :

Proposition 1.3.4. Le diagramme suivant d'isomorphismes (1.3.3.1) et (1.3.3.4) est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2, K_1 + K_2] \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dd, phantom, "\wr"] & \langle \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2, K_1] + \langle \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2, K_2] \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
 & \langle \mathscr{L}_1, K_1] + \langle \mathscr{L}_2, K_1] + \langle \mathscr{L}_1, K_2] + \langle \mathscr{L}_2, K_2] \arrow[d, "\sim"'] \\
\langle \mathscr{L}_1, K_1 + K_2] + \langle \mathscr{L}_2, K_1 + K_2] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \langle \mathscr{L}_1, K_1] + \langle \mathscr{L}_1, K_2] + \langle \mathscr{L}_2, K_1] + \langle \mathscr{L}_2, K_2].
\end{tikzcd}$$

Les isomorphismes (1.3.3.1) et (1.3.3.4) sont de plus compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité en un sens qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. La formule (1.3.3.4) permet alors de prolonger par « linéarité » la définition de $\langle \mathscr{L}, K]$ lorsque $\mathscr{L}$ ne vérifie plus nécessairement la condition (1.3.2.1). 505

[104] N.D.E. : La notation $\mathrm{Tr}_{D_u/S}(K)$ est introduite plus bas en (1.3.5.0).

1.3.5. Pour tout diviseur relatif effectif D sur X, on pose

$$\mathrm{Tr}_{D/S}(K) = \mathrm{Tr}_{D/S}(K|D). \tag{1.3.5.0}$$

Si $\mathscr{O}(D)$ vérifie (1.3.2.1), la section 1 de $\mathscr{O}(D)$ est une section de $f_*\mathscr{O}(D)$, et engendre en tant que telle un faisceau inversible localement facteur direct de $f_*\mathscr{O}(D)$, dont elle définit une trivialisation. L'isomorphisme (1.3.3.8) nous fournit donc un isomorphisme

$$\langle \mathscr{O}(D), K] \simeq \mathrm{Tr}_{D/S}(K). \tag{1.3.5.1}$$

On vérifie aussitôt que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \langle \mathscr{O}(D), K_1 + K_2] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Tr}_{D/S}(K_1 + K_2) \arrow[d, "\wr"] \\ \langle \mathscr{O}(D), K_1] + \langle \mathscr{O}(D), K_2] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Tr}_{D/S}(K_1) + \mathrm{Tr}_{D/S}(K_2) \end{tikzcd} \tag{1.3.5.2}$$

et

$$\begin{tikzcd} \langle \mathscr{O}(D_1 + D_2), K] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Tr}_{D_1+D_2/S}(K) \arrow[d, "\wr\quad (XVII\ 6.3.27.1)"] \\ \langle \mathscr{O}(D_1), K] + \langle \mathscr{O}(D_2), K] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Tr}_{D_1/S}(K) + \mathrm{Tr}_{D_2/S}(K) \end{tikzcd} \tag{1.3.5.3}$$

sont commutatifs. Ceci permet, par linéarité, de définir l'isomorphisme (1.3.5.1) pour tout diviseur relatif.

1.3.6. Soient D et E deux diviseurs de Cartier relatifs effectifs, et soit f une fonction rationnelle telle que

$$\operatorname{div}(f) = D - E,$$

i.e. un isomorphisme entre $\mathscr{O}(D)$ et $\mathscr{O}(E)$. L'isomorphisme f entre $\mathscr{O}(D)$ et $\mathscr{O}(E)$ définit, par (1.3.5.1), un isomorphisme

$$\langle f, K] : \mathrm{Tr}_{D/S}(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_{E/S}(K). \tag{1.3.6.1}$$

506 On a, par (1.3.5.2) pour la seconde formule :

$$\langle fg, K] = \langle f, K].\langle g, K]$$
$$\langle f, K_1 + K_2] = \langle f, K_1] + \langle f, K_2].$$

Si λ est une section de $\mathscr{O}_S^*$, alors, pour tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X, la multiplication par λ est un automorphisme de $\mathscr{L}$. Par transport de structure, cet automorphisme induit sur les deux membres de (1.3.3.8) des automorphismes qui se déduisent l'un de l'autre via l'isomorphisme (1.3.3.8). On en déduit que

$$\langle \lambda, K] = \deg(K)(\lambda)\ ;$$

si $\deg(K) \neq 0$, l'isomorphisme $\langle f, K]$ entre $\mathrm{Tr}_{D/S}(K)$ et $\mathrm{Tr}_{E/S}(K)$ dépend donc du choix de f.

Soient $\lambda \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S^*)$, $g \in \Gamma(S, G)$, $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X et K un G-torseur sur X. Si $\langle \lambda, g]$ est l'automorphisme de $\langle \mathscr{L}, K]$ déduit par transport de structure des automorphismes λ de $\mathscr{L}$ et g de K, alors, $\langle \lambda, g]$, identifié à une section de G, est donné par $\langle \lambda, g] = \langle \lambda, K] + \langle \mathscr{L}, g]$; puisque $\langle \mathscr{O}(D), g] = \mathrm{Tr}_{D/S}(g)$, on tire de la formule précédente que

$$\langle \lambda, g] = \deg(K)(\lambda) + \deg(\mathscr{L}).g. \tag{1.3.6.2}$$

1.3.7. Soit $f : X \to S$ une courbe projective et lisse sur S et G un groupe sur S vérifiant 1.3.1.1. Si $X \xrightarrow{f_0} T \xrightarrow{\pi} S$ est la factorisation de Stein de f, alors π est un revêtement étale de S et le faisceau f_*G_m est le tore $\prod_{T/S} \mathbf{G}_m$. Localement sur S (pour la topologie étale), X est somme d'une famille de courbes $(X_i)_{i\in I}$ sur S à fibres géométriques connexes non vides. Si K est un torseur sous G et $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, on pose alors

$$\langle \mathscr{L}, K] = \sum_i \langle \mathscr{L}|X_i, K|X_i]$$

et on définit le degré de $K : f_*\mathbf{G}_m = \mathbf{G}_m^I \to G$ comme ayant les coordonnées $\deg(K|X_i) : \mathbf{G}_m \to G$. Les constructions locales se globalisent et fournissent des foncteurs et mor- **507**
phismes

$$\langle \mathscr{L}, K]_{X/S} = \mathrm{Tr}_{T/S}(\langle \mathscr{L}, K]_{X/T}) \tag{1.3.7.1}$$

$$\deg(K) : f_*\mathbf{G}_m = \prod_{T/S} \mathbf{G}_m \longrightarrow G : \deg_{X/S}(K) = \prod_{T/S} \deg_{X/T}(K). \tag{1.3.7.2}$$

Pour λ un automorphisme de $\mathscr{L}$, défini par un élément λ_0 de $\Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$, on a

$$\langle \lambda, K] = \deg(K)(\lambda). \tag{1.3.7.3}$$

On définit le degré total de K comme le composé

$$\deg\mathrm{tot}(K) : \mathbf{G}_m \longrightarrow f_*\mathbf{G}_m \xrightarrow{\deg(K)} G.$$

Les résultats qui précèdent fournissent :

Formulaire 1.3.8. Pour toute courbe projective et lisse $f : X \to S$, on dispose d'un foncteur $\langle\ ,\ ]$, de formation compatible à tout changement de base, qui à un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X et à un torseur K sous f^*G associe un torseur $\langle \mathscr{L}, K]$ sous G sur S. Ce foncteur est muni des structures additionnelles suivantes et vérifie les conditions suivantes :

. $\langle \mathscr{L}, K]$ est biadditif en $\mathscr{L}$ et K ; les isomorphismes de biadditivité sont compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité, aux changements de base, vérifient la compatibilité (1.3.4) et sont compatibles aux isomorphismes (1.3.8.2) ci-dessous (via XVII 6.3.25.3 et XVII 6.3.27.1).

. On a, pour tout diviseur relatif effectif E sur X/S, un isomorphisme canonique

$$\langle \mathscr{O}(E), K] \simeq \mathrm{Tr}_{E/S}(K|E).$$

. Le degré (1.3.7.2) vérifie pour $\lambda \in f_*\mathbf{G}_m$ automorphisme de $\mathscr{L}$

$$\langle \lambda, K] = \deg(K)(\lambda).$$

Pour $\lambda \in \mathbf{G}_m(S)$, le degré total vérifie

$$\langle \lambda, K] = \deg\mathrm{tot}(K)(\lambda).$$

De même, pour $g \in G(S)$ on a $\langle \mathscr{L}, g] = \deg(\mathscr{L}).g$. **508**

On en déduit un isomorphisme canonique :

$$\langle f^*\mathscr{L}, K] \simeq \deg\mathrm{tot}(K)(\mathscr{L}). \tag{1.3.8.4}$$

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout homomorphisme $\varphi : G \to G'$, on dispose d'un isomorphisme canonique, compatible aux données qui précèdent :

$$\langle \mathscr{L}, \varphi(K)] \simeq \varphi(\langle \mathscr{L}, K]). \tag{1.3.8.5}$$

. Soit $u : X \to Y$ un morphisme plat entre courbes projectives et lisses sur S. On dispose alors d'isomorphismes compatibles à la biadditivité et aux changements de base :

- Pour $\mathscr{L}$ faisceau inversible sur X et K un G_Y-torseur sur Y, on a
$$\langle \mathscr{L}, u^* K] \xrightarrow{\sim} \langle N_{X/Y}(\mathscr{L}), K].$$
- Pour $\mathscr{L}$ faisceau inversible sur X et K un G_X-torseur sur X, on a
$$\langle u^* \mathscr{L}, K] \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{L}, \operatorname{Tr}_{X/Y} K].$$

De plus, ces isomorphismes vérifient une compatibilité évidente pour un composé uv de morphismes de courbes ; pour $\mathscr{L} = \mathscr{O}(E)$, ils s'identifient aux isomorphismes (XVII 6.3.27.2)

$$\operatorname{Tr}_{E/S}(u^* K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Tr}_{u_* E/S}(K)$$
$$\operatorname{Tr}_{u^* E/S}(K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Tr}_{E/S} \operatorname{Tr}_{X/Y} K.$$

Reste à prouver 1.3.8.6. On se ramène au cas X et Y à fibres géométriques connexes non vides et on note que les formules explicites qui précèdent fournissent, pour chaque section s de $\mathscr{L}$, qui ne s'annule pas en tant que section de l'image directe de $\mathscr{L}$, un isomorphisme Ψ_s du type voulu, homogène en s, et donc indépendant de s pour $\mathscr{L}$ vérifiant (1.3.2.1). Le cas général s'en déduit.

1.3.9. Sous les hypothèses 1.3.7, on a vu (1.3.8) que tout G-torseur K sur X défini
509 nit un foncteur $\langle *, K]$, désigné ci-dessous par $F(*)$, muni des données additionnelles suivantes et vérifiant les conditions suivantes :

(i) F est un morphisme de champ fppf sur S (XVII 0.10 et Giraud [1])
  - de source le champ dont les T-objets, pour T un S-schéma, sont les faisceaux inversibles sur X_T
  - de but le champ des G-torseurs.

(ii) Le foncteur F est muni d'isomorphismes d'additivité $F(\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2) \xrightarrow{\sim} F(\mathscr{L}_1) + F(\mathscr{L}_2)$, fonctoriels, compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité, et compatibles aux changements de base.

Théorème 1.3.10. *Sous les hypothèses de 1.3.7, le foncteur $\Phi : K \mapsto \langle *, K]$ est une équivalence entre la catégorie des G-torseurs sur X et la catégorie des morphismes de champs considérés en (1.3.9).*

On se ramène facilement au cas où X est à fibres connexes non vides.

Soit F vérifiant 1.3.9 (i) et (ii). Pour tout S-schéma T et toute section t de X_T/T, désignons encore par t le diviseur relatif $t(T)$. $F(\mathscr{O}(t))$ est alors un G_T-torseur sur T. On désignera par $\Psi(F)$ le torseur ainsi obtenu sur X, pour t le « point universel » de X, à valeur dans X, défini par l'application identique de X dans X. Pour toute section t comme plus haut, on a

$$F(\mathscr{O}(t)) \simeq t^* \Psi(F). \tag{1.3.10.1}$$

L'isomorphisme 1.3.8.2 fournit un isomorphisme de foncteurs $\Psi \circ \Phi \simeq \mathrm{Id}$. Construisons un isomorphisme $\Phi \circ \Psi \simeq \mathrm{Id}$.

Pour chaque section t de X_T sur T, l'isomorphisme (1.3.10.1) est un isomorphisme

$$F(\mathscr{O}(t)) \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \langle \mathscr{O}(t), \Psi(F)].$$

Par addition, chaque famille $t_1, \ldots, t_n$ de sections de X_T sur T définit un isomorphisme

$$F(\mathscr{O}(\sum t_i)) \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \langle \mathscr{O}(\sum t_i), \Psi(F)],$$

et d'après 1.3.9 (ii), cet isomorphisme ne dépend pas de l'ordre des t_i.

Prenons $T = (X/S)^n$ et pour $t_1 \ldots t_n$ le n^{uple} universel de sections. Si $T' = \operatorname{Sym}^n_S(X)$, **510**
on dispose alors sur $X_{T'}$ d'un diviseur $\sum t_i$, dont le diviseur $\sum t_i$ sur X_T soit image réciproque. Sur T, α est un isomorphisme symétrique

$$\alpha : F(\mathscr{O}(\sum t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{O}(\sum t_i), \Psi(F)]$$

entre torseurs image réciproque de torseurs sur T'. Par hypothèse (1.3.1.1) (ii), cet isomorphisme provient d'un et d'un seul isomorphisme sur T'

$$\alpha : F(\mathscr{O}(\sum t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{O}(\sum t_i), \Psi(F)] \qquad (\text{sur } T').$$

D'après XVII 6.3.9, on dispose ainsi pour tout diviseur relatif D sur X d'un isomorphisme

$$\alpha_D : F(\mathscr{O}(D)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{O}(D), \Psi(F)], \tag{1.3.10.2}$$

additif en D, et de formation compatible à tout changement de base.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible suffisamment ample sur X au sens 1.3.2.1. Chaque section partout non nulle s de $f_*\mathscr{L}$ définit, avec les notations de 1.3.2, un isomorphisme

$$s : \mathscr{O}(D_s) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L},$$

d'où, par (1.3.10.2), un isomorphisme

$$\alpha_s : F(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{L}, \Psi(F)]. \tag{1.3.10.3}$$

Prouvons que cet isomorphisme ne dépend pas de s. En effet :

(i) La formation de α_s est compatible à tout changement de base

(ii) Il existe un homomorphisme $\varphi : \mathbf{G}_m \to G$ tel que

$$\alpha_{\lambda s} = \varphi(\lambda).\alpha_s$$

(d'après la fonctorialité des deux membres de (1.3.10.3)).

On a nécessairement $\varphi = 0$, sans quoi le torseur sur $\mathbf{P}((f_*\mathscr{L})^\vee)$ image réciproque de $F(\mathscr{L}) - \langle \mathscr{L}, \Psi(F)]$ serait de degré $\neq 0$. Les α_s définissent donc un morphisme de $\mathbf{P}((f_*\mathscr{L})^\vee)$ dans G, et ce dernier est constant par hypothèse (1.3.1.1) (i). On peut donc **511**
poser $\alpha_{\mathscr{L}} = \alpha_s$.

Les isomorphismes $\alpha_{\mathscr{L}}$ forment donc un isomorphisme de foncteurs entre les restrictions des foncteurs F et $\langle x, \Psi(F)]$ aux faisceaux suffisamment amples. Cet isomorphisme est compatible aux isomorphismes d'additivité, ce qui permet de le prolonger par linéarité à tous les faisceaux inversibles et achève la construction de

$$\alpha : \Phi \circ \Psi \simeq \mathrm{Id}.$$

Exemple 1.3.11. $G = \mathbf{G}_m$. Sous les hypothèses 1.3.7, et dans le cas particulier où $G = \mathbf{G}_m$, on écrira $\langle\ ,\ \rangle$ plutôt que $\langle\ ,\ ]$; si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont deux faisceaux inversibles sur X, alors $\langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle$ est un faisceau inversible sur S. On dispose de plus d'isomorphismes (1.3.8.2)

$$\langle \mathscr{O}(D), \mathscr{M}\rangle \simeq N_{D/S}(\mathscr{M}).$$

Si D et E sont des diviseurs relatifs effectifs disjoints, alors $\mathscr{O}(E)|D$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{O}$, d'où un isomorphisme

$$\sigma_{D,E} : \langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(E)\rangle \simeq N_{D/S}(\mathscr{O}(E)) \simeq N_{D/S}(\mathscr{O}) \simeq \mathscr{O}. \tag{1.3.11.1}$$

Proposition 1.3.12. Soient $(D_i)_{i=1,2}$ et E des diviseurs relatifs effectifs, avec D_i disjoint de E ($i = 1, 2$). Soit f une fonction rationnelle vérifiant $\operatorname{div}(f) = D_1 - D_2$, i.e. un isomorphisme $f : \mathscr{O}(D_1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(D_2)$. Les diagramme d'isomorphismes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} \langle \mathscr{O}(D_1), \mathscr{O}(E)\rangle \arrow[r, "\sigma_{D_1,E}"] \arrow[d, "\langle f, \mathscr{O}(E)\rangle"] & \mathscr{O} \arrow[d, "N_{E/S}(f)"] \\ \langle \mathscr{O}(D_2), \mathscr{O}(E)\rangle \arrow[r, "\sigma_{D_2,E}"] & \mathscr{O} \end{tikzcd} \tag{1.3.12.1}$$

$$\begin{tikzcd} \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{O}(D_1)\rangle \arrow[r, "\sigma_{E,D_1}"] \arrow[d, "\langle \mathscr{O}(E), f\rangle"] & \mathscr{O} \arrow[d, "N_{E/S}(f)"] \\ \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{O}(D_2)\rangle \arrow[r, "\sigma_{E,D_2}"] & \mathscr{O} \end{tikzcd} \tag{1.3.12.2}$$

512 La formule (1.3.12.2) exprime simplement la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} N_{E/S}(\mathscr{O}(D_1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "N_{E/S}(f)"] & \mathscr{O} \arrow[d, "N_{E/S}(f)"] \\ N_{E/S}(\mathscr{O}(D_2)) \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{O}. \end{tikzcd}$$

Pour tout S-schéma T et tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X_T, posons $F(\mathscr{L}) = N_{E_T/T}(\mathscr{L})$. Les hypothèses de 1.3.10 sont vérifiées par ce foncteur, de sorte qu'il existe un unique faisceau inversible $\mathscr{M}$ muni d'un isomorphisme de foncteur compatible à la biadditivité :

$$N_{E_T/T}(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle.$$

De plus, si $d : T \to X_T$ est une section de X sur T, on a canoniquement

$$d^*\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} N_{E_T/T}(\mathscr{O}(d)).$$

Prenant pour d la section universelle, de X, $\Delta : X \to X_X$, on trouve

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} N_{E_X/X}(\mathscr{O}(\Delta)).$$

Localement sur S, E est une somme de sections $E = \sum t_i$ (XVII 6.3) ; pour un tel E, on a

$$N_{E_X/X}(\mathscr{O}(\Delta)) = \otimes t_i^* \mathscr{O}(\Delta) = \sum \mathscr{O}(t_i) = \mathscr{O}(E),$$

et cet isomorphisme, étant indépendant de l'ordre des t_i, définit un isomorphisme canonique[105]

$$N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) \sim \mathcal{O}(E), \tag{1.3.12.3}$$

de sorte que

$$N_{E_T/T}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{O}(E) \rangle. \tag{1.3.12.4}$$

L'isomorphisme (1.3.12.3) est compatible à la biadditivité, aux changements de base et est caractérisé par le fait que, de plus, pour toute section d de X_T sur T, l'isomorphisme 513

$$N_{E/T}(\mathcal{O}(d)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(E) \rangle \xrightarrow{\sim} d^*\mathcal{O}(E)$$

est image réciproque de l'isomorphisme universel (1.3.12.3). En particulier, pour d disjoint de E, le diagramme

$$\begin{tikzcd} N_{E/T}(\mathcal{O}(d)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(E) \rangle \arrow[r, "\sim"] & d^*\mathcal{O}(E) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O} \arrow[rr, equal] & & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Par addition[106], on en déduit que pour D disjoint de E, le diagramme

$$\begin{tikzcd} N_{E/T}(\mathcal{O}(D)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \arrow[r, "\sim"] & N_{D/T}(\mathcal{O}(E)) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O} \arrow[rr, equal] & & \mathcal{O} \end{tikzcd} \tag{1.3.12.5}$$

est commutatif. La flèche $\sigma_{E,D}$ est donc composée de l'inverse de 1.3.12.4 et d'une flèche évidente

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \xleftarrow{\sim} N_{E/S}(\mathcal{O}(D)) \longrightarrow \mathcal{O}$$

et (1.3.12.1) en résulte aussitôt, puisque 1.3.12.4 est fonctoriel.

On déduit de 1.3.12 (cf. Serre [6, Ch. III, prop. 7, p. 46])

Corollaire 1.3.13. Soient $(D_i)_{i=1,2}$ et $(E_i)_{i=1,2}$ des diviseurs relatifs effectifs, avec D_i disjoint de E_j, f une fonction rationnelle vérifiant $\operatorname{div}(f) = D_1 - D_2$ et g une fonction rationnelle vérifiant $\operatorname{div}(g) = E_1 - E_2$. On a alors

$$N_{E_1/S}(f).N_{E_2/S}(f)^{-1} = N_{D_1/S}(g).N_{D_2/S}(g)^{-1}$$

soit brièvement

$$f(\operatorname{div}(g)) = g(\operatorname{div}(f)). \tag{1.3.13.1}$$

[105] N.D.E. : L'argument semble supposer que, localement, les t_i sont bien définis à permutation près, ce qui n'est pas vrai comme on peut le constater dans le cas où $S = \operatorname{Spec} k[\epsilon]$ est le spectre de l'algèbre des nombres duaux, $X = \mathbf{P}^1_S$ et E est le sous-schéma fermé de ${}^1_S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S[T] \subset X$ défini par l'équation $(T - \varepsilon)(T + \varepsilon) = T^2$. Il semble qu'il faille plutôt appliquer la condition de « descente canulée » 1.3.1.1 (ii) pour obtenir le résultat dans la situation du diviseur universel sur X après changement de base par $\operatorname{Sym}^n_S X \to S$ avant de la déduire pour le diviseur E.

[106] N.D.E. : La même objection soulevée plus haut vaut ici aussi. On peut raisonner de même en considérant « le diviseur universel disjoint de E » défini après changement de base par $\operatorname{Sym}^n_S(X - E) \to S$.

Cette formule, sous la forme

$$N_{D_2/S}(g)N_{E_1/S}(f) = N_{E_2/S}(f)N_{D_1/S}(g),$$

exprime, via (1.3.12.1) et (1.3.12.2) la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathscr{O}(D_1), \mathscr{O}(E_1)\rangle \arrow[r, "\langle \mathscr{O}(D_1), g\rangle"] \arrow[d, "\langle f, \mathscr{O}(E_1)\rangle"] & \langle \mathscr{O}(D_1), \mathscr{O}(E_2)\rangle \arrow[d, "\langle f, \mathscr{O}(E_2)\rangle"] \\
\langle \mathscr{O}(D_2), \mathscr{O}(E_1)\rangle \arrow[r, "\langle \mathscr{O}(D_2), g\rangle"] & \langle \mathscr{O}(D_2), \mathscr{O}(E_2)\rangle.
\end{tikzcd}$$

514 Corollaire 1.3.14. Pour $G = \mathbf{G}_m$, le degré (1.3.7) coïncide avec le degré usuel des faisceaux inversibles.

Il suffit de comparer les formules (1.3.7.3) et (1.3.12.1) pour f image réciproque de $f_0 \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S^*)$.

1.3.15. Quels que soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$, suffisamment amples, il existe localement sur S des diviseurs disjoints D et E et des isomorphismes

$$\alpha : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{O}(D) \quad \text{et} \quad \beta : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{O}(E).$$

Désignons par τ l'isomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle \arrow[r, "\langle \alpha, \beta\rangle"] \arrow[d, "\tau", "\wr"'] & \langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(E)\rangle \arrow[r, "\sigma_{D,E}"] & \mathscr{O} \arrow[d, equal] \\
\langle \mathscr{M}, \mathscr{L}\rangle \arrow[r, "\langle \beta, \alpha\rangle"] & \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{O}(D)\rangle \arrow[r, "\sigma_{E,D}"] & \mathscr{O}.
\end{tikzcd}$$

Il résulte de 1.3.12 que cet isomorphisme ne dépend pas du choix particulier de D, E, α et β ; il se globalise donc en un isomorphisme canonique

$$\tau : \langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{M}, \mathscr{L}\rangle. \tag{1.3.15.1}$$

Cet isomorphisme vérifie $\tau^2 = 1$; il est compatible à la biadditivité, puisque (1.3.11.1) l'est, et se prolonge par linéarité à des faisceaux inversibles quelconques.

Il résulte de (1.3.12.5) que le morphisme (1.3.12.4) s'identifie au composé

$$N_{E_T/T}(\mathscr{L}) \xleftarrow{\sim} \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{L}\rangle \xrightarrow{\sim\tau} \langle \mathscr{L}, \mathscr{O}(E)\rangle$$

(le vérifier pour $\mathscr{L} = \mathscr{O}(D)$ avec D disjoint de E).

515 Formulaire 1.3.16. Pour toute courbe projective et lisse $f : X \to S$, on dispose d'un foncteur $\langle\ ,\ \rangle$, de formation compatible à tout changement de base, qui à deux faisceaux inversibles $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sur X associe un faisceau inversible $\langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle$ sur S. Ce foncteur est muni des structures additionnelles suivantes et vérifie les conditions suivantes :

. Avec les notations de 1.3.8, pour $G = \mathbf{G}_m$, on a

$$\langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle = \langle \mathscr{L}, \mathscr{M}],$$

en particulier, $\langle \mathscr{L}, \mathscr{M}\rangle$ est biadditif en $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ au sens précisé en 1.3.8.1 et cette biadditivité est compatible à celle du second membre d'un isomorphisme canonique (fonctoriel en $\mathscr{M}$)

$$\langle \mathscr{O}(E), \mathscr{M}\rangle \xrightarrow{\sim} N_{E/S}(\mathscr{M}).$$

. On dispose d'un isomorphisme de symétrie

$$\tau : \langle \mathscr{L}, \mathscr{M} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{M}, \mathscr{L} \rangle,$$

fonctoriel en $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$, compatible aux changements de base, aux isomorphismes de biadditivité et vérifiant $\tau^2 = 1$. Il rend commutatif le diagramme suivant, pour D et E diviseurs disjoints :

$$\begin{tikzcd} N_{D/S}(\mathscr{O}(E)) \arrow[d, "\wr"] & \langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(E) \rangle \arrow[l] \arrow[r, "\tau"] & \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{O}(D) \rangle \arrow[r] & N_{E/S}(\mathscr{O}(D)) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathscr{O} \arrow[rrr, equal] & & & \mathscr{O}. \end{tikzcd}$$

Ces formules impliquent les formules (1.3.12.1) (1.3.12.2) (1.3.13.1) et

. Pour $a, b \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S^*)$ on a, désignant par $\langle a, b \rangle$ l'automorphisme de $\langle \mathscr{L}, \mathscr{M} \rangle$, identifié à une section de $\mathbf{G}_m$, déduit par fonctorialité des automorphismes a et b de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$,

$$\langle a, b \rangle = a^{\deg(\mathscr{M})} b^{\deg(\mathscr{L})}.$$

. On a, si $\mathscr{L}_0$ (resp. $\mathscr{M}_0$) est un Module inversible sur S, un isomorphisme canonique

$$\langle f^* \mathscr{L}_0, \mathscr{M} \rangle \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^{\otimes \deg(\mathscr{M})}$$

(resp. $\quad \langle \mathscr{L}, f^* \mathscr{M}_0 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}^{\otimes \deg(\mathscr{L})} \quad$).

. Si $u : X \to Y$ est un morphisme fini et plat de courbes projectives et lisses sur S, **516**
alors, pour $\mathscr{L}$ faisceau inversible sur X et $\mathscr{M}$ faisceau inversible sur Y, les isomorphismes 1.3.8.6

$$\langle \mathscr{L}, u^* \mathscr{M} \rangle \sim \langle N_{X/Y} \mathscr{L}, \mathscr{M} \rangle$$
$$\langle u^* \mathscr{M}, \mathscr{L} \rangle \sim \langle \mathscr{M}, N_{X/Y} \mathscr{L} \rangle$$

se déduisent l'un de l'autre par la symétrie (1.3.16.2) (le voir pour $\mathscr{L} = \mathscr{O}(E)$ et $\mathscr{M} = \mathscr{O}(F)$ avec E et F disjoints).

. Pour $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, la flèche de symétrie

$$\tau : \langle \mathscr{L}, \mathscr{L} \rangle \longrightarrow \langle \mathscr{L}, \mathscr{L} \rangle$$

est la multiplication par $(-1)^{\deg(\mathscr{L})}$.

1.3.17. Il reste à prouver 1.3.16.6. On donnera deux démonstrations, la première faisant usage de la théorie du déterminant (SGA 6 XI)[107].

Avant de procéder à chacune des démonstrations, on peut observer que si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont deux faisceaux inversibles sur X et $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$, alors l'automorphisme $\tau_{\mathscr{L}} : \langle \mathscr{L}, \mathscr{L} \rangle \longrightarrow \langle \mathscr{L}, \mathscr{L} \rangle$ (identifié à une fonction inversible sur S) est le produit des automorphismes $\tau_{\mathscr{L}_1}$ et $\tau_{\mathscr{L}_2}$. Dans la situation où S est le spectre d'un corps (et X géométriquement connexe), on peut donc supposer que $\mathscr{L} = \mathscr{O}(D)$ avec D un diviseur effectif (non nul). Comme $\tau^2 = \mathrm{Id}$, quitte à élever $\mathscr{L}$ à une puissance impaire suffisante (ou à l'écrire comme rapport entre deux fibrés amples), on peut également rendre $\mathscr{L}$ aussi ample qu'on le souhaite, si besoin est.

Les arguments ci-dessous nécessiteront également de se ramener au cas où S est le spectre d'un corps. Pour ce faire, il suffit de se ramener au cas où S est réduit, et ceci peut se faire en montrant que localement fppf sur S, la donnée $(X, \mathscr{L})$ provient d'une donnée similaire au-dessus d'une base réduite. Avant de faire cette réduction, on peut

[107] N.D.E. : Cet exposé n'a pas été rédigé, comme il est expliqué dans [3] qui contient aussi une mise en garde relative à la propriété de multiplicativité du déterminant dans les triangles distingués : elle exige des précautions, sans quoi elle admet des contre-exemples. Une référence sur ce sujet est [8].

se réduire à traiter le cas où $X \to S$ est muni d'une section $s : S \to X$ et où les fibres géométriques de $X \to S$ sont connexes et d'un certain genre g. En utilisant [4, § 5.2], on peut obtenir une courbe projective lisse $X_0 \to S_0$ de genre g, avec S_0 lisse de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, telle que localement, toute courbe relative comme ci-dessus s'en déduise par changement de base. En utilisant la section $s_0 : S_0 \to X_0$, on peut rigidifier le schéma de Picard $S_1 = \mathbf{Pic}_{X_0/S_0} \to S_0$ et ainsi obtenir un fibré en droites « universel » $\mathscr{L}_1$ sur $X_1 = X_0 \times_{S_0} S_1$. Localement, toute courbe relative comme ci-dessus munie d'un fibré en droites provient de $(X_1, \mathscr{L}_1)$ sur S_1 qui est bien réduit[108].

1^re^ démonstration : Soit $u : T \to S$ un morphisme fini localement libre. Si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur T, on dispose d'un isomorphisme

$$N_{T/S}(\mathscr{L}) \simeq \det(u_*\mathscr{L}) \det(u_*\mathscr{O}_T)^{-1} \tag{1.3.17.1}$$

uniquement déterminé par les trois conditions suivantes :

a) sa formation est compatible aux changements de base ;
b) pour $\mathscr{L} = \mathscr{O}_T$, c'est le morphisme identique de $\mathscr{O}_S$;
c) il est fonctoriel en $\mathscr{L}$.

Soient D et E deux diviseurs relatifs effectifs sur X, i l'inclusion de D dans X et u la projection de D sur S. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-E) \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0$$

permet d'interpréter l'isomorphisme

$$\langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(-E)\rangle \simeq N_{D/S}(\mathscr{O}(-E)) \simeq \det(u_* i^* \mathscr{O}(-E)) \det(u_* i^* \mathscr{O})^{-1}$$

517 comme un isomorphisme

$$\langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(-E)\rangle = \det Ru_*(Li^*\mathscr{O}_E)^{-1} \simeq \det Rf_*(\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_E)^{-1}.$$

ou

$$\langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(E)\rangle \simeq \det Rf_*(\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_E). \tag{1.3.17.2}$$

Pour D et E disjoints, on a $\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_E = 0$, et l'isomorphisme de $\langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(E)\rangle$ avec $\mathscr{O}_S$ qui s'en déduit est celui déjà considéré. On en déduit que, pour D et E disjoints, la symétrie τ et l'isomorphisme de symétrie $\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_E \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_D$ sont compatibles via (1.3.17.2). Par spécialisation[109], ceci reste vrai quels que soient D et E.

Lorsque $D = E$ est défini par un idéal I, on a

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}^0(\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_D) = \mathscr{O}_D && \text{symétrie } = +\mathrm{Id}\\
&\mathscr{H}^{-1}(\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_D) = I/I^2 && \text{symétrie } = -\mathrm{Id}\\
&\mathscr{H}^i(\mathscr{O}_D \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathscr{O}_D) = 0 && \text{pour } i \neq 0, -1.
\end{aligned}$$

Dès lors, la flèche

$$\tau : \langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(D)\rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(D)\rangle$$

[108]N.D.E. : Les deux paragraphes précédents ont été ajoutés dans cette édition.

[109]N.D.E. : Il semble qu'il faille ici commencer par se ramener au cas où S est le spectre d'un corps comme expliqué plus haut. Il est alors possible de faire apparaître D et E comme appartenant à deux familles de diviseurs paramétrées par un schéma intègre de façon à ce que les diviseurs des deux familles soient disjoints au-dessus du point générique. Ceci peut s'obtenir par exemple en considérant la situation universelle au-dessus de laquelle le fait pour D et E d'être disjoints est une condition satisfaite sur un ouvert dense de $\mathrm{Sym}^n_S X \times \mathrm{Sym}^m_S X$ qui est intègre.

est $(-1)^{\mathrm{rk}\, I/I^2} = (-1)^{\deg(\mathscr{O}(D))}$, et 1.3.16.6 en résulte.

2e démonstration : Par réduction à un cas « universel », on peut supposer que S est réduit. Ce cas se ramène à celui où S est spectre d'un corps algébriquement clos k. Soient dans ce cas X_1, X_2, Y_1 et Y_2 quatre diviseurs sur X, f et g deux fonctions rationnelles, et supposons que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(f) = X_2 - X_1\\
&\operatorname{div}(g) = Y_2 - Y_1\\
&(X_1 \cup Y_2) \cap (X_2 \cup Y_1) = \varnothing.
\end{aligned}$$

Les applications f et g définissent alors[110]

$$\langle f, g\rangle : \langle \mathscr{O}(X_2), \mathscr{O}(Y_2)\rangle \longrightarrow \langle \mathscr{O}(X_1), \mathscr{O}(Y_1)\rangle.$$

Les deux membres sont canoniquement isomorphes à k (1.3.11.1), de sorte que $\langle f, g\rangle$ s'identifie à un élément de k^*. **518**

Lemme 1.3.18. On a

$$\langle f, g\rangle = \prod_{x \in X_1 \cup Y_2} (-1)^{v_x(f)v_x(g)} (f^{v_x(g)}/g^{v_x(f)})(x).$$

Montrons que (1.3.18) entraîne (1.3.16.6). On peut supposer que $\mathscr{L} \sim \mathscr{O}(X) \sim \mathscr{O}(Y)$ avec X et Y effectifs, et que $X \cap Y = \varnothing$[111]. Soit f une fonction rationnelle telle que $\operatorname{div}(f) = Y - X$[112]. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathscr{L}, \mathscr{L}\rangle \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & \langle \mathscr{L}, \mathscr{L}\rangle \arrow[d, equal] \\
\langle \mathscr{O}(X), \mathscr{O}(Y)\rangle \arrow[r, "\langle f^{-1}, f\rangle"] & \langle \mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X)\rangle
\end{tikzcd}$$

montre que

$$\tau = \langle f^{-1}, f\rangle = \prod_{x\in Y} (-1)^{-v_x(f)^2} = (-1)^{\deg(\mathscr{L})}.$$

Prouvons 1.3.18. On se ramène à supposer X_i et Y_i très amples. Il existe alors des factorisations $f = f_1 f_2$; $g = g_1 g_2$ avec

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(f_1) = X' - X_1 \qquad &&\operatorname{div}(g_1) = Y' - Y_1\\
&\operatorname{div}(f_2) = X_2 - X' &&\operatorname{div}(g_2) = Y_2 - Y',
\end{aligned}$$

les diviseurs X', Y' et $X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2$ étant disjoints.

Désignons par $\langle\ ,\ \rangle^*$ le second membre de (1.3.18) et prouvons que

$$\langle f, g\rangle^* = \langle f_1, g_1\rangle^* \cdot \langle f_2, g_2\rangle^*.$$

D'après Serre [6, Ch. III, prop. 6, p. 44], on a

$$\prod_x (-1)^{v_x(f_1)v_x(g_2)} (f_1^{v_x(g_2)}/g_2^{v_x(f_1)})(x) = 1. \tag{1.3.18.1}$$

[110]N.D.E. : Par rappport à l'édition originale, de nombreux « signes » ont été modifiés çà et là jusqu'à la fin de ce paragraphe.

[111]N.D.E. : On a vu plus haut que l'on pouvait supposer que $\mathscr{L}$ était très ample.

[112]N.D.E. : On prendra garde à ne pas confondre X et la courbe ambiante qui est aussi notée X.

On en tire que

$$\begin{aligned}\langle f_1, g_1\rangle^* \cdot \langle f_2, g_2\rangle^* &= g_1(X_1) f_1(Y') g_2(X') f_2(Y_2) \cdot \\ &\quad \prod_{X_1 \cup X' \cup Y' \cup Y_2} (-1)^{v_x(f_1) v_x(g_2)} (f_1^{v_x(g_2)} \cdot g_2^{-v_x(f_1)})(x) \\ &= \prod_{x \in X'} g_2(x)^{-v_x(f_2)} \cdot g_2(x)^{-v_x(f_1)} \cdot \prod_{x \in Y'} f_1(x)^{v_x(g_1)} \cdot f_1(x)^{v_x(g_2)} . \\ &\quad \prod_{X_1 \cup Y_2} (-1)^{v_x(f) v_x(g)} ((f_1 f_2)^{v_x(g_2)} \cdot (g_1 g_2)^{-v_x(f_1)} = \langle f_1 f_2, g_1 g_2\rangle^* .\end{aligned}$$

519 On a par fonctorialité de $\langle\ ,\ \rangle$ que $\langle f, g\rangle = \langle f_1, g_1\rangle\langle f_2, g_2\rangle$, et on vérifie facilement que $\langle f_i, g_i\rangle = \langle f_i, g_i\rangle^*$[113]. Le lemme en résulte.

1.4. Champs de Picard strictement commutatifs. Quelques résultats de « topologie générale » vont être nécessaire pour exprimer les résultats de 1.3 par une « formule des coefficients universels ».

Les résultats de ce n° sont suggérés dans une lettre de A. Grothendieck adressée à J.L. Verdier (1966).

Les notions d'associativité et de commutativité pour des bifoncteurs (voir ci-dessous) ont été introduites par Mac Lane.

1.4.1. Soient C une catégorie, $F : C \times C \to C$ un foncteur et

$$\sigma : F(F(X, Y), Z) \xrightarrow{\sim} F(X, F(Y, Z))$$

un isomorphisme de trifoncteurs. On dit que le couple (F, σ) est un foncteur associatif, ou que σ est une donnée d'associativité sur F si la condition suivante est vérifiée

(Ass) Quelle que soit la famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de C, et désignant par $e : I \to M(I)$ l'application canonique de I dans le monoïde libre (sans unité) engendré par I, il existe une application $\mathcal{F} : M(I) \to \operatorname{Ob} C$, des isomorphismes $a_i : \mathcal{F}(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et des isomorphismes $a_{g,h} : \mathcal{F}(gh) \xrightarrow{\sim} F(\mathcal{F}(g), \mathcal{F}(h))$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(f(gh)) \arrow[r, "\sim", "a_{f,gh}"'] \arrow[d, equal] & F(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(gh)) \arrow[r, "\sim", "a_{g,h}"'] & F(\mathcal{F}(f), F(\mathcal{F}(g), \mathcal{F}(h))) \\ \mathcal{F}((fg)h) \arrow[r, "\sim", "a_{fg,h}"'] & F(\mathcal{F}(fg), \mathcal{F}(h)) \arrow[r, "\sim", "a_{f,g}"'] & F(F(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)), \mathcal{F}(h)) \arrow[u, "\sigma"', "\wr"] \end{tikzcd} \tag{1.4.1.1}$$

soient commutatifs.

Nous n'aurons pas à faire usage de ce que l'axiome (Ass) équivaut à « l'axiome du pentagone », comme quoi le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & F(F(X, Y), F(Z, T)) \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ F(X, F(Y, F(Z, T))) \arrow[d, leftrightarrow] & & F(F(F(X, Y), Z), T) \arrow[d, leftrightarrow] \\ F(X, F(F(Y, Z), T)) \arrow[rr, leftrightarrow] & & F(F(X, F(Y, Z)), T). \end{tikzcd}$$

520 Soient donnés maintenant des isomorphismes fonctoriels

[113] N.D.E. : C'est le cas particulier où on suppose de plus que $X_1 \cap Y_2 = \varnothing$; il résulte de 1.3.12.1 et 1.3.12.2.

$$\sigma_{X,Y,Z} : F(F(X,Y),Z) \xrightarrow{\sim} F(X,F(Y,Z))$$
$$\tau_{X,Y} : F(X,Y) \xrightarrow{\sim} F(Y,X).$$

On dira que σ et τ font de F un foncteur associatif et strictement commutatif si la condition suivante est vérifiée.

(Ass.s.Com) Quelle que soit la famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de C, et désignant par $e : I \to N(I)$ l'application canonique de I dans le monoïde abélien libre (sans unité) engendré par I, il existe une application $\mathscr{F} : N(I) \to \operatorname{Ob} C$, des isomorphismes a_i : $\mathscr{F}(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et des isomorphismes $a_{g,h} : \mathscr{F}(gh) \xrightarrow{\sim} F(\mathscr{F}(g), \mathscr{F}(h))$ tels que le diagramme (1.4.1.1) soit commutatif, ainsi que le diagramme

(1.4.1.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(gh) \arrow[r, "a_{g,h}"] \arrow[d, equal] & F(\mathscr{F}(g), \mathscr{F}(h)) \arrow[d, "\tau"] \\
\mathscr{F}(hg) \arrow[r, "a_{h,g}"] & F(\mathscr{F}(h), \mathscr{F}(g)).
\end{tikzcd}$$

Nous n'aurons pas à faire usage de ce que cet axiome équivaut à la conjonction de

1) l'axiome du pentagone
2) $\tau_{X,X} : X+X \to X+X$ est l'identité
3) $\tau_{Y,X} \circ \tau_{X,Y} : X+Y \to Y+X \to X+Y$ est l'identité
4) l'axiome de l'hexagone : le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X+(Y+Z) \arrow[dl, dash, "\sigma"'] \arrow[dr, dash, "\tau"] & \\
(X+Y)+Z \arrow[d, dash, "\tau"] & & X+(Z+Y) \arrow[d, dash, "\sigma"] \\
Z+(X+Y) \arrow[dr, dash, "\sigma"'] & & (X+Z)+Y \arrow[dl, dash, "\tau"] \\
& (Z+X)+Y &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. **521**

On prendra garde que la condition 2) n'est pas très souvent vérifiée en pratique (d'où la terminologie strictement commutative).

DÉFINITION 1.4.2. Une catégorie de Picard strictement commutative $\mathscr{P}$ est une catégorie non vide dont tous les morphismes sont des isomorphismes, munie d'un foncteur $+ : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P} : (X,Y) \mapsto X+Y$ et d'isomorphismes fonctoriels

$$\sigma : (X+Y)+Z \xrightarrow{\sim} X+(Y+Z)$$
$$\tau : X+Y \longrightarrow Y+X$$

faisant de $+$ un foncteur associatif et strictement commutatif, et telle en outre que pour tout $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{P}$, le foncteur $Y \mapsto X+Y$ soit une équivalence de catégorie.

Le lecteur vérifiera que

LEMME 1.4.3. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets d'une catégorie de Picard strictement commutative $\mathscr{P}$, il existe une application $\Sigma : \mathbf{Z}^{(I)} \to \operatorname{Ob}\mathscr{P}$, des isomorphismes a_i : $\Sigma(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et $a_{\underline{n},\underline{m}} : \Sigma(\underline{n}+\underline{m}) \xrightarrow{\sim} \Sigma(\underline{n})+\Sigma(\underline{m})$ tels que les diagrammes du type (1.4.1.1) et (1.4.1.2) soient commutatifs. Le système $(\Sigma, (a_i), (a_{\underline{n},\underline{m}}))$ est unique à isomorphisme unique près, et est fonctoriel en $(X_i)_{i\in I}$.

1.4.4. Une catégorie de Picard strictement commutative admet à isomorphisme unique près un et un seul objet neutre, qu'on peut ici définir comme un couple (e, φ) formé d'un objet e et d'un isomorphisme $\varphi : e + e \xrightarrow{\sim} e$. Si (e, φ) est un objet neutre, il existe un et un seul isomorphisme de foncteurs

$$\alpha_s : e + X \xrightarrow{\sim} X$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} e+(e+X) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "e+\alpha_s"] & (e+e)+X \arrow[d, "\varphi"] \\ e+X \arrow[r, equal] & e+X. \end{tikzcd}$$

522 On définit de même $\alpha_d : X + e \xrightarrow{\sim} X$, et φ est cas particulier tant de α_s que de α_d ; τ échange α_s et α_d. Le groupe $\mathrm{Aut}(e)$ est abélien, et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{P}$, les foncteurs $X+$ et $+X$ établissent le même isomorphisme entre $\mathrm{Aut}(e)$ et $\mathrm{Aut}(X)$.

Définition 1.4.5. Un champ de Picard strictement commutatif $\mathscr{P}$ sur un site $\mathscr{S}$ est un champ en groupoïdes $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{S}$ (Giraud [1]), muni d'un foncteur $+ : \mathscr{P} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ et d'isomorphismes de foncteurs

$$\tau_{x,y} : x + y \longrightarrow y + x$$
$$\sigma_{x,y,z} : (x+y)+z \longrightarrow x+(y+z)$$

qui, pour tout $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, font de $\mathscr{P}(U)$ une catégorie de Picard strictement commutative.

Dans ce qui suit, on parlera simplement de champ de Picard, sans spécifier « strictement commutatif ». D'après 1.4.4, tout champ de Picard $\mathscr{P}$ admet un « objet neutre » global e, et $\mathbf{Aut}(e)$ est un faisceau abélien.

1.4.6. Un foncteur additif $F : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$ entre champs de Picard sur $\mathscr{S}$ est un $\mathscr{S}$-foncteur (nécessairement cartésien) muni d'un isomorphisme de foncteurs

$$F(x+y) \xrightarrow{\sim} F(x) + F(y)$$

rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{tikzcd} F(x+y) \arrow[r] \arrow[d, "F(\tau)"] & F(x)+F(y) \arrow[d, "\tau"] \\ F(y+x) \arrow[r] & F(y)+F(x) \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} F((x+y)+z) \arrow[r] \arrow[d, "F(\sigma)"] & F(x+y)+F(z) \arrow[r] & (F(x)+F(y))+F(z) \arrow[d, "\sigma"] \\ F(x+(y+z)) \arrow[r] & F(x)+F(y+z) \arrow[r] & F(x)+(F(y)+F(z)). \end{tikzcd}$$

523 Un morphisme de foncteurs additifs $u : F \to G$ est un morphisme de $\mathscr{S}$-foncteurs

(automatiquement un isomorphisme) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(x+y) \arrow[r, "u_{x+y}"] \arrow[d] & G(x+y) \arrow[d] \\
F(x)+F(y) \arrow[r, "u_x+u_y"] & G(x)+G(y).
\end{tikzcd}$$

1.4.7. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux champs de Picard sur $\mathscr{S}$, le champ de Picard $\mathrm{HOM}(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2)$ est le champ de Picard suivant :

a) si $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, ses objets sur U sont les foncteurs additifs de $\mathscr{P}_1|U$ dans $\mathscr{P}_2|U$; les morphismes sont les morphismes de foncteurs additifs ;

b) on définit la somme de deux foncteurs additifs F_1 et F_2 par la formule $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x)+F_2(x)$; l'isomorphisme structural est celui qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(F_1+F_2)(x+y) \arrow[r, "structural"] \arrow[dd, equal] & (F_1+F_2)(x)+(F_1+F_2)(y) \arrow[dr, equal] & \\
& & F_1(x)+F_2(x)+F_1(y)+F_2(y) \arrow[ddl, leftrightarrow, "\tau"] \\
F_1(x+y)+F_2(x+y) \arrow[dr] & & \\
& F_1(x)+F_1(y)+F_2(x)+F_2(y) &
\end{tikzcd}$$

c) les isomorphismes d'associativité et de commutativité sont définis via les isomorphismes analogues dans $\mathscr{P}_2$.

1.4.8. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}$ sont trois champs de Picard, un foncteur biadditif de $\mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2$ dans $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{S}$-foncteur F de $\mathscr{P}_1 \times_S \mathscr{P}_2$ dans $\mathscr{P}$, muni d'isomorphismes de foncteurs

$$F(x_1 + y_1, x_2) \xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2) + F(y_1, x_2)$$
$$F(x_1, x_2 + y_2) \xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2) + F(x_1, y_2),$$

tels que

a) Pour x_1 (resp. x_2) fixe, $F(x_1, *)$ (resp. $F(*, x_2)$) vérifie les compatibilités de 1.4.6.

b) Pour $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, $x_1, y_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{P}_1(U)$ et $x_2, y_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{P}_2(U)$, le diagramme **524**

$$\begin{tikzcd}
F(x_1+y_1,x_2+y_2) \arrow[r] \arrow[dd] & F(x_1+y_1,x_2)+F(x_1+y_1,y_2) \arrow[dr] & \\
& & F(x_1,x_2)+F(y_1,x_2)+F(x_1,y_2)+F(y_1,y_2) \arrow[ddl, leftrightarrow, "\tau"] \\
F(x_1,x_2+y_2)+F(y_1,x_2+y_2) \arrow[dr] & & \\
& F(x_1,x_2)+F(x_1,y_2)+f(y_1,x_2)+f(y_1,y_2) &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Par exemple, le foncteur canonique

$$\mathrm{HOM}(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) \times \mathscr{P}_1 \longrightarrow \mathscr{P}_2 \,:\, (F, x) \longmapsto F(x)$$

est biadditif.

On montre comme en 1.4.7 que les foncteurs biadditifs de $\mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2$ dans $\mathscr{P}$ forment un champ de Picard $\mathrm{HOM}(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \,; \mathscr{P})$.

On verra en (1.4.20) qu'il existe un foncteur biadditif « 2-universel » : $\mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_1 \otimes \mathscr{P}_2$; plus précisément, il existe un champ de Picard $\mathscr{P}_1 \otimes \mathscr{P}_2$ et un foncteur biadditif $\otimes : \mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_1 \otimes \mathscr{P}_2$ tel que pour tout champ de Picard $\mathscr{P}$, le foncteur défini par $\otimes$:

(1.4.8.1) $$\mathrm{HOM}(\mathscr{P}_1 \otimes \mathscr{P}_2, \mathscr{P}) \longrightarrow \mathrm{HOM}(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2; \mathscr{P})$$

soit une équivalence. Ce champ est unique à équivalence unique (à isomorphisme unique près) près.

1.4.9. Soit $u : \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ un morphisme de sites. L'image directe $u_*\mathscr{P}$ d'un champ de Picard $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{S}_1$ est le champ de Picard sur $\mathscr{S}_2$ défini par

$$u_*\mathscr{P}(V) = \mathscr{P}(u^*V).$$

Ses objets sur $V \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}_2$ sont les objets de $\mathscr{P}$ sur u^*V ; ses morphismes, sa loi d'addition et ses isomorphismes de compatibilité sont ceux de $\mathscr{P}$. L'image directe u_* est un 2-foncteur.

525 1.4.10. Un préchamp de Picard $\mathscr{P}$ sur un site $\mathscr{S}$ est un préchamp $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{S}$ (Giraud [1]), muni d'un foncteur $+ : \mathscr{P} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ et d'isomorphismes d'associativité et de commutativité σ et τ, tels que pour chaque $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, $\mathscr{P}(U)$ soit une catégorie de Picard (strictement commutative). Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux préchamps de Picard, on définit de façon évidente (cf. 1.4.6, 1.4.7) les foncteurs additifs de $\mathscr{P}_1$ dans $\mathscr{P}_2$ et le préchamp de Picard $\mathrm{HOM}(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2)$ qu'ils forment. Si $\mathscr{P}$ est un préchamp de Picard, et $j : \mathscr{P} \to a\mathscr{P}$ le champ qu'il engendre, il existe à équivalence essentiellement unique près un et un seul couple formé d'une structure de champ de Picard sur $a\mathscr{P}$ et d'une structure de foncteur additif sur j ; munis de ces données, le couple $(j, a\mathscr{P})$ s'appelle le champ de Picard engendré par $\mathscr{P}$. Pour tout champ de Picard $\mathscr{P}_1$, on a une équivalence

(1.4.10.1) $$\mathrm{HOM}(a\mathscr{P}, \mathscr{P}_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HOM}(\mathscr{P}, \mathscr{P}_1).$$

1.4.11. On désignera par $C^{[-1,0]}(\mathscr{S})$ la catégorie des complexes de faisceaux abéliens K sur $\mathscr{S}$ tels que $K^i = 0$ pour $i \notin [-1, 0]$. À tout complexe $K \in \mathrm{Ob}\,C^{[-1,0]}(\mathscr{S})$

$$K : d : K^{-1} \longrightarrow K^0$$

est associé le préchamp de Picard $\mathrm{pch}(K)$ suivant :

(I) Pour $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$, on a $\mathrm{Ob}\,\mathrm{pch}(K)(U) = K^0(U)$.
(II) Si x, $y \in K^0(U)$, une flèche de x dans y est un élément f de $K^{-1}(U)$ tel que $df = y - x$.
(III) La loi de composition des flèches est la loi d'addition dans $K^{-1}(U)$.
(IV) Le foncteur $+$ est donné par la loi d'addition dans $K^0(U)$ et $K^{-1}(U)$.
(V) Les isomorphismes d'associativité et de commutativité sont fournis par l'élément nul de $K^{-1}(U)$.

On désignera par $\mathrm{ch}(K)$ le champ de Picard engendré (1.4.10) par le préchamp de Picard $\mathrm{pch}(K)$. Le faisceau $\mathscr{H}^0(K)$ s'interprète comme le faisceau associé suivant

(1.4.11.1) $$\mathscr{H}^0(K) \simeq a\ (U \longmapsto \text{groupe des classes d'isomorphisme d'objets de } \mathrm{ch}(K)(U)).$$

526 D'autre part,

(1.4.11.2) $$\mathscr{H}^{-1}(K) \simeq \mathbf{Aut}(e)$$

1.4.12. Tout morphisme de complexe $f : K \to L$ induit un foncteur additif $\mathrm{pch}(f) : \mathrm{pch}(K) \to \mathrm{pch}(L)$, d'où un foncteur additif

$$\mathrm{ch}(f) : \mathrm{ch}(K) \longrightarrow \mathrm{ch}(L).$$

Il résulte de (1.4.11.1) et (1.4.11.2) que $\mathrm{ch}(f)$ est une équivalence si et seulement si f est un quasi-isomorphisme. On déduit de (1.4.10.1) que pour deux morphismes $f, g : K \to L$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{ch}(f), \mathrm{ch}(g)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{pch}(f), \mathrm{pch}(g)).$$

Un morphisme de foncteur $h : \mathrm{pch}(f) \to \mathrm{pch}(g)$ est un morphisme de faisceaux $h : K^0 \to L^{-1}$ tel que

$$g(x) - f(x) = dh(x) \tag{1.4.12.1}$$

et tel que pour tout triple (x, y, u) avec $y - x = du$, on ait

$$h(y) + f(u) = g(u) + h(x) \tag{1.4.12.2}$$

Que h soit un morphisme de foncteurs additifs signifie que

$$h(x + y) = h(x) + h(y). \tag{1.4.12.3}$$

La condition (1.4.12.3) permet de réécrire (1.4.12.2) comme

$$g(u) - f(u) = h(du); \tag{1.4.12.2'}$$

les conditions (1.4.12.1) à (1.4.12.3) signifient donc que h est une homotopie de f à g, et

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{ch}(f), \mathrm{ch}(g)) \simeq \{H : \text{ homotopie } K \longrightarrow L | g - f = dH + Hd\} \tag{1.4.12.4}$$

Lemme 1.4.13. (I) Pour tout champ de Picard $\mathscr{P}$, il existe un complexe K tel que $\mathscr{P} = \mathrm{ch}(K)$.

(II) Pour tout foncteur additif $F : \mathrm{ch}(K) \to \mathrm{ch}(L)$, il existe un quasi-isomorphisme $k : K' \to K$ et un morphisme $\ell : K' \to L$ tel que $F \simeq \mathrm{ch}(\ell)\,\mathrm{ch}(k)^{-1}$

Prouvons (I). Soit $(k_i, U_i)_{i \in I}$ une famille telle que 527

(a) $k_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{P}(U_i)$;

(b) tout objet de $\mathscr{P}$ est localement isomorphe à une image inverse de l'un des k_i.

Posons $K^0 = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}_{U_i}$. On déduit de 1.4.3 qu'il existe un foncteur additif F de $\mathrm{ch}(0 \to K^0)$ dans $\mathscr{P}$ envoyant la base e_i de $\mathbf{Z}_{U_i}$ sur k_i. Soit K^{-1} le faisceau des couples formés d'une section locale x de K^0 et d'un isomorphisme $t : F(0) \xrightarrow{\sim} F(x)$. On définit l'addition sur K^{-1} par $(x_1, t_1) + (x_2, t_2) = (x_1 + x_2, t)$ où t rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(0) + F(0) \arrow[r, "t_1 + t_2"] \arrow[d, leftrightarrow] & F(x_1) + F(x_2) \arrow[d, leftrightarrow] \\
F(0 + 0) \arrow[r, "t"] & F(x_1 + x_2).
\end{tikzcd}$$

On définit $d : K^{-1} \to K^0$ par $d(x, t) = x$; d est additif.

Si $y - x = dt$, il existe un et un seul morphisme $F(t)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "F(t)"] \arrow[d, leftrightarrow] & F(y) \arrow[d, leftrightarrow] \\
F(0) + F(x) \arrow[r, "t+F(x)"] & F(y-x) + F(x)
\end{tikzcd}$$

et on vérifie que cette construction définit une équivalence

$$F \,:\, \mathrm{ch}(K) \longrightarrow \mathscr{P}.$$

Prouvons (II). Soit donc $F \,:\, \mathrm{ch}(K) \to \mathrm{ch}(L)$ un foncteur additif. Il existe alors une famille $(k_i, \ell_i, \alpha_i, U_i)_{i\in I}$ telle que

(c) $k_i \in K^0(U_i)$, $\ell_i \in L^0(U_i)$ et α_i est un morphisme entre $F(k_i)$ et ℓ_i

(d) l'homomorphisme $k^0 \,:\, \bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}_{U_i} \to K^0$ de coordonnées K_i est un épimorphisme.

Posons $K'^0 = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}_{U_i}$ et soit $\ell^0 \,:\, K'^0 \to L^0$ l'homomorphisme de coordonnées ℓ_i. Le foncteur F étant additif, il existe une et une seule famille d'isomorphismes $\alpha_x \,:\, Fk^0(x) \xrightarrow{\sim} \ell^0(x)$ (x section locale de K'^0) telle que

(e) pour e_i section 1 de $\mathbf{Z}_{U_i}$, on a $\alpha_{e_i} = \alpha_i$

528 (f) Les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
Fk^0(x+y) \arrow[r, "\alpha_{x+y}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \ell^0(x+y) \arrow[d, equal] \\
Fk^0(x) + Fk^0(y) \arrow[r, "\alpha_x+\alpha_y"] & \ell^0(x) + \ell^0(y)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Soit $K'^{-1} = K^{-1} \times_{K^0} K'^0$; d'après (d), la flèche évidente est un quasi-isomorphisme de complexes $k \,:\, K' \to K$. Si $x, y \in K'^0(U)$, et si $t \in K'^{-1}(U)$ vérifie $y - x = dt$, alors il existe une et une seule section $\ell^{-1}(t\,; x, y)$ de $L^{-1}(U)$ qui définisse le morphisme rendant commutatif le diagramme

(g)
$$\begin{tikzcd}
F(k^0(x)) \arrow[r, "F(k^{-1}(t))"] \arrow[d, "\alpha_x"] & F(k^0(y)) \arrow[d, "\alpha_y"] \\
\ell^0(x) \arrow[r, "\ell^{-1}(t;x,y)"] & \ell^0(y).
\end{tikzcd}$$

Que F soit un foncteur fournit

(h) $\ell^{-1}(t\,; x, y) + \ell^{-1}(t'\,; y, z) = \ell^{-1}(t + t'\,; x, z)$.

Que l'isomorphisme d'additivité de F soit fonctoriel fournit

(i) $\ell^{-1}(t_1 + t_2\,; x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \ell^{-1}(t_1\,; x_1, y_1) + \ell^{-1}(t_2\,; x_2, y_2)$.

De (h), on tire que

$$\ell^{-1}(0; x, x) + \ell^{-1}(0; x, x) = \ell^{-1}(0, x, x) \qquad \text{i.e.}$$
$$\ell^{-1}(0; x, x) = 0.$$

On déduit alors de (i) que $\ell^{-1}(t\,; x, y)$ ne dépend que de t :

$$\ell^{-1}(t; x, y) = \ell^{-1}(t)$$

et que $\ell^{-1}(t)$ est additif en t. On en conclut que $\ell = (\ell^{-1}, \ell^0)$ est un morphisme de complexes, et, d'après (f) et (g), les flèches α forment un isomorphisme de foncteurs additifs $F \circ \mathrm{ch}(k) = \mathrm{ch}(\ell)$.

1.4.14. Soit $\mathrm{Ch}^\flat(\mathcal{S})$ la catégorie dont les objets sont les petits champs de Picard sur $\mathcal{S}$, et dont les flèches sont les classes d'isomorphie de foncteurs additifs. La construction **529**
ch définit un foncteur de $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ (1.4.11) dans $\mathrm{Ch}^\flat(\mathcal{S})$. Soit $D^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée de $\mathcal{S}$ formée des complexes K tels que $H^i(K) = 0$ pour $i \neq 0$ ou -1. Il résulte de 1.4.12 et 1.4.13 que

Proposition 1.4.15. Le foncteur ch induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{ch} : D^{[-1,0]}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ch}^\flat(\mathcal{S}).$$

On désignera par $\flat$ l'équivalence inverse de ch. Pour tout champ de Picard $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}^\flat \in \mathrm{Ob}\, D^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ détermine $\mathcal{P}$ à classe d'isomorphie d'équivalence près.

Lemme 1.4.16. Soit $L \in \mathrm{Ob}\, C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ tel que L^{-1} soit injectif.

(I) $\mathrm{pch}(L)$ est déjà un champ.

(II) Pour $K \in \mathrm{Ob}\, C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$, tout foncteur additif $F : \mathrm{ch}(K) \to \mathrm{ch}(L)$ est isomorphe à un foncteur $\mathrm{ch}(f)$ pour f morphisme de K dans L.

(I) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{S}$ et $x \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{ch}(L)(U)$, le faisceau des couples formés d'une section locale ℓ de $L^0|U$ et d'un isomorphisme entre x et ℓ est un espace principal homogène sous L^{-1} ; il admet donc une section et $j : \mathrm{pch}(L) \to \mathrm{ch}(L)$ est surjectif sur les classes d'isomorphies d'objets, donc une équivalence.

(II) Soit L' un complexe d'injectifs, muni d'un quasi-isomorphisme $\varphi : L \underset{\approx}{\longrightarrow} L'$, tel que φ^i soit un isomorphisme pour $i \leq -1$. D'après 1.4.13, et [17], il existe un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi", "\approx"'] & L' \\ K' \arrow[u, "f_0"] \arrow[r, "\Psi", "\approx"'] & K \arrow[u, "f_1"'] \end{tikzcd}$$

tel que $F \simeq \mathrm{ch}(f_0)\,\mathrm{ch}(\Psi)^{-1}$. De plus, $K = \tau_{\leq 0}K$ et $L = \tau_{\leq 0}L'$, de sorte que f_1 se factorise par $f : K \to L$, et $F \simeq \mathrm{ch}(f)$.

Le lemme permet de préciser 1.4.15 par la conséquence suivante de 1.4.12.

Corollaire 1.4.17. La construction ch définit une équivalence de 2-catégories entre **530**

a) la 2-catégorie des champs de Picard sur $\mathcal{S}$.

b) la 2-catégorie ayant pour objets et pour 1-flèches les objets et flèches de la sous-catégorie pleine de $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ formée des complexes L avec L^{-1} injectif, et ayant pour 2-flèches les homotopies entre flèches : $\mathrm{Hom}(f, g) = \{H | g - f = \mathrm{dH} + \mathrm{Hd}\}$.

Construction 1.4.18. On a

$$\mathrm{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)^\flat \simeq \tau_{\leq 0} R\,\mathcal{H}om(\mathcal{P}_1^\flat, \mathcal{P}_2^\flat).$$

Soient $K, L \in \mathrm{Ob}\, C^{[-1,0]}(S)$, avec L^{-1} injectif. D'après 1.4.16 (II) et 1.4.12, on a

$$\mathrm{ch}(\tau_{\leq 0}\, \mathcal{H}om(K, L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HOM}(\mathrm{ch}(K), \mathrm{ch}(L)) \tag{1.4.18.1}$$

et on en déduit une construction fonctorielle 1.4.18.

Construction 1.4.19. Pour $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ un morphisme de sites, on a

$$(f_*\mathcal{P})^\flat \simeq \tau_{\leq 0}\, Rf_*(\mathcal{P}^\flat).$$

Soit $L \in \operatorname{Ob} C^{[-1,0]}$ avec L^{-1} injectif. D'après 1.4.16 (I), on a

$$\operatorname{ch}(f_*L) \xrightarrow{\sim} f_* \operatorname{ch}(L) \tag{1.4.19.1}$$

et on en déduit une construction fonctorielle 1.4.19.

Nous n'aurons pas à faire usage de la

Construction 1.4.20. Le produit tensoriel promis en 1.4.8 existe, et

$$(\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2)^\flat \simeq \tau_{\geq -1}\mathcal{P}_1^\flat \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{P}_2^\flat.$$

On vérifie comme en 1.4.12 et 1.4.13 (II) que, quels que soient K_1, K_2 et L dans $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$, on a

(a) Tout morphisme $f \in \operatorname{Hom}(K_1 \otimes K_2, L) \simeq \operatorname{Hom}(\tau_{\geq -1}(K_1 \otimes K_2), L)$ définit un foncteur biadditif $\operatorname{ch}(f) \in \operatorname{Hom}(\operatorname{ch}(K_1), \operatorname{ch}(K_2) ; \operatorname{ch}(L))$; de plus les morphismes de foncteurs s'identifient aux homotopies ;

(b) Pour tout foncteur biadditif $F : \operatorname{ch}(K_1), \operatorname{ch}(K_2) \to \operatorname{ch}(L)$, il existe des quasi-isomorphismes $k_i : \operatorname{ch}(K_i') \to \operatorname{ch}(K_i)$ et $f : K_1' \otimes K_2' \to L$ tels que $F \simeq \operatorname{ch}(f) \circ (\operatorname{ch}(k_1)^{-1}, \operatorname{ch}(k_2)^{-1})$.

531 Si maintenant K_1^0 ou K_2^0 plat, ainsi que K'^0_1 ou K'^0_2, alors $k_1 \otimes k_2 : \tau_{\geq -1}K'_1 \otimes K'_2 \to \tau_{\geq -1}K_1 \otimes K_2$ est un quasi-isomorphisme, et on en déduit que $\operatorname{ch}(\tau_{\geq -1}(K_1 \otimes K_2))$ vérifie la propriété universelle (1.4.8.1), d'où l'existence de $\otimes$ et d'une construction fonctorielle 1.4.20.

1.4.21. Soient G un faisceau abélien, et $G[1]$ le complexe réduit à G placé en degré -1. Le préchamp $\operatorname{pch}(G[1])$ s'identifie au préchamp des torseurs triviaux sous G, et donc $\operatorname{ch}(G[1])$ « n'est autre » que le champ des torseurs sous G, avec sa loi d'addition habituelle.

1.4.22. Soit $K \in C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ et G un faisceau abélien. Les extensions E de K par G forment un champ de Picard, $\operatorname{EXT}(K, G)$, pour l'addition de Brauer.

$$E : 0 \to G[0] \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} K \to 0.$$

À chaque extension E on associe un foncteur additif de $\operatorname{ch}(K)$ dans $\operatorname{ch}(G[1])$, qui, appliqué à une section locale x de K^0 fournit le torseur $\beta^{-1}(x)$. Le lecteur vérifiera que

Proposition 1.4.23. La construction esquissée plus haut est une équivalence de champs de Picard

$$\operatorname{EXT}(K, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{HOM}(\operatorname{ch}(K), \operatorname{ch}(G[1])).$$

1.4.24. Soit F un objet du site $\mathcal{S}$. On désignera encore par F le faisceau défini par F, et on désignera par $\mathbf{Z}^{(F)}$ le faisceau abélien engendré. Soit C un champ de Picard sur $\mathcal{S}$. On vérifie facilement (cf. 1.4.3) qu'il « revient au même » de se donner soit

a) un foncteur additif $H : \operatorname{ch}(\mathbf{Z}^{(F)}) \to C$

b) un morphisme de champs :

(champ des sections locales de F, morphismes = identités) $\to C$

c) un objet de $C(F)$.

Supposons (pour pouvoir appliquer la définition 1.4.9) que les produits fibrés existent dans $\mathcal{S}$, et soit f le morphisme de sites canonique $f : \mathcal{S}/F \to \mathcal{S}$. La construction précédente fournit une équivalence

$$\operatorname{HOM}(\operatorname{ch}(\mathbf{Z}^{(F)}), C) \xrightarrow{\sim} f_* f^* C. \tag{1.4.24.1}$$

L'isomorphisme qui se déduit de (1.4.24.1) par la construction 532

$$\tau_{\leq 0} R\,\mathscr{H}om(\mathbf{Z}^{(F)}, C^{\flat}) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} Rf_* f^* C^{\flat},$$

peut aussi se déduire de l'isomorphisme plus général

(1.4.24.2) $$R\,\mathscr{H}om(\mathbf{Z}^{(F)}, K) \xrightarrow{\sim} Rf_* f^* K \quad (K \in \mathrm{Ob}\, D^+(\mathscr{S})).$$

1.5. La formule des coefficients universels.

1.5.1. Soit $f : X \to S$ une courbe projective et lisse sur S. On désignera par $\mathrm{PIC}(X/S)$ le champ de Picard sur le grand site fppf de S (XVII 0.10) image directe (1.4.9) du champ des faisceaux inversibles sur X. On a

(1.5.1.1) $$\mathrm{PIC}(X/S) = f_*\,\mathrm{ch}\,\mathbf{G}_m[1]$$

(1.5.1.2) $$\mathrm{PIC}(X/S)^{\flat} = \tau_{\leq 0} Rf_*(\mathbf{G}_m[1]).$$

Chaque section t de X définit un faisceau inversible $\mathscr{O}(t)$ sur X. Avec les notations de 1.4.24 (cf. 1.4.24 $a \leftrightarrow b$), cette construction, étant compatible à tout changement de base, définit un morphisme de champs de Picard sur S

(1.5.1.3) $$\mathrm{ch}\,\mathbf{Z}^{(X)} \longrightarrow \mathrm{PIC}(X/S).$$

Si C est un quelconque champ de Picard sur S, les morphismes (1.5.1.3) et (1.4.24.1) définissent un foncteur additif

(1.5.1.4) $$\mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(X/S), C) \longrightarrow \mathrm{HOM}(\mathrm{ch}(\mathbf{Z}^{(X)}), C) \xrightarrow{\sim} f_* f^* C.$$

Par application de la construction $\flat$, le foncteur (1.5.1.3) définit un morphisme[114]

(1.5.1.5) $$\mathbf{Z}^{(X)} \longrightarrow \tau_{\leq 0} Rf_* \mathbf{G}_m[1] \longrightarrow Rf_* \mathbf{G}_m[1],$$

et le foncteur (1.5.1.4) a pour analogue, par (1.4.24.2), un morphisme

(1.5.1.6) $$R\,\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_*(\mathbf{G}_m[1]), K) \longrightarrow Rf_* f^* K.$$

Si C est le champ $\mathrm{ch}(G[1])$ des torseurs sous un groupe G vérifiant (1.3.1.1), le théorème 1.3.10 affirme que le foncteur (1.5.1.4) est une équivalence, l'équivalence inverse 533 étant celle qui à un torseur K sous G_X associe le foncteur additif $\langle *, K\rangle$. Que (1.5.1.4) soit une équivalence revient à dire que le morphisme déduit de (1.5.1.4) ou (1.5.1.6)

(1.5.1.7) $$\tau_{\leq 1} R\,\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_*(\mathbf{G}_m[1]), G) \longrightarrow \tau_{\leq 1} Rf_* f^* G$$

est un isomorphisme.

Théorème 1.5.2. (formule des coefficients universels).

Soient $f : X \to S$ une courbe projective et lisse sur S, C un champ de Picard sur S_{fppf} et $K = C^{\flat}$ (1.4.15). On suppose que K est localement isomorphe (dans $D^+(S_{\mathrm{fppf}})$) à des complexes de la forme $G_{-1} \to G_0$, où les faisceaux G_i vérifient (1.3.1.1). Alors

[114] N.D.E. : On considérera ici que le foncteur de décalage [1] a une plus haute priorité que la troncature $\tau_{\leq 0}$.

(I) Le foncteur (1.5.1.4)

$$\mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(X/S), C) \longrightarrow f_* f^* C \tag{1.5.2.1}$$

est une équivalence de champs de Picard.

(II) Le morphisme déduit de (1.5.1.6) ou (1.5.1.4)

$$\tau_{\leq 0} R\,\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_*(\mathbf{G}_m[1]), K) \longrightarrow \tau_{\leq 0} Rf_* f^* K \tag{1.5.2.2}$$

est un isomorphisme.

Ce théorème fait jouer à $\tau_{\leq 0} Rf_*(\mathbf{G}_m[1])$ le rôle que joue l'homologie dans la classique formule des coefficients universels.

Il est clair que, pour chaque champ C, on a $(I) \leftrightarrow (II)$, et tant (I) que (II) sont de nature locale sur S. Si C est de la forme $\mathrm{ch}(G[1])$, alors le théorème résulte de 1.3.10, comme noté plus haut. Il reste à montrer que si K est de la forme

$$K : d : G_{-1} \longrightarrow G_0,$$

et si (1.5.2.2) est un isomorphisme pour $G_{-1}[1]$ et $G_0[1]$, alors (1.5.2.2) est un isomorphisme pour K. Pour le vérifier, il suffit de comparer la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \longrightarrow R^{-1} f_* K \longrightarrow f_* G_{-1} \longrightarrow f_* G_0 \longrightarrow R^0 f_* K \longrightarrow R^1 f_* G_{-1} \longrightarrow R^1 f_* G_0$$

534 à la suite exacte longue analogue pour le premier membre de (1.5.2.2), et d'appliquer le lemme des cinq.

1.5.3. Soit u un morphisme plat de courbes projectives et lisses sur S

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \arrow[dl, "f_2"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Le diagramme de foncteurs additifs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^{(X)} \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{PIC}(X/S) \arrow[d, "N_{X/Y}"] \\ \mathbf{Z}^{(Y)} \arrow[r] & \mathrm{PIC}(Y/S) \end{tikzcd} \tag{1.5.3.1}$$

est alors essentiellement commutatif.

Pour tout champ de Picard C sur S, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(Y/S), C) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{HOM}(N_{X/Y}, C)"] & f_{2*} f_2^* C \arrow[d, "u^*"] \\ \mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(X/S), C) \arrow[r] & f_{1*} f_1^* C \end{tikzcd} \tag{1.5.3.2}$$

est donc essentiellement commutatif, et pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(S)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} R\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_{2*}\mathbf{G}_m[1], K) \arrow[r] \arrow[d, "R\mathscr{H}om(N_{X/Y}, K)"] & Rf_{2*}f_2^*K \arrow[d, "u^*"] \\ R\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_{1*}\mathbf{G}_m[1], K) \arrow[r] & Rf_{1*}f_1^*K \end{tikzcd} \tag{1.5.3.3}$$

est commutatif.

Soit maintenant G un faisceau abélien sur S vérifiant (1.3.1.1). La trace XVII 6.3 nous fournit un foncteur additif

$$\mathrm{Tr}_u : f_{1*}f_1^*\,\mathrm{ch}(G[1]) \longrightarrow f_{2*}f_2^*\,\mathrm{ch}(G[1]) \tag{1.5.3.4}$$

et 1.3.8.6 nous fournit un isomorphisme rendant essentiellement commutatif le diagramme **535**

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(X/S), \mathrm{ch}(G[1])) \arrow[d, "\mathrm{HOM}(u^*, \mathrm{ch}(G[1]))"] & f_{1*}f_1^*\,\mathrm{ch}(G[1]) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_u"] \\ \mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(Y/S), \mathrm{ch}(G[1])) & f_{2*}f_2^*\,\mathrm{ch}(G[1]). \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{1.5.3.5}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq 1} R\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_{1*}\mathbf{G}_m[1], G) \arrow[d, "R\mathscr{H}om(u^*, G)"'] & \tau_{\leq 1} Rf_{1*}f_1^*G \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "Tr_u"] \\ \tau_{\leq 1} R\mathscr{H}om(\tau_{\leq 0} Rf_{2*}\mathbf{G}_m[1], G) & \tau_{\leq 1} Rf_{2*}f_2^*G \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd} \tag{1.5.3.6}$$

est donc commutatif.

1.5.4. Avec les notations de 1.5.2, soit G un faisceau abélien sur S vérifiant 1.3.1.1. Localement sur S pour la topologie étale, on a (non canoniquement)

$$\tau_{\leq 0} Rf_*\mathbf{G}_m[1] \simeq f_*\mathbf{G}_m[1] + R^1f_*\mathbf{G}_m.$$

Au niveau des champs de Picard, on définit en effet une section $\mathrm{ch}(R^1f_*\mathbf{G}_m) \to f_*\,\mathrm{ch}(\mathbf{G}_m[1])$[115] en associant à chaque classe d'isomorphie de faisceaux inversibles le faisceau inversible appartenant à cette classe rigidifié le long de sections convenables de X/S.

L'isomorphisme (1.5.2.2) fournit donc un isomorphisme

$$\mathscr{H}om(R^1f_*\mathbf{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_S(X, G) \tag{1.5.4.1}$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(R^1f_*\mathbf{G}_m, G) \longrightarrow R^1f_*G \longrightarrow \mathscr{H}om(f_*\mathbf{G}_m, G) \longrightarrow 0. \tag{1.5.4.2}$$

Les morphismes de (1.5.4.1) et (1.5.4.2) s'interprètent comme suit

a) Le morphisme (1.5.4.1) et le premier morphisme (1.5.4.2) sont définis par l'application canonique de X dans $\mathbf{Pic}_{X/S}$. **536**
b) Le deuxième morphisme (1.5.4.2) est le degré (1.3.7.2).

[115]N.D.E. : On rappelle que ce champ s'identifie à $\mathrm{PIC}(X/S)$, cf. (1.5.1.1).

Localement sur S pour la topologie étale, on a (non canoniquement) $\mathbf{Pic}_{X/S} \sim \mathbf{Pic}^0_{X/S} \times \mathbf{Z}^k$; on a donc

$$\mathscr{E}xt^1(R^1 f_* \mathbf{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}xt^1(\mathbf{Pic}^0_{X/S}, G)$$

et (1.5.4.2) peut encore s'écrire

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(\mathbf{Pic}^0_{X/S}, G) \longrightarrow R^1 f_* G \longrightarrow \mathscr{H}om(f_* \mathbf{G}_m, G) \longrightarrow 0. \tag{1.5.4.3}$$

1.5.5. Lorsque, dans (1.5.2.2), on fait $K = \mathbf{G}_m[1]$, le théorème 1.5.2 apparaît comme un théorème d'autodualité pour $\tau_{\leq 0}(Rf_* \mathbf{G}_m[1])$. Un quelconque complexe représentant $\tau_{\leq 0} Rf_* \mathbf{G}_m[1]$ admet une filtration canonique en trois crans, les quotients successifs étant, à quasi-isomorphisme unique près

$$\mathbf{Pic}_{X/S} / \mathbf{Pic}^0_{X/S} \quad , \quad \mathbf{Pic}^0_{X/S} \quad , \quad (f_* \mathbf{G}_m)[1].$$

À l'autodualité précédente correspond une dualité (à valeur dans $\mathbf{G}_m$) entre $\mathbf{Pic}_{X/S} / \mathbf{Pic}^0_{X/S}$ et $f_* \mathbf{G}_m$, et une autodualité (à valeurs dans $\mathbf{G}_m[1]$) sur $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ (autodualité de la jacobienne).

1.5.6. La situation est nettement moins bonne pour les courbes lisses sur S : $f : X \to S$ qu'on ne suppose pas propres sur S. Il semble que le groupe additif se comporte de façon incontrôlable. Les arguments qui précèdent s'étendent toutefois au cas des courbes lisses qui se déduisent d'une courbe propre sur S par soustraction d'une partie finie sur S, pour G un faisceau étale de torsion, de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S. On peut espérer que les faisceaux étales de p-torsion se comportent eux aussi de façon raisonnable ; voir Serre [6, Ch. VI *n*° 11 p. 126].

537 Le rôle du théorème 1.2.2 sera joué ici par le théorème d'acyclicité XV 2.2, ayant pour corollaire le

Lemme 1.5.7. Soient $p : X \to S$ la projection d'un espace affine type sur S et G un faisceau abélien de torsion sur S_{et}, premier aux caractéristiques résiduelles de S. On désigne encore par G l'image réciproque de G sur le site S_{fppf}. Alors, le foncteur p^* est une équivalence de catégorie entre la catégorie des torseurs sous G sur S_{et} (ou sur S_{fppf}, ce qui revient au même (Grothendieck [2, Corollaire 11.9]), et la catégorie des torseurs sous G_X sur X.

1.5.8. Soient $\overline{f} : \overline{X} \to S$ un morphisme propre de présentation finie à fibres purement de dimension un, Y un sous-schéma de $\overline{X}$ fini sur S, défini par un idéal $\mathfrak{m}$ et supposons que $X = \overline{X} - Y$ soit une courbe lisse sur S. Soit d'autre part G un faisceau de torsion sur S_{et}, premier aux caractéristiques résiduelles de S. On désignera encore par G le faisceau sur le grand site fppf de S (XVII 0.10) image réciproque de G.

Soit $\mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ le sous-faisceau de $\mathbf{G}_{m\overline{X}}$ formé des sections valant 1 sur Y. Un torseur sous $\mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ s'identifie à un faisceau inversible sur $\overline{X}$, trivialisé sur Y. Tout diviseur relatif sur X, fini sur S, définit un tel faisceau inversible. Localement sur S pour la topologie étale, il existe de tels diviseurs donnant lieu à des faisceaux inversibles relativement amples.

Lemme 1.5.9. Sous les hypothèses 1.5.8, avec S affine[116], soit $\mathscr{O}_{\overline{X}}(1)$ un faisceau inversible relativement ample sur $\overline{X}$, trivialisé le long de Y, et soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible sur $\overline{X}$, trivialisé le long de Y. Pour tout point $s \in S$, il existe un entier n_0 tel que pour

[116] N.D.E. : Il faut en fait supposer que S est local de point fermé s. Si on tient à garder l'hypothèse originale, pour la conclusion, il convient de demander à ce que m soit seulement définie sur l'image inverse d'un voisinage ouvert de s dans S, comme cela intervient plus bas en 1.5.10.1.

tout entier $n \geq n_0$ et toute section m_s de $\mathscr{M}(n) \otimes k(s)$ sur la fibre $\overline{X}_s$, valant 1 sur Y_s, il existe une section m de $\mathscr{M}(n)$ valant 1 sur Y, qui relève m_s.

On se ramène au cas S noethérien (car une famille de morphismes surjectifs reste une famille de morphismes surjectifs par changement de base[117]). Soit $\mathscr{N}$ le faisceau cohérent des sections locales de $\mathscr{M}$ nulles sur $\overline{X}_s$ et Y. Pour chaque n, les solutions **538**
locales au problème posé forment un espace principal homogène sous $\mathscr{N}(n)$, de sorte que l'obstruction à relever m_s se trouve dans $H^1(X, \mathscr{N}(n)) = H^0(S, R^1\overline{f}_*\mathscr{N}(n))$. Or, pour n assez grand, $R^1\overline{f}_*\mathscr{N}(n) = 0$ (EGA III 2.2.1).

1.5.10. Soient $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur $\overline{X}$ trivialisé le long de Y, et $s \in S$. Considérons les conditions

. Toute section de $\mathscr{L} \otimes k(s)$ sur X_s, valant 1 sur Y_s, se relève en une section de $\mathscr{L}$ sur l'image réciproque U d'un voisinage de s, valant 1 sur $Y \times_S U$.

. Il existe 4 sections m_i de $\mathscr{L} \otimes k(s)$ sur X_s, valant 1 sur Y, et linéairement indépendantes au point générique de toute composante irréductible de X_s.

Considérons les conditions suivantes, portant respectivement sur une section m de $\mathscr{L}$, un couple (m_1, m_2) et un triple (m_1, m_2, m_3) de sections de $\mathscr{L}$.

. m vaut 1 sur Y et le sous-schéma $Z(m)$ de X d'équation $m = 0$ est un diviseur relatif sur S (ce qui signifie qu'il est quasi-fini sur S, donc fini sur S, puisque $X = \overline{X} - Y$ est lisse sur S).

. Soit λ la coordonnée canonique sur la droite affine $g : \mathbf{E}^1_s \to S$. La section $\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2$ de $g'^*\mathscr{L}$ vérifie (1.5.10.3).

. De même, $\lambda m_1 + \mu m_2 + (1 - \lambda - \mu)m_3$ vérifie (1.5.10.3).

On laisse au lecteur le soin de vérifier, par un argument de position générale[118], le

Lemme 1.5.11. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, trivialisé le long de Y, et $\overline{s}$ un point géométrique de S d'image s dans S. Si $\mathscr{L}$ vérifie (1.5.10.1) et (1.5.10.2) en s, alors :

(I) Si n sections m_i de $\mathscr{L}$ vérifient (1.5.10.3), il existe un voisinage étale U de $\overline{s}$ et une section k de $\mathscr{L}|\overline{f}^{-1}(U)$ telle que les couples (m_i, k) vérifient (1.5.10.4).

(II) Soient m_1, m_2, k_1, k_2 quatre sections de $\mathscr{L}$ telles que les couples (m_i, k_j) vérifient **539**

[117]N.D.E. : L'élimination de cette hypothèse noethérienne est un peu plus subtile qu'il pourrait paraître à première vue puisque la question est affine plutôt que linéaire. Si $\overline{X}$, Y et $\mathscr{M}$ se déduisent par un changement de base $S \to S_0$ (que l'on suppose être un morphisme local entre schémas locaux) de données correspondantes $\overline{X}_0$, Y_0 et $\mathscr{M}_0$ au-dessus de S_0 noethérien (cf. EGA IV 8) et que l'on connaît l'énoncé voulu dans cette situation noethérienne, alors on peut obtenir le résultat voulu au-dessus de S au prix d'une déplaisante chasse au diagramme au cours de laquelle on peut être amené à considérer une variante de l'énoncé voulu où l'on demanderait aux sections de valoir 0 au lieu de 1 sur Y_s ou Y.

[118]N.D.E. : Il convient ici d'observer que, compte tenu de (1.5.10.1) et du fait la deuxième partie de la condition (1.5.10.3) puisse se vérifier dans la situation locale en considérant uniquement la fibre au-dessus de s, le lemme ne fait plus intervenir que des sections de la restriction de $\mathscr{L}$ sur la fibre X_s. Par exemple, pour (I), la condition (1.5.10.2) fournit un espace *affine* V de dimension 3 de sections de $\mathscr{L} \otimes k(s)$ sur X_s et valant 1 sur Y_s, et aucune section appartenant à cet espace V ne s'annule en quelque point générique que ce soit de X_s. On cherche à déterminer $k \in V$ tel que pour tout i, (m_i, k) vérifie (1.5.10.2), c'est-à-dire que la droite affine reliant les points m_i et k ne passe pas par l'origine (dans aucun de ses avatars associés aux différentes composantes irréductibles de X_s), autrement dit, il suffit que k n'appartienne pas à la droite reliant m_i et l'origine. On obtient ainsi une conjonction de conditions satisfaites sur des ouverts non vides de V. Pour être parfaitement rigoureux et tenir compte du fait que les composantes irréductibles ne sont pas forcément géométriquement irréductibles, dans le cas où l'on doit prendre un point de V dans une extension (si $k(s)$ est fini), il faut en fait introduire une extension galoisienne finie $s' \to s$ telle que les composantes irréductibles de $X_{s'}$ soient géométriquement irréductibles. L'ouvert dense de $V_{s'}$ que l'on obtient en raisonnant sur $X_{s'}$ est invariant par Galois et donc définit l'ouvert dense de V cherché.

(1.5.10.4). Il existe alors un voisinage étale U de $\bar{s}$ et une section k de $\mathscr{L}|\overline{f}^{-1}(U)$ telle que les triples (m_i, k_j, k) vérifient (1.5.10.5).

Pour $k(s)$ infini, on pouvait se contenter de prendre pour U un voisinage de Zariski.

1.5.12. Soit maintenant $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur $\overline{X}$ rigidifié le long de Y, et K un G-torseur sur X, où G est comme dans 1.5.7. On se propose de définir un G-torseur $\langle\mathscr{L}, K]$ sur S, généralisant celui étudié dans 1.3, et additif en $\mathscr{L}$.

Soit (m_1, m_2) un couple de sections de $\mathscr{L}$ qui vérifie (1.5.10.4). Avec les notations de 1.5.10.3 et de 1.5.10.4, la trace, de $\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2 = 0$ à $\mathbf{E}^1_S$, du torseur g'^*K est un torseur $K_{1,2}$ sur $\mathbf{E}^1_S$. Son image réciproque par la section $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = 1$) est le torseur $K_2 = \mathrm{Tr}_{Z(m_2)/S}(K)$ (resp. $K_1 = \mathrm{Tr}_{Z(m_1)/S}(K)$). D'après 1.5.7, le torseur $K_{1,2}$ est canoniquement l'image réciproque d'un torseur sous G sur S ; d'où un isomorphisme canonique entre K_1 et K_2.

Si m_1, m_2 et k sont trois sections de $\mathscr{L}$ telles que les couples (m_i, k) vérifient (1.5.10.4), on obtient encore par composition un isomorphisme

$$\Psi_k : K_1 = \mathrm{Tr}_{Z(m_1)/S}(K) \xrightarrow{\sim} K_2 = \mathrm{Tr}_{Z(m_2)/S}(K). \tag{1.5.12.1}$$

Si E est un diviseur relatif sur X, fini sur S, les sections $m'_i = m_i \otimes 1$ de $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(E)$ vérifient encore (1.5.10.3), on a (pour $i = 0, 1$)

$$K'_i = \mathrm{Tr}_{Z(m'_i)/S}(K) \simeq K_i + \mathrm{Tr}_{E/S}(K) \tag{1.5.12.2}$$

et l'isomorphisme $\Psi_{k\otimes 1} : K'_1 \to K'_2$ se déduit de Ψ_k :

$$\Psi_{k\otimes 1} = \Psi_k + \mathrm{id}_{\mathrm{Tr}_{E/S}}(K). \tag{1.5.12.3}$$

Pour vérifier que Ψ_k ne dépend pas de k, il suffit de le faire au voisinage étale de
540 chaque point s de S, et, par 1.5.12.3 et 1.5.9, on se ramène au cas où sont vérifiées les conditions (1.5.10.1) (1.5.10.2). Avec les notations de 1.5.11 (II), $\Psi_{\lambda k_i + (1-\lambda)k} - \Psi_{k_i}$ est un morphisme de $\mathbf{E}^1_S$ dans G, nul en $\lambda = 1$, donc nul, et $\Psi_{k_i} = \Psi_k$, donc $\Psi_{k_1} = \Psi_{k_2}$.

Soient m_1 et m_2 deux sections de $\mathscr{L}$ vérifiant 1.5.10.3 et $K_i = \mathrm{Tr}_{Z(m_i)/S}(K)$. Pour définir un isomorphisme $\Psi_{m_2,m_1} : K_1 \to K_2$, il suffit de le faire au voisinage étale de chaque point s de S, de façon compatible au changement de base. Si E est un diviseur relatif sur X, fini sur S, tel que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(E)$ vérifie (1.5.10.1) (1.5.10.2) (voir 1.5.9), et si les couples $(m_i \otimes 1, k)$ vérifient (1.5.10.4), on pose (cf. (1.5.12.3))

$$\Psi_{m_2,m_1} + \mathrm{Tr}_{E/S}(K) = \Psi_k.$$

Ceci définit Ψ_{m_2,m_1} et on vérifie par (1.5.11. (I)) que $\Psi_{m_3,m_2}\Psi_{m_2,m_1} = \Psi_{m_3,m_1}$. Ces constructions sont compatibles aux changements de base. S'il existe une section m de $\mathscr{L}$ vérifiant (1.5.10.3), on posera

$$\langle\mathscr{L}, K] = \mathrm{Tr}_{Z(m)/S}(K)$$

et, d'après ce qui précède, ce torseur ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de m.

Notons, dans le cas général, qu'il suffit pour définir $\langle\mathscr{L}, K]$ de le définir au voisinage étale de chaque point s de S, de façon compatible au changement de base. Si, comme plus haut, $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(E)$ vérifie (1.5.10.1) (1.5.10.2), alors $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(E)$ admet des sections vérifiant (1.5.10.3), et on pose

$$\langle\mathscr{L}, K] = \langle\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(E), K] - \mathrm{Tr}_{E/S}(K).$$

1.5.13. Sous les hypothèses 1.5.8, si x et y sont deux sections de $\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$, alors $\lambda x + (1-\lambda)y$ est encore une section pour λ dans un ouvert à fibres non vides de la droite affine sur S.

On peut traduire ceci en disant que

. « $\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ est connexe par arc ».

Tout morphisme d'un ouvert à fibres non vides de la droite affine dans G est constant. **541** Il n'existe donc pas d'homomorphisme non trivial de $\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ dans G, et les automorphismes de $\mathscr{L}$ agissent trivialement sur $\langle \mathscr{L}, K]$. Le torseur $\langle \mathscr{L}, K]$ ne dépend donc que de K et de la section de $R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ définie par $\mathscr{L}$. Par globalisation, ceci permet de définir un symbole $\langle \lambda, K]$ pour λ section de $R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$. Le torseur $\langle \lambda, K]$ est additif en λ, et correspond donc à une extension $e(K)$ de $R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ par G (voir 1.4.23 ou SGA 7 VII 1.1.6 et 1.2).

La formation de $e(K)$ est compatible à tout changement de base et à l'addition des torseurs, d'où un foncteur additif

$$e : \overline{f}_* \mathrm{ch}(G[1]) \longrightarrow \mathrm{EXT}(R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}), G).$$

Soit j l'application canonique de X dans $R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$, $j : t \to$ (classe de $\mathscr{O}(t)$). L'image réciproque par j est un foncteur additif

$$j^* : \mathrm{EXT}(R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}), G) \longrightarrow \overline{f}_* \mathrm{ch}(G[1])$$

et on a trivialement $j^* e \sim \mathrm{Id}$. On vérifie comme en 1.3.10 et 1.5.2 que, en topologie fppf

Proposition 1.5.14. *Sous les hypothèses 1.5.8, les foncteurs e et j de 1.5.13 sont des équivalences inverses l'une de l'autre. On en déduit par 1.4.19, 1.4.23 un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(R^1\overline{f}_* \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}), G) \xrightarrow{\sim} H^1(X, G).$$

1.5.15. Soient $f_i : X_i \to S$ $(i = 1, 2)$ deux courbes compactifiées comme en 1.5.8. Soit $\overline{u} : \overline{X}_1 \to \overline{X}_2$ un morphisme tel que Y_1 soit un sous-schéma de l'image réciproque de Y_2 et qui induise un morphisme fini et plat de X_1 dans X_2. On a alors, pour $\mathscr{L}$ faisceau inversible sur $\overline{X}_2$ rigidifié le long de Y_2 et K torseur sur X_1,

$$\langle \mathscr{L}, \mathrm{tr}_{X_1/X_2}(K)] \xrightarrow{\sim} \langle \overline{u}^* \mathscr{L}, K],$$

et on en déduit la commutativité du diagramme **542**

$$(1.5.15.1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(R^1\overline{f}_{1*} \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}_1), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_1, G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^1(\overline{u}^*, \mathrm{Id})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{X_1/X_2}} \\ \mathrm{Ext}^1(R^1\overline{f}_{2*} \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}_2), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_2, G). \end{array}$$

Si $\overline{u} : \overline{X}_1 \to \overline{X}_2$ est fini et plat, et vérifie $Y_1 = \overline{u}^{-1} Y_2$ (comme schémas), on a pour $\mathscr{L}$ faisceau inversible sur X_1 rigidifié le long de Y_1 et K torseur sur X_2,

$$\langle \mathscr{L}, u^* K] \xrightarrow{\sim} \langle N_{\overline{X}_1/\overline{X}_2} \mathscr{L}, K]$$

et on en déduit la commutativité du diagramme

(1.5.15.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(R^1\overline{f}_{2*}\mathbf{G}_m(\mathfrak{m}_2), G) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1(N_{\overline{X}_1/\overline{X}_2},\mathrm{Id})"] & H^1(X_2, G) \arrow[d, "u^*"] \\
\mathrm{Ext}^1(R^1\overline{f}_{1*}\mathbf{G}_m(\mathfrak{m}_1), G) \arrow[r, "\sim"] & H^1(X_1, G).
\end{tikzcd}$$

On pourrait bien sûr préciser ce résultat en termes de champs de Picard.

1.6. Un théorème d'effacement. Le présent n°, de 1.6.6 (2^e démonstration) à la fin, peut se lire indépendamment des n° 2 à 5.

Lemme 1.6.1. Soient X un schéma et Y un sous-schéma fermé de X de complément U, défini par un idéal $\mathfrak{m}$.
$$U \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookleftarrow} Y.$$
Soit $\mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ le faisceau fpqc dont les sections sur un X-schéma X_1 sont les sections de $\mathscr{O}^*_{X_1}$ valant 1 sur l'image réciproque de Y. Pour $n \geq 1$ inversible sur X, la suite
$$0 \to j_!\boldsymbol{\mu}_n \to \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \xrightarrow{n} \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \to 0$$
est une suite exacte de faisceaux sur le grand site étale (XVII 0.10) de X.

543 Soit i le morphisme de grands sites étale $i : Y \to X$ induit par i :
$$i^*(X_1/X) = X_1 \times_X Y.$$
Le foncteur i_* est exact. Dans le diagramme

(1.6.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & j_!\boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & i_*\boldsymbol{\mu}_n \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

les colonnes sont exactes, ainsi que les deux dernières lignes (IX 3.2). La première ligne est donc exacte.

1.6.2. Soient k un corps et
$$G'_1 \longrightarrow G'_2 \longrightarrow G \longrightarrow G''_2 \longrightarrow G''_1$$
une suite exacte de faisceaux abéliens sur le grand site fppf de Spec(k). On rappelle que si G'_1 et G'_2 sont représentables de type fini, et G''_2 et G''_1 représentables localement de type fini, alors G est représentable et localement de type fini[119].

[119] N.D.E. : Dans le cas où $G'_1 = G'_2 = 0$, c'est évident. Dans le cas où $G''_1 = G''_2 = 0$, en utilisant SGA 3 V 10.1.1 (nouvelle édition), on peut se ramener au cas où $G'_1 \to G'_2$ est un monomorphisme, qui est traité

Si P est un groupe algébrique de type fini commutatif connexe sur k, et n un entier inversible dans k, la suite

(1.6.2.1) $$0 \to {}_nP \to P \xrightarrow{n} P \to 0$$

est exacte. Si G est un groupe commutatif fini étale sur k, annulé par n, le premier groupe et la dernière flèche de la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(P,G) \to \mathrm{Hom}({}_nP,G) \xrightarrow{j} \mathrm{Ext}^1(P,G) \xrightarrow{n} \mathrm{Ext}^1(P,G)$$

sont nuls, d'où un isomorphisme

(1.6.2.2) $$j : \mathrm{Hom}({}_nP,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(P,G).$$

1.6.3. Sous les hypothèses de 1.6.1, supposons X propre sur le spectre d'un corps k 544

$$p : X \longrightarrow k.$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow i_*\mathbf{G}_m \longrightarrow 0$$

définit une suite exacte de cohomologie de faisceaux fppf sur $\mathrm{Spec}(k)$, qu'il est facile d'interpréter directement

(1.6.3.1) $$0 \to p_*\mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \to p_*\mathbf{G}_{m_X} \to (pi)_*\mathbf{G}_{m_Y} \xrightarrow{j} R^1p_*\mathbf{G}_m(\mathfrak{m}) \to \mathbf{Pic}_{X/k} \to \mathbf{Pic}_{Y/k}\,.$$

Les faisceaux $p_*\mathbf{G}_{m_X}$ et $(pi)_*\mathbf{G}_{m_Y}$ sont représentables par des schémas en groupes de type fini affines. Les faisceaux $\mathbf{Pic}_{X/k}$ et $\mathbf{Pic}_{Y/k}$ sont représentables par des schémas en groupes localement de type fini. D'après 1.6.2, les faisceaux $p_*\mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ et $R^1p_*\mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$ sont représentables. D'après (1.5.13.1), le premier est représentable par un schéma en groupe connexe (et de type fini) ; le second est localement de type fini.

Définition 1.6.4. Sous les hypothèses précédentes, on désigne par $\mathbf{Pic}_{\mathfrak{m},X/k}$ le schéma en groupes qui représente $R^1p_*\mathbf{G}_m(\mathfrak{m})$. On désigne par $\mathbf{Pic}^0_{\mathfrak{m},X/k}$ sa composante neutre et par $\mathbf{Pic}^\tau_{\mathfrak{m},X/k}$ l'image réciproque dans $\mathbf{Pic}_{\mathfrak{m},X/k}$ du sous-groupe de torsion de $\mathbf{Pic}_{\mathfrak{m},X/k}\,/\,\mathbf{Pic}^0_{\mathfrak{m},X/k}$.

Le schéma $\mathbf{Pic}_{\mathfrak{m},X/k}$ représente le faisceau fppf engendré par le préfaisceau qui à chaque schéma S sur k associe l'ensemble des classes d'isomorphie de modules inversibles sur $S\times_k X$, trivialisés le long de $S\times_k Y$ (1.5.8).

La suite exacte de Kummer 1.6.1 fournit, pour k algébriquement clos et n inversible dans k, un isomorphisme

(1.6.4.1) $$H^1_c(U,\boldsymbol{\mu}_n) \xrightarrow{\sim} {}_n\mathbf{Pic}^\tau_{\mathfrak{m},X/k}(k).$$

1.6.5. Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, $\overline{X}$ la courbe projective et lisse contenant X comme ouvert dense, Y un sous-schéma de $\overline{X}$ tel que 545

dans (SGA 3 VI$_{\mathrm{A}}$ 3.2). On est ainsi ramené au cas où $G_1' = G_1'' = 0$. On peut alors considérer le faisceau G comme un torseur sous G_2' au-dessus du schéma G_2''. Si on suppose que G_2' est affine (situation dans laquelle on se retrouve d'après (SGA 3 VI$_{\mathrm{B}}$ 11.17) si avant de faire des réductions on a supposé G_1' et G_2' affines), alors la représentabilité de G résulte aussitôt de la descente fidèlement plate. Ce cas particulier est suffisant pour les utilisations faites dans ce paragraphe. Si G_2' est quasi-projectif, on peut obtenir la représentabilité de G en utilisant (SGA 1 VIII 7.7) et des arguments semblables à ceux de [11, Lemme 3.3.1]. En fait, tout schéma en groupes G de type fini sur un corps est quasi-projectif : on peut supposer que G est connexe, c'est alors [2, Corollary 1.2] si G est lisse et (M. Raynaud) le cas général s'y ramène parce que d'après (SGA 3 VII$_{\mathrm{A}}$ 8.3) il existe un morphisme fini de G vers un schéma en groupe lisse.

$X = \overline{X} - Y$, $\mathfrak{m}$ l'idéal qui définit Y, n un entier inversible dans k et G groupe abélien fini tué par n.

Le groupe $\mathbf{Pic}_{\mathfrak{m},X/k}$ est non canoniquement le produit du sous-groupe $\mathbf{Pic}^0_{\mathfrak{m},\overline{X}/k}$ et d'un groupe abélien libre. D'après (1.6.4.1), (1.6.2.2), et 1.5.14, on dispose dès lors d'un isomorphisme canonique composé

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(H^1_c(X,\boldsymbol{\mu}_n),G) &\xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}({}_n\mathbf{Pic}^{\tau}_{\mathfrak{m},\overline{X}/k}(k),G) = \operatorname{Hom}({}_n\mathbf{Pic}^0_{\mathfrak{m},\overline{X}/k},G)\\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1(\mathbf{Pic}^0_{\mathfrak{m},\overline{X}/k},G) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1(\mathbf{Pic}_{\mathfrak{m},\overline{X}/k},G) \xrightarrow{\sim} H^1(X,G)\end{aligned}$$

Si $u : X \to Y$ est un morphisme fini entre courbes lisses sur k, on déduit de XVII 6.3. et (1.5.15.2) la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(H^1_c(Y,\boldsymbol{\mu}_n),G) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\operatorname{Hom}(\operatorname{Tr}_u,G)"] & H^1(Y,G) \arrow[d, "u^*"] \\ \operatorname{Hom}(H^1_c(X,\boldsymbol{\mu}_n),G) \arrow[r, "\sim"] & H^1(X,G). \end{tikzcd} \tag{1.6.5.1}$$

Lemme 1.6.6. Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, n un entier inversible dans k et $u : X' \to X$ un revêtement étale modéré. Le morphisme

$$\operatorname{Tr}_u : H^1_c(X',\mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X,\mathbf{Z}/n)$$

est alors (non canoniquement[120]) isomorphe au transposé du morphisme

$$u^* : H^1(X,\mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1(X',\mathbf{Z}/n).$$

1^re^ démonstration. Puisque $\boldsymbol{\mu}_n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/n$, 1.6.6 est un cas particulier de (1.6.5.1) pour $G = \mathbf{Z}/n$.

2^e^ démonstration. Si k est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, alors, par les théorèmes de comparaison, les morphismes Tr_u et u^* s'identifient aux morphismes analogues, définis par l'application continue entre espaces topologiques $u : X'(\mathbf{C}) \to X(\mathbf{C})$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_u &: H^1_c(X'(\mathbf{C}),\mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z}/n) \quad \text{et}\\ u^* &: H^1(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1(X'(\mathbf{C}),\mathbf{Z}/n).\end{aligned}$$

546 Ces deux homomorphismes sont transposés l'un de l'autre par dualité de Poincaré.

Par le principe de Lefschetz, l'assertion 1.6.6 est encore vraie pour k de caractéristique 0 (les groupes de cohomologie considérés sont en effet invariants par changement de corps de base algébriquement clos).

Si k est caractéristique $p > 0$, soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Soit $\overline{X}$ la courbe projective et lisse complétée de X. D'après (SGA 1 III 7.4), la courbe $\overline{X}$ se relève en une courbe projective et lisse $\overline{X}_1$ sur $W(k)$. Puisque $\overline{X}$ est lisse, chaque point $s_i \in S = \overline{X} - X$ se relève en une section s'_i de $\overline{X}$ sur $W(k)$; on pose $S_1 = \cup_i s'_i(\operatorname{Spec}(W(k)))$ et $X_1 = \overline{X}_1 - S_1$.

Rappelons (SGA 1 XIII 2.4) que le revêtement X' de X se relève en un revêtement étale X'_1 de X_1, et que X'_1 se déduit d'une courbe projective et lisse $\overline{X}'_1$ sur $W(k)$ par

[120]N.D.E. : L'isomorphisme est canonique si on a choisi un isomorphisme $\boldsymbol{\mu}_n \simeq \mathbf{Z}/n$.

soustraction de la réunion S'_1 d'un nombre fini de sections disjointes.

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dd, "f_1"] & & X \arrow[ll] \arrow[dd] \\
X'_1 \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "f'_1"'] & & X' \arrow[ll] \arrow[ur, "u"] \arrow[dr] & \\
& \mathrm{Spec}(W(k)) & & \mathrm{Spec}(k). \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Les faisceaux étales $R^1 f_{1*}(\mathbf{Z}/n)$, $R^1 f'_{1*}(\mathbf{Z}/n)$, $R^1 f_{1!}(\mathbf{Z}/n)$ et $R^1 f'_{1!}(\mathbf{Z}/n)$ sont localement constants de formation compatible aux changements de base, comme le montrent **547**
les suites exactes reliant les cohomologies de $\overline{X}_1$, X_1 et S_1, ou $\overline{X}'_1$, X'_1 et S'_1.

Les fibres géométriques spéciales ou génériques des morphismes

$$\mathrm{Tr}_{u_1} : R^1 f'_{1!}\mathbf{Z}/n \longrightarrow R^1 f_{1!}\mathbf{Z}/n$$

ou

$$u_1^* : R^1 f_{1*}\mathbf{Z}/n \longrightarrow R^1 f'_{1*}\mathbf{Z}/n$$

sont donc isomorphes, et ceci nous ramène au cas déjà traité où k est de caractéristique zéro.

Lemme 1.6.7. Soient X une courbe lisse connexe sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p, et n un entier premier à p. Il existe un revêtement principal (= fini étale galoisien (surjectif)) $u : X' \to X$, de degré divisant une puissance de n, tel que le morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_u : H^1_c(X', \mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X, \mathbf{Z}/n)$$

soit nul.

Rappelons que le groupe $H^1(X, \mathbf{Z}/n)$ est fini (IX 4.6 ou XVI 5.2). Soit $u : X' \to X$ le plus grand revêtement principal abélien connexe de X de groupe de Galois tué par n (son groupe de Galois est noté $H_1(X, \mathbf{Z}/n)$). Par construction, l'homomorphisme

$$u^* : H^1(X, \mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1(X', \mathbf{Z}/n)$$

est nul. D'après 1.6.6, l'homomorphisme

$$\mathrm{Tr}_u : H^1_c(X', \mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X, \mathbf{Z}/n)$$

est donc nul.

Rappelons le lemme suivant (EGA IV 15.6.5) :

Lemme 1.6.8. Soient $f : X \to S$ un morphisme lisse et x une section de f. Il existe alors un ouvert de Zariski U de X, contenant x, et tel que les fibres géométriques de $f|U$ soient connexes.

Lemme fondamental 1.6.9. Soient $f : X \to S$ une courbe lisse (1.1.2) compactifiable (XVII 3.2), x un point géométrique de X, s son image dans S et $n \geq 1$ un entier **548** inversible sur S. Il existe un voisinage étale V de s dans S et un voisinage étale U de x dans $f^{-1}(V) = V \times_S X$

(1.6.9.1)
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dd, no head] & U \arrow[r, "u"] \arrow[ddr, "f'"'] & f^{-1}(V) \arrow[r] \arrow[dd, "f_v"] & X \arrow[dd, "f"] \\ & & & \\ s \arrow[rr] & & V \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

tels que l'on ait $R^0 f'_! \mathbf{Z}/n = 0$, que la flèche XVII 6.2
$$\mathrm{Tr}_u : R^1 f'_! \mathbf{Z}/n \longrightarrow R^1 f_{v!} \mathbf{Z}/n$$
soit nulle, et que le morphisme trace
$$\mathrm{Tr}_{f'} : R^2 f'_! \mathbf{Z}/n(1) \longrightarrow \mathbf{Z}/n$$
soit un isomorphisme.

Pour que $R^0 f'_! \mathbf{Z}/n = 0$, il suffit que f' soit quasi-affine ; pour que $\mathrm{Tr}_{f'}$ soit un isomorphisme, il suffit que les fibres géométriques de f' soient connexes (1.1.9) ; grâce à 1.6.8, ces propriétés de f' sont faciles à obtenir, localement sur S pour la topologie étale. Il reste à démontrer pour X à fibres géométriques connexes, l'existence d'un diagramme (1.6.9.1) pour lequel la flèche Tr_u considérés soit nulle : il suffira de rétrécir U et V pour que les deux autres propriétés requises de f' soient vérifiées.

Le problème est local sur S au voisinage de s ; par XVII 5.2.6 (changement de base), on se ramène aussitôt au cas S noethérien. Par passage à la limite, et grâce à XVII 5.3.6 (constructibilité) on se ramène au cas S strictement local noethérien, de point fermé image de s.

Soit t un point géométrique de S. D'après 1.6.7, il existe un revêtement principal de degré premier à l'exposant caractéristique p de $k(s)$ $u : X_t^1 \to X_t$, tel que la flèche
$$\mathrm{Tr}_u : H_c^1(X_t^1, \mathbf{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X_t, \mathbf{Z}/n)$$
549 soit nulle. D'après le théorème d'acyclicité XV 2.1 (ou XV 2.6), il existe un voisinage étale $v : U \to X$ de x dans X tel que X_t^1 splitte au-dessus de U_t, de sorte que : $v_t : U_t \to X_t$ se factorise par X_t^1. On a donc encore
$$\mathrm{Tr}_{v_t} = 0 : H_c^1(U_t, \mathbf{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X_t, \mathbf{Z}/n).$$

Pour tout point géométrique t de S, il existe donc un voisinage étale de x dans X
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd}$$
tel que la fibre en t de

(1.6.9.2)
$$\mathrm{Tr}_v : R^1 f'_! \mathbf{Z}/n \longrightarrow R^1 f_! \mathbf{Z}/n$$
soit nulle (XVII 5.2.6).

Pour U variable, les images des flèches (1.6.9.2) forment un système décroissant filtrant de sous-faisceaux du faisceau constructible $R^1 f_! \mathbf{Z}/n$, qui devient nul en un quelconque point géométrique de S. Par récurrence noethérienne, on vérifie qu'un tel système est toujours stationnaire, de valeur stationnaire nulle. Il existe donc U tel que (1.6.9.2) soit nul, et ceci achève la démonstration de 1.6.9.

2. Le morphisme trace

Le présent § est consacré à la démonstration des théorèmes 2.9 et 2.12. La démonstration de 2.9 n'utilise que le *n*° 1 du § 1. 550

Lemme 2.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme compactifiable (XVII 3.2.1) de dimension relative $\leq d$ et $j : U \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert de type fini de X, dont le complément est fibre par fibre de dimension $< d$ (par exemple : U dense fibre par fibre dans X). Si F est un faisceau de torsion sur X, la flèche canonique

$$R^{2d}(fj)_! j^* F \xrightarrow{\sim} R^{2d} f_! F$$

est un isomorphisme.

Soit i l'inclusion de $Y = X - U$ dans X. La suite exacte (XVII 5.1.16.2) nous fournit une suite exacte

$$R^{2d-1}(fi)_! i^* F \longrightarrow R^{2d}(fj)_! j^* F \longrightarrow R^{2d} f_! F \longrightarrow R^{2d}(fi)_! i^* F$$

dont les termes extrêmes sont nuls en vertu de (XVII 5.2.8.1).

Lemme 2.2. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable de dimension relative $\leq d$, et $u_i : X_i \to X$ une famille de morphismes étales, séparés, de type fini ; soit $u_{ij} : X_{ij} = X_i \times_X X_j \to X$. Pour tout faisceau de torsion F sur X, la suite

$$\bigoplus_{i,j} R^{2d}(fu_{ij})_! u_{ij}^* F \rightrightarrows \bigoplus_i R^{2d}(fu_i)_! u_i^* F \to R^{2d} f_! F \to 0$$

de flèches (XVII 6.2.7.2) est exacte.

Résulte aussitôt de l'exactitude à droite du foncteur $R^{2d} f_!$ et de XVII 6.2.9.

Lemme 2.3. Soit $f : X \to S$ un morphisme plat de présentation finie. L'ouvert de X sur lequel f est de Cohen-Macaulay (EGA IV 6.8.1 et 12.2.1 (vii), est relativement de présentation finie et dense fibre par fibre.

La question est locale sur S, qu'on se ramène à supposer noethérien, d'où la 1re assertion. La seconde se vérifie fibre par fibre, donc pour S spectre d'un corps. Les anneaux locaux de X aux points maximaux de X sont artiniens, donc de Cohen-Macaulay, d'où l'assertion puisque « Cohen-Macaulay » est une propriété « ouverte ». 551

Lemme 2.4. Soit $f : X \to S$ un morphisme plat de présentation finie et de Cohen-Macaulay, avec S quasi-séparé. Tout point de X a un voisinage ouvert (de Zariski) U tel qu'il existe un S-morphisme quasi-fini et plat de présentation finie de U dans le fibré vectoriel type $\mathbf{E}_S^d$.

C'est un cas particulier de EGA IV 15.4.3.

Lemme 2.5. Soient $\underline{u} = (u_1, \dots, u_d)$ et $\underline{v} = (v_1, \dots, v_d)$ deux systèmes de paramètres d'un anneau local de Cohen-Macaulay A, de dimension d et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Il existe une suite $\underline{w}_0, \dots, w_n$ de systèmes de paramètres de A, telle que $\underline{w}_0 = \underline{u}$, $\underline{w}_n = \underline{v}$ et que chaque $\underline{w}_{i+1}$ se déduise de $\underline{w}_i$ en modifiant un seul des paramètres.

On raisonne par récurrence sur d, l'assertion étant vide pour $d < 2$; on suppose donc $d \geq 2$. Pour qu'un élément $x \in \mathfrak{m}$ soit A/u_1-régulier (resp. A/v_1-régulier) il faut et il suffit que x n'appartienne à aucun élément de $\mathrm{Ass}(A/u_1)$ (resp. $\mathrm{Ass}(A/v_1)$) ; aucune réunion finie d'idéaux premiers $\neq \mathfrak{m}$ n'étant égale à $\mathfrak{m}$, il existe $x \in \mathfrak{m}$ qui soit A/u_1- et A/v_1-régulier, donc aussi des systèmes de paramètres $\underline{a} = (u_1, x, \dots)$ et $\underline{b} = (v_1, x, \dots)$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\underline{u} - \{u_1\}$ et $\underline{a} - \{u_1\}$ dans A/u_1, à $\underline{a} - \{x\}$ et $\underline{b} - \{x\}$ dans A/x et à $\underline{b} - \{v_1\}$ et $\underline{v} - \{v_1\}$ dans A/v_1.

Lemme 2.6. Soient X un schéma de Cohen-Macaulay de type fini sur un corps algébriquement clos k et u, v : $X \to \mathbf{E}^d_k$ deux morphismes quasi-finis et plats de X dans un fibré vectoriel type. Tout point fermé x de X a un voisinage ouvert (de Zariski) U,
552 tel qu'il existe une suite de morphismes $w_0, \dots, w_n : U \to \mathbf{E}^d_k$, telle que $w_0 = u|U$, $w_n = v|U$ et que w_{i+1} ne diffère de w_i que par une seule coordonnée.

Supposons tout d'abord que $u(x) = v(x) = 0$. Les germes en x de morphismes quasi-finis plats de X dans ${}^{d}_{k}$, envoyant x en 0, s'identifient alors aux système de paramètres de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ et 2.6 résulte de 2.5. Dans le cas général, on commence à joindre u et $u - u(x)$ (resp. v et $v - v(x)$) par la chaîne des morphismes

$$u - (u_1(x), \dots, u_i(x), 0, \dots, 0)(\text{resp. } v - (v_1(x), \dots, v_i(x), 0 \dots 0)).$$

2.7. Soit un couple de morphismes S-compactifiables composables $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} S$. Supposons que f soit de dimension relative $\leq d$ et g de dimension relative $\leq e$. Pour tout faisceau de torsion F sur X, la suite spectrale de composition

$$R^p f_! R^q g_! F \Longrightarrow R^{p+q}(fg)!\, F \tag{2.7.1}$$

nous fournit alors (argument du cycle maximum) un isomorphisme

$$R^{2d} f_! R^{2e} g_! F \simeq R^{2(d+e)}(fg)_! F. \tag{2.7.2}$$

2.8. Soit

$$a^d : \mathbf{E}^d_S \longrightarrow S$$

le fibré vectoriel type sur un schéma cohérent (i.e. quasi-compact, quasi-séparé) S. Si F est un faisceau de torsion sur S, premier aux caractéristiques résiduelles de S, on définit comme suit, par récurrence sur d, un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{a^d} : R^{2d} a^d_! F(d) \xrightarrow{\sim} F. \tag{2.8.1}$$

Pour $d = 0$, Tr_{a^0} est l'identité. Pour $d = 1$, Tr_{a^1} est l'isomorphisme (1.1.6) (cf. 1.1.9). Enfin, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{E}^{d+1}_S = \mathbf{E}^1_S \times_S \mathbf{E}^d_S = \mathbf{E}^1_{\mathbf{E}^d_S}$$

553 et on définit $\mathrm{Tr}_{a^{d+1}}$ comme le composé des isomorphismes $\mathrm{Tr}_{a^d_S}$ et $Ra^d_{S!}(\mathrm{Tr}_{a^1_{\mathbf{E}^d_S}})$ (cf. le diagramme Var 3 de 2.9).

La source (et le but) de (2.8.1) sont de formation compatible à tout changement de base. Tout groupe algébrique sur S agissant sur $\mathbf{E}^d_S$ agit donc sur ces faisceaux ; un groupe algébrique connexe agit nécessairement de façon triviale. Le groupe des permutations des coordonnées, contenu dans le groupe affine, agit donc trivialement sur la source (et le but) de (2.8.1).

2.8.2. L'isomorphisme (2.8.1) est invariant par permutation des coordonnées.

Ce point pourrait aussi se vérifier en interprétant (2.8.1) en termes de cup-produits (XVII 5.4.2.2 et XVII 5.4.3.5).

Théorème 2.9. Considérons les triples (f, d, F) formés d'un morphisme compactifiable (XVII 6.3) $f : X \to Y$, d'un entier d et d'un faisceau de torsion F sur Y premier aux caractéristiques résiduelles de Y, le morphisme f vérifiant la condition : $(*)_d$ Il existe un ouvert U de X tel que la restriction de f à U soit un morphisme plat de présentation finie à fibres de dimension $\leq d$, et tel que les fibres de $X - U$ soient de dimension $< d$.

Il est d'une et d'une seule façon possible d'associer à chaque triple (f, d, F) comme plus haut un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f \,:\, R^{2d} f_! f^* F(d) \longrightarrow F$$

de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Var 1) (Fonctorialité). Le morphisme trace est fonctoriel en F.

(Var 2) (Compatibilité aux changements de base). Quel que soit le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec Y' quasi-compact quasi-séparé, le diagramme **554**

$$\begin{tikzcd} R^{2d} f'_! f'^* g^* F(d) \arrow[r, equal] \arrow[d, "Tr_{f'}"] & R^{2d} f'_! g'^* f^* F(d) & g^* R^{2d} f_! f^* F(d) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "g^*(Tr_f)"] \\ g^* F \arrow[rr, equal] & & g^* F \end{tikzcd}$$

dans lequel l'isomorphisme horizontal est la flèche de changement de base XVII 5.2.2.1, est commutatif.

(Var 3) (Compatibilité à la composition). Quels que soient le couple de morphismes Z-compactifiables composables

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z,$$

les entiers d et e tels que f vérifie $(*)_d$ et que g vérifie $(*)_e$, et le faisceau de torsion F sur Z, le morphisme composé fg vérifie $(*)_{d+e}$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} R^{2d} f_! R^{2e} g_! g^* f^* F(d)(e) \arrow[r, "R^{2d} f_!(\mathrm{Tr}_g)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"'] & R^{2d} f_! f^* F(d) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] \\ R^{2(d+e)}(fg)_!(fg)^* F(d+e) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{fg}"] & F \end{tikzcd}$$

dans lequel l'isomorphisme vertical est la flèche (2.7.2), est commutatif.

(Var 4) (Normalisations).

(I) Si f est fini localement libre de rang n et si $d = 0$, le morphisme composé

$$F \longrightarrow f_* f^* F = f_! f^* F \xrightarrow{\mathrm{tr}_f} F$$

est la multiplication par n.

(II) Si f est la droite affine type $f \,:\, \mathbf{E}^1_Y \to Y$, et si $d = 1$, le morphisme trace **555**

$$\mathrm{Tr}_f \,:\, R^2 f_! f^* F(1) \longrightarrow F$$

est l'isomorphisme (2.8.1).

a) Pour $d = 0$, la condition $(*)_d$ est que f soit quasi-fini plat de présentation finie. En vertu de (XVII 6.2.3), pour $d = 0$, le morphisme trace doit coïncider avec le morphisme construit en loc. cit.

Lorsque f est la projection de l'espace affine type ${}^{d}_{S}$ sur S, il résulte de (Var 4) (II) et (Var 3) que Tr_f doit être l'isomorphisme (2.8.1).

b) Soit $f : X \to Y$ un morphisme compactifiable vérifiant la condition : $(*)_d$ Il existe un Y-morphisme quasi-fini et plat de présentation finie u de X dans le fibré vectoriel type $a^d : \mathbf{E}^d_Y \to Y$.

Soit $t(f, u)$ le morphisme « composé » des morphismes trace (2.8.1) et (SGA XVII 6.2.3) (cf. (Var 3))

$$t(f,u) = \mathrm{Tr}_{a^d} \circ R^{2d} a^d_!(\mathrm{Tr}_u).$$

Ce morphisme $t(f, u)$ vérifie (Var 1) et (Var 2). Par changement de base, pour vérifier que $t(f, u)$ ne dépend que de f et de d, et non de u, il suffit de le vérifier pour Y spectre d'un corps algébriquement clos k. D'après 2.2, la question est locale sur X, de sorte que d'après 2.6, il suffit de montrer que $t(f, u) = t(f, v)$ lorsque u et v ne diffèrent que par une seule coordonnée que, par 2.8.2, on peut supposer être la première. Posant $E = \mathbf{E}^{d-1}_Y$, on dispose donc d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{E}^1_E \arrow[ddr, "a"] & & \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[rrr, "v"] \arrow[drr, "x"'] \arrow[ddr, "f"'] & & & \mathbf{E}^1_E \arrow[dl, "a"'] \\
 & & E \arrow[dl, "w"] & \\
 & Y & &
\end{tikzcd}$$

556 On a par construction (2.8)

$$\mathrm{Tr}_{wa} = \mathrm{Tr}_w \circ R^{2(d-1)} w_!(\mathrm{Tr}_a) ;$$

on en déduit que $t(f, u)$ est le « composé » de Tr_w et de $t(x, u)$:

$$\begin{aligned} t(f,u) &= \mathrm{Tr}_{wa} \circ R^{2d}(wa)_!(\mathrm{Tr}_u) \\ &= \mathrm{Tr}_w \circ R^{2(d-1)} w_!(\mathrm{Tr}_a) \circ R^{2d}(wa)_!(\mathrm{Tr}_u) \\ &= \mathrm{Tr}_w \circ R^{2(d-1)} w_!(\mathrm{Tr}_a \circ R^2 a_!(\mathrm{Tr}_u)). \end{aligned}$$

De plus (1.1.7), $t(x, u)$ n'est autre que le morphisme Tr_x de 1.1.6 ; on a donc $t(x, u) = t(x, v) = \mathrm{Tr}_x$ et $t(f, u) = t(f, v)$.

On désignera par Tr_f le morphisme $t(f, u)$ construit plus haut. D'après XVII 6.2.3, ce morphisme trace vérifie (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour $e = 0$, et (Var 4). Quand il est défini, il coïncide nécessairement avec le morphisme trace cherché, si ce dernier existe.

c) Soit $f : X \to Y$ un morphisme compactifiable de Cohen-Macaulay, plat de présentation finie, purement de dimension relative d. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts quasi-compacts, tels qu'il existe un Y-morphisme quasi-fini et plat de U_i dans $\mathbf{E}^d_Y$ (2.4). D'après 2.2 et b), il existe alors un et un seul morphisme Tr_f rendant commutatif le diagramme suivant, où sont employées les notations de 2.2 :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i,j} R^{2d}(fu_{ij})_!(fu_{ij})^*F(d) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bigoplus_i R^{2d}(fu_i)_!(fu_i)^*F(d) \arrow[r] \arrow[dr, "\bigoplus_i \mathrm{Tr}_{fu_i}"'] & R^{2d}f_!f^*F(d) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] \\
& & F
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme trace ne dépend pas du recouvrement ouvert choisi (comparer les deux au recouvrement somme) ; il vérifie les conditions (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour $e = 0$, (Var 4), comme il résulte aussitôt de b).

d) Soient $f : X \to Y$ un morphisme compactifiable vérifiant $(*)_d$, et $j : U \hookrightarrow X$ l'ouvert promis par $(*)_d$. D'après 2.3, quitte à remplacer U par un ouvert **557**
plus petit, on peut supposer que fj est de Cohen-Macaulay, et purement de dimension d.

D'après 2.1, le morphisme canonique

$$R^{2d}(fj)_!(fj)^*F(d) \xrightarrow{\sim} R^{2d}f_!f^*F(d)$$

est un isomorphisme, et on définit Tr_f comme étant le composé

$$\mathrm{Tr}_f : R^{2d}f_!f^*F(d) \xleftarrow{\sim} R^{2d}(fj)_!(fj)^*F(d) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{fj}} F.$$

Il est immédiatement, grâce à (Var 3) pour $e = 0$ établi en c), que Tr_f ne dépend pas du choix de U. Le morphisme trace vérifie (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour $e = 0$, (Var 4), et est le seul à pouvoir vérifier les conditions imposées. Reste à prouver qu'il vérifie (Var 3), et pour ce faire on se ramène, par les arguments qui précèdent, à ne considérer que des couples (f, d), (g, e) vérifiant $(*)_d$ et $(*)_e$.

Le lecteur qui voudrait polir les raisonnements qui suivent vérifiera au préalable le

Lemme 2.9.1. Soient (f, g, h) trois morphismes T-compactifiables composables, vérifiant $(*)_k$, $(*)_\ell$ et $(*)_m$.

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} T.$$

Si les couples (f, g) et (g, h) vérifient (Var 3), alors pour que (f, gh) vérifie (Var 3), il faut et il suffit que (fg, h) vérifie (Var 3).

La condition envisagée dans la conclusion signifie encore que Tr_{fgh} est « composé » de Tr_f, Tr_g et Tr_h.

e) Soit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbf{E}^e_Y \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "c"] & \mathbf{E}^{d+e}_Z \arrow[d, "b"] \\
& Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{E}^d_Z \arrow[d, "a"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Le morphisme trace relatif à fg est le « composé » des morphismes traces rela- **558** tifs à ab et $u'v$; c'est encore, par construction pour ab, et d'après XVII 6.2.3 pour $u'v$, le « composé » des morphismes trace relatifs à a, b, u' et v. D'autre part, le « composé » des morphismes trace relatifs à f et g est le « composé » de ceux relatifs à a, u, c et v. Il s'agit donc de vérifier que pour tout diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_S^e \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "b'"] & \mathbf{E}_T^e \arrow[d, "b"] \\ S \arrow[r, "u"] & T \end{tikzcd} \tag{2.9.2}$$

avec u quasi-fini et plat de présentation finie, le diagramme de morphismes trace (2.8.1) et XVII 6.2.)

$$\begin{tikzcd} R^{2e}b_!u'_!u'^*b^*F(e) \arrow[r, "R^{2e}b_!(\mathrm{Tr}_{u'})"] \arrow[d, equal] & R^{2e}b_!b^*F(e) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_b"] & F \arrow[d, equal] \\ u_!R^{2e}b'_!b'^*u^*F(e) \arrow[r, "u_!(\mathrm{Tr}_{b'})"] & u_!u^*F \arrow[r, "\mathrm{Tr}_u"] & F \end{tikzcd} \tag{2.9.3}$$

est commutatif.

Par changement de base, il suffit de le vérifier pour T spectre d'un corps algébriquement clos k. Si S est somme de schémas S_i, on se ramène à ne vérifier la commutativité de (2.9.3) que pour les diagrammes (2.9.2) de base $u_i : S_i \to T$. Ceci permet de supposer que S est le spectre d'une k-algèbre artinienne locale A, de degré fini $n = [A : k]$. Si on identifie alors les faisceaux sur T (resp. sur $\mathbf{E}_T^e$) avec les faisceaux sur S (resp. sur $\mathbf{E}_S^e$) par le foncteur u^* (resp. u'^*) (VIII 1.1), le morphisme Tr_b s'identifie au morphisme $\mathrm{Tr}_{b'}$ (compatibilité de (2.8.1) aux changements de base), tandis que Tr_u et $\mathrm{Tr}_{u'}$ s'identifient à la multiplication par n, d'où l'assertion[121]. Ceci achève la démonstration de 2.9.

559 On a vu au courant de la démonstration que l'on a :

Proposition 2.10. Les morphismes trace XVII 6.2.3, XVIII 1.1.6 et (2.8.1) sont des cas particuliers du morphisme trace 2.9.

Remarque 2.10.1. On peut montrer sans difficulté que le morphisme trace de 2.9 est un isomorphisme si et seulement si les fibres géométriques de f ont exactement une composante irréductible de dimension d, et la « multiplicité » de celle-ci est première à n. Nous ne donnerons pas ici la démonstration directe de ce fait qui résultera de façon immédiate du « théorème de dualité globale » du § 3.

2.11. Soient $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ deux morphismes S-compactifiables vérifiant respectivement $(*)_d$ et $(*)_e$.

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[dd, "f\times g"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

[121]N.D.E. : Il était également possible de ramener cette compatibilité au cas $e = 1$ qui s'obtient en combinant 1.1.7 et 1.1.8. Les arguments donnés ici sont d'ailleurs semblables à ceux qui avaient été passés sous silence en 1.1.8.

L'isomorphisme de Künneth (XVII 5.4.3)

$$Rf_!(Z/n)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/n}Rg_!(Z/n) \xrightarrow{\sim} R(f\times g)_!(\mathbf{Z}/n)$$

induit un isomorphisme

$$R^{2d}f_!\mathbf{Z}/n \otimes R^{2e}g_!\mathbf{Z}/n \xrightarrow{\sim} R^{2(d+e)}(f\times g)_!(\mathbf{Z}/n) \tag{2.11.1}$$

Il est clair que $f\times g$ vérifie $(*)_{d+e}$; on a la compatibilité :

Proposition 2.12. Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} R^{2d}f_!\mathbf{Z}/n(d)\otimes R^{2e}g_!\mathbf{Z}/n(e) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f\otimes\mathrm{Tr}_g"] & R^{2(d+e)}(f\times g)_!\mathbf{Z}/n(d+e) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{f\times g}"] \\ \mathbf{Z}/n \arrow[r, equal] & \mathbf{Z}/n, \end{tikzcd} \tag{2.12.1}$$

dans lequel la première flèche horizontale est une forme tordue de (2.11.1), est commu- 560
tatif.

Pour le vérifier, il suffit d'utiliser (Var 3), et l'interprétation asymétrique de la flèche de Künneth utilisée dans la démonstration de XVII 5.4.3 (XVII 5.4.3.5).

2.13. Soient $f : X \to S$ un morphisme S-compactifiable vérifiant $(*)_d$, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur S et n un entier inversible sur S tel que $n\mathscr{A}=0$.

Pour tout $K\in D(S,\mathscr{A})$, on a (XVII 5.2.6)

$$K\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/n}Rf_!\mathbf{Z}/n(d) \xrightarrow{\sim} Rf_!(f^*K(d)). \tag{2.13.1}$$

Le morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : R^{2d}f_!\mathbf{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbf{Z}/n$$

peut encore s'interpréter comme un morphisme

$$\mathrm{Tr}_f : Rf_!\mathbf{Z}/n(d)[2d] \longrightarrow \mathbf{Z}/n.$$

Par tensorisation avec K, ce morphisme définit, via (2.13.1), un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : Rf_!(f^*K(d)[2d]) \longrightarrow K. \tag{2.13.2}$$

Comme nous le verrons en 3.2.5 le théorème suivant est essentiellement équivalent au théorème de dualité globale en cohomologie étale.

Théorème 2.14. Soient $f : X\to S$ un morphisme lisse et compactifiable purement de dimension relative d, et n un entier ≥ 1 inversible sur S. Quel que soit le point géométrique x de X d'image s dans S, il existe un voisinage étale V de s dans S et un voisinage étale U de x dans $f^{-1}(V)$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f'_V"'] & f^{-1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "f_V"] & X \arrow[d, "f"] \\ & V \arrow[r] & S \end{tikzcd} \tag{2.14.1}$$

tel que le morphisme XVII 6.2.7.4 561

$$R^if'_{V!}\mathbf{Z}/n \longrightarrow R^if_{V!}\mathbf{Z}/n$$

soit nul pour $i < 2d$, et que le morphisme

$$\mathrm{Tr}_{f'_V} : R^{2d} f'_{V!}\mathbf{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbf{Z}/n$$

soit un isomorphisme.

Prouvons tout d'abord le

Lemme 2.14.2. *Soient $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, k un entier ≥ 0, $(K_i)_{0\leq i\leq 2k}$ des objets de $D^b(\mathscr{A})$ tels que $H^p(K_i) = 0$ pour $p \notin [0, k]$, $f_i : K_i \to K_{i+i}$ $(0 \leq i \leq 2k-1)$ des morphismes et f leur composé. Si $H^p(f_i) = 0$ pour $p < k$, alors il existe dans $D^b(\mathscr{A})$ un morphisme φ du complexe $H^k(K_0)[-k]$, réduit à $H^k(K_0)$ placé en degré k, dans K_{2k}, qui rende commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K_{2k} \\
\sigma_{\geq k}(K_0) \arrow[r, equal] & H^k(K_0)[-k]. \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Le lemme est trivial pour $k = 0$. Prouvons-le par récurrence sur k. L'hypothèse de récurrence appliquée aux complexes $\sigma_{\geq 1}(K_i)[1]$ fournit l'existence d'un morphisme $\varphi' : H^k(K_0)[-k] \to \sigma_{\geq 1}K_{2k-2}$ qui rende commutatif le diagramme suivant, où $f' = f_{2k-3}\cdots f_0$:

$$\begin{tikzcd}
K_0 \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \sigma_{\geq 1}K_{2k-2} \\
\sigma_{\geq k}(K_0) \arrow[r, equal] & H^k(K_0)[-k]. \arrow[u, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout complexe L, le triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
& \sigma_{\geq 1}(L) \arrow[dl, "+1"'] & \\
\sigma_{\leq 0}(L) \arrow[rr] & & L \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

562 fournit, pour tout complexe M, une suite exacte

$$\ldots \to \mathrm{Hom}(M, \sigma_{\leq 0}(L)) \to \mathrm{Hom}(M, L) \to \mathrm{Hom}(M, \sigma_{\geq 1}L) \xrightarrow{j} \mathrm{Ext}^1(M, \sigma_{\leq 0}L).$$

En particulier, on dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\sigma_{\geq k}K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \overset{\textcircled{5}}{\mathrm{Hom}}(\sigma_{\geq k}K_0, K_{2k-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \overset{\textcircled{3}}{\mathrm{Hom}}(\sigma_{\geq k}K_0, \sigma_{\geq 1}K_{2k-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \overset{\textcircled{4}}{\mathrm{Ext}^1}(\sigma_{\geq k}K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) \arrow[d] \\
\overset{\textcircled{7}}{\mathrm{Hom}}(K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) \arrow[r] & \overset{\textcircled{1}}{\mathrm{Hom}}(K_0, K_{2k-2}) \arrow[r] & \overset{\textcircled{2}\textcircled{6}}{\mathrm{Hom}}(K_0, \sigma_{\geq 1}K_{2k-2}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2})
\end{tikzcd} \tag{2.14.3}$$

qui s'envoie dans les diagrammes analogues relatifs à K_{2k-1} et K_{2k}. Par hypothèse, le morphisme f' en ① a une image en ② qui se relève en ③. L'obstruction ④ à ce que l'élément ③ se relève en ⑤ a une image nulle dans le diagramme (2.14.3) relatif à K_{2k-1}. Dans ce nouveau diagramme, ③ se relève donc en ⑤, et la différence entre ① et l'image de ⑤ a une image nulle en ⑥, donc est l'image d'un élément ⑦. Cet élément ⑦ a une image nulle dans le diagramme 2.12.3 relatif à K_{2k} ; dans ce nouveau diagramme, f est donc image de ⑤, et ceci résout le problème posé.

Prouvons que, pour une valeur donnée de d, l'énoncé 2.14 implique le

Corollaire 2.14.4. Sous les hypothèses de 2.14, il existe un diagramme (2.14.1) tel que le morphisme XVII 6.2.4, dans $D^b(V, \mathbf{Z}/n)$ admette une factorisation

$$\begin{tikzcd} Rf'_{V!}\mathbf{Z}/n(d) \arrow[rr] \arrow[dr, "t"'] & & Rf_{V!}\mathbf{Z}/n(d) \\ & \mathbf{Z}/n[-2d], \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

où t est la flèche

$$t : Rf'_{V!}\mathbf{Z}/n(d) \to \sigma_{\geq 2d} Rf'_V\mathbf{Z}/n(d) = H^{2d}(Rf'_V\mathbf{Z}/n(d))[-2d] \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbf{Z}/n[-2d].$$

Posons $f'_0 = f$ et construisons, par récurrence, $4d$ diagrammes (2.14.1) 563

$$\begin{tikzcd} U'_{i+1} \arrow[r] \arrow[dr, "f'_{i+1}"'] & f_i'^{-1}(V'_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d] & U'_i \arrow[d, "f'_i"] \\ & V'_{i+1} \arrow[r] & V'_i \end{tikzcd}$$

vérifiant 2.14. Posons $V = V'_{4d}$ et $U_i = U'_i \times_{V'_i} V$. On obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd} U_{4d} \arrow[r] \arrow[drrr, "f_{4d}"] & \cdots \arrow[r] & U_1 \arrow[r] \arrow[dr, "f_1"] & U_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[d, "f"] \\ & & & V \arrow[r, dash] & S, \end{tikzcd}$$

avec $U_0 = f^{-1}(V)$, tel que les flèches

$$R^i f_{k+1!}\mathbf{Z}/n(d) \longrightarrow R^i f_{k!}\mathbf{Z}/n(d)$$

soient nulles (pour $i < 2d$) et que la flèche

$$\mathrm{Tr} : R^{2d} f_{4d!}\mathbf{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbf{Z}/n$$

soit un isomorphisme. D'après 2.14.2, le corollaire est vérifié pour $U = U_{4d}$.

Nous sommes prêts, maintenant, à prouver 2.14 par récurrence sur d. Le cas $d = 0$ est trivial et le cas $d = 1$ n'est autre que 1.6.9. Supposons donc $d \geq 2$.

Le problème étant de nature locale sur X et S, on peut supposer que f admet une factorisation $f = gh$, avec g et h lisses compactifiables, purement de dimension d' et d'' et que $d', d'' < d = d' + d''$. Appliquons 2.14.4 à g et aux morphismes déduits de h par changement de base, de façon à obtenir un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h'_0"'] & f^{-1}W \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & X \arrow[d, "h"] \\ V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "g'_0"'] & g^{-1}W \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & W \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

tel que les morphismes (XVII 6.2.7.3) admettent des factorisations 564

$$Rh'_{0!}\mathbf{Z}/n(d'') \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbf{Z}/n[-2d''] \xrightarrow{\varphi} Rh_{0!}\mathbf{Z}/n(d'')$$
$$Rg'_{0!}\mathbf{Z}/n(d') \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbf{Z}/n[-2d'] \xrightarrow{\Psi} Rg_{0!}\mathbf{Z}/n(d')$$

et que $\mathrm{Tr}_{h'_0}$ et $\mathrm{Tr}_{g'_0}$ soient des isomorphismes.

Soient h_1 et h'_1 les morphismes déduits de h_0 et h'_0 par le changement de base V, et soit $f' = g'_0 h'_1$, $f_W = g_0 h_0$.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Rf'\mathbf{Z}/n(d) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & Rf_{W!}\mathbf{Z}/n(d) \arrow[d, equal] \\
Rg'_{0!}Rh'_1\mathbf{Z}/n(d) \arrow[r] & Rg_{0!}Rh'_{0!}\mathbf{Z}/n(d) \arrow[r] & Rg_{0!}Rh_{0!}\mathbf{Z}/n(d),
\end{tikzcd}$$

ainsi que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Rg'_{0!}Rh'_{1!}\mathbf{Z}/n(d) \arrow[d, equal] \arrow[ddd, bend right] & & \\
Rg'_{0!}v^*Rh'_{0!}\mathbf{Z}/n(d) \arrow[r, "Rg'_{0!}v^*(t)(d')"'] \arrow[dd] & Rg'_{0!}\mathbf{Z}/n(d')[-2d''] \arrow[d, "t[-2d'']"] & \\
 & \mathbf{Z}/n[-2d] \arrow[d, "\Psi[-2d'']"] & \\
Rg_{0!}Rh'_{0!}\mathbf{Z}/n(d) \arrow[r, "Rg_{0!}(t)(d')"'] \arrow[rr, bend right] & Rg_{0!}\mathbf{Z}/n(d')[-2d''] \arrow[r, "Rg_{0!}(\varphi)(d')"'] & Rg_{0!}Rh_{0!}\mathbf{Z}/n(d)
\end{tikzcd}$$

565 Pour le diagramme

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r] \arrow[dr, "f'"] & f^{-1}W \arrow[r] \arrow[d, "f_W"] & X \arrow[d, "f"] \\
 & W \arrow[r, dash] & S,
\end{tikzcd}$$

la flèche canonique de $Rf'_!\mathbf{Z}/n(d)$ dans $Rf_W\mathbf{Z}/n(d)$ se factorise donc par $\mathbf{Z}/n[-2d]$; les flèches de $R^i f'_!\mathbf{Z}/n(d)$ dans $R^i f_W \mathbf{Z}/n(d)$ sont donc nulles pour $i < 2d$. Enfin, $\mathrm{Tr}_{f'}$ est un isomorphisme en tant que composé des isomorphismes $\mathrm{Tr}_{g'_0}$ et $R^{2d'} g'_{0!}\,\mathrm{Tr}_{h'_1}$.

Ceci achève la démonstration de 2.14.

3. Le théorème de dualité globale

566

3.1. Le foncteur $Rf^!$. Nous aurons besoin d'une variante des résolutions flasques canoniques.

Lemme 3.1.1. Soit X un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé). Le foncteur $\varinjlim$ induit une équivalence entre la catégorie des Ind-objets de la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes abéliens) constructibles et la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes Ind-finis, resp. abéliens de torsion).

Résulte de IX 2.7.2 et IX 2.7.3.

3.1.2. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau abélien de torsion sur un schéma X, limite inductive filtrante de faisceaux constructibles $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$, et X_0 un ensemble conservatif de points de X. On définit la résolution flasque canonique modifiée de $\mathscr{F}$ par la formule

$$C^*_\ell(\mathscr{F}) = \varinjlim_i C^*(\mathscr{F}_i),$$

où les $C^*(\mathscr{F}_i)$ sont les résolutions flasques canoniques de XVII 4.2.2. D'après 3.1.1, pour X cohérent, cette définition ne dépend pas du choix des $\mathscr{F}_i$. Elle commute de plus à la localisation ; ce fait permet de définir $C^*_\ell(\mathscr{F})$ par globalisation pour $\mathscr{F}$ faisceau de torsion sur un schéma X quelconque, non nécessairement cohérent.

Le complexe $C^*_\ell(\mathscr{F})$ est une résolution de $\mathscr{F}$, fonctorielle en $\mathscr{F}$, dont la formation commute à la localisation et aux limites inductives filtrantes ; les foncteurs C^n_ℓ sont exacts.

Il en résulte que pour un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur X, les foncteurs C^n_ℓ transforment $\mathscr{A}$-Modules en $\mathscr{A}$-Modules ; ils transforment de même faisceaux de torsion en faisceaux de torsion. Il est bien connu que

Lemme 3.1.3. *Soit $\mathscr{A}$ une $\mathscr{U}$-catégorie abélienne ayant un petit ensemble générateur et telle que les limites inductives indexées par un petit ensemble ordonné filtrant soient représentables dans $\mathscr{A}$, et soient exactes. Pour qu'un foncteur F de $\mathscr{A}^\circ$ dans (Ens) soit représentable, il faut et il suffit qu'il transforme petites limites inductives (quelconques) en limites projectives.* 567

Cf. p. ex. SGA 4 I 8.12.5, où on ne suppose pas $\mathscr{A}$ abélienne ni les $\varinjlim$ filtrantes exactes.

On appliquera ce lemme à la catégorie $\mathrm{Mod}(X, \mathscr{A})$ des faisceaux de modules sur un site annelé $(X, \mathscr{A})$. Dans ce cas particulier, si le foncteur F est représenté par le faisceau $\mathscr{F}$, on a

$$\mathscr{F}(U) = F(\mathscr{A}_U). \tag{3.1.3.1}$$

Cette description de $\mathscr{F}$ permet une vérification directe de 3.1.3 dans le cas considéré.

Rappelons que si $f : X \to S$ est un morphisme compactifiable (XVII 3.2.), alors S est quasi-compact quasi-séparé (sic), et la dimension des fibres de f est bornée.

Théorème 3.1.4. *Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable et $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S. Alors, le foncteur*

$$Rf_! : D(X, f^*\mathscr{A}) \longrightarrow D(S, \mathscr{A}) \tag{3.1.4.1}$$

admet un adjoint à droite partiel

$$Rf^! : D^+(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D^+(X, f^*\mathscr{A}) : \tag{3.1.4.2}$$

pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(X, f^*\mathscr{A})$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(S, \mathscr{A})$, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}(Rf_!K, L) \simeq \mathrm{Hom}(K, Rf^!L). \tag{3.1.4.3}$$

Muni du morphisme de translation rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Rf_!(K[1]), L) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(K[1], Rf^!L) \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathrm{Hom}(K, (Rf^!L)[-1]) \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}((Rf_!K)[1], L) \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathrm{Hom}(Rf_!K, L[-1]) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim", "\mathrm{adj.}"'] & \mathrm{Hom}(K, Rf^!(L[-1])),
\end{tikzcd} \tag{3.1.4.4}$$

ce foncteur $Rf^!$ est un foncteur triangulé. 568

N.B. La notation $Rf^!$ est abusive en ce que $Rf^!$ n'est en général pas le dérivé d'un foncteur $f^!$.

Démonstration Soit d un entier tel que toute fibre de f soit de dimension $< d$, et choisissons une compactification

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ S. & \end{tikzcd}$$

Si K est un complexe de $f^*\mathscr{A}$-Modules sur X, on a

$$Rf_!K \simeq R\overline{f}_*(j_!K).$$

Pour tout faisceau F sur X, les composants F^i du complexe $\tau_{\leq 2d}C^*_\ell j_!F$ vérifient

$$R^k\overline{f}_*F^i = 0 \quad \text{pour} \quad k > 0. \tag{3.1.4.5}$$

En effet, pour $i \neq 2d$, F^i est limite inductive de faisceaux flasques, et pour $i = 2d$ et $k > 0$, on a (XVII 5.2.8.1)

$$R^k\overline{f}_*F^{2d} = R^{k+2d}f_!F = 0.$$

Le complexe simple associé au double complexe résolution flasque canonique modifiée tronquée de K est une résolution de K. En vertu de (3.1.4.5), on a donc (notation de XVII 1.1.15)

$$R\overline{f}_*(j_!K) \xleftarrow{\sim} \overline{f}_*\tau''_{\leq 2d}C^*_\ell j_!K. \tag{3.1.4.6}$$

569 Désignons par $f_!^\bullet$ le foncteur des faisceaux de modules sur X dans les complexes de faisceaux sur S défini par

$$f_!^\bullet(F) = \overline{f}_*\tau_{\leq 2d}C^*_\ell j_!F. \tag{3.1.4.7}$$

Lemme 3.1.4.8. (i) Les foncteurs $f_!^i$ sont exacts et commutent aux limites inductives filtrantes ; on a $f_!^i = 0$ pour $i \notin [0, 2d]$.

(ii) Le foncteur $f_!^\bullet$, étant borné à composantes exactes, se dérive (XVII 1.2.10) trivialement en $Rf_!^\bullet$ ou simplement $f_!^\bullet : D(X, f^*\mathscr{A}) \to D(S, \mathscr{A})$. La flèche (3.1.4.6) est un isomorphisme de foncteurs

$$Rf_!^\bullet \xrightarrow{\sim} Rf_!.$$

Les foncteurs C^i_ℓ sont exacts et commutent aux limites inductives filtrantes (3.1.2). Ils transforment tout faisceau en un faisceau acyclique. Les foncteurs $\overline{f}_*$ et $j_!$ commutent aux limites inductives filtrantes. On en déduit que

a) les foncteurs $\overline{f}_*C^i_\ell j_!$, donc aussi les foncteurs $f_!^i$, commutent aux limites inductives filtrantes ;
b) pour $i < 2d$, les foncteurs $f_!^i = \overline{f}_*C^i_\ell j_!$ sont exacts. Pour $i = 2d$, on vérifie que $f_!^i$ est exact par (3.1.4.5).

Les assertions restantes de 3.1.4.8 sont triviales.

Remarque 3.1.4.9. La définition de $f_!^\bullet$ est indépendante du faisceau d'anneau $\mathscr{A}$, et garde un sens pour tout faisceau abélien. L'assertion 3.1.4.8 (i) reste valable dans les catégories de faisceaux abéliens de torsion sur X et S.

D'après 3.1.4.8 et 3.1.3, le foncteur

$$f_!^i \,:\, \mathrm{Mod}(X, f^*\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A})$$

a un adjoint à droite $f_i^!$; puisque $f_!^i$ est exact, $f_i^!$ transforme injectifs en injectifs.

Avec la convention de signe (XVII 1.1.12), les foncteurs $f_i^!$ forment un complexe de foncteurs exacts à gauche, nul en degré cohomologique $n \notin [-2d, 0]$:

$$f_\cdot^! \,:\, \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A}) \longrightarrow C^b(X, f^*\mathscr{A}). \tag{3.1.4.10}$$

Le foncteur $f_\cdot^!$ se dérive (XVII 1.2.10) en un foncteur triangulé 570

$$Rf^! \,:\, D^+(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D^+(X, f^*\mathscr{A}), \tag{3.1.4.11}$$

adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ ($= Rf_!^\cdot = Lf_!^\cdot$) (« formule triviale de dualité »). Plus précisément, si $I \in \mathrm{Ob}\, C^+(S, \mathscr{A})$ est un complexe de faisceaux injectifs de $\mathscr{A}$-modules, les $\mathscr{A}$-modules $f_i^! I^n$ sont injectifs, et on dispose d'un isomorphisme de triples complexes (XVII 1.1.12)

$$\mathrm{Hom}^\cdot(f_!^\cdot K, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\cdot(K, f_\cdot^! I). \tag{3.1.4.12}$$

Passant au H^0 du complexe simple associé (calculé par produits), on obtient l'énoncé d'adjonction. On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité (3.1.4.4).

Remarque 3.1.5. Supposons que le foncteur $Rf^!$ soit d'amplitude cohomologique finie. D'après XVII 1.2.10 le foncteur $f_\cdot^!$ admet alors un dérivé

$$Rf^! \,:\, D(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D(X, \mathscr{A}). \tag{3.1.5.1}$$

Ce dérivé est encore adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ (3.1.4.1). En effet, on a

$$\mathrm{Hom}_{D(S)}(Rf_! K, L) \simeq \varinjlim_{L \xrightarrow{\sim} L'} \mathrm{Hom}_{K(S)}(f_!^\cdot K, L') \simeq \varinjlim_{\substack{K' \xrightarrow{\sim} K \\ L \xrightarrow{\sim} L'}} \mathrm{Hom}_{K(S)}(f_!^\cdot K', L')$$

$$\mathrm{Hom}_{D(X)}(K, Rf^! L) \simeq \varinjlim_{K' \xrightarrow{\sim} K} \mathrm{Hom}_{K(X)}(K', Rf^! L) \simeq \varinjlim_{\substack{K' \xrightarrow{\sim} K \\ L \xrightarrow{\sim} L'}} \mathrm{Hom}_{K(X)}(K', f_\cdot^! L')$$

et, par adjonction,

$$\mathrm{Hom}_{K(S)}(f_!^\cdot K', L') = H^0 \,\mathrm{Hom}(f_!^\cdot K', L') \simeq H^0 \,\mathrm{Hom}(K', f_\cdot^! L') = \mathrm{Hom}_{K(X)}(K', L').$$

Définition 3.1.6. Le foncteur triangulé

$$Rf^! \,:\, D^+(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D^+(X, f^*\mathscr{A})$$

(ou, sous les hypothèses de 3.1.5, 571

$$Rf^! \,:\, D(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D(X, f^*\mathscr{A})),$$

adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ (3.1.4.1) s'appelle le foncteur image inverse extraordinaire.

Proposition 3.1.7. Supposons le morphisme compactifiable $f : X \to S$ de dimension relative $\leq d$.

(i) Si $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(S, \mathscr{A})$ vérifie $H^i(L) = 0$ pour $i \leq k$, alors $H^i Rf^! L = 0$ pour $i \leq k - 2d$.

(ii) Pour $L \in \mathrm{Ob}\, D^b(S, \mathscr{A})$, on a

$$\dim \mathrm{inj}(Rf^! L) \leq \dim \mathrm{inj}(L).$$

Le foncteur $Rf^!$ est le dérivé droit de $f^!_{\cdot} : \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A}) \to C^b\,\mathrm{Mod}(X, f^*\mathscr{A})$. L'assertion (i) résulte de ce que $(f^!_{\cdot})^i = 0$ pour $i < -2d$, et l'assertion (ii) résulte de ce que $(f^!_{\cdot})^i = 0$ pour $i > 0$, et que les foncteurs $f^!_i$ transforment injectif en injectif.

Proposition 3.1.8. Soit $f : X \to S$ un morphisme compactifiable quasi-fini.

(i) Le foncteur $f_! : \mathrm{Mod}(X, f^*\mathscr{A}) \to \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A})$ admet un adjoint à droite $f^! : \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A}) \to \mathrm{Mod}(X, f^*\mathscr{A})$, et $Rf^!$ est le foncteur dérivé du foncteur $f^!$.

(ii) Si f est une immersion fermée, alors $f^!$ est le foncteur « sections à support dans X ».

(iii) Si f est étale, alors $f^!$ s'identifie au foncteur f^*, avec

$$\mathrm{Tr}_f : f_! f^* F \longrightarrow F$$

comme morphisme d'adjonction.

L'assertion (i) résulte aussitôt du cas particulier $d = 0$ de la démonstration de 3.1.4 : on a $f_!^{\cdot} = f_!$ et $f^!_{\cdot} = f^!$. De façon équivalente, l'existence d'un foncteur adjoint $f^!$
572 résulte de 3.1.3 et de ce que $f_!$ est exact et commute aux limites inductives filtrantes ; l'adjonction $(f_!, Rf^!)$ est une « formule triviale de dualité ».

L'assertion (ii) est claire, et (iii) est XVII 6.2.11.

3.1.9. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, et annelons X par l'image réciproque de $\mathscr{A}$. Soient $K \in \mathrm{Ob}\,D^-(X, f^*\mathscr{A})$, $L \in \mathrm{Ob}\,D^+(X, f^*\mathscr{A})$ et représentons L par un complexe borné inférieurement de faisceaux injectifs, de sorte que

$$R\,\mathscr{H}om(K, L) \simeq \mathscr{H}om(K, L).$$

Le complexe $\mathscr{H}om(K, L)$ est à composantes flasques, et donc

$$Rf_* R\,\mathscr{H}om(K, L) \simeq f_*\,\mathscr{H}om(K, L). \tag{3.1.9.1}$$

Choisissons une compactification de f et un entier d comme dans la démonstration de 3.1.4, d'où un foncteur $f_!^{\cdot}$ (3.1.4.7).

$$\begin{tikzcd}
X_V \arrow[rr, "k_X"] \arrow[dr, hook, "j_V"'] \arrow[dd, "f_V"'] & & X \arrow[dr, hook, "j"] \arrow[dd, "f"] & \\
& \overline{X}_V \arrow[rr, "k_{\overline{X}}"] \arrow[dl, "\overline{f}_V"] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
V \arrow[rr, "k"] & & S. &
\end{tikzcd} \tag{3.1.9.2}$$

Pour tout $V \in \mathrm{Ob}\,S_{\mathrm{et}}$, on a un isomorphisme[122]

$$k^* f_!^{\cdot} \xrightarrow{\sim} f_{V!}^{\cdot} k_X^*, \tag{3.1.9.3}$$

de sorte que

$$\mathscr{H}om^{\cdot}(f_!^{\cdot} K, f_!^{\cdot} L)(V) \simeq \mathscr{H}om^{\cdot}(f_{V!}^{\cdot}(k_X^* K), f_{V!}^{\cdot}(k_X^* L)).$$

[122]N.D.E. : Ce morphisme est donné par la construction de XVII 4.2.6, mais il n'y a aucune raison que ce soit un isomorphisme si on n'a pas préalablement fait des choix cohérents de points sur les topos considérés. Pour que ce soit le cas, il faut que le carré qui intervient dans XVII 4.2.6 soit en quelque sorte cartésien. Plus précisément, il convient ici de fixer une famille de points $(p)_{p\in P}$ du topos S_{et} et pour tout $V \in \mathrm{Ob}\,S_{\mathrm{et}}$, on considère la résolution flasque canonique modifiée utilisant la famille de points associés par la correspondance de IV 6.7 aux couples (p, ξ) où $p \in P$ et $\xi \in V_p$.

La fonctorialité de $f^{\boldsymbol{\cdot}}_{V!}$ nous fournit

$$\mathscr{H}om^{\boldsymbol{\cdot}}(K,L)(X_V) = \mathrm{Hom}^{\boldsymbol{\cdot}}(k_X^*K, k_X^*L) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\boldsymbol{\cdot}}(f^{\boldsymbol{\cdot}}_{V!}(k_X^*K), f^{\boldsymbol{\cdot}}_{V!}(k_X^*L)),$$

d'où une flèche, au niveau des complexes,

$$f_*\,\mathscr{H}om^{\boldsymbol{\cdot}}(K,L) \longrightarrow \mathscr{H}om^{\boldsymbol{\cdot}}(f^{\boldsymbol{\cdot}}_!K, f^{\boldsymbol{\cdot}}_!L). \tag{3.1.9.4}$$

D'après (3.1.9.1), cette flèche se dérive en 573

$$Rf_*R\,\mathscr{H}om(K,L) \longrightarrow R\,\mathscr{H}om(Rf_!K, Rf_!L). \tag{3.1.9.5}$$

Soient maintenant $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X,\mathscr{A})$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(S,\mathscr{A})$. La flèche d'adjonction de $Rf_!Rf^!L$ dans L et (3.1.9.4) fournissent une flèche composée

$$Rf_*R\,\mathscr{H}om(K,Rf^!L) \longrightarrow R\,\mathscr{H}om(Rf_!K, Rf_!Rf^!L) \longrightarrow R\,\mathscr{H}om(Rf_!K, L),$$

forme locale sur S de l'isomorphisme d'adjonction :

$$Rf_*R\,\mathscr{H}om(K,Rf^!L) \longrightarrow R\,\mathscr{H}om(Rf_!K, L). \tag{3.1.9.6}$$

Proposition 3.1.10. La flèche 3.1.9.6 est un isomorphisme.

Soit $V \in \mathrm{Ob}\, S_{\mathrm{et}}$ et reprenons les notations de (3.1.9.2). L'isomorphisme (« de transitivité »)

$$k_!Rf_{V!} \simeq Rf_!k_{X!},$$

dont l'existence est la racine de la théorie du foncteur $Rf_!$, se transpose en un isomorphisme de localisation (3.1.8. (iii))

$$k_X^*Rf^! \simeq Rf_V^!k^*, \tag{3.1.10.1}$$

représenté au niveau des complexes par un morphisme

$$k_X^*f^!_{\boldsymbol{\cdot}} \longrightarrow f^!_{V\boldsymbol{\cdot}}k^*.$$

Pour vérifier que (3.1.9.6) est un isomorphisme, il suffit de vérifier que pour tout $V \in \mathrm{Ob}\, S_{\mathrm{et}}$, (3.1.9.6) induit un isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(k_X^*K, k_X^*Rf^!L) &\simeq H^0(V, Rf_*R\,\mathscr{H}om(K,Rf^!L)) \\ &\longrightarrow H^0(V, R\,\mathrm{Hom}(Rf_!K,L)) \simeq \mathscr{H}om(k^*Rf_!K, k^*L)\end{aligned} \tag{3.1.10.2}$$

Pour $V = X$, ceci n'est autre que (3.1.4.3). Le cas général en résulte via la compatibilité suivante, que le rédacteur n'a pas vérifiée :

Lemme 3.1.10.3. Le diagramme 574

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(k_X^*K, k_X^*Rf^!L) \arrow[r, "(3.1.10.2)"] \arrow[d, "\wr"', "(3.1.10.1)"] & \mathrm{Hom}(k^*Rf_!K, k^*L) \arrow[d, "\wr"', "\text{(localisation)}"] \\
\mathrm{Hom}(k_X^*, K, Rf_V^!k_X^*L) \arrow[r, leftrightarrow, "(3.1.4.3\ \mathit{sur}\ V)", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(Rf_!k^*K, k^*L)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

3.1.11. Soient un carré cartésien

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
S' \arrow[r, "g"] & S,
\end{tikzcd}
\tag{3.1.11.1}
$$

avec f compactifiable, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathscr{B}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S' et M un complexe de $(f^*\mathscr{A}, \mathscr{B})$-bimodules, borné supérieurement. On dispose alors, au niveau des complexes, d'un morphisme de foncteurs en K ($K \in \operatorname{Ob} C(X, f^*\mathscr{A})$)

$$M \otimes_{\mathscr{A}} g^* f_!^{\cdot} K \longrightarrow f'^{\cdot}_!(f'^* M \otimes_{\mathscr{A}} g'^* K), \tag{3.1.11.2}$$

qui se transpose en un morphisme de foncteurs en L ($L \in \operatorname{Ob} C(S', \mathscr{B})$)

$$g'_* \mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(f'^* M, f'^!_{\cdot} L) \longrightarrow f^!_{\cdot} g_* \mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(M, L). \tag{3.1.11.3}$$

Ce morphisme se dérive en morphisme de foncteurs en L, de $D^+(S', \mathscr{B})$ dans $D^+(X, f^*\mathscr{A})$:

$$Rg'_* R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(f'^* M, Rf'^! L) \longrightarrow Rf^! Rg_* R\operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(M, L), \tag{3.1.11.4}$$

qui rend commutatif le diagramme suivant, où $K \in \operatorname{Ob} D^-(X, f^*\mathscr{A})$ et $L \in \operatorname{Ob} D^+(S', \mathscr{B})$:

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(K, Rg'_* R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(f'^*M, Rf'^!L)) \arrow[r, "①"] \arrow[d, leftrightarrow] & \operatorname{Hom}(K, Rf^! Rg_* R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(M,L)) \arrow[r, leftrightarrow, "adj"'] & \operatorname{Hom}(Rf_!K, Rg_* R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(M,L)) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\operatorname{Hom}(g'^*K, R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(f'^*M, Rf'^!L)) \arrow[d, leftrightarrow] & & \operatorname{Hom}(g^* Rf_! K, R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(M,L)) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\operatorname{Hom}(f'^*M \otimes_{\mathscr{A}} g'^*K, Rf'^!L) \arrow[r, leftrightarrow, "adj"'] & \operatorname{Hom}(Rf'^{\cdot}_!(f'^*M \otimes^{L}_{\mathscr{A}} g'^*K), L) \arrow[r, "②"] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(M \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{A}} g^* Rf_! K, L).
\end{tikzcd}
$$

575 Dans ce diagramme, ② (déduit de la flèche XVII 5.2.2.1) est un isomorphisme (XVII 5.2.6). La flèche ① est donc un isomorphisme quel que soit K, et ceci implique que (3.1.11.4) soit un isomorphisme.

Le théorème de changement de base pour un morphisme propre se transpose donc en la

Proposition 3.1.12. La flèche (3.1.11.4) est un isomorphisme.

On appelle cet isomorphisme l'isomorphisme d'induction.

En voici 3 cas particuliers.

Corollaire 3.1.12.1. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux faisceaux d'anneaux de torsion sur S, et $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un homomorphisme. Désignons par ρ la restriction des scalaires de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{A}$. On a alors, pour $K \in \operatorname{Ob} D^+(S, \mathscr{B})$

$$\rho R f^! K \xrightarrow{\sim} R f^!(\rho K).$$

Il suffit dans (3.1.11.3) de prendre $S = S'$, $X = X'$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}$, $M = \mathscr{B}$.

On voit donc que le faisceau d'anneaux joue un rôle bidon dans la construction de $Rf^!$.

Corollaire 3.1.12.2. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S et $K \in \operatorname{Ob} D^-(S, \mathscr{A})$, $L \in \operatorname{Ob} D^+(S, \mathscr{A})$. On a la formule d'induction

$$R\mathscr{H}om(f^*K, Rf^!L) \xrightarrow{\sim} Rf^!R\mathscr{H}om(K, L)$$
$$\text{(faire } S = S', X = X'\text{)}.$$

Corollaire 3.1.12.3. Pour tout carré 3.1.11, et tout $L \in \operatorname{Ob} D^+(S', \mathscr{A})$, on a

$$Rg'_*Rf'^!L \xrightarrow{\sim} Rf^!Rg_*L$$
$$\text{(faire } \mathscr{B} = f^*\mathscr{A} = M\text{)}.$$

3.1.13. Pour un composé gh de morphismes S-compactifiables 576

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$$

l'isomorphisme de composition

$$c_{g,h} : Rg_!Rh_! \xrightarrow{\sim} R(gh)_!$$

se transpose en un morphisme de composition[123]

$$c^!_{g,h} : Rh^!Rg^! \xrightarrow{\sim} R(gh)^! \tag{3.1.13.1}$$

vérifiant la condition de cocycle habituelle pour un composé triple. En d'autres termes, les catégories $D^+(X, f^*\mathscr{A})$ forment les fibres d'une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie d'objets les S-schémas $f : X \to S$, ayant pour flèches les morphismes S-compactifiables, les foncteurs image directe (resp. image réciproque) étant les foncteurs $Rf_!$ (resp. $Rf^!$). Pour tout carré commutatif de morphismes compactifiables,

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g'"'] & S, \end{tikzcd}$$

on dispose donc d'un morphisme de cochangement de base (XVII 2.1.3)

$$ch^! : Rf'_!Rg^! \longrightarrow Rg'^!Rf_!. \tag{3.1.13.2}$$

3.1.14. Soit un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S, \end{tikzcd}$$

avec f compactifiable, et soit $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S. On annèle S', X et X' par les images réciproques de $\mathscr{A}$, encore désignées par $\mathscr{A}$ par abus de notation. 577
L'isomorphisme de changement de base

$$g^*Rf_! \xrightarrow{\sim} Rf'_!g'^* \tag{3.1.14.1}$$

[123]N.D.E. : Le morphisme transposé va en réalité dans l'autre sens, mais cela ne pose pas de problème puisque c'est un isomorphisme.

permet de considérer les catégories $D(S,\mathscr{A})$, $D(X,\mathscr{A})$, $D(S',\mathscr{A})$ et $D(X',\mathscr{A})$ comme les fibres d'une catégorie cofibrée sur la catégorie du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X & X \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[u, leftarrow] & X \arrow[l] \end{tikzcd}$$

les foncteurs images directes étant les foncteurs $Rf_!$, $Rf'_!$, g^* et g'^* (sic). Lorsqu'on se restreint aux catégories D^+, on obtient même une catégorie fibrée et cofibrée sur ce diagramme, les foncteurs images directes étant les foncteurs $Rf^!$, $Rf'^!$, Rg_* et Rg'_* (sic). On en déduit

a) un « isomorphisme de transitivité » (sic) pour les foncteurs « images inverses »

$$Rg_*Rf^! \xrightarrow{\sim} Rf^!Rg_*$$

déjà obtenu en 3.1.12.3 (avec la même définition par transposition de (3.1.14.1).

b) un « morphisme de changement de base » (XVII 2.1.3)

$$g'^*Rf^! \longrightarrow Rf'^!g^* \tag{3.1.14.2}$$

qui, d'après loc. cit., peut se décrire des deux façons suivantes :

a) par adjonction, se donner un morphisme (3.1.14.2) revient à se donner un morphisme

$$Rf'_!g'^*Rf^! \longrightarrow g^*.$$

Le théorème de changement de base fournit un tel morphisme comme composé

$$Rf'_!g'^*Rf^! \xleftarrow{\sim} g^*Rf_!Rf^! \xrightarrow{g^**\text{adj.}} g^*.$$

578 b) par adjonction, se donner un morphisme (3.1.14.2) revient à se donner un morphisme

$$Rf^! \longrightarrow Rg'_*Rf'^!g^*.$$

L'isomorphisme (3.1.12.3) fournit un tel morphisme comme composé

$$Rf^! \xrightarrow[Rf^!*\text{adj.}]{} Rf^!Rg_*g^* \xleftarrow{\sim} Rg'_*Rf'^!g^*.$$

D'après leurs interprétations en terme de catégorie fibrée et cofibrée, il est clair que les morphismes (3.1.12.3), (3.1.13.2) et (3.1.14.2) vérifient chacun deux compatibilités du type XII 4.4 pour f ou g composé de deux morphismes[124].

Les résultats de topologie générale qui suivent seront utilisés au *n*° suivant.

3.1.15. Soit $f : X \to S$ un morphisme de sites. Désignons par $\Gamma(f)$ le site suivant

a) La catégorie $\Gamma(f)$ est la catégorie des triples (U,V,φ) avec

$$U \in \mathrm{Ob}(X), V \in \mathrm{Ob}\, S, \quad \varphi \in \mathrm{Hom}(U, f^*V).$$

b) Une famille de morphismes $(u_i, v_i) : (U_i, V_i, \varphi_i) \to (U,V,\varphi)$ est couvrante si, dans X, les morphismes $u_i : U_i \to U$ couvrent U.

On a alors

. Le foncteur de $\Gamma(f)$ dans X donné par

$$(U,V,\varphi) \longmapsto U$$

est une équivalence de sites $\gamma : X \to \Gamma(f)$.

[124]N.D.E. : Ces constructions peuvent aussi être interprétées dans le contexte des structures d'échanges et des foncteurs croisés, cf. [1].

. Le foncteur f_Γ^* de S dans $\Gamma(f)$

$$V \longmapsto (f^*V, V, \mathrm{Id}_{f^*V})$$

est un morphisme de site, noté $f_\Gamma : \Gamma(f) \to S$, ou simplement f par abus de notation. Il vérifie $f_\Gamma\gamma \simeq f$. Le foncteur f_Γ^* admet un adjoint à gauche $f_{\Gamma\cdot}$:

$$f_{\Gamma\cdot} : (U, V, \varphi) \longmapsto V.$$

Le foncteur $f_{\Gamma\cdot}$ est donc un comorphisme de site de $\Gamma(f)$ dans S[125], et définit le même 579
morphisme de topos que le morphisme de site f_Γ.

(3.1.15.3)
$$\begin{tikzcd} X & & \Gamma(f) \arrow[ll, "\approx"'] \arrow[dl, shift left, "f_{\Gamma\cdot}"] \\ & S \arrow[ul, "f^*"] \arrow[ur, shift left, "f_\Gamma^*"] & \end{tikzcd} .$$

On en déduit la règle suivante pour calculer l'image inverse d'un faisceau[126]

. Soient $\mathscr{F}$ un faisceau sur S, $f_\Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathscr{F}$ le préfaisceau sur $\Gamma(f)$ donné par

$$f_\Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathscr{F}(U, V, \varphi) = \mathscr{F}(V),$$

et $af_\Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathscr{F}$ le faisceau engendré. Alors

$$f^*\mathscr{F}(U) \simeq af_\Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathscr{F}(U, V, \varphi).$$

3.1.16. Soient $f : X \to S$ un morphisme de sites, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur S, $\mathscr{B}$ un faisceau d'anneaux sur X et d un entier. Soit un objet K du type suivant

. K associe à chaque objet U de X un complexe $K(U)$ de $(\mathscr{A}, f_{|U*}(\mathscr{B}|U))$-modules sur S, nul en degré $> d$, et $K(U)$ est un foncteur covariant de U.

Pour tout faisceau de $\mathscr{A}$-modules $\mathscr{F}$ sur S, on désignera par $K^!\mathscr{F}$ le complexe de faisceaux sur X engendré par le complexe de préfaisceaux de $\mathscr{B}$-modules :

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K(U), \mathscr{F}).$$

On désignera par $RK^!$ le dérivé de $K^!$

$$RK^! : D^+(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D^+(X, \mathscr{B}).$$

Si $U : K_1 \to K_2$ est un morphisme d'objets (3.1.11.1), alors U induit des morphismes de 580
foncteurs

$${}^t u : K_2^! \longrightarrow K_1^! \quad \text{et} \quad RK_2^! \longrightarrow RK_1^!.$$

Sous les hypothèses précédentes, on a

Proposition 3.1.17. (i) Pour tout point x de X et pour tout $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(S, \mathscr{A})$, on a, désignant par $V(x)$ la catégorie des voisinages de x

(3.1.17.1)
$$\mathscr{H}^n(RK^!L)_x \simeq \varinjlim_{U \in \mathrm{Ob}\, V(x)} \mathrm{Ext}^n(K(U), L).$$

[125]N.D.E. : Cette terminologie n'étant pas familière, il convient de préciser ici qu'il s'agit des notions intervenant dans III 2 et IV 4.7 (on prendra garde au fait que dans l'édition originale, à l'endroit de cette deuxième référence, des coquilles empêchaient de comprendre dans quel sens allaient au juste les flèches).

[126]N.D.E. : Il est ici fait usage de III 2.3 ou de IV 4.7.3.

(ii) On a donc une suite spectrale

$$E_2^{pq} = \varinjlim_{U \in \mathrm{Ob}\, V(x)} \mathrm{Ext}^p(\mathscr{H}^{-q}(K(U)), L) \Longrightarrow \mathscr{H}^n(K^! L)_x. \tag{3.1.17.2}$$

(iii) Si X^0 est un ensemble conservatif de points de X, et $u : K_1 \to K_2$ un morphisme d'objets (3.1.11.1), alors, pour que

$$^t u : RK_2^! \longrightarrow RK_1^!$$

soit un isomorphisme, il faut et il suffit que pour tout n et tout $x \in X^0$, le morphisme de pro-objets de $\mathrm{Mod}(S, \mathscr{A})$

$$u_x : \text{“}\varprojlim_{U \in \mathrm{Ob}\, V(x)}\text{”}\ \mathscr{H}^n K_1(U) \longrightarrow \text{“}\varprojlim_{U \in \mathrm{Ob}\, V(x)}\text{”}\ \mathscr{H}^n K_2(U) \tag{3.1.17.3}$$

soit un isomorphisme.

Pour prouver (i), on prend pour L un complexe d'injectifs, de sorte que (3.1.17.1) est trivial ; il est clair que (i) ⇒ (ii).

Que la condition (3.1.17.3) de (iii) soit suffisante résulte aussitôt de (3.1.17.2). Nous n'aurons pas à faire usage de ce qu'elle est nécessaire. Si $^t u$ est un isomorphisme, alors, d'après (3.1.16.1), pour tout faisceau injectif I sur $(S, \mathscr{A})$, on a

$$\mathrm{Hom}(\text{“}\varprojlim_{V(x)}\text{”}\, \mathscr{H}^n K_2(U), I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\text{“}\varprojlim_{V(x)}\text{”}\, \mathscr{H}^n K_1(U), I),$$

et on conclut en notant que dans toute catégorie abélienne ayant assez d'injectifs (ici, $\mathrm{Mod}(S, \mathscr{A})$), les foncteurs $\mathrm{Hom}(*, I)$ pour I injectif de $\mathscr{A}$ forment un système conservatif de foncteurs sur $\mathrm{Pro}(\mathscr{A})$.

581 Exemple 3.1.18. Soient $f : X \to S$ un morphisme compactifiable de schémas, et $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S. On annèle X par $f^*\mathscr{A}$. Choisissons un entier d qui majore la dimension des fibres de f, ainsi qu'une compactification de f, et posons (3.1.4.7))

$$K(U) = f_!^{\boldsymbol{\cdot}}((f^*\mathscr{A})_U). \tag{3.1.18.1}$$

D'après la formule (3.1.3.1) pour l'adjoint de $f_!^{\boldsymbol{\cdot}}$, on a un isomorphisme

$$f_{\boldsymbol{\cdot}}^! \simeq K^! : \mathrm{Mod}(S, \mathscr{A}) \longrightarrow C^b\,\mathrm{Mod}(X, f^*\mathscr{A}). \tag{3.1.18.2}$$

et donc

$$Rf^! = RK^! : D^+(S, \mathscr{A}) \longrightarrow D^+(X, f^*\mathscr{A}). \tag{3.1.18.3}$$

Exemple 3.1.19. Soient $f : X \to S$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et d comme en 3.1.16. Soit K un objet du type suivant.

. Pour tout $W = (U, V, \varphi) \in \mathrm{Ob}\, \Gamma(f)$ (3.1.15)[127], $K(W)$ est un complexe de $(\mathscr{A}_V, \varphi_* B_{|U})$-Modules sur V, fonctoriel en W : pour tout morphisme $(u, v) : W_1 = (U_1, V_1, \varphi_1) \to W_2 = (U_2, V_2, \varphi_2)$ il est donné

$$K(u, v) : K(W_1) \longrightarrow v^* K(W_2), \quad \text{i.e.}$$
$$K(u, v) : v_! K(W_1) \longrightarrow K(W_2).$$

[127]N.D.E. : Par définition, φ est un X-morphisme $U \to V \times_S X$. Pour bien comprendre cet exemple, il faut prendre le point de vue équivalent consistant à interpréter φ comme un S-morphisme $\varphi : U \to V$.

À tout objet K (3.1.19.1) est associé un objet K' (3.1.16.1) relatif à $f_\Gamma : \Gamma(f) \to S$, donné par

$$K'(U,V,\varphi) = j_! K(U,V,\varphi) \tag{3.1.19.2}$$

pour j « morphisme d'inclusion » de V dans S. On pose

$$K^! \underset{\text{defn}}{=} K'^! \quad \text{et} \quad RK^! \underset{\text{defn}}{=} RK'^!.$$

Exemple 3.1.20. Avec les notations de 3.1.19, faisons $\mathscr{B} = f^*\mathscr{A}$ et posons

$$K(U,V,\varphi) = \mathscr{A}_V \quad \text{(en degré 0)} \tag{3.1.20.1}$$

D'après 3.1.15.4, on a alors des isomorphismes de foncteurs 582

$$K^! \simeq f^* \tag{3.1.20.2}$$

$$RK^! \simeq f^*. \tag{3.1.20.3}$$

3.2. Dualité de Poincaré.

3.2.1. Soit f un morphisme plat compactifiable purement de dimension relative d (ou, plus généralement, vérifiant la condition $(*)_d$ de 2.9) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ S & \end{tikzcd}.$$

Soit n un entier ≥ 1 inversible sur S et supposons S annelé par un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ tel que $n\mathscr{A} = 0$. D'après 3.1.18, le foncteur $Rf^! : D^+(S,\mathscr{A}) \to D^+(X,\mathscr{A})$ peut se calculer par le procédé de 3.1.16, pour K donné par (3.1.18.1).

Soit K' le foncteur du type (3.1.19.1) qui à $(U,V,\varphi) \in \operatorname{Ob}\Gamma(f)$ associe le complexe de faisceaux $\mathbf{Z}/n(-d)[-2d]$ sur V, réduit à $\mathbf{Z}/n(-d)$ placé en degré $2d$, et soit K'' l'objet du type (3.1.16.1) correspondant (3.1.19.2), relatif à $f : \Gamma(f) \to S$.

On peut regarder K et K'' comme des objets 3.1.16.1 relatif à $\Gamma(f) \to S$. De plus, pour tout $(U,V,\varphi) \in \operatorname{Ob}\Gamma(f)$, le morphisme trace 2.9 définit un morphisme de faisceaux sur V

$$\operatorname{Tr} : R^{2d}\varphi_! \mathbf{Z}/n \longrightarrow \mathbf{Z}/n(-d),$$

d'où, désignant par j le morphisme de V dans S, un morphisme de foncteurs

$$\begin{aligned} K(U) = \overline{f}_* \tau_{\leq 2d} C^*_\ell \mathbf{Z}/n_U &\longrightarrow \mathscr{H}^{2d}(K(U))[-2d] \simeq \\ R^{2d} f_!(\mathbf{Z}/n)_U \simeq j_! R^{2d}\varphi! \,\mathbf{Z}/n &\xrightarrow{\operatorname{Tr}_\varphi} j_!\mathbf{Z}/N(-d) = K''(U,V,\varphi)). \end{aligned} \tag{3.2.1.1}$$

Une forme tordue de 3.1.20 montre que 583

$$RK''^! = Rf^*(d)[2d].$$

D'après 3.1.16, on dispose donc d'un morphisme composé

$$t_f : Rf^*(d)[2d] \simeq RK''^! \longrightarrow Rk^! \simeq Rf^!. \tag{3.2.1.2}$$

Remarque 3.2.2. Si le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie, alors t_f est encore défini en tant que morphisme entre foncteurs de $D(S,\mathscr{A})$ dans $D(X,f^*\mathscr{A})$, (définition en 3.1.5).

On dispose d'une autre méthode pour construire une flèche (3.2.1.2), par adjonction à partir de (2.13.2)

$$\mathrm{Tr}\ :\ Rf_!(f^*L(d)[2d]) \longrightarrow L.$$

Ces deux flèches coïncident :

Lemme 3.2.3. Pour $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(S,\mathscr{A})$ (resp. $D(S,\mathscr{A})$ si le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie), le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Rf_!(f^*L(d)[2d]) \arrow[r, "Rf_!(t_f)"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] & Rf_!Rf^!L \arrow[d, "\text{adjonction}"] \\
L \arrow[r, equal] & L
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Donnons tout d'abord une variante de la définition de t_f, en termes du foncteur $f^!_{\boldsymbol\cdot}$ (3.1.4.10). Soient $U \in \mathrm{Ob}\, X_{\mathrm{et}}$, $V \in \mathrm{Ob}\, S_{\mathrm{et}}$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(U,V)$. Par définition,

$$f^!_{\boldsymbol\cdot}(L)(U) = \mathrm{Hom}(f_!^{\boldsymbol\cdot}\mathscr{A}_U, L)\ ;$$

le morphisme trace définit un morphisme

$$\mathrm{Tr}_f\ :\ f_!^{\boldsymbol\cdot}\mathscr{A}_U \longrightarrow \mathscr{A}_V(-d)[-2d]$$

qui se transpose en

$$t_\varphi\ :\ f^!_{\boldsymbol\cdot}(L)(U) \longleftarrow L(d)[2d](V).$$

584 Les morphismes t_φ définissent un morphisme

$$t_f\ :\ f^*L(d)[2d] \longrightarrow f^!_{\boldsymbol\cdot}L$$

dont on laisse au lecteur le soin de vérifier que, dans la catégorie dérivée, il coïncide avec (3.2.1.2). Cette description montre que les diagrammes suivants sont commutatifs au niveau des complexes, pour L complexe de Modules :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(\mathscr{A}_V, L) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] & \mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(f^*\mathscr{A}_V(d)[2d], f^*L(d)[2d]) \arrow[d, "t_f"] \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\boldsymbol\cdot}f^*\mathscr{A}_V(d)[2d], L) \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(f^*\mathscr{A}_V(d)[2d], f^!_{\boldsymbol\cdot}L).
\end{tikzcd}$$

Par fonctorialité des flèches de ce diagramme en $\mathscr{A}_V$, on déduit que pour tout faisceau, ou tout complexe de faisceaux K, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(K, L) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"] & \mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(f^*K(d)[2d], f^*L(d)[2d]) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(f_!^{\boldsymbol\cdot}f^*K(d)[2d], L) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \mathrm{Hom}^{\boldsymbol\cdot}(f^*K(d)[2d], f^!_{\boldsymbol\cdot}L).
\end{tikzcd}$$

Prenant $K = L$ et $\mathrm{Id}\ :\ L \to L$, on trouve 3.2.3 au niveau des complexes.

Je serais reconnaissant à toute personne ayant compris cette démonstration de me l'expliquer.

3.2.4. On déduit aussitôt de ce lemme et de la définition (3.1.13) des isomorphismes de composition par adjonction que si f est le composé de deux morphismes plats de présentation finie compactifiables et purement de dimension relative d_1 et d_2 : $f = gh$, et si $d = d_1 + d_2$, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} h^*(g^*L(d_2)[2d_2])(d_1)[2d_1]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "t_h * t_g"] & (gh)^*L(d)[2d] \arrow[d, "t_{gh}"] \\ Rh^! \, Rg^! \, L \arrow[r, "\sim"] & R(gh)^! L \end{tikzcd}$$

est commutatif. 585

Théorème 3.2.5 (Dualité de Poincaré). Soient $f : X \to S$ un morphisme lisse compactifiable (S est donc quasi-compact quasi-séparé (sic)), d la fonction localement constante sur X « dimension relative de f », $n \geq 1$ un entier inversible sur S, et $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur S vérifiant $n\mathscr{A} = 0$. Alors le foncteur

$$Rf_! : D(X, f^*\mathscr{A}) \longrightarrow D(S, \mathscr{A})$$

admet pour adjoint à droite le foncteur de $D(S, \mathscr{A})$ dans $D(X, f^*\mathscr{A})$:

$$K \longmapsto f^*K(d)[2d]$$

avec le morphisme (2.13.2)

$$\mathrm{Tr}_f : Rf_! f^* K(d)[2d] \longrightarrow K$$

pour flèche d'adjonction :

$$\mathrm{Hom}(K, f^*L(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Rf_!K, L).$$

Démonstration. On se ramène au cas d constant. D'après la description 3.2.1 de la flèche t_f (3.2.1.2), le théorème 2.14, joint au critère 3.1.17 (iii), implique que la flèche t_f est un isomorphisme (pour $L \in D^+(S, \mathscr{A})$)

$$t_f : f^*L(d)[2d] \xrightarrow{\sim} Rf^!L.$$

En particulier, le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie, donc est défini sur la catégorie dérivée entière. Le morphisme t_f reste un isomorphisme pour $L \in D(S, \mathscr{A})$[128].

Par définition, $Rf^!$ est l'adjoint à droite du foncteur $Rf_!$; d'après 3.2.3, la flèche d'adjonction de $Rf_!Rf^!K$ dans K s'identifie, via t_f, à Tr_f, et ceci achève la démonstration de 3.2.5. 586

On identifiera dorénavant à l'aide de t_f les foncteurs $f^*L(d)[2d]$ et $Rf^!L$.

3.2.6. Soient S le spectre d'un corps algébriquement clos, k, X un schéma compactifiable et lisse sur k purement de dimension relative d, n un entier inversible dans k et F un faisceau de $\mathbf{Z}/n$-modules localement constant constructible, i.e. un « système de coefficients » tué par n. Désignant par $^\vee$ un $\mathbf{Z}/n$-dual, on a

$$R\mathscr{H}om(F, \mathbf{Z}/n) = F^\vee \quad \text{(en degré 0)}.$$

[128] N.D.E. : Plus précisément, le fait que $Rf^!$ soit de dimension cohomologique finie permet de montrer que l'on peut définir le foncteur $Rf^!$ sur la catégorie dérivée entière de façon à ce que pour un complexe $I^\bullet$ de faisceaux injectifs, $Rf^!I^\bullet$ soit le complexe simple associé au complexe double $f^!_\cdot I^\bullet$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le morphisme induit au niveau du n-ième faisceau de cohomologie par t_f évalué sur $I^\bullet$ s'identifie au même morphisme pour un tronqué bête $I^{\geq k}$ pour k assez petit, ce qui permet de conclure.

Cette formule résulte de ce que $\mathbf{Z}/n$ est un $\mathbf{Z}/n$-module injectif. L'isomorphisme 3.2.5.1, ou, plutôt l'isomorphisme qui s'en déduit

$$R\Gamma\ R\mathscr{H}om(F, \mathbf{Z}/n(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(R\Gamma_c(F), \mathbf{Z}/n),$$

s'écrit donc ici

$$R\Gamma(F^\vee(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(R\Gamma_c(F), \mathbf{Z}/n). \tag{3.2.6.1}$$

Passant aux groupes de cohomologie, et utilisant à nouveau que $\mathbf{Z}/n$ est un $\mathbf{Z}/n$-module injectif, ceci donne

$$H^{2d-i}(X, F^\vee(d)) \xrightarrow{\sim} H^i_c(X, F)^\vee, \tag{3.2.6.2}$$

qui est la forme habituelle de la dualité de Poincaré.

Bibliographie

587

[1] J. Ayoub, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I, Astérisque 314 (2007).

[2] B. Conrad, A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups, Journal of the Ramanujan Mathematical Society 17 (2002), p. 1–18.

[3] D. Ferrand, On the non additivity of the trace in derived categories, http ://arxiv.org/abs/math/0506589

[4] J. Giraud, Cohomologie non abélienne. Columbia university.

[5] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III. dans : dix exposés sur la cohomologie des schémas. North Holl. Publ. Co.

[6] A. Grothendieck, Technique de descente et théorème d'existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard : propriétés générales, Séminaire Bourbaki 1961-1962, exposé *n*°236, pages 221-243.

[7] L. Illusie, Complexe cotangent et déformations II. Lecture notes in math. 283. Springer Verlag.

[8] F. Knudsen, D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves. I : Preliminaries on "det" and "Div", Mathematica Scandinavica 39 (1976), p. 19–55.

[9] U. Köpf, Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster. 2. Serie, Heft 7 (1974).

[10] D. Mumford, Geometric invariant theory. Springer-Verlag 1965.

[11] F. Orgogozo, Isomotifs de dimension inférieure ou égale à un, Manuscripta Mathematica 115 (2004), p. 339–360.

[12] M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes. Lecture notes in math. 119. Springer Verlag.

[13] M. Raynaud, Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl. Mémoires de la Société Mathématique de France, tome 39–40 (1974), p. 319–327.

[14] J.P. Serre, Groupes algébriques et corps de classe. Publ. Inst. Math. Nancago. Hermann 1959.

[15] J.L. Verdier, Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Sém. Bourbaki 300. Nov. 1965.

[16] J.L. Verdier, A duality theorem in the etale cohomology of schemes. Woods-hole seminar on alg. geometry. July 1964.

[17] Catégories dérivées, par J.L. Verdier. Notes miméographiées par l'IHÉS.

EXPOSÉ XIX

Cohomologie des préschémas excellents d'égales caractéristiques

M. Artin

Dans cet exposé on développe la théorie de la cohomologie étale pour les préschémas excellents (EGA IV 7.8.1) d'égales caractéristiques, en admettant le théorème de résolution des singularités pour de tels préschémas, sous la forme suivante : 588 589

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma local excellent d'égales caractéristiques, et soit $U \subset X$ un ouvert régulier. Il existe un morphisme propre et birationnel $f : X' \to X$ et une immersion ouverte $U \to X'$ au-dessus de X tel que X' soit régulier et que $Y = X - U$ soit partout de codimension 1, à intersections transversales.

Les démonstrations sont donc valables, « pour l'instant », seulement en caractéristique zéro [4]. On pourrait aussi en déduire des résultats pour les préschémas de caractéristique $p > 0$ dans les basses dimensions [1].

Sous l'hypothèse de résolution, on obtiendra des résultats plus ou moins satisfaisants pour les préschémas d'égales caractéristiques et pour les coefficients premiers à la caractéristique (cf. 3.2, 4.1, 5.1, 6.1). Par contre, on ne connaît presque rien sur la cohomologie des préschémas généraux d'inégales caractéristiques, même en dimension 2, où on dispose de la résolution [2]. Par exemple, on ne connaît le théorème de pureté 2.1 pour aucun anneau complet d'inégales caractéristiques de dimension > 1. Ce résultat, pour les anneaux de séries formelles $k[[x_1, \dots, x_n]]$ (1.2), est un des outils principaux dans la théorie. Notons d'ailleurs que pour la démonstration de 1.2, on ne se sert pas du théorème de résolution. Ce théorème est donc démontré en caractéristique quelconque.

On va utiliser souvent sans mention explicite les propriétés des schémas excellents qui sont développés dans EGA IV 7.8, tels que la stabilité par rapport aux extensions de type fini (EGA IV 7.8.3(ii)) et par rapport aux localisations strictes. Ce dernier fait résulte de la résolution et de EGA IV 7.9.5. 590

1. Pureté pour l'anneau $k[[x_1, \dots, x_n]]$

Rappelons le corollaire suivant de XVI 3.7 :

Corollaire 1.1. Soit A un anneau strictement local, et notons $A\{x\}$ le localisé strict de $A[x]$ en l'idéal premier engendré par rad A et x. Soit $U = \operatorname{Spec} A\{x\}[1/x]$. Alors pour n premier à la caractéristique résiduelle de A, on a

$$H^q(U, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(A) & \text{si} \quad q = 0 \\ \mathbf{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1. \end{cases}$$

En effet, soit $X = \operatorname{Spec} A[x]$, et $Y = V(x)$ le lieu des zéros de x dans X. Alors (Y, X) est un couple lisse (XVI 3.1) au-dessus de Spec A. D'après (V 4, VIII 5), $H^q(U, \boldsymbol{\mu}_n)$ s'identifie à la fibre du faisceau $\mathscr{H}^{q+1}_Y(X, \boldsymbol{\mu}_n)$ en un point géométrique au-dessus du point (rad A, x) de X, et le corollaire résulte donc immédiatement de (XVI 3.7). Notons que $\boldsymbol{\mu}_n$, $\mathbf{Z}/n$ sont tous les deux des groupes cycliques d'ordre n. On les a mis ici pour donner les formules canoniques (cf. 3.4). 591

Théorème 1.2. Soit k un corps séparablement clos, et $U = \operatorname{Spec} k[[x_1, \dots, x_r]]\,[1/x_r]$. Alors pour n premier à la caractéristique de k, on a

$$H^q(U, \mu_n) = \begin{cases} \mu_n(A) & \text{si} \quad q = 0 \\ \mathbf{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1. \end{cases}$$

Remarque. La démonstration vaut également pour l'anneau de séries convergentes, dans le cas $k = \mathbf{C}$. De plus, on évite facilement l'hypothèse que k soit séparablement clos en faisant l'énoncé avec un peu plus de soin. Mais pour établir le théorème de pureté générale 3.2 (sous l'hypothèse de résolution des singularités, bien entendu), nous avons besoin du résultat seulement dans le cas k séparablement clos, et ces autres assertions sont des corollaires de ce théorème 3.2.

Pour les dimensions 0, 1, on peut démontrer le résultat pour chaque anneau régulier strictement local :

Lemme 1.3. Soit A un anneau régulier strictement local et $x \in \operatorname{rad} A$ un paramètre local. Soit $U = \operatorname{Spec} A[1/x]$. Alors $H^0(U, \mu_n) = \mu_n(A)$, et on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{Z}/n \simeq H^0(U, \mathbf{G}_m)/(H^0(U, \mathbf{G}_m))^n \simeq H^1(U, \mu_n),$$

592 où le générateur de $\mathbf{Z}/n$ est le « résidu » de $x \in H^0(U, \mathbf{G}_m)$.

Démonstration. Pour $q = 0$, l'assertion est que U soit connexe et non-vide. C'est vrai. Pour $q = 1$, appliquons la suite exacte de Kummer (IX 3.7). On a $\operatorname{Pic} U = 0$ parce que A est régulier et factoriel, et que U est un ouvert de $X = \operatorname{Spec} A$. Il s'ensuit qu'on a la suite exacte

$$H^0(U, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{n} H^0(U, \mathbf{G}_m) \to H^1(U, \mu_n) \to 0,$$

et il reste à démontrer que $H^0(U, \mathbf{G}_m)/H^0(U, \mathbf{G}_m))^n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/n$ et engendré par le résidu de x. Or on a une suite exacte évidente

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & H^0(U, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\wr & & \wr\wr & & & & \\ & & A^* & & A[1/x]^* & & & & \end{array}$$

où l'image d'une section $a \in H^0(U, \mathbf{G}_m)$ dans $\mathbf{Z}$ est l'ordre du zéro de a de long de $\{x = 0\}$. Le groupe A^* est divisible par n, parce que A est strictement local et que n est premier à la caractéristique résiduelle. En effet, si $u \in H^0(X, \mathbf{G}_m)$, l'équation $Y^n - u = 0$ définit une extension finie étale de A, qui est donc complètement décomposée. Il s'ensuit que $H^1(U, \mu_n) \simeq \mathbf{Z}/n$, d'où le lemme.

Démonstration de 1.2. Il reste à traiter le cas $q > 1$. Rappelons la terminologie de (V, appendice). On a

$$H^q(U, \mu_n) = \varinjlim_{\mathbf{U}} H^q(\mathbf{U}, \mu_n)$$

593 où $\mathbf{U} = \left\{ U_0 \overleftarrow{\longleftarrow} U_1 \mathrel{\substack{\longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow}} \dots \right\}$ parcourt la catégorie (filtrante, à homotopie près) des hyper-recouvrements de U. Soit $\mathbf{U}$ un tel hyper-recouvrement, et prenons des U_i séparés et de type fini. Puisqu'on veut démontrer que $H^q(U, \mu_n) = 0$, il suffit de trouver un hyper-recouvrement $\mathbf{V}$ et un morphisme $\mathbf{V} \to \mathbf{U}$ tel que le morphisme induit

$$H^q(\mathbf{U}, \mu_n) \longrightarrow H^q(\mathbf{V}, \mu_n)$$

soit le morphisme nul.

Soit $\{W_1,\dots,W_m\}$ l'ensemble des composantes connexes de tous les U_i pour $i \leq q+1$, et soit $\boldsymbol{B}_j$ l'anneau normalisé de $A = k[[x_1,\dots,x_r]]$ dans le corps $\boldsymbol{R}(W_j)$ des fonctions rationnelles sur W_j. Alors, puisque $W_j \to U$ est étale, le schéma W_j est un ouvert de Spec $\boldsymbol{B}_j$, disons l'ouvert complémentaire à Spec $\boldsymbol{C}_j$, où $\boldsymbol{C}_j$ est l'anneau réduit quotient de $\boldsymbol{B}_j$ convenable.

Choisissons en plus un élément b_j de $\boldsymbol{B}_j$ tel que b_j engendre l'extension séparable $\boldsymbol{R}(W_j)$ de $k((x_1,\dots,x_r))$. Soit $f_j(Y) \in A[Y]$ le polynôme unitaire irréductible de b_j au-dessus de A, de sorte que $\boldsymbol{B}_j$ soit isomorphe au normalisé de l'anneau $A[Y]/(f_j)$. Soit enfin $d_j \in A$ le discriminant de $f_j(Y)$, qui est un élément non-nul de A.

Or il est permis de remplacer les x_i pour $i < r$ par d'autres éléments de A, la seule condition étant que $\{x_1,\dots,x_r\}$ doivent former un système de paramètres de A.

Il est facile de voir qu'en changeant au besoin ces éléments, on peut supposer que les **594**
hypothèses suivantes sont satisfaites :

1.4.

(i) Pour chaque j tel que d_j ne soit pas une unité, $x_1,\dots,x_{r-1}$, d_j engendrent un idéal primaire pour rad A.

(ii) Pour chaque j, les images des $x_1,\dots,x_{r-1}$ dans $\boldsymbol{C}_j$ engendrent un idéal primaire pour rad $\boldsymbol{C}_j$.

Alors on a le lemme suivant :

Lemme 1.5. Soit $A^0 = k[[x_1,\dots,x_{r-1}]]\,\{x_r\}$ le hensélisé de $k[[x_1,\dots,x_{r-1}]]\,[x_r]$ en le point $(x_1,\dots,x_r)$, soient X^0 = Spec A^0 et U^0 = Spec A^0 $[1/x_r]$. Sous les conditions 1.4 ci-dessus, il existe un hyper-recouvrement $\mathbf{U}^0$ de U^0 (d'ordre $q+1$) et un isomorphisme $\mathbf{U} \times_{X^0} X \simeq \mathbf{U}$.

Admettons le lemme. Or l'anneau A^0 est excellent (EGA IV 7.8.3 (ii), 7.9.5), et par conséquent, les composantes connexes des U_i^0 et des U_i sont en correspondance biunivoque (EGA IV 7.8.3 (vii)). L'isomorphisme $\mathbf{U}^0 \times_{X^0} X \simeq \mathbf{U}$ donne donc un isomorphisme

$$H^q(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq H^q(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mu}_n).$$

Puisque k est séparablement clos, A^0 est un anneau strictement local, et on peut appliquer 1.1 à l'anneau A^0. Il s'ensuit que H^q $(U^0, \boldsymbol{\mu}_n) = 0$. Mais

$$H^q(U^0, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}^0} H^q(\mathbf{V}^0, \boldsymbol{\mu}_n),$$

où $\mathbf{V}^0$ parcourt la catégorie des hyper-recouvrements de U^0 d'ordre $q+1$, et H^q $(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\mu}_n)$ **595**
est un groupe fini. Par conséquent, il existe un morphisme de hyper-recouvrements $\mathbf{V}^0 \to \mathbf{U}^0$ tel que le morphisme induit

$$H^q(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow H^q(\mathbf{V}^0, \boldsymbol{\mu}_n)$$

soit le morphisme nul. Posons $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 \times_{X^0} X$. Alors H^0 $(\mathbf{V}^0, \boldsymbol{\mu}_n) \simeq H^q(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mu}_n)$ (même raisonnement que pour $\mathbf{U}^0$), donc

$$H^q(\mathbf{U}, \boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow H^q(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mu}_n)$$

est également le morphisme nul, C.Q.F.D.

Démonstration de 1.5. Il suffit de trouver des A^0 -algèbres finies $\boldsymbol{B}_j^0, \boldsymbol{C}_j^0$ et des A -isomorphismes

$$\boldsymbol{B}_j^0 \otimes_{A^0} A \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{B}_j$$
$$\boldsymbol{C}_j^0 \otimes_{A^0} A \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{C}_j.$$

En effet, d'après ([3] 1.4) le morphisme $B_j \to C_j$ est induit par un morphisme $B_j^0 \to C_j^0$, donc l'ouvert $W_j \subset \operatorname{Spec} B_j$ est induit par un ouvert $W_j^0 \subset \operatorname{Spec} B_j^0$. De plus, les U -morphismes entre les W_j sont induits par des morphismes entre les A -algèbres B_j, donc ([3] 1.4) par des morphismes entre les B_j^0, donc par des U^0 - morphismes des W_j^0. Il s'ensuit que les W_j^0 forment l'ensemble des composantes connexes d'un objet simplicial $\mathbf{U}^0$ au-dessus de U^0 qui induit $\mathbf{U}$, et on voit immédiatement que c'est un hyper-recouvrement de U^0.

596 Or 1.4 (ii) implique bien que C_j est induit par une A^0 - algèbre C_j^0, comme on vérifie facilement [128]. Pour B_j, il suffit de trouver un polynôme unitaire $f_j^0(Y) \in A^0[Y]$ tel que les deux A - algèbres

$$A[Y]/(f_j) \quad , \quad A[Y]/(f_j^0) = A \otimes_{A^0} A^0[Y]/(f_j^0)$$

soient isomorphes. En effet, $A^0[Y]/(f_j^0)$ est alors réduit, et on prend pour B_j^0 le normalisé (EGA IV 7.8.3 (vi)) de $A[Y]/(f_j^0)$. L'anneau $B_j^0 \otimes_{A^0} A$ est encore normal (EGA IV 7.8.3 (vii)) et birationnel à B_j, donc égal à cet anneau.

D'après 1.4 (i), l'idéal $I_j \subset A$ engendré par d_j est induit par un idéal de $k[[x_1, \dots, x_{r-1}]][x_r]$ (th. de prép. de Weierstrass [5][6]), donc par un idéal I_j^0 de A^0. De plus, A/I_j est une $k[[x_1, \dots, x_{r-1}]]$ -algèbre finie, donc est isomorphe à A^0/I_j^0. Ce dernier anneau est donc complet, et par conséquent, l'anneau complété I_j^0-adique de A^0 est complet et isomorphe à A. On peut donc trouver un polynôme unitaire $f_j^0 \in A^0\,[Y]$ tel que dans $A\,[Y]$, on ait

$$f_j \equiv f_j^0 (\text{modulo } {d_j}^2 \operatorname{rad} A).$$

D'après ([3], 1.3), $A[Y]/(f_j) \simeq A[Y]/(f_j^0)$, d'où le lemme.

2. Le cas d'un anneau strictement local

Le théorème est le suivant :

597 Théorème 2.1. [128]. Soit A un anneau excellent, régulier, strictement local, d'égales caractéristiques, et soit x un « paramètre local »[128] de A. Soit $U = \operatorname{Spec} A[1/x]$. Alors pour n premier à la caractéristique de A, on a

$$H^q(U, \boldsymbol{\mu}_n) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(A) & \text{si} \quad q = 0 \\ \mathbf{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1. \end{cases}$$

La démonstration se fait par récurrence sur q. Nous notons par $P(N)$ l'énoncé de 2.1 pour les valeurs de $q \leq N$. D'après 1.3, l'assertion $P(1)$ est vraie.

Lemme 2.2. Supposons que $P(N)$ soit vrai. Soit $A \to A'$ un morphisme local d'anneaux excellents, réguliers, strictement locaux, d'égales caractéristiques. Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ une partie d'un système régulier de paramètres de A dont l'ensemble des images dans A est encore une partie d'un système régulier de paramètres. Soient

$$U = \operatorname{Spec} A[1/x_1, \dots, 1/x_r]$$
$$U' = \operatorname{Spec} A'[1/x'_1, \dots, 1/x'_r].$$

[128] En effet, 1.4 (ii) implique que C_j est fini sur $k[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$, et a fortiori sur A^0, et il suffit de prendre $C_j^0 = C_j$ avec la structure de A^0-module obtenue par restriction des scalaires.

[128] Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

[128] Par quoi on entend ici : élément faisant partie d'un système *régulier* de paramètres.

Alors le morphisme canonique

$$H^q(U, \mu_n) \longrightarrow H^q(U', \mu_n)$$

est bijectif pour chaque $q \leq N$. **598**

Démonstration. [128] Récurrence sur r : L'assertion est triviale pour $r = 0$. Soit $r > 0$ et supposons que le théorème est démontré pour $r-1$. Soient $B = A/(x)$, $V = \operatorname{Spec} A[1/x_1, \dots, 1/x_{r-1}]$, $Y = \operatorname{Spec} B[1/x_1, \dots, 1/x_{r-1}]$ (où on dénote par le même symbole l'image de x_i dans B). Il y a une immersion ouverte $i : U \to V$ et Y est l'ensemble fermé complémentaire, défini par l'élément x_r.

En appliquant $P(N)$ aux anneaux localisés stricts de V en les points géométriques de Y, on trouve que

$$R^q i_*(\mu_n)_U = \begin{cases} (\mu_n)_V & \text{si} \quad q = 0 \\ (\mathbf{Z}/n)_Y & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < q \leq N, \end{cases} \tag{2.3}$$

parce que ces localisés stricts sont des anneaux réguliers excellents d'égales car., et que l'élément x_r est un paramètre local en chaque point de Y.

Notons avec un « prime » les objets analogues déduits de A'. On trouve un morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccccc} E_2^{pq} & = & H^p(V, R^q i_* \mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U, \mu_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^{pq}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ E_2'^{pq} & = & H^p(V', R^q i'_* \mu_n) & \Rightarrow & H^{p+q}(U', \mu_n). \end{array}$$

Or il est évident par 1.3 et (2.3) que le changement de base $V \xleftarrow{g} V'$ induit un isomorphisme **599**

$$g^* R^q i_* \mu_n \xrightarrow{\sim} R^q i'_* \mu_n$$

pour $q \leq N$ (ce n'est que pour $q = 0, 1$ qu'il y a quelque petite chose à vérifier). Par suite, l'hypothèse de récurrence, appliquée au morphisme

$$H^q(V, \mu_n) \longrightarrow H^q(V', \mu_n),$$

implique que φ_2^{pq} est un isomorphisme pour $q = 0$ et $p \leq N$.

De même, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au morphisme d'anneaux $B \to B'$ - ce sont des anneaux rég., exc., str. loc., d'égales car., et les éléments $x_1, \dots, x_{r-1}$ forment une partie d'un système de paramètres. Donc

$$H^q(Y, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^q(Y', \mu_n) \quad \text{si} \quad q \leq N.$$

Puisque $(\mu_n) \simeq (\mathbf{Z}/n)_Y$, il s'ensuit que φ_2^{pq} est également bijectif pour $p \leq N$ et pour $q = 1$.

Du fait que $R^q i_* \mu_n = R^q i'_* \mu_n = 0$ si $1 < q \leq N$, on trouve $E_2^{pq} = E'^{pq}_2 = 0$ si $1 < q \leq N$, et le morphisme de suites spectrales se réduit donc pour $1 \leq m \leq N$ à un

[128] Une démonstration plus courte que celle qui suit, mais utilisant le formalisme du cup-produit, consisterait à montrer que sous l'hypothèse $P(N)$, la cohomologie $H^*(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est, en dimension $\leq N$, l'algèbre extérieure (sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) de $H^1(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^r$, ce qui ramène à établir 2.2 pour $q = 1$, cas bien connu. Le calcul indiqué sous l'hypothèse $P(N)$ est explicité par exemple dans SGA 7.

morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} H^{m-2}(Y,\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & H^m(V,\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & H^m(U,\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "c"] & H^{m-1}(Y,\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & H^{m+1}(V,\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[d] \\ H^{m-2}(Y',\mathbf{Z}/n) \arrow[r] & H^m(V',\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r] & H^m(U',\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r, "e"] & H^{m-1}(Y',\mathbf{Z}/n) \arrow[r] & H^{m+1}(V',\boldsymbol{\mu}_n). \end{tikzcd}$$

600 Or on a déjà vu que a, b, d sont bijectifs, et il s'ensuit que c est injectif. Pour démontrer que c' est surjectif, il suffit de démontrer que le morphisme

$$H^m(U,\boldsymbol{\mu}_n) \xrightarrow{e} H^{m-1}(Y,\mathbf{Z}/n)$$

est surjectif pour $m \leq N$.

Soit $K \subset A$ un corps séparablement clos arbitraire, et soit $A^0 = k\{x_1,\dots,x_r\}$ le hensélisé de $k[x_1,\dots,x_r]$ à l'origine. Alors les hypothèses de 2.1 sont satisfaites pour le morphisme $A^0 \to A$ et pour les éléments x_i. Avec les notations évidentes, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H^m(U^0,\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r, "e^0"] \arrow[d, "c^0"] & H^{m-1}(Y^0,\mathbf{Z}/n) \arrow[d, "d^0"] \\ H^m(U,\boldsymbol{\mu}_n) \arrow[r, "e"] & H^{m-1}(Y^0,\mathbf{Z}/n) \end{tikzcd}$$

et on sait déjà que la flèche d^0 est bijective. Il suffit ainsi de démontrer que le morphisme e^0 est surjectif. On est donc ramené (en laissant tomber les ^{0}) à vérifier la surjectivité dans le cas $A = k\{x_1,\dots,x_r\}$.

Pour cet anneau, qui est limite de schémas lisses sur k, on avait démontré le théorème
601 de pureté dans XVI 3.7. On a donc $R^q i_* \boldsymbol{\mu}_n = 0$ pour chaque $q > 1$, et par conséquent une suite exacte

$$H^m(U,\boldsymbol{\mu}_n) \xrightarrow{e} H^{m-1}(Y,\mathbf{Z}/n) \to H^{m+1}(V,\boldsymbol{\mu}_n) \xrightarrow{f} H^{m+1}(U,\boldsymbol{\mu}_n)$$

pour chaque $m \geq 1$. La surjectivité de e équivaut donc à l'injectivité de f.

Soit $Z = \operatorname{Spec} k\{x_1,\dots,x_{r-1}\}\,[1/x_1,\dots,1/x_{r-1}]$. Le morphisme $\operatorname{Spec} k\{x_1,\dots,x_r\} \to \operatorname{Spec} k\{x_1,\dots,x_{r-1}\}$ donné par l'inclusion d'anneaux est acyclique. C'est l'acyclicité locale d'un morphisme lisse (XVI 1.1). Puisque l'ouvert V de $\operatorname{Spec} k\{x_1,\dots,x_r\}$ est l'image inverse de Z, le morphisme

$$H^q(Z,\boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow H^q(V,\boldsymbol{\mu}_n)$$

est bijectif pour chaque q (XV 1.3). Il suffit donc de démontrer que le morphisme

$$H^q(Z,\boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow H^q(U,\boldsymbol{\mu}_n)$$

est injectif pour chaque q.

Or $k\{x_1,\dots,x_r\}$ est limite inductive d'anneaux A_α étales au-dessus de $k\{x_1,\dots,x_{r-1}\}$ $[x_r]$, avec un relèvement du point $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$ à cet anneau. Par conséquent, U est limite projective des ouverts $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha[1/x_1,\dots,1/x_r]$, et on a

$$H^q(U,\boldsymbol{\mu}_n) = \varinjlim_\alpha H^q(U_\alpha,\boldsymbol{\mu}_n).$$

602 Mais puisque $A_\alpha[1/x_r]$ est lisse au-dessus de l'anneau hensélien $k\{x_1,\dots,x_{r-1}\}$, et que la fibre fermée de $A[1/x_r]$ est non-vide, on voit immédiatement que la $k\{x_1,\dots,x_{r-1}\}$ -algèbre $A_\alpha[1/x_r]$ admet des sections. Donc U_α admet des sections au-dessus de Z, et il s'ensuit que

$$H^q(Z,\boldsymbol{\mu}_n) \longrightarrow H^q(U_\alpha,\boldsymbol{\mu}_n)$$

est injectif pour chaque q, donc que

$$H^q(Z, \mu_n) \longrightarrow H^q(U, \mu_n)$$

est aussi injectif, d'où le lemme.

Lemme 2.4. Supposons que $P(N)$ soit vrai. Soient $A \to A'$ un morphisme régulier (EGA IV 6.8.1) d'anneaux excellents, strictement locaux, d'égales caractéristiques (pas nécessairement réguliers), et $U \subset \operatorname{Spec} A$ un ouvert qui est régulier. Soit $U' = U \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} A'$. Alors pour n premier à la car. rés. de A, le morphisme

$$H^q(U, \mu_n) \longrightarrow H^q(U', \mu_n)$$

est bijectif pour $q \leq N$.

Démonstration. Soit $f : X \to \operatorname{Spec} A$ une résolution de singularités de $\operatorname{Spec} A$ telle que l'ouvert U de $\operatorname{Spec} A$ se relève en un ouvert $i : U \to X$, et que l'ensemble fermé $Y = X - U$ soit purement de codimension 1 et à intersections transversales. Notons par un ' le changement de base induit par $A \to A'$. Le morphisme $g : X' \to X$ est régulier (EGA IV 6.8.3), donc $f' : X' \to \operatorname{Spec} A'$ est une résolution de $\operatorname{Spec} A$, $i' : U' \to X'$ une immersion ouverte, et $Y' = X' - U'$ est purement de codimension 1, à intersections **603**
transversales. Tous ces schémas sont excellents.

Soit p' un point de X' et p son image dans X. Puisque Y est à intersections transversales dans X, il existe des éléments $x_1, \dots, x_r \in O_{X,p}$ tels que $\{x_1, \dots, x_r\}$ soit une partie d'un système de paramètres de $O_{X,p}$ et que $\operatorname{Spec} O_{X,p} \cap Y = V(x_1, \dots, x_r)$. De plus, il résulte immédiatement du fait que $g : X' \to X$ est régulier que les images x'_i des x_i dans $O_{X',p'}$ forment une partie d'un système de paramètres de cet anneau, et qu'on a $\operatorname{Spec} O_{X',p'} \cap Y = V(x'_1, \dots, x'_r)$.

Soit B' le localisé strict de $O_{X',p'}$ en un point géométrique $\overline{p}$ au-dessus de p', et soit B le localisé strict de $O_{X,p}$ au point géométrique de X correspondant (ce sont des anneaux excellents (EGA IV 7.8.3 (ii), 7.9.5)). Soient

$$U_{\overline{p}} = \operatorname{Spec} B[1/x_1, \dots, 1/x_r] \quad , \quad U'_{\overline{p}} = \operatorname{Spec} B'[1/x'_1, \dots, 1/x'_r].$$

Lemme 2.2 est applicable, et on déduit que les morphismes

$$(*) \qquad H^q(U_{\overline{p}}, \mu_n) \longrightarrow H^q(U'_{\overline{p}}, \mu_n)$$

sont bijectifs pour $q \leq N$.

Calculons les faisceaux $R^q i_* \mu_n$, $R^q i'_* \mu_n$ pour les immersions ouvertes $i : U \to X$ et $i' : U' \to X'$: la fibre $(R^q i'_* \mu_n)_{\overline{p}}$ au point géométrique $\overline{p}$ n'est autre que $H^q(U'_{\overline{p}}, \mu_n)$ (VIII 5). De même, $(R^q i_* \mu_n)_{\overline{p}} = H^q(U_{\overline{p}}, \mu_n)$. Donc $(*)$ implique que les morphismes de changement de base

$$(**) \qquad g^* R^q i_* \mu_n \longrightarrow R^q i'_* \mu_n$$

sont bijectifs pour $q \leq N$. **604**

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre (XII 5.5), on a (puisque X et X' sont propres au-dessus des spectres d'anneaux strictement locaux, et que les fibres fermées de X et X' sont égales)

$$H^q(X, F) \xrightarrow{\sim} H^q(X', g^* F)$$

quel que soit le faisceau de torsion F, pour chaque q. Par conséquent, $(**)$ implique que dans le morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccccc} E_2^{pq} & = & H^p(X, R^q i_* \mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U, \mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^{pq}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ E_2'^{pq} & = & H^p(X', R^q i'_* \mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U', \mu_n), \end{array}$$

les flèches φ_2^{pq} sont bijectives pour chaque $q \leq N$. On voit facilement que cela implique que φ_∞^{pq} est bijectif si $q \leq N$ et $p + q \leq N + 1$. Par conséquent, le morphisme des aboutissements

$$H^m(U, \mu_n) \longrightarrow H^m(U', \mu_n)$$

est bijectif pour $m \leq N$, d'où le lemme.

Le lemme suivant achèvera la démonstration de 2.1 :

Lemme 2.5. $P(N) \Rightarrow P(N+1)$.

605 Démonstration. Soient A strictement local, régulier, excellent, d'égales caractéristiques, $x \in \operatorname{rad} A$ un paramètre local, $U = \operatorname{Spec} A[1/x]$. Soient $\widehat{A}$ le complété de A, $\hat{x}$ l'élément image de x, $\widehat{U} = \operatorname{Spec} \widehat{A}[1/x]$, et $g : \widehat{U} \to U$ le morphisme canonique. Il suffit de démontrer qu'on a

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} g_*(\mu_n)_{\widehat{U}} &\simeq (\mu_n)_U \quad \text{et} \\ R^q g_* \mu_n &= 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq q \leq N. \end{aligned}$$

En effet, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(U, R^q g_* \mu_n) \Longrightarrow H^{p+q}(U', \mu_n)$$

donnera des isomorphismes

$$H^q(U, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^q(U', \mu_n)$$

pour $q \leq N$, et une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{N+1}(U, \mu_n) \longrightarrow H^{N+1}(U', \mu_n) \longrightarrow H^0(U, R^{N+1} g_* \mu_n).$$

Mais on sait déjà que $P(1)$ est vrai (1.3), et il s'agit donc de démontrer que $H^q(U, /u_n) = 0$ si $1 < q \leq N + 1$. On peut ainsi remplacer A par $\widehat{A}$, qui est isomorphe à un anneau de séries formelles $\widehat{A} \simeq k[[x_1, \ldots, x_r]]$ avec k séparablement clos et $\overline{x} = x_r$. On a traité ce cas dans 1.2.

Vérifions donc (2.6) : le fait que $g_*(\mu_n)_{\widehat{U}} \simeq (\mu_n)_U$ n'est que l'assertion de (2.3) pour $q = 0$. Rappelons que $R^q g_* \mu_n$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathscr{R}^q$, où

$$\mathscr{R}^q(V) = H^q(\widehat{V}, \mu_n)$$

606 pour $V \to U$ étale. Il suffit de prendre V séparé et de type fini, alors V est somme de schémas intègres, et il suffit de regarder de tels V. Soit B le normalisé de A dans le corps des fractions de $\Gamma(V, O_V)$. Alors B est une A -algèbre finie (EGA IV 7.8.3 (vi)) et on voit immédiatement que V est un ouvert régulier de $\operatorname{Spec} B$ et que $\widehat{V}$ est l'ouvert correspondant de $\operatorname{Spec} \widehat{B}$, ou $\widehat{B} = B \otimes_A \widehat{A}$. Il s'ensuit que les hypothèses de 2.4 sont satisfaites pour l'ouvert $V \subset \operatorname{Spec} B$, et pour le morphisme $B \to \widehat{B}$. On a donc

$$\mathscr{R}^q(V) \simeq H^q(V, \mu_n) \simeq H^q(\widehat{V}, \mu_n)$$

pour $q \leq N$. Or le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^q(V, \mu_n)$ est évidemment nul, d'où le lemme.

3. Pureté

Nous adopterons une terminologie analogue à celle de XVI 3 :

Définition 3.1. On appelle couple régulier (Y, X) de codimension c une immersion fermée $i : Y \to X$ de schémas localement noethériens réguliers tel que pour chaque $y \in Y$ on ait $\operatorname{codim}_y(Y, X) = c$ (alors il existe un voisinage ouvert X' de y dans X et des sections $x_1, \dots, x_c \in \Gamma(X', O_X)$ qui engendrent l'idéal de Y, et qui forment une partie d'un système régulier de paramètres de X en chaque point de $Y \cap X'$). On note $U = X - Y$, et $j : U \to X$ l'immersion ouverte correspondante.

Un morphisme $(Y', X') \to (Y, X)$ de couples réguliers de codimension c est un **607**
morphisme $X' \to X$ tel que $Y' = Y \times_X X'$. On définit d'une façon analogue évidente la notion de triple régulier, de morphisme de triple régulier, etc.

Théorème 3.2. [128]. (Pureté cohomologique) Soit (Y, X) un couple régulier de codimension $c > 0$, où X est un préschéma excellent d'égales caractéristiques. Soit F un faisceau sur X localement constant de groupes cycliques d'ordre n premiers à la caractéristique de X. Alors on a, dans la notation de (V 4, VIII 5)

$$\begin{gathered} \mathscr{H}^q_Y(X, F) = (R^q i^!)F = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 2c, \\ (R^q j_*)j^*F = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0, 2c-1, \quad \text{et} \\ \mathscr{H}^{2c}_Y(X, F) = i^*(R^{2c-1} j_*)j^*F \end{gathered}$$

est un faisceau localement constant de groupes cycliques d'ordre n sur Y.

Démonstration. (cf. XVI 3.7). On voit immédiatement qu'on a

$$\mathscr{H}^q_Y(X, F) = 0 \quad \text{si} \quad q = 0, 1.$$

D'après (V 4.5)

$$\mathscr{H}^q_Y(X, F) = (R^q i^!)F \simeq i^*(R^{q-1} j_*)j^*F \quad \text{si} \quad q > 1,$$

donc les assertions pour les trois faisceaux sont équivalentes. Puisque les assertions sont locales sur X pour la topologie étale, on peut supposer que $F = \boldsymbol{\mu}_n$. **608**

Pour le cas $c = 1$, le calcul des fibres (VIII 5) de $(R^q j_*)j^*\boldsymbol{\mu}_n$ nous ramène à la situation envisagés dans 2.1, d'où

$$((R^q j_*)j^*\boldsymbol{\mu}_n)_{\overline{y}} = \begin{cases} \mathbf{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1 \end{cases}$$

pour chaque point géométrique $\overline{y}$ de Y. Puisque ces faisceaux sont nuls en dehors de Y en tout cas, cela démontre l'assertion pour $q > 1$. Pour $q = 1$ $(= 2c - 1)$, on applique le critère de (IX 2.13 (i)) et le calcul explicite de 1.3.

Le cas $c > i$ se traite par récurrence (cf. XVI 3.7) : Soit (Y, X) un couple régulier de codimension $c > i$. D'après la définition, il est clair que, localement sur X, on peut trouver un triple régulier (Y, Z, X) où (Z, X) est de codimension 1 et (Y, Z) est de codimension $c - 1$. Soient

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i"'] & & Z \arrow[dl, "v"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

[128]Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

les immersions fermées. On a la suite spectrale

$$E_2^{pq} = (R^p u^!)(R^q v^!)F \Longrightarrow (R^{p+q} i^!)F.$$

Par hypothèse de récurrence, $(R^q v^!)F = 0$ si $q \neq 2$, et est localement constant etc. ...si $q = 2$. Donc, encore par hypothèse de récurrence, appliqué au morphisme u, $(R^p u^!)(R^1 v^!)F =$
609 0 si $(p,q) \neq (2c-2, 2)$ et est loc. const. etc. ...si $(p,q) = (2c-2,2)$, d'où le résultat pour l'aboutissement $(R^{p+q} i^!)F$, C.Q.F.D.

3.3. Il reste maintenant à déterminer les faisceaux localement constants de (3.2) à isomorphisme canonique près. Nous introduisons pour chaque préschéma S les faisceaux localement constants $(\mathbf{\mu}_n^{\otimes r})_S$ = le produit tensoriel r -ième du faisceau $(\mathbf{\mu}_n)_S$ au-dessus du faisceau constant d'anneaux $\mathbf{Z}_S$. Posons aussi $(\mathbf{\mu}_n^{\otimes 0})_S = (\mathbf{Z}/n)_S$. On constate immédiatement que si n est inversible sur S, alors $(\mathbf{\mu}_n^{\otimes r})_S$ est un faisceau localement constant de groupes cycliques d'ordres n. On a des formules du type $(\mathbf{\mu}_n^{\otimes r}) \otimes (\mathbf{\mu}_n^{\otimes s}) = (\mathbf{\mu}_n^{\otimes r+s})$, et si $S' \to S$, alors $(\mathbf{\mu}_n^{\otimes r})_{S'}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse sur S' de $(\mathbf{\mu}_n^{\otimes r})_S$. Nous omettrons souvent le symbole S s'il n'y a pas de confusion à craindre.

Soit (Y, X) un couple régulier de codimension 1, et supposons que Y soit défini par une équation $x = 0$. On a la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow (\mathbf{G}_m)_X \longrightarrow j_*(\mathbf{G}_m)_U \longrightarrow \mathbf{Z}_Y \longrightarrow 0,$$

d'où en appliquant (1.3), des isomorphismes canoniques

$$(R^1 j_*)\mathbf{\mu}_n) \simeq j_*(\mathbf{\mu}\mathbf{G}_m)_U/(j_*(\mathbf{G}_m)_U)^n \simeq (\mathbf{Z}/n)_Y, \tag{3.3.1}$$

qui ne dépendent évidemment pas du choix de x. Par conséquent, on a un isomorphisme canonique

$$\varphi : \mathbf{Z}/n \xrightarrow{\sim} (R_i^{*!})\mathbf{\mu}_n \simeq i^*(R^1 j_*)\mathbf{\mu}_n. \tag{3.3.2}$$

610 Théorème 3.4. [128]. Soit C la famille des couples réguliers de schémas excellents, d'égales caractéristiques. Il existe une fonction et une seule φ donnant pour chaque couple régulier (Y, X) de codimension c un isomorphisme (dit canonique) de faisceaux

$$\varphi(Y, X) = \varphi : \mathbf{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_Y^{2c}(X, \mathbf{\mu}_n^{\otimes c}) = (R^{2c} i^!)\mathbf{\mu}_n^{\otimes c}$$

tel que φ satisfasse aux conditions suivantes :

(i) Si $c = 1$, et si Y est défini dans X par une équation $x = 0$, alors φ est le morphisme (3.3′).

(ii) φ est compatible avec les morphismes de couples lisses, c'est-à-dire, si $(Y', X') \to (Y, X)$ est un morphisme, soit $g : Y' \to Y$ le morphisme induit. Le diagramme de Y' -faisceaux

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/n \arrow[r, "\varphi(Y',X')"] & (R^{2c} i^!)\mathbf{\mu}_n^{\boxtimes c} \\
g^*(\mathbf{Z}/n) \arrow[u] \arrow[r, "g^*\varphi(Y,X)"] & g^*(R^{2c} i^!)\mathbf{\mu}_n^{\boxtimes c} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif (ce qui implique en particulier que la flèche verticale de droite est un isomorphisme).

[128]Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction). Ce théorème peut être considéré aussi comme la conjonction de 3.2 et de la théorie de variance de Exp. XVIII par les « classes fondamentales locales », où on étudie des homomorphismes $\varphi(Y, X)$ (pas nécessairement bijectifs) pour Y localement intersection complète dans X.

(iii) Transitivité : soit (Z, Y, X) un triple régulier, c'est-à-dire, un diagramme commutatif d'immersion fermée de préschémas réguliers etc.,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, "u"] \\ & X & \end{tikzcd} .$$

Soient a, b, c les codimensions de u, v, w respectivement (donc $c = a + b$). On a un isomorphisme **611**

$$\begin{aligned} \varphi(Y, X) \otimes \boldsymbol{\mu}_n{}^{\otimes b} : \boldsymbol{\mu}_n{}^{\otimes b} \longrightarrow & (R^{2a}u^!)_{\boldsymbol{\mu}_n}{}^{\otimes a} \otimes \boldsymbol{\mu}_n{}^{\otimes b} \simeq \\ & \simeq (R^{2a}u^!)\boldsymbol{\mu}_n{}^{\otimes c}. \end{aligned}$$

La suite spectrale $(R^p v^!)(R^q u^!)F \Rightarrow (R^{p+q} w^!)F$ donne un isomorphisme

$$\xi : (R^{2b}v^!)(R^{2a}u^!)\boldsymbol{\mu}_n{}^{\otimes c} \xrightarrow{\sim} (R^{2c}w^!)\boldsymbol{\mu}_n{}^{\otimes c}.$$

On obtient ainsi un diagramme d'isomorphismes

$$\text{(3.4.1)} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Z}/n \arrow[r, "\varphi(Z,Y)"] \arrow[d, "\varphi(Z,X)"] & (R^{2b}v^!)\boldsymbol{\mu}_n \boxtimes b \arrow[d, "\eta=(R^{2b}v^!)((Y,X)\boxtimes\boldsymbol{\mu}_n^{\boxtimes b})"] \\ (R^{2c}w^!)\boldsymbol{\mu}_n & (R^{2b}v^!(R^{2a}u^!)\boldsymbol{\mu}_n^{\boxtimes c}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et l'assertion de transitivité est que ce diagramme est commutatif.

Démonstration. La démonstration de l'existence et l'unicité se fait par récurrence sur la codimension c. Pour $c = 1$, on définit le morphisme φ localement avec (3.3.1). Puisque ce morphisme ne dépend pas du choix du paramètre x, on obtient un isomorphisme φ pour chaque (Y, X) de codimension 1 par recollement, et il est clair, d'après la définition du morphisme et de 1.3, que le φ ainsi construit satisfait à (ii). La transitivité n'intervient pas pour $c = 1$.

Supposons maintenant que l'existence et l'unicité sont déjà démontrées si la codimension est $< c$, et que $c > 1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on constate immédiatement que dans la situation de 3.4 (iii) les trois flèches de (3.4.1) qui sont déjà définies, i.e. $\varphi(Z, Y)$, ξ, η sont compatibles avec les morphismes de triples réguliers. Posons dans cette situation **612**

$$\Psi(Z, Y, X) = \xi\eta\varphi(Z, Y),$$

donc Ψ est également compatible avec les morphismes de triples. Or si (Z, X) est un couple régulier de codimension $c > 1$, on peut, localement sur X, trouver un triple (Z, Y, X) avec $0 < \operatorname{codim}(Y, X) < c$. Tout revient donc à démontrer que la flèche $\Psi(Z, Y, X)$ est indépendante de Y. En effet, cela démontrera l'unicité de φ pour la codimension c, et l'existence résultera par recollement.

Si (Z, Y, X) est arbitraire tel que $\operatorname{codim}(Y, X) > 1$, on peut, localement sur X, trouver un triple régulier (Y, W, X) où la codimension de (W, X) est égale à 1. Par une chasse de diagramme de transitivité, que nous laissons au lecteur, on se ramène donc à vérifier l'indépendance de Y lorsque (Y, X) est de codimension 1.

Soient (Z, Y_0, X) et (Z, Y_1, X) deux tels triples. Il suffit de faire la vérification fibre par fibre, et on est donc ramené au cas X strictement local, et Y_i défini par une équation, disons $f_i = 0$ $(i = 0, 1)$. Soient $\overline{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[t]$, $\overline{Z} = Z \times_X \overline{X}$, et $\overline{Y}$ le sous-schéma fermé de $\overline{X}$ défini par l'équation

$$(f_1 - f_0)t + f_0 = 0.$$

613 Alors $\overline{Y}$ est évidemment régulier en les points au-dessus des sections $\epsilon_0 : \{t = 0\}$ et $\epsilon_1 : \{t = 1\}$ de $\overline{X}/X$. Soit C le sous-ensemble fermé (EGA IV 7.8.3 (iv)) de $\overline{Y}$ des points où $\overline{Y}$ n'est pas régulier, et remplaçons $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ par $\overline{X} - C, \overline{Y} - C, Z - C \cap \overline{Z}$ respectivement. Alors $(\overline{Z}, \overline{Y}, \overline{X})$ est un triple régulier, et les sections ϵ_i donnent des morphismes de triples

$$(Z, Y_i, X) \longrightarrow (\overline{Z}, \overline{Y}, \overline{X}) \quad (i = 0, 1).$$

Soit $F = (R^{2c} w^!)\boldsymbol{\mu}_n^{\otimes c}$ le faisceau sur Z. C'est un faisceau localement constant, isomorphe à $\mathbf{Z}/n$ (par l'un ou l'autre des isomorphismes $\Psi(Z, Y_i, X)$, et on constate immédiatement que le faisceau $\overline{F} = (R^{2c}\overline{w}^!)\boldsymbol{\mu}_n^{\otimes c}$ sur $\overline{Z}$ est l'image inverse sur $\overline{Z}$ de F. Puisque les fibres de $\overline{Z} \to Z$ sont connexes non-vides et que $\overline{Z} \to Z$ est lisse, donc ouvert, il s'ensuit que le morphisme déduit

$$H^0(Z, F) \longrightarrow H^0(\overline{Z}, \overline{F})$$

est bijectif, donc que chacun des morphismes

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & & H^0(Z,F) \\ H^0(Z,F) \arrow[r] & H^0(\overline{Z},\overline{F}) \arrow[ur, "\epsilon_0^*"] \arrow[dr, "\epsilon_1^*"'] & \\ & & H^0(Z,F) \end{tikzcd}$$

est bijectif, donc que $\epsilon_0^* = \epsilon_1^*$.

Or donner un isomorphisme d'un faisceau F avec $\mathbf{Z}/n$ équivaut à donner une section globale (image de 1) qui est un générateur. Soient $\overline{\alpha}$, α_i les sections globales de $\overline{F}$, F don-
614 nées par les isomorphismes $\Psi(\overline{Z}, \overline{Y}, \overline{X})$, $\Psi(Z, Y_i, X)$ respectivement. Puisque $\Psi(.,.,.)$ est compatible avec les morphismes, le diagramme $(*)$ implique que

$$\alpha_0 = \epsilon_0^*(\overline{\alpha}) = \epsilon_1^*(\overline{\alpha}) = \alpha_1,$$

d'où $\Psi(Z, Y_0, X) = \Psi(Z, Y_1, X)$, C.Q.F.D.

4. Acyclicité locale d'un morphisme régulier

Théorème 4.1. [128] (acyclicité locale). Soit $g : X' \to X$ un morphisme régulier (EGA IV 6.8.1) de schémas excellents d'égales caractéristiques. Alors g est universellement localement acyclique pour n premier à la caractéristique.

Démonstration. L'hypothèse étant stable par changement de base de type fini, il résulte aussitôt de XV 1.13 ii) qu'il suffit de prouver que g est localement acyclique pour n. Appliquons le critère de XV 1.17 : Soient $\overline{x}'$ un point géométrique de X' et $\overline{x}$ le point géométrique de X correspondant. Il résulte immédiatement de la définition de morphisme régulier que le morphisme des localisés stricts en ces points induit par g est encore régulier. On est donc ramené au cas où $X = \operatorname{Spec} A$ et $X' = \operatorname{Spec} A'$ sont strictement
615 locaux, g et un morphisme local, et d'après XV 1.17 il suffit de démontrer que les fibres géométriques de g sont acycliques pour n. En remplaçant X par un sous-schéma fermé intègre et X' par le fermé correspondant, on se ramène au cas de la fibre géométrique

[128] Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

générique $X'_{\overline{x}}$. Prenons $\overline{x} = \operatorname{Spec} \overline{K}$ où $\overline{K}$ est la clôture séparable du corps de fonctions rationnelles sur X. Alors on a

$$\overline{x} = \varprojlim_{\alpha} U_\alpha$$

où U_α parcourt une catégorie filtrante de X -schémas étales connexes, qu'on peut supposer réguliers (EGA IV 7.8.3 (v)). Soit B_α le normalisé de A dans le corps des fonctions rationnelles $R(U_\alpha)$. Posons $U'_\alpha = X' \times_X U_\alpha$ et $B'_\alpha = A' \otimes_A B_\alpha$. Alors U_α est un ouvert régulier de Spec B_α et $B_\alpha \to B'_\alpha$ est régulier, donc par (2.3)

$$H^q(U_\alpha, \boldsymbol{\mu}_n) \xrightarrow{\sim} H^q(U'_\alpha, \boldsymbol{\mu}_n)$$

pour chaque q. Or la fibre $X'_{\overline{x}}$ est limite des U'_α, donc

$$\begin{aligned} H^q(X'_{\overline{x}}, \boldsymbol{\mu}_n) &= \varinjlim_{\alpha} H^q(U'_\alpha, \boldsymbol{\mu}_n) \\ &= \varinjlim_{\alpha} H^q(U_\alpha, \boldsymbol{\mu}_n) \\ &= H^q(\overline{x}, \boldsymbol{\mu}_n) = 0 \quad \text{si} \quad a > 0, \quad \text{C.Q.F.D..} \end{aligned}$$

Corollaire 4.2. (changement de base par un morphisme régulier). Soit

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"] & Y' \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien, $g : Y' \to Y$ étant un morphisme régulier de préschémas excellents d'égales caractéristiques, f quasi-compact et quasi-séparé. Alors pour chaque **616**
faisceau F abélien de torsion premier à la caractéristique, les morphismes de changement de base (XII 4.2)

$$g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q f'_*)g'^* F$$

sont bijectifs pour chaque $q \geq 0$.

Cela résulte de 4.1 et de XVI 1.1.
De 4.1 et XV 1.17 on déduit immédiatement

Corollaire 4.3. Soient A un anneau strictement local excellent d'égales caractéristiques, et $f : X \to \operatorname{Spec} A$ un morphisme. Soit $A \to A'$ un morphisme régulier, où A' est également strictement local, excellent, d'égales caractéristiques. Notons par un $'$ le changement de base induit par $A \to A'$. Pour chaque faisceau de torsion F sur X, premier à la caractéristique de A, on a

$$H^q(X, F) \xrightarrow{\sim} H^q(X', F')$$

pour chaque $q \geq 0$.

Ce corollaire s'applique notamment dans le cas où A' est le complété $\widehat{A}$ de A. (Dans ce cas, on peut d'ailleurs remplacer l'hypothèse « A strictement local » par « A local hensélien », comme on constate immédiatement.)

5. Théorème de finitude 617

Théorème 5.1. [128] (finitude). Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini de schémas excellents d'égales caractéristiques, et soit F un faisceau abélien de torsion premier à la caractéristique sur X, qui est un faisceau constructible. Alors les $(R^q f_*)F$ sont également constructibles pour chaque q.

Ce résultat généralise le théorème de XVI 5.1. La démonstration est à peu près la même : on applique le résultat de pureté 3.2. au lieu de XVI 3.7.

Corollaire 5.2. Soit A un anneau excellent strictement local d'égales caractéristiques et $f : X \to \operatorname{Spec} A$ un morphisme de type fini. Soit F un faisceau abélien sur X de torsion premier à la caractéristique de A, et constructible. Alors les $H^q(X, F)$ sont des groupes finis pour chaque q.

6. Dimension cohomologique des morphismes affines

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini de préschémas excellents, et F un faisceau sur X. Rappelons qu'on a défini (XIV 2.2) un entier $\delta(F)$ dans le cas où Y est
618 local. On peut donc regarder δ comme fonction $\delta(F, f)$ sur un Y arbitraire, en posant

$$\delta(F, f, y) = \delta(F'), \tag{6.0}$$

où $Y' = \operatorname{Spec} O_{Y,y}$, $X' \to Y'$ est le morphisme déduit de f par le changement de base $Y' \to Y$, et F' est le faisceau image inverse de F sur X'.

On a le résultat suivant, qui généralise XVI 3.1 :

Théorème 6.1. [128]. Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de type fini, où Y est un schéma excellent d'égales caractéristiques, et soit F un faisceau abélien de torsion sur X. Alors $R^q f_* F$ est nul en chaque point $y \in Y$ tel que $\delta(F, f, y) < q$.

La variante locale, évidemment équivalente à 6.1, est la suivante :

Théorème 6.1 bis. [128]. Soient A un anneau strictement local excellent d'égales caractéristiques, et $f : X \to Y = \operatorname{Spec} A$ un morphisme affine de type fini. Soit F un faisceau de torsion sur X. Alors

$$H^q(X, F) = 0 \quad \text{si} \quad q > \delta(F).$$

Rappelons (X 5.1) qu'il n'y a pas d'intérêt dans de telles assertions pour les F de
619 p -torsion, où p est égale à la caractéristique. On peut donc supposer F premier à la caractéristique.

On a le corollaire suivant :

Corollaire 6.2. Soit A un anneau hensélien, excellent, d'égales caractéristiques, à corps résiduel k, et soit $U \subset \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine. Soit $\ell \in \mathbf{P}$. On a

$$\operatorname{cd}_\ell U \leq \operatorname{cd}_\ell k + \dim A.$$

En effet, soit $\widetilde{A}$ le localisé strict de A, qui est un revêtement étale galoisien infini, de groupe $G = G(\overline{k}/k)$, et soit $\widetilde{U}$ l'ouvert affine de $\operatorname{Spec} \widetilde{A}$ induit de U. En appliquant la suite spectrale d'Hochschild-Serre (VIII 8.4)

$$H^p(G, H^q(U, .)) \Longrightarrow H^{p+q}(U, .)$$

on se ramène à traiter le cas $A = \widetilde{A}$, et alors c'est un cas spécial de 6.1 bis.

[128] Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

Avec les notations ci-dessus, soit $R(A)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur A. On a $\operatorname{Spec} R(A) = \varprojlim_{\alpha} U_\alpha$ où U_α est un ouvert affine de $\operatorname{Spec} A$. Il résulte donc de la théorie de passage à la limite qu'on a

Corollaire 6.3. Soit A hensélien excellent d'égales caractéristiques, à corps résiduel k. Soit $R(A)$ le corps des fonctions rationnelles sur $\operatorname{Spec} A$. Alors pour $\ell \in \mathbf{P}$, on a

$$\operatorname{cd}_\ell R(A) \leq \operatorname{cd}_\ell k + \dim A$$

avec l'égalité si ℓ est inversible dans k, et si de plus $\ell \neq 2$ ou k n'est pas ordonnable. **620**

L'égalité dans le dernier cas résulte de X 2.4.

Enfin, en appliquant X 4.2, X 4.4, on trouve

Corollaire 6.4. Soient X un schéma noethérien excellent d'égales caractéristiques, et $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur X. Soit $\ell \in \mathbf{P}$ inversible sur X, et supposons que $\ell \neq 2$ ou qu'aucun corps résiduel de X ne soit ordonnable. Alors

$$\operatorname{cd}_\ell(X) \leq \operatorname{cd}_\ell R(X) + \dim X \leq 2 \operatorname{cd}_\ell R(X).$$

Démonstration de 6.1. On commence par une réduction analogue à celle de XIV 3. Récurrence sur δ : Il est clair que 6.1 pour $\delta \leq d$ équivaut à (6.1 bis) pour $\delta \leq d$. Pour $\delta = 0$, c'est trivial. Traitons le cas $\delta \leq 1$, sous la forme 6.1 bis. Puisque F est limite de ses sous-faisceaux constructibles (IX 2.9 (iii)), on peut supposer F constructible, et alors le support de F est contenu dans un fermé $Z \subset X$ avec $\delta(z) \leq 1$ pour chaque $z \in Z$ (XIV 2.2). Chaque composante irréductible réduite Z_i de Z est alors, ou bien un schéma affine de type fini de dimension ≤ 1 au-dessus du point fermé y de Y, ou bien un schéma quasi-fini au-dessus d'un sous-schéma fermé réduit C de Y de dimension 1. Dans ce dernier cas, on a $C = \operatorname{Spec} B$ où B est un anneau intègre strictement local de dimension 1. Un tel schéma Z_i est le spectre d'un anneau intègre strictement local, de dimension ≤ 1, ou d'un corps fini au-dessus du corps des fractions de B. Donc la dimension cohomologique de Z_i est au plus égal à 1 en tout cas, d'après X 2.3 et IX 5.7. On a une suite exacte **621**

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \prod_i F_i \longrightarrow \epsilon \longrightarrow 0$$

où F_i est la restriction de F à Z_i, d'où on tire le résultat pour Z.

Supposons maintenant que le théorème soit démontré pour les valeurs de $\delta < d$, et prouvons-le pour $\delta(F) \leq d$, supposant $d \geq 2$.

Lemme 6.5. Il suffit de traiter le cas où $X = \mathbf{E}^1_Y = \operatorname{Spec} O_Y[t]$ est l'espace affine de dimension 1, et où Y est strictement local.

La démonstration est celle de XIV 4.2 : Il est clair qu'on peut supposer Y strictement local, et que $\delta(F) \leq d$. Il faut démontrer que $H^q(X, F) = 0$ si $q > d$. On peut plonger X dans $\mathbf{E}^N_Y$, donc il suffit de traiter le cas $X = \mathbf{E}^N_Y$. Récurrence sur N : Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^N_Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{E}^{N-1}_Y \arrow[dl, "h"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

de sorte que $\mathbf{E}^N_Y$ est l'espace affine de dimension 1 sur $\mathbf{E}^{N-1}_Y$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et la suite spectrale de Leray

$$H^p(\mathbf{E}^{N-1}, R^q g_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbf{E}^N, F)$$

on voit qu'il suffit de démontrer que

$$\delta(R^q g_* F) \leq d - q.$$

622 Cela veut dire que si $z \in \mathbf{E}^{N-1}$ est un point tel que $\delta(z) \geq d - q$, alors $R^q g_* F = 0$ au point z. Mais l'hypothèse de récurrence sur N s'applique au morphisme g, et on a donc $R^q g_* F = 0$ au point z si $\delta(F, g, z) < q$. Il suffit ainsi de démontrer l'inégalité

$$\delta(F, g, z) + \delta(z) \leq \delta(F).$$

Nous laissons ce plaisir au lecteur.

Lemme 6.6. Pour démontrer 6.1 pour les valeurs de $\delta \leq d$, il suffit de démontrer ceci : Soit B un anneau local complet normal d'égales caractéristiques et de dimension d. Soit $U \subset \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine. Supposons qu'il existe un élément $x \in \operatorname{rad} B$ qui est inversible sur U. Alors

$$H^q(U, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d.$$

Ce lemme est d'ailleurs un cas spécial du corollaire 6.2.

Démonstration (cf. XIV 4.4). D'après 6.5, il suffit de traiter le cas Y strictement local et $X = \mathbf{E}^1_Y$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^1_Y \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{P}^1_Y \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

où $\mathbf{P}^1_Y$ est l'espace projectif et $\mathbf{E}^1_Y$ est déduit de $\mathbf{P}^1$ en enlevant la section Y_∞ à l'infini. Soit F un faisceau de torsion sur $\mathbf{E}^1$, avec $\delta(F) \leq d$. On a la suite spectrale

$$H^p(\mathbf{P}^1, R^q i_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbf{E}^1, F).$$

623 Or les $R^q i_* F$ pour $q > 0$ sont concentrés sur la section Y_∞ qui est isomorphe à Y. Puisque Y est strictement local, il s'ensuit que $H^p(\mathbf{P}^1, R^q i_* F) = 0$ si $p > 0$ et $q > 0$. De plus, d'après XII 5.3, on a $H^p(\mathbf{P}^1, i_* F) = 0$ si $p > 2$. Comme on veut démontrer que $H^n(\mathbf{E}^1, F) = 0$ si $n > d$, et que $d \geq 2$, il suffit de démontrer que

$$H^0(\mathbf{P}^1, R^q i_* F) = H^0(Y_\infty, R^q i_* F) = 0 \quad \text{si} \quad q > d.$$

Ce groupe est isomorphe à la fibre de $R^q i_* F$ au point y_∞ à l'infini de $\mathbf{P}^1$ dans la fibre fermée.

Or il suffit (VII 3.3 et IX 2.9 (iii)) de traiter le cas F constructible. Alors puisque $\delta(F) \leq d$, il existe un sous-schéma fermé X de $\mathbf{P}^1$ avec $\dim X \leq d$ tel que X contienne le support de F. Soient $\operatorname{Spec} A = \widetilde{X}$ le localisé strict de X au point y_∞, $\widetilde{U} = \widetilde{X} - \widetilde{X} \times_{\mathbf{P}^1} Y_\infty$, et F le faisceau induit de F sur $\widetilde{U}$. Notons que U est déduit de $\widetilde{X}$ en localisant par rapport à un élément $x \in \Gamma(X, 0_X)$. On a

$$(R^q i_* F)_{y_\infty} \simeq H^q(\widetilde{U}, \widetilde{F}).$$

Il suffit ainsi de démontrer que $H^q(\widetilde{U}, F) = 0$, si $q > d$, pour chaque faisceau de torsion $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{U}$.

On peut maintenant appliquer IX 5.6, avec $\varphi = \delta$, et on trouve qu'il suffit de démontrer que

$$H^q(V, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > \delta(V)$$

624 pour chaque V fini et intègre au-dessus de $\widetilde{U}$ et pour ℓ inversible. Soit $x : \overline{V} \to V$ le

normalisé de V. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/\ell)_V \longrightarrow x_*(\mathbf{Z}/\ell)_{\overline{V}} \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

avec $\delta(C) < \delta(V)$, et on tire de cela (par récurrence sur δ) qu'il suffit de prendre V normal.

Soit B le normalisé de A dans le corps des fonctions rationnelles sur V. Alors B est un anneau strictement local excellent d'égales caractéristiques, et V est un ouvert affine de $\operatorname{Spec} B$, obtenu en localisant par rapport à x. Soit $\widehat{B}$ le complété de B, et $\widehat{V}$ l'ouvert induit (qui est obtenu de $\operatorname{Spec} \widehat{B}$ en localisant par rapport à l'image de x dans $\widehat{B}$). D'après 4.3, on a

$$H^q(V, \mathbf{Z}/\ell) \simeq H^q(\widehat{V}, \mathbf{Z}/\ell).$$

On est donc ramené à démontrer que

$$H^q(\widehat{V}, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > \delta(V) = \dim B = \dim \widehat{B}.$$

Par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai si $\delta(V) < d$, donc le théorème 6.1 bis s'applique dans cette situation. Par conséquent, il suffit de traiter le cas $\dim \widehat{B} = d$, et puisque $\widehat{B}$ est normal, on est dans la situation du lemme, d'où le résultat.

6.7.0. On va d'abord démontrer 6.6 sous des hypothèses supplémentaires, si B est de caractéristique $p > 0$. Soient A un anneau équidimensionnel, complet, d'égales caractéristiques et $k \subset A$ un corps tel que $A/\operatorname{rad} A$ soit une extension finie de k. On dit que la k-algèbre A est formellement séparable s'il existe une sous-k-algèbre de A de la **625**
forme $k[[x_1, \dots, x_n]]$ tel que le morphisme $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k[[x]]$ soit fini et étale au point générique de $\operatorname{Spec} k[[x]]$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$).

Lemme 6.7. Soit $k \subset B$ un corps au-dessus duquel $B/\operatorname{rad} B$ soit finie. Sous l'hypothèse de récurrence sur d ci-dessus, la conclusion de 6.6 est valable si les hypothèses de 6.6 sont satisfaites et si de plus l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite :

(i) k est de caractéristique 0.

(ii) Il existe un élément $x \in \operatorname{rad} B$ qui est inversible sur U et tel que $\overline{B} = B/(x)$ soit une k -algèbre formellement séparable.

Démonstration. Choisissons des éléments $x_1 = x, x_2, \dots, x_d$ de $\operatorname{rad} B$ tels que $\{x_1, \dots, x_d\}$ engendre un idéal primaire pour $\operatorname{rad} B$. Alors B est une A -algèbre finie, où $A = k[[x_1, \dots, x_d]]$, et $\overline{B}$ est la $[[x_2, \dots, x_d]] = \overline{A}$ -algèbre B/x_1B. Comme dans le cas (ii) $\overline{B}$ est analytiquement séparable, on peut dans ce cas choisir les éléments $x_2, \dots, x_d$ d'une telle manière que $\overline{B}$ devienne une $k[[x_2, \dots, x_d]]$ - algèbre génériquement étale. Alors il s'ensuit immédiatement que B est également une A -algèbre génériquement étale, ce qui est aussi vrai, bien entendu, dans le cas (i).

Soit $b \in B$ un élément qui engendre l'extension de corps $R(A)$ sur $k((x))$. Soit $\epsilon \in k[[x]]$ le discriminant de l'équation unitaire irréductible de b au-dessus de $k[[x]]$. Dans le cas (ii), on peut choisir b de façon que x_1 ne divise pas ϵ. Écrivons de plus $\operatorname{Spec} B - U =$ **626**
$V(x_1) \cup Y$, où Y ne contient aucune composante irréductible de $V(x_1)$. Soit C l'anneau $\Gamma(Y, O_Y)$, où on prend Y avec sa structure induite réduite. En changeant au besoin les $x_2, \dots, x_d$, on peut supposer que $V(x_d)$ n'est pas contenu dans l'image de Y dans $\operatorname{Spec} A$, et que de plus dans le cas (ii) $V(x_d)$ n'est pas contenu dans $V(\epsilon)$.

Lemme 6.8. Soit $A_0 = k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\,\{x_d\}$ le localisé strict de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\,[x_d]$ au point $x_1 = x_2 = \cdots = x_d = 0$. Sous les conditions ci-dessus, il existe une A^0 -algèbre B^0, un ouvert affine $U^0 \subset \operatorname{Spec} B^0$, et un isomorphisme $A \otimes_{A^0} B^0 \simeq B$ tel que l'ouvert de $\operatorname{Spec} B$ induit de U^0 soit U.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle de 1.5 : il suffit de trouver des A^0 -algèbres B^0, C^0 et des isomorphismes $A \otimes_{A^0} B^0 \simeq B$, $A \otimes_{A^0} C^0 \simeq C$, parce qu'alors il existera ([3] 1.4) un morphisme (surjectif) et un seul $B^0 \to C^0$ qui induise le morphisme $B \to C$. On prend donc $U^0 = \operatorname{Spec} B^0 - \{(\operatorname{Spec} C^0) \cup V(x_1)\}$, et on constate immédiatement que U est induit de U^0. L'existence de C^0, et de B^0 dans le cas (ii), se prouve comme dans 1.5. L'existence de B^0 dans le cas (i) est conséquence de ([3] 5.1). (On peut aussi le démontrer directement en appliquant le lemme de Abhyankar à la ramification le long de $\{x_1 = 0\}$, et descente).

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 6.7. En appliquant encore une fois 4.3, on trouve que

$$H^q(U, \mathbf{Z}/\ell) \simeq H^q(U^0, \mathbf{Z}/\ell),$$

627 d'où il résulte qu'il suffit de démontrer que ce dernier groupe est nul pour $q > d$. Or $\operatorname{Spec} A^0$ est limite de schémas affines et étales au-dessus de $k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]\,[x_d]$, donc $\operatorname{Spec} B^0$ est limite de schémas de type fini au-dessus de $\operatorname{Spec} k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]$ dont chaque fibre est de dimension ≤ 1. Puisque $U^0 \subset \operatorname{Spec} B^0[1/x_1]$, on a

$$U^0 = \varprojlim U^0_\alpha$$

où U^0_α est affine de type fini au-dessus du schéma $V^0 = \operatorname{Spec} k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]\,[1/x_1]$ et où chaque fibre de U^0_α/V^0 est de dimension ≤ 1.

Soit $f^0 : U^0 \to V^0$ le morphisme structural. Puisque les fibres de f^0_α sont toutes de dimension ≤ 1, on a pour $v \in V^0$

$$\delta(\mathbf{Z}/\ell, f^0_\alpha, v) \leq \dim O_{V^0,v} + 1 \leq d - 1$$

(parce que $\dim O_{V^0,v} \leq d - 2$). L'hypothèse de récurrence sur d est donc applicable au morphisme f^0, et on trouve, en appliquant 6.1,

$$R^q f^0_{\alpha *}(\mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{au point} \quad v \quad \text{si} \quad q > \dim O_{V^0,v} + 1,$$

i.e. si $q > d - \dim \overline{v}$. Donc $R^q f^0_{\alpha *}(\mathbf{Z}/\ell) \neq 0$ au point v implique que $\dim \overline{v} \geq d - q$. Donc pour l'inclusion $i : V^0 \to \operatorname{Spec} k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]$ (cf. (6.0)) on a

$$\delta(R^q f^0_{\alpha *}(\mathbf{Z}/\ell)) \leq d - q,$$

628 et l'hypothèse de récurrence, sous la forme 6.1 bis, appliquée au morphisme i, implique que

$$H^p(V^0, R^q f^0_{\alpha *}(\mathbf{Z}/\ell)) = 0 \quad \text{si} \quad p + q > d.$$

La suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(V^0, R^q f^0_*(\mathbf{Z}/\ell)) \Longrightarrow H^{p+q}(U^0, \mathbf{Z}/\ell)$$

implique donc que $H^n(U^0_\alpha, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $n > d$, et comme U^0 est limite des U^0_α, on trouve que de même

$$H^n(U^0, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad n > d.$$

Ceci achève la démonstration de 6.7, donc du théorème 6.1 en caractéristique 0.

7. Morphismes affines — fin de la démonstration

Rappelons que pour terminer la démonstration de 6.1 en caractéristique $p > 0$ (toujours sous l'hypothèse de résolution), on s'était ramené par 6.6 à démontrer l'assertion suivante pour $d \geq 2$:

Lemme 7.1. Soit B un anneau local complet, normal, d'égales caractéristiques, à corps résiduel séparablement clos, et de dimension d. Soit $U \subset \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine tel qu'il existe $x \in \operatorname{rad} B$ qui soit inversible sur U. Alors

$$H^q(U, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d.$$

De plus, par hypothèse de récurrence, on peut supposer que 6.1 soit vrai pour les valeurs de $\delta < d$, et que 7.1 soit déjà démontré dans le cas particulier 6.7 (ii). **629**

Notons d'abord que la condition que B soit normal n'est pas importante. En effet, soient B arbitraire, $\pi : \overline{B} \to B$ le normalisé de B, et $\overline{U} \subset \operatorname{Spec} \overline{B}$ l'image inverse de U. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/\ell)_U \longrightarrow \pi_*(\mathbf{Z}/\ell)_{\overline{U}} \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où la dimension du support de C est $< d$, donc $H^q(U, C) = 0$ si $q > d - 1$. Puisque $H^q(U, pi_* \cdot) \simeq H^q(\overline{U}, \cdot)$ (VIII 5.6), on voit que

$$(7.2) \qquad \begin{aligned} &H^q(U, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \quad \text{équivaut à} \\ &H^q(\overline{U}, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d. \end{aligned}$$

7.3.0. On va rappeler brièvement et sans démonstration des propriétés de la notion de séparabilité formelle dont nous avons besoin. Le lecteur peut consulter (EGA IV 18.11.10, 18.11.11) : Soit A une k-algèbre locale noethérienne complète dont le corps résiduel soit une extension finie de k, et notons A' le complété de l'anneau local $A \otimes_k k'$ (où $k' = k^{1/p}$). Alors l'extension $A \to A'$ est radicielle (éventuellement infinie), comme on voit facilement — c'est l'exemple bien connu de Nagata. Il est donc inoffensif pour le calcul de la cohomologie étale de remplacer A par A' (VIII 1).

Or la condition sur une algèbre A équidimensionnelle de dimension d d'être formellement séparable, c'est-à-dire, d'être une extension finie génériquement étale de $k[[x_1, \dots, x_d]]$, s'exprime en termes du module $\widehat{\Omega}^1_{A/k}$ (EGA IV 18.11.10), ou du critère jacobien (EGA O_{IV} 22.6, IV 7.1)[128], et on voit que si A n'est pas analytiquement séparable, alors la k' -algèbre A' n'est pas réduite. On peut par exemple se réduire pour la démonstration au cas où A est donné par une équation $f = 0$, $f \in k[[x_1, \dots, x_{d+1}]]$ et appliquer le critère jacobien et le lemme suivant dont nous laissons la démonstration agréable au lecteur : **630**

Lemme 7.3. Soit $f(x_1, \dots, x_n) \in k[[x_1, \dots, x_n]]$ une série formelle. Supposons que pour chaque $i = 1, \dots, n$ il existe un élément inversible $u_i \in k[[x_1, \dots, x_n]]$ tel que $u_i f$ soit une série en x_i^p et en les $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Alors il existe un élément inversible $v \in k[[x_1, \dots, x_n]]$ tel que

$$vf \in k[[x_1^p, \dots, x_n^p]].$$

Il en résulte facilement qu'en appliquant un nombre fini de fois le procédé de remplacer (A, k) par $(\overline{A}, k')$, où $\overline{A}'$ est le normalisé de A', on se ramène à la situation où A est bien formellement séparable. De même, on peut démontrer que pour un $x \in \operatorname{rad} A$ donné, l'anneau $(A/(x))_{\text{réd}}$ deviendra une algèbre formellement séparable par le même procédé, appliqué à l'algèbre A.

En appliquant VIII 1.1 et 7.2, on trouve

Corollaire 7.4. Il suffit de démontrer (7.1) sous la condition supplémentaire que B contienne un corps k au-dessus duquel $B/\operatorname{rad} B$ soit finie, et tel que la k -algèbre $(B/(x))_{\text{réd}}$ soit formellement séparable. **631**

[128] Le corédacteur de ce séminaire n'est pas parvenu à élucider la signification de cette référence à une situation qui lui semble bien différente, et la justification de l'assertion qui suit. A. G.

La démonstration de 7.1 dans ce cas consiste en une réduction au cas particulier qu'on a traité dans 6.7 (ii) :

Avec les notations de 7.1, 7.4, soit

$$D(x) = \sum_i r_i X_i$$

le diviseur de x, de sorte que chaque X_i soit un sous-schéma irréductible fermé de Spec B de codimension 1 qui est formellement séparable au-dessus de k (c'est-à-dire, tel que $B/\mathfrak{J}(X_i)$ soit une k -algèbre formellement séparable, ∞ qui équivaut d'ailleurs à l'assertion que $(B/(x))_{\text{réd}}$ soit formellement séparable). Choisissons $y \in \operatorname{rad} B$ tel que l'on ait

$$D(y) = \sum_i (r_i - 1)X_i + \Gamma$$

où Γ ne contient aucun X_i, et considérons l'éclatement

$$f : Z \longrightarrow \operatorname{Spec} B$$

de l'idéal (x, y). Les spectres des anneaux $B[y/x]$ et $B[x/y]$ forment un recouvrement ouvert affine de Z.

Soit B_1 le localisé strict de $B[x/y]$ en l'idéal maximal engendré par $(\operatorname{rad} B, x/y)$. Pour chaque point fermé Q de la fibre fermée de $\operatorname{Spec} B[y/x] \to \operatorname{Spec} B$, notons A_Q le localisé strict de $B[y/x]$ en Q, et U_Q l'ouvert affine de Spec A_Q image inverse de U.

632 Lemme 7.5. Pour démontrer 7.1 pour l'anneau B, il suffit de démontrer que pour $q > d (\geq 2)$ on a

(i) $$H^q(\operatorname{Spec} B_1[y/x], \mathbf{Z}/\ell) = 0$$

et

(ii) $$H^q(U_Q, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{pour chaque } Q.$$

Démonstration. On a des immersions ouvertes

$$U \hookrightarrow \operatorname{Spec} B[1/x] \hookrightarrow \operatorname{Spec} B[y/x],$$

donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "k"'] & & \operatorname{Spec} B[y/x] \arrow[dl, "j"] \\ & Z & \end{tikzcd}.$$

Si Q est un point fermé de la fibre fermée de $\operatorname{Spec} B[y/x] \to \operatorname{Spec} B$, on a $(R^q i_* \mathbf{Z}/\ell)_Q = 0$ si $q > d$, par hypothèse. Pour chaque point P de $\operatorname{Spec} B[y/x]$ qui n'est pas fermé dans la fibre fermée de $\operatorname{Spec} B[y/x] \to \operatorname{Spec} B$, on a $\delta(F, i, P) < d$, où $F = (\mathbf{Z}/\ell)_U$ (notation de (6.0)). Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence et 6.1 au morphisme i, on trouve que pour le morphisme $\operatorname{Spec} B[y/x] \to \operatorname{Spec} B$ on a

$$(R^q i_* \mathbf{Z}/\ell) \leq d - q.$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence sous la forme 6.1 bis, appliqué à ce dernier morphisme, implique que

$$H^p(\operatorname{Spec} B[y/x], R^q i_* \mathbf{Z}/\ell) = 0$$

633 si $q > 0$ et $p > d - q$. Avec la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(\operatorname{Spec} B[y/x], R^q i_* \mathbf{Z}/\ell) \Longrightarrow H^{p+q}(U, \mathbf{Z}/\ell).$$

on se ramène, pour la démonstration de 7.1, à démontrer que

$$H^p(\operatorname{Spec} B[y/x], i_*\mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad p > d.$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/\ell \longrightarrow i_*(\mathbf{Z}/\ell)_U \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{7.6}$$

où $\delta(C) < d$. Il suffit donc (encore par récurrence) de démontrer que

$$H^p(\operatorname{Spec} B[y/x], \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad p > d. \tag{7.7}$$

Or l'immersion ouverte $\operatorname{Spec} B[y/x] \xrightarrow{j} Z$ est obtenue en enlevant de Z le sous-ensemble fermé C « à l'infini », et s'identifie dans l'autre ouvert $\operatorname{Spec} B[x/y]$ de Z à l'ouvert $C = V(x/y)$. Les $R^q j_*\mathbf{Z}/\ell$ sont concentrés sur C, et le morphisme $C \to \operatorname{Spec} B$ est une immersion fermée. Par conséquent, on a $H^p(Z, R^q j_*\mathbf{Z}/\ell) = 0$ si p et $q > 0$. Puisque la fibre fermée de $Z \to \operatorname{Spec} B$ est de dimension 1 et que ce morphisme est propre, XII 5.3 bis implique que $H^p(Z, j_*\mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $p > 2$. La suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(Z, R^q j_*\mathbf{Z}/\ell) \Longrightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} B[y/x], \mathbf{Z}\ell)$$

donne donc des isomorphismes

$$H^q(\operatorname{Spec} B[y/x], \mathbf{Z}/\ell) \simeq H^0(Z, R^q j_*\mathbf{Z}/\ell) \simeq (R^q j_*\mathbf{Z}/\ell)_P$$

si $q > 2$, où P est le point « à l'infini » de Z. Ces fibres ne sont autres (VIII 5) que **634**

$$(R^q j_*\mathbf{Z}/\ell)_P \simeq H^q(\operatorname{Spec} B_1[y/x], j_*\mathbf{Z}/\ell).$$

D'après (7.7), il suffit donc de démontrer que ces derniers groupes sont nuls si $q > d$ (≥ 2). On a une suite exacte analogue à (7.6) qui, jointe à l'hypothèse de récurrence montre qu'il suffit que

$$H^q(\operatorname{Spec} B_1[y/x], \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

d'où le lemme.

Démonstration de 7.5 (i).

Considérons l'ensemble fermé $C = V(x/y)$ de $\operatorname{Spec} B[x/y]$, avec la structure induite réduite. On voit immédiatement que l'immersion fermée de C dans $\operatorname{Spec} B$ induite par le morphisme $Z \to \operatorname{Spec} B$ identifie C au sous-schéma fermé $X = \bigcup X_i$ de $\operatorname{Spec} B$. Puisque

$$D(x) = \sum r_i X_i$$
$$D(y) = \sum (r_i - 1) X_i + \Gamma,$$

l'élément x/y engendre l'idéal $\mathfrak{I}(X_i)$ localement au point générique de X_i, où l'anneau local est un anneau de valuation discrète parce que B est normal. Par conséquent, le morphisme $\operatorname{Spec} B[x/y] \to \operatorname{Spec} B$ est un isomorphisme au voisinage d'un tel point, et l'élément x/y s'annule avec l'ordre 1 sur chacune des composantes irréductibles C_i **635**
(correspondant à X_i) de C.

Puisque l'ensemble fermé C se relève à $\operatorname{Spec} B_1$, cela reste vrai si l'on remplace l'anneau $B[x/y]$ par B_1, donc $B_1/(x/y)$ est un anneau complet qui est une k -algèbre formellement séparable.

Pour démontrer 7.5 (i), on peut d'abord appliquer 4.3, qui permet de remplacer B_1 par son complété $\widehat{B}_1$, ce qui n'affecte pas l'anneau $B_1/(x/y)$. D'après (7.2), on peut de plus remplacer $\widehat{B}_1$ par son normalisé $\overline{B}_1$. Puisque B_1 (donc $\widehat{B}_1$) est déjà régulier aux points génériques des C_i, le morphisme $\operatorname{Spec} \overline{B}_1 \to \operatorname{Spec} \widehat{B}_1$ est un isomorphisme en ces points, donc $\overline{B}_1/(x/y)$ est encore une k - algèbre formellement séparable. On est ainsi ramené au cas particulier 6.7 (ii), d'où le résultat.

Démonstration de 7.5 (ii).

Choisissons le point Q de la fibre fermée de Spec $B[y/x] \to$ Spec B. Le localisé strict A_Q s'écrit comme limite

$$A_Q = \varinjlim A$$

où A parcourt une catégorie filtrante d'anneaux étales et de type fini au-dessus de $B[y/x]$. Soit l'ouvert affine U_A de Spec A, image inverse de U. Puisque x est inversible sur U_A, le morphisme $U_A \to$ Spec B est étale, et U_A est normal. Par conséquent, si l'on dénote par C le normalisé de B dans le corps $R(A)$ des fonctions rationnelles sur A, on a une immersion ouverte

$$U_A \longrightarrow \operatorname{Spec} C.$$

636 Il suffit (VII 5.7) de démontrer que pour chaque A, l'image de $H^q(U_A, \mathbf{Z}/\ell)$ dans $H^q(U_Q, \mathbf{Z}/\ell)$ est nulle si $q > d$. Puisque x est inversible sur U_Q, le morphisme $U_Q \to$ Spec A se factorise par rapport à Spec $A[1/f]$, si $f \in B$ est un élément arbitraire tel que f soit divisible par x dans $B[y/x]$ et que f/x ne s'annule pas au point Q. Il suffit ainsi de démontrer que pour un tel f convenable, on a

$$H^q(U_{A,f}, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad a > d,$$

où $U_{A,f} = U_A - V(f)$ est l'ouvert affine de Spec $A[1/f]$, qui est aussi un ouvert affine de Spec C.

Soit $c \in k$ un élément tel que $y/x + c$ ne s'annule pas en Q, et soit J l'idéal dans B de l'ensemble fermé $\Gamma \cap X$. Alors si

$$f \equiv y + cx (\text{mod } J^N) \quad N > 0, \tag{7.8}$$

l'élément f satisfait à la condition ci-dessus : En effet, on voit immédiatement que dans Spec $B[y/x]$ on a $V(J) = V(x)$. Donc (7.8) implique bien que f est divisible par x, d'où

$$f/x \equiv y/x + c (\text{mod } J).$$

Puisque J s'annule en Q, et que $y/x + c$ n'est pas nul en Q, ceci démontre notre assertion.

Or $\Gamma \cap X$ est un sous-ensemble fermé de Spec B de codimension 2. Par conséquent, on peut choisir un f satisfaisant à (7.8), appelons-le z, tel que $V(z) \cap V(y)$ soit également de
637 codimension 2. Choisissons aussi des éléments $x_3, \dots, x_d$ tels que $y, z, x_3, \dots, x_d$ soit un système de paramètres de l'anneau B. Alors B, donc C aussi, est une $k[[y, z, x_3, \dots, x_d]]$ -algèbre finie.

Soit C^0 le normalisé de $k[[y, z, x_3, \dots, x_d]]$ dans la clôture séparable de $k\ ((y, z, x))$ dans le corps des fonctions rationnelles $R(C)$, de sorte que C soit une extension radicielle de C^0, et que C^0 soit une extension génériquement étale de $k\ ((y, z, x))$ (où $x = x_3, \dots, x_d$).

Choisissons une combinaison linéaire

$$f = az + by \quad (a, b \in k),$$

telle que le morphisme

$$\operatorname{Spec} C^0 \longrightarrow \operatorname{Spec} k[[z, y, x]]$$

soit étale au-dessus du point générique de $V(f)$, et tel que f/x ne s'annule pas en Q dans Spec $B[y/x]$. Il suffit de démontrer que

$$H^q(U_{A,f}, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

donc (VIII 1.1) de démontrer que

$$H^q(U^0_{A,f}, \mathbf{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

où $U^0_{A,f}$ est l'ouvert de Spec C^0 correspondant à l'ouvert $U_{A,f}$ de Spec C, qui est un ouvert affine, comme on voit par descente (EGA IV 2.7.1 (xiii)). Mais par construction, l'élément f de C^0 est inversible sur $U^0_{A,f}$, et $C^0/(f)$ est une k -algèbre formellement séparable. On est donc dans la situation de 6.7 (ii), ce qui achève la démonstration de 7.5 (ii), donc de 6.1.

Bibliographie

[1] Abhyankar, S. Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$. 638
Annals of Math. vol. 63 (1963), et Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press (1966).

[2] Abhyankar, S. Resolution of singularities of arithmetical surfaces. Arithmetical Algebraic Geometry, New York (1966).

[3] Artin, M. Etale coverings of schemes over hensel rings, Amer, Journal Math. vol 88 *n*° 4 p 915-934 (1966).

[4] Hironaka, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II. Annals of Math. vol. 79, *n*° 1, 2 (1964).

[5] Weierstrass, K. Einige auf die analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. Mathematische Werke von K. Weierstrass, Bd 2, Berlin (1895).

[6] Bourbaki, N. Algèbre commutative, Chap. 3.