MP 567 Transport et Diffusion Xavier Blanc

Théorie du calcul critique

Approche analytique ou continue

Proposition de correction

Exercice I.

1. Le problème spectral direct (de solution λ, N) s'écrit

$$\begin{cases} \lambda N(x) + N'(x) = 0, \\ N(0) = \int_0^\infty B(x)N(x)dx. \end{cases}$$

Donc

$$N(x) = e^{-\lambda x} N(0),$$

et encore

$$N(0) = \int_0^\infty B(x)e^{-\lambda x} dx N(0).$$

La fonction

$$f(\lambda) = \int_0^\infty B(x)e^{-\lambda x} dx$$

est telle que

$$f' < 0,\ f(0) > 1,\ f(\infty) = 0.$$

Il existe donc une unique solution $\lambda > 0$.

Montrer qu'il possède une unique solution $\lambda > 0$, $N > 0$.

2. Le point délicat concerne la deuxième équation. Pour ce faire nous repartons de la formule de dualité

$$(AN, \phi) = (N, A^*\phi),$$

pour le produit scalaire L^2. D'où

$$\int_0^\infty (\lambda N(x) + N'(x))\, \phi(x) dx$$

$$= \int_0^\infty N(x) \left(\lambda\phi(x) - \phi'(x)\right) dx - N(0)\phi(0)$$

$$= \int_0^\infty N(x) \left(\lambda\phi(x) - \phi'(x) - B(x)\phi(0)\right) dx.$$

D'où l'expression du problème adjoint

$$\lambda\phi(x) - \phi'(x) - B(x)\phi(0) = 0.$$

On a

$$\left(e^{-\lambda x}\phi(x)\right)' = -e^{-\lambda x} B(x)\phi(0),$$

donc

$$e^{-\lambda x}\phi(x) = \phi(0) - \left(\int_0^x e^{-\lambda y} B(y) dy\right)\phi(0)$$

$$= \left(\int_x^\infty e^{-\lambda y} B(y) dy\right)\phi(0)$$

ce qui prouve que $\phi > 0$.

On trace la fonction

$$x \mapsto e^{-\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda y} B(y) dy.$$

On observe qu'elle est bornée et nulle dès que x est grand.

3. ϕ est la fonction d'importance.

4. On a la formule

$$n(t,x) \approx e^{-\lambda t}\,(n_0, \phi)\, N(x) = e^{\lambda t} N(x) \int_0^\infty n_0(x)\phi(x) dx$$

ce qui montre une croissance exponentielle: il faudrait prendre en compte la mortalité pour rétablir une situation stable ($\lambda = 0$).

Exercice II.

Dans le cas discret il suffit d'appliquer le résultat du cours. Nous explorons dans ce qui suit le cas continu.

1. On fait un raisonnement par récurrence en p pour montrer que les $\phi_1^{(p)}$ et $\phi_2^{(p)}$ sont tous positifs.

2. Soient les différences $\varphi_1^{(p)} = \phi_1^{(p+1)} - \phi_1^{(p)}$ et $\varphi_2^{(p)} = \phi_2^{(p+1)} - \phi_2^{(p)}$, avec

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (d_1 \nabla \varphi_1^{(p+1)}) + \sigma_{a1}\varphi_1^{(p+1)} = \nu\sigma_{f2}\varphi_2^{(p)}, \\ -\nabla \cdot (d_2 \nabla \varphi_2^{(p+1)}) + \sigma_{a2}\varphi_2^{(p+1)} = \sigma_r\varphi_1^{(p)}. \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $\varphi_1^{(p+1)}$, on intègre par partie. D'où

$$\int_\Omega d_1|\nabla\varphi_1^{(p+1)}|^2 + \sigma_{a1}(\varphi_1^{(p+1)})^2$$

$$= \int_\Omega \nu\sigma_{f2}\varphi_2^{(p)}\varphi_1^{(p+1)}.$$

Donc

$$\sigma_{a1}\|\varphi_1^{(p+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \nu\sigma_{f2}\|\varphi_2^{(p)}\|_{L^2(\Omega)} \times \|\varphi_1^{(p+1)}\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\sigma_{a1}\|\varphi_1^{(p+1)}\|_{L^2(\Omega)} \le \nu\sigma_{f2}\|\varphi_2^{(p)}\|_{L^2(\Omega)}.$$

De même

$$\sigma_{a2}\|\varphi_2^{(p+1)}\|_{L^2(\Omega)} \le \sigma_r\|\varphi_1^{(p)}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cela montre que

$$\|\varphi_1^{(p+1)}\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\nu\sigma_{f2}\sigma_r}{\sigma_{a1}\sigma_{a2}}\|\varphi_1^{(p-1)}\|_{L^2(\Omega)}.$$

La série converge alors géométriquement dès que

$$\frac{\nu\ \sigma_{f2}\ \sigma_r}{\sigma_{a1}\ \sigma_{a2}} < 1 \Longleftrightarrow \nu < \frac{\sigma_{a1}\ \sigma_{a2}}{\sigma_{f2}\ \sigma_r}.$$

En fait l'inégalité précédente établit que le facteur multiplicatif est < 1. On retrouve le critère du cours.

3. Il y au moins trois conséquences. Il n'y a pas de solution au calcul de criticité car $\nu \ge 1$. La série ne converge pas. La solution du calcul avec source n'est pas physique (les solutions peuvent devenir négatives).

Exercice III.

1.

On part du modèle

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(d_1\nabla\phi_1) + \sigma_{a1}\phi_1 = \frac{1}{\lambda}\nu\sigma_{f2}\phi_2, \\ -\nabla\cdot(d_2\nabla\phi_2) + \sigma_{a2}\phi_2 = \sigma_r\phi_1, \end{cases}$$

dans lequel λ est le facteur de multiplication effectif. Sous forme condensée

$$-D\phi + \sigma_a\phi = \frac{1}{\lambda}F\phi + G\phi, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2).$$

Les variations sont reliées entre elles par

$$\left(-D + \sigma_a - \frac{1}{\lambda}F - G\right)\delta\phi$$

$$+\left(-\delta D + \delta\sigma_a - \frac{1}{\lambda}\delta F - \delta G\right)\phi + \frac{\delta\lambda}{\lambda^2}F\phi = 0.$$

La fonction adjointe $\phi^\star$ est solution de

$$-D^\star\phi^\star + \sigma_a^\star\phi^\star = \frac{1}{\lambda}F^\star\phi^\star + G^\star\phi^\star, \quad \phi^\star = (\phi_1^\star, \phi_2^\star).$$

Ici $D = D^\star$ et $\sigma = \sigma^\star$. Donc

$$\left(\phi^\star, \left(-\delta D + \delta\sigma_a - \frac{1}{\lambda}\delta F - \delta G\right)\phi\right)$$

$$+\frac{\delta\lambda}{\lambda^2}(\phi^\star, F\phi) = 0.$$

Cette formule permet de calculer la dérivée de λ par rapport aux différents paramètres à partir des dérivées des opérateurs.

On s'intéresse à présent à $\partial_\nu\lambda$. On a directement

$$\frac{\partial_\nu\lambda}{\lambda^2}(\phi^\star, F\phi) = \left(\phi^\star, \frac{1}{\lambda}(\partial_\nu F)\phi\right).$$

Or $\partial_\nu F = \frac{1}{\nu}F$. Donc $\partial_\nu\lambda = \frac{\lambda}{\nu}$. La solution est $\frac{\lambda}{\nu}$ = Constante. C'est une solution évidente et sans intérêt, car dans le modèle initial, seul le produit $\frac{\nu}{\lambda}$ apparaissait.

2. On a

$$\partial_{\sigma_{a_1}}\lambda = -\lambda^2\frac{(\phi^\star, (\partial_{\sigma_{a_1}}\sigma)\phi)}{(\phi^\star, F\phi)}$$

$$= -\lambda^2\frac{(\phi_1^\star, \phi_1)}{\nu\sigma_{f_2}(\phi_1^\star, \phi_2)}.$$

Toutes les fonctions $\phi_1^\star, \phi_2, \cdots$ sont > 0 (c'est un résultat extrêmement important). Donc $\partial_{\sigma_{a_1}}\lambda < 0$: si on augmente l'absorption alors le facteur multiplicatif diminue.

3. Il faut diminuer l'absorption. On peut chercher aussi à ralentir une plus grande proportion de neutrons rapides ce qui va favoriser les réactions de fission. Pour cela il faut augmenter σ_r.

Exercice IV.

1. On a

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty n(t,x)dx = \int_0^\infty \partial_t n(t,x)dx$$

$$= \int_0^\infty (-\partial_x n - B(x)n(x) + 4B(2x)n(2x))dx$$

$$= \int_0^\infty B(x)n(x)dx > 0.$$

Et par ailleurs

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty n(t,x)xdx = \int_0^\infty \partial_t n(t,x)xdx$$

$$= \int_0^\infty (-\partial_t n - B(x)n(x) + 4B(2x)n(2x))xdx = 0.$$

2. Le problème critique direct est

$$\lambda N(x) + \partial_x N(x) + B(x)N(x) = 4B(2x)N(2x).$$

Le problème adjoint est

$$\lambda\phi(x) - \partial_x\phi(x) + B(x)\phi(x) = 2B(\frac{x}{2})\phi(\frac{x}{2}).$$

La condition en zéro est $N(0) = 0$. Il n'y a pas de condition en zéro pour ϕ.

Au temps long on a

$$n(t,x) \approx e^{\lambda t}N(x)\int_0^\infty n_0(x)\phi(x)dx.$$

Malthus a théorisé la croissance de la population humaine (et la compétition avec le peu de croissance des ressources alimentaires).

3. Sur le problème adjoint on voit directement que $\lambda = b$ et $\phi(x) = 1$ convient. Par ailleurs

$$\partial_x N(x) = \overline{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n 2^{n+1}be^{-2^{n+1}bx},$$

et

$$4bN(2x) = 4b\overline{N}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_n e^{-2^{n+2}bx}$$

$$= -4b\overline{N}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha_{n-1}ne^{-2^{n+1}bx}.$$

La relation est vraie ssi

$$b\alpha_n - \alpha_n 2^{n+1}b + b\alpha_n = -4b\alpha_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

et

$$b\alpha_0 - \alpha_0 2b + b\alpha_0 = 0.$$

Prenons $\alpha_0 = 1$ puisque cette équation est trivialement vérifiée. La récurrence s'écrit ensuite

$$\alpha_n = \frac{4}{2^{n+1}-2}\alpha_{n-1} = \frac{2}{2^n - 1}\alpha_{n-1}.$$

4. Pour x suffisament grand ($2bx \geq 1$) la série est alternée de premier terme > 0. Donc le résultat est positif.

5. C'est un peu technique mais sans difficulté véritable. On commence par multiplier par la fonction $\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\mathrm{x}))$. L'égalité

$$\int_0^\infty |N(x)|dx = \int_0^\infty N(x)\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\frac{\mathrm{x}}{2}))\mathrm{dx}.$$

indique que $\mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\mathrm{x})) = \mathrm{sgn}(\mathrm{N}(\frac{\mathrm{x}}{2}))$ pour tout x. Or $N(x) > 0$ pour x grand. Donc $N(x) > 0$ pour tout x.