MP 567 Transport et Diffusion Xavier Blanc

Schéma Diamant et formulation en flux pair

Proposition de correction

Exercice I.

1. La relation diamant est

$$u^{k,n}_{j+\frac12} + u^{k,n}_{j-\frac12} = 2u^{k,n}_j, \quad k = 1, 2.$$

On a

$$\overline{u}^n_j = \frac14 \left(u^{1,n}_{j-\frac12} + u^{2,n}_{j-\frac12} + u^{1,n}_{j-\frac12} + u^{2,n}_{j+\frac12} \right).$$

2. +3. Les $\cdots$ représentent la discrétisation de f. On a les relations

$$\alpha_n \frac{2\mathbf{i}\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} e^{\mathbf{i}\theta j\Delta x} + \alpha_n \sigma \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) e^{i\theta j \Delta x}$$

$$= \sigma^\star \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) e^{i\theta j\Delta x} + \cdots$$

donc

$$\left(\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) \right) \alpha_n$$

$$= \sigma^\star \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) + \cdots.$$

De même

$$\left(-\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) \right) \beta_n$$

$$= \sigma^\star \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) + \cdots.$$

La vitesse de convergence est donnée par les valeurs propres de l'opérateur linéaire d'itération. Posons donc $\alpha_n = \lambda\alpha_{n-1} = \lambda\alpha$ et $\beta_n = \lambda\beta_{n-1} = \lambda\beta$. Alors λ vérifie

$$\begin{cases} \left(\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) \right) \lambda\alpha = \sigma^\star \frac{\alpha+\beta}{2} \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}), \\ \left(-\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) \right) \lambda\beta = \sigma^\star \frac{\alpha+\beta}{2} \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}). \end{cases}$$

Il vient en faisant la différence

$$\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x}(\alpha+\beta) + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2})(\alpha-\beta) = 0$$

puis en sommant

$$\left(\frac{\left(\frac{2\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x}\right)^2}{\sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2})} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) \right) \lambda = \sigma^\star \cos(\frac{\theta\Delta x}{2}).$$

Finalement

$$\lambda = \frac{\Delta x^2 \sigma\sigma^\star \cos(\frac{\theta\Delta x}{2})^2}{(2\sin(\frac{\theta\Delta x}{2}))^2 + \Delta x^2(\sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}))^2} < 1$$

car $\sigma^\star < \sigma$. Mais pour $\sin(\frac{\theta\Delta x}{2} \approx 0$ le taux de convergence est en $\frac{\sigma^\star}{\sigma}$ qui peut être très proche de 1.

4. La diffusion synthétique s'écrit

$$\mu_k \frac{v^{k,n}_{j+\frac12} - v^{k,n}_{j-\frac12}}{\Delta x} + \sigma \frac{v^{k,n}_j + v^{k,n}_{j-\frac12}}{2} = \sigma^\star \overline{u}^{n-1}_j + f_j$$

avec éventuellement la relation Diamant pour v, suivie de

$$\overline{u}^n = \overline{v}^n + \overline{e}^n = \frac12 \left(\overline{v}^{k=1,n} + \overline{v}^{k=2,n} \right) + \overline{e}^n$$

sachant que $\overline{e}^n$ est solution de

$$-\frac{2}{\sigma} \frac{\overline{e}^n_{j+1} - 2\overline{e}^n_j + \overline{e}^n_{j-1}}{\Delta x^2} = \sigma^\star(\overline{v}^n_j - \overline{u}^{n-1}_j).$$

5. On pose $\sigma_D = \sigma - \sigma^\star \geq 0$ (toujours). L'approximation de diffusion est

$$-\frac{1}{\sigma^\star}\partial_{xx}u + \sigma_D u = \cdots$$

Elle s'otient (par exemple) en posant $\sigma = \sigma^\star + \varepsilon^2\sigma_D$, en (re)faisant les calculs, puis en prenant $\varepsilon = 1$ à la fin du calcul.

Notons
$$\overline{u}_j^n = \delta_n e^{i\theta j \Delta x}.$$
Notons avec un $\widetilde{}$ les coefficients de Fourier de v.

On a les relations
$$\left(\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2})\right)\widetilde{\alpha}_n$$
$$= \sigma^\star \delta_{n-1}\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) + \cdots$$
et
$$\left(-\frac{2i\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\Delta x} + \sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2})\right)\widetilde{\beta}_n$$
$$= \sigma^\star \delta_{n-1}\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}) + \cdots .$$
ainsi que pour l'approximation discrète de diffusion
$$\left(\frac{4\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\sigma^\star\Delta x^2} + \sigma_D\right)(\delta_n - \frac{\overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n}{2})$$
$$= \sigma^\star(\frac{\overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n}{2} - \delta_{n-1}).$$
Or
$$\frac{\overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n}{2} = \lambda\delta_{n-1}.$$
Donc
$$\left(\frac{4\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\sigma^\star\Delta x^2} + \sigma_D\right)\delta_n$$
$$= \left(\frac{4\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})}{\sigma^\star\Delta x^2} + \sigma_D + \sigma^\star\right)\lambda\delta_{n-1} - \sigma^\star\delta_{n-1}.$$
La valeur propre est alors modifiée. Pour simplifier les calculs on prend $\sigma_D = 0$. Alors
$$\mu = \lambda + \frac{\Delta x^2\sigma^2}{4\sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})}(\lambda - 1)$$
$$= \frac{\Delta x^2\sigma^2\cos(\frac{\theta\Delta x}{2})^2}{(2\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})^2 + \Delta x^2(\sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}))^2}$$
$$-\frac{\Delta x^2\sigma^2}{(2\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})^2 + \Delta x^2(\sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}))^2}$$
$$= -\frac{\Delta x^2\sigma^2\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})^2}{(2\sin(\frac{\theta\Delta x}{2})^2 + \Delta x^2(\sigma\cos(\frac{\theta\Delta x}{2}))^2}.$$
Cette quantité est strictement supérieure à 1 en valeur absolue dès que $\sigma\Delta x < \frac{\pi}{2}$.

Exercice II. Il suffit de refaire tous les calculs posément. On développe toutes les quantités discrètes du schéma Diamant en suivant les étapes du problème continu.

Exercice III. Cet exercice ne pose pas de problème particulier. Il s'agit principalement de montrer que l'équation peut se remettre dans un cadre elliptique.

Cela permet d'avoir des méthodes numériques optimales (méthode des élements finis) adaptées à la géométrie en 2D et 3D (bords, éléments courbes, . . .).