Existence, unicité, convergence et autres joyeusetés dans les espaces fonctionnels

Exercice I. Existence et unicité dans un cas simplifié

Soit l'équation du transport en dimension deux pour un gaz de photons

$$\frac{1}{c}\partial_t f + \Omega.\nabla f + \sigma f = \frac{\sigma_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t;\theta)d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

La direction d'un photon est $\Omega = (\cos\theta, \sin\theta)$. On suppose pour simplifier que la donnée initiale est périodique

$$f_0(x_1+1, x_2) = f_0(x_1, x_2+1) = f_0(x_1, x_2), \ \forall x_1, x_2,$$

de sorte que l'on étudie le problème sur le tore $\Pi = [0,1]\times[0,1]$ avec des conditions aux bords périodiques.

1. Soit C un domaine quelconque. On rappelle l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_C uv dx\right| \le \left(\int_c |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_c |v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

pour deux réels positifs p et q que l'on dit conjugués. Montrer que pour $p \ge 1$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t;\theta)d\theta\right| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,t;\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. On considère la suite f^k définie par

$$\frac{1}{c}\partial_t f^{k+1} + \Omega.\nabla f^{k+1} + \sigma f^{k+1} = \frac{\sigma_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^k(x,t;\theta)d\theta$$

avec la condition initiale $f(t=0) = f_0$. On pose $\mathcal{D} = \Pi\times[0,T[\times[0,2\pi[$ pour un temps $T>0$. Montrer que

$$\|f^{k+1}\|_{L^p(\mathcal{D})} \le E\|f_0\|_{L^p(\Pi\times[0,2\pi])} + D\|f^k\|_{L^p(\mathcal{D})}$$

avec $0 < D < 1$ dans le cas $\sigma > \sigma_s$.

3. Sous cette hypothèse montrer que la suite des f^k est convergente dans $L^p(\mathcal{D})$ vers une limite notée f.

4. Expliquer en quoi les résultats du cours sont plus puissants.

5. Montrer que si $f_0 \ge 0$ alors f aussi.

6. Que dire pour un domaine Π borné avec des conditions au bord de Dirichlet, de réflexion diffusive ou spéculaire ?

Exercice II. Le contre-exemple de Jeffrey Rauch

On pourrait penser que l'intuition physique permet de se passer d'une analyse rigoureuse de convergence. Il n'en est rien, comme le démontre ce contre-exemple.

Soit l'équation

$$\partial_t f + v\partial_x f + \sigma f = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La donnée initiale $f_0(x) = a(x)\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ correspond à un paquet d'onde de petite longueur d'onde. Le support de a est borné. Le petit paramètre est ε. Ce paquet d'ondes peut aussi s'interpréter comme un groupe de neutrons de densité fortement variable.

1. Écrire la solution exacte.

2. Vérifier que $\partial_t f = O(\varepsilon^{-1})$, $\partial_x f = O(\varepsilon^{-1})$ et $f = O(1)$. En "déduire" que f peut s'approcher par g, solution de l'équation approchée

$$\partial_t g + v\partial_x g = 0, \quad g_0 = f_0.$$

3. Calculer g. La démarche est-elle correcte ?

4. Pour comprendre l'erreur, il faut mettre en place une stratégie d'étude de $e = g - f$. Pour cela on commence par écrire

$$\partial_t e + v\partial_x e + \sigma e = b \text{ à déterminer.}$$

Montrer ensuite que

$$\frac{d}{dt}\left(\|e(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) \le 2\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|b(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En déduire que e est petit dès que b l'est aussi. Expliquer le paradoxe.

Exercice III. Limite de diffusion de l'équation du télégraphe.

Finir le dernier exercice de la PC 1. De même on fera toutes les hypothèses techniques nécessaires. L'espace fonctionnel choisi est $L^2(\mathbb{R})$.

Pour simplifier (un peu) on fera l'hypothèse que toutes les dérivées de w et z au temps t sont bornées dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice IV. Un problème d'absorption très simple

Soit un colonne ($x \geq 0$) d'un gaz à température uniforme T. Le rayonnement $I(x,t;\nu,\theta)$ ($0 < \nu < \infty$ et $0 < \theta < 2\pi$) entre en $x = 0$. D'où l'équation

$$\frac{1}{c}\partial_t I + \cos\theta \partial_x I = \sigma \left(B_\nu(T) - I \right)$$

où $B_\nu(T)$ est la planckienne. On s'intéresse aux solutions stationnaires et on étudie la pénétration du rayonnement dans la colonne.

1. Écrire le problème stationnaire qu'il faut résoudre. Montrer que

$$I(x;\nu,\theta) = B_\nu(T) \text{ pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

2. Montrer que le rayonnement devient rapidement Planckien en fonction du produit σx pour $x > 0$.

Exercice V. Le problème de Milne (ou problème de l'albedo).

Ce problème concerne l'absorption d'un groupe de neutrons incidents monocinétiques (la vitesse est normalisée : $|v| = 1$) sur un domaine infini $x \in]-\infty, 0]$. On considère l'équation

$$\partial_t u + \cos\theta \partial_x u + \sigma u = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} u(x,\mu')d\mu'.$$

Ici $\mu = \cos\theta$. On pose $u^+(x,\mu) = u(x,\mu)$ pour $\mu = \cos\theta \in [0,1]$ et $u^-(x,\mu) = u(x,\mu)$ pour $\mu = -\cos\theta \in [-1,0]$.

L'objectif est de caractériser $u^+(0,\mu)$ en fonction des neutrons entrants dont la distribution est $u^-(0,\mu) = g(\mu)$. C'est le problème de l'albedo.

1. Montrer que le problème stationnaire peut s'écrire, à un changement de variables près,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\partial_x u^+ + u^+ - \frac{c}{2}\int_0^1 (u^+ + u^-)d\mu' = 0, \\ -\mu\partial_x u^- + u^- - \frac{c}{2}\int_0^1 (u^+ + u^-)d\mu' = 0, \end{array} \right.$$

avec $c = \frac{\sigma_s}{\sigma}$.

2. On décide de paramétrer le problème par

$$\mu u^+(0,\mu) = \int_0^1 R(\mu,\mu')\mu' u^-(0,\mu')d\mu'.$$

Expliquer pourquoi on a aussi pour tout $x < 0$

$$\mu u^+(x,\mu) = \int_0^1 R(\mu,\mu')\mu' u^-(x,\mu')d\mu'.$$

3. Expliquer comment on peut éliminer u^+ dans les équations du **1.** et du **2.** Tous calculs faits on trouve une équation intégrale non linéaire

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) R(\mu,\lambda) u^-(x,\lambda)\lambda d\lambda = \frac{c}{2}\left(1 + \int_0^1 R(\mu,\lambda)d\lambda\right) \times \int_0^1 \left(u^-(x,\mu') + \frac{1}{\mu'}\int_0^1 R(\mu',\lambda)u^-(x,\lambda)d\lambda\right) d\mu'.$$

En déduire l'identité

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right) R(\mu,\mu') = \frac{c}{2}\left(1 + \int_0^1 R(\mu,\lambda)d\lambda\right)\left(\frac{1}{\mu'} + \int_0^1 \frac{R(\lambda,\mu')}{\lambda}d\lambda\right)$$

4. On pose $S(\mu,\mu') = \mu' R(\mu,\mu')$. Montrer la symétrie de S : $S(\mu,\mu') = S(\mu',\mu)$.

Proposer une interprétation physique.

5. On définit alors la fonction de Chandrasekhar (prix Nobel de physique)

$$H(\mu) = 1 + \int_0^1 \frac{S(\lambda,\mu)}{\lambda}d\lambda.$$

Montrer que la connaissance de H est suffisante pour résoudre le problème de l'albedo. Montrer que H vérifie l'équation intégrale non linéaire

$$H(\mu) = 1 + \frac{c}{2}H(\mu)\int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu'.$$

6. On suppose finalement que c est petit. Montrer que $H = 1$ en première approximation. En déduire une solution approchée du problème de l'albedo

$$u^+(0,\mu) \approx \frac{c}{2}\int_0^1 \frac{\mu' g(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu'.$$