Exercice I.

On utilise le critère en Fourier sur l'intervalle $[0,1]$ avec des conditions aux bords périodiques. On pose

$$u(x,t) = u_j(t) \text{ pour } x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}},$$

de sorte que le coefficient de Fourier est

$$\widetilde{u}_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 u(x,t)e^{-2\mathbf{i}\pi jx},$$

$$u(x,t) = \sum_j \widetilde{u}_j(t)e^{2\mathbf{i}\pi jx}.$$

Remarquons que

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx = \frac{1}{2\pi}\sum_j |\widetilde{u}_j(t)|^2.$$

1. On a

$$\widetilde{u}_j'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{\Delta x^2}e^{-2\mathbf{i}\pi jx}dx$$
$$= \frac{2\cos(2\pi j\Delta x) - 2}{\Delta x^2}\widetilde{u}_j(t) = -4\frac{\sin(\pi j\Delta x)^2}{\Delta x^2}\widetilde{u}_j(t).$$

Donc

$$|\widetilde{u}_j(t)| \leq |\widetilde{u}_j(0)|$$

ce qui montre la stabilité dans L^2 du schéma semi-discret.

2. A présent l'indice de temps est remplacé par un indice d'itération après discrétisation temporelle. C'est là que les ennuis commencent. En Fourier on obtient

$$\frac{\widetilde{u}_j^{n+1} - \widetilde{u}_j^{n-1}}{2\Delta t} = -4\frac{\sin(\pi j\Delta x)^2}{\Delta x^2}\widetilde{u}_j^n.$$

Posons

$$X^n = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_j^n \\ \widetilde{u}_j^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -8\frac{\sin(\pi j\Delta x)^2\Delta t}{\Delta x^2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $X^{n+1} = AX^n$. Les valeurs propres de A sont solutions de

$$\lambda^2 + 8\frac{\sin(\pi j\Delta x)^2\Delta t}{\Delta x^2}\lambda - 1 = 0.$$

Les deux racines sont réelles et le produit vaut -1. Donc l'une d'entre elle est plus grande que 1 en valeur absolue. D'où l'instabilité inconditionelle.
3. On a
$$\frac{\widetilde{u}_j^{n+1}-\widetilde{u}_j^{n-1}}{2\Delta t}=2\frac{\cos(2\pi j\Delta x)}{\Delta x^2}\widetilde{u}_j^n$$
$$-\frac{1}{\Delta x^2}\widetilde{u}_j^{n+1}-\frac{1}{\Delta x^2}\widetilde{u}_j^{n-1},$$
ou encore
$$\widetilde{u}_j^{n+1}=\frac{\Delta x^2-2\Delta t}{\Delta x^2+2\Delta t}\widetilde{u}_j^{n-1}+\frac{4\Delta t\cos(2\pi j\Delta x)}{\Delta x^2+2\Delta t}\widetilde{u}_j^n.$$
A l'évidence
$$|\widetilde{u}_j^{n+1}|\leq\max\left(|\widetilde{u}_j^n|,|\widetilde{u}_j^{n-1}|\right)$$
ce qui entraine la stabilité dans L^2. Pour les courageux
$$A=\begin{pmatrix}\frac{4\Delta t\cos(2\pi j\Delta x)}{\Delta x^2+2\Delta t} & \frac{\Delta x^2-2\Delta t}{\Delta x^2+2\Delta t}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
L'équation des valeurs propres est
$$\lambda^2-\frac{4\Delta t\cos(2\pi j\Delta x)}{\Delta x^2+2\Delta t}\lambda-\frac{\Delta x^2-2\Delta t}{\Delta x^2+2\Delta t}=0$$
qu'il faut alors discuter. Le module des valeurs propres est de toute façon plus petit ou égal à 1.
4. On utilise un développement limité autour du point $(x,t+\Delta t/2)$. Le schéma est consistant d'ordre 2 en espace et en temps. De plus, On a
$$\widetilde{u}_j^{n+1}=\left(\frac{2\Delta x^2-4\sin(\pi j\Delta x)^2\Delta t}{2\Delta x^2+4\sin(\pi j\Delta x)^2\Delta t}\right)\widetilde{u}_j^n.$$
Ce schéma est à un pas (donc plus simple à analyser). Il est inconditionellement stable dans L^2. Il est aussi plus simple à coder. On peut changer le pas de temps Δt à chaque itération.
5. Pour la consistance, on utilise un développement limité autour de $t+\Delta t$ en temps, et autour de x en espace. On montre alors que le schéma est consistant d'ordre 2 en espace et en temps.
Exercice III.
1. Le schéma upwind s'écrit
$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0,\quad a>0.$$
2. On a
$$||u||_p=\left(\Delta x\sum_j|u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or

$$u_j^{n+1} = (1-\nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n.$$

Donc par convexité

$$|u_j^{n+1}|^p \leq (1-\nu)|u_j^n|p + \nu|u_{j-1}^n|p$$

puis

$$\sum_j |u_j^{n+1}|^p \leq (1-\nu)\sum_j |u_j^n|^p + \nu \sum_j |u_{j-1}^n|^p$$

c'est à dire

$$\sum_j |u_j^{n+1}|^p \leq \sum_j |u_j^n|^p.$$

D'où la propriété recherchée.

Remarque: pour la stabilité en norme L^2 une bonne idée qui marche souvent consiste à multiplier l'équation par $\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}$ puis à sommer.

Exercice IV.

1. Evident.

2. On a

$$\int_{-1}^1 P_n P_m d\mu = \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^1 \frac{d^n}{d\mu^n}\left((\mu^2-1)^n\right)\frac{d^m}{d\mu^m}\left((\mu^2-1)^m\right)d\mu$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}(-1)^m \int_{-1}^1 \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\left((\mu^2-1)^n\right)(\mu^2-1)^m d\mu$$

par intégrations par parties successives. Prenons $m > n$. Alors $\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\left((\mu^2-1)^n\right) = 0$ donc le résultat est nul, ce qui montre l'orthogonalité pour $n \neq m$.

Pour $n = m$ on a

$$\int_{-1}^1 (P_n)^2 d\mu = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (2n)! \int_{-1}^1 (\mu^2-1)^n d\mu = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (2n)! \int_{-1}^1 (1-\mu^2)^n d\mu.$$

Or

$$\int_{-1}^1 (1-\mu^2)^n = \mu(1-\mu^2)^n\Big|_{-1}^1 + 2n\left(\int_{-1}^1 (\mu^2-1)^{n-1} - \int_{-1}^1 (1-\mu^2)^n\right).$$

Donc

$$\int_{-1}^1 (P_n)^2 d\mu = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (2n)! \frac{2n}{2n+1}\int_{-1}^1 (1-\mu^2)^{n-1} d\mu = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^1 (P_{n-1})^2 d\mu.$$

Donc

$$\int_{-1}^1 (P_n)^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

3. Il suffit de vérifier que le polynome

$$P = \mu P_n(\mu) - \frac{(n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)}{2n+1}$$

est de degré au plus $n-2$. Cela s'obtient à partir des coefficients dominants des P_n, et de la parité des P_n. Puis on utilise l'orthogonalité $\int PP_m = 0$ pour $m \leq n-2$.

4. P_n a au moins une racine dans $]-1,1[$ car $\int_{-1}^{1} P_n = 0$. Supposons que P_n a q racines, avec $q < n$. Soit α_j, $1 \leq j \leq q$ les racines. Alors

$$P_n(\mu)\Pi_j(\mu - \alpha_j) > 0 \text{ presque partout.}$$

Comme le degré de $\Pi_j(\mu - \alpha_j)$ est $< n$ on a

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu)\Pi_j(\mu - \alpha_j)d\mu = 0.$$

C'est impossible.

5. Cela se montre (sans trop de peine) à partir de la formule

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left(\sum_{j=0}^{n} C_j^n(-1)^{n-j}\mu^{2j}\right),$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{j\geq\frac{n}{2}}^{n} \alpha_j^n \mu^{2j-n}$$

avec

$$\alpha_j^n = C_j^n \frac{(2j)!}{(2j-n)!}(-1)^{n-j}$$

D'où

$$P_n'(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{j\geq\frac{n}{2}}^{n} \alpha_j^n (2j-n)\mu^{2j-n-1}$$

et

$$P_n''(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{j\geq\frac{n}{2}}^{n} \alpha_j^n (2j-n)(2j-n-1)\mu^{2j-n-2}$$

On a alors

$$(1-\mu^2)P_n'' - 2\mu P_n' + n(n+1)P_n$$
$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{j} \alpha_j^n \mu^{2j-n}$$
$$\times\left(-(2j-n)(2j-n-1) - 2(2j-n) + n(n+1) + (2j-n+2)(2j-n+1)\frac{\alpha_{j+1}^n}{\alpha_j^n}\right)$$

Le terme entre parenthèse vaut

$$-(2j-n)(2j-n-1)-2(2j-n)+n(n+1)+(2j-n+2)(2j-n+1)$$
$$\times\frac{(2j+2)(2j+1)}{(2j-n+2)(2j-n+1)}\times\frac{(n-j)}{(j+1)}=0.$$

On retrouve l'orthogonalité pour $n\neq m$. On a

$$\left((1-\mu^2)P_n'\right)'+n(n+1)P_n$$

et

$$\left((1-\mu^2)P_m'\right)'+m(m+1)P_m.$$

Donc

$$(n(n+1)-m(m+1))P_nP_n$$
$$+\left((1-\mu^2)P_n'\right)'P_m-\left((1-\mu^2)P_m'\right)'P_n=0.$$

On intègre entre -1 et 1. D'où le résultat.

6. On multiplie par P_n et on intègre. C'est un simple calcul dans lequel on a utilisé la formule de récurrence pour éliminer μP_n.

7. On a

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{2}\int_{\mathbb{R}}f_n^2(x,t)dx\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}f_n\left(-(n+1)\partial_xf_{n+1}-n\partial_xf_{n-1}\right)dx-\sigma\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}(2n+1)f_n^n$$
$$\leq-\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}(n+1)\partial_x(f_nf_{n+1})dx=0.$$

8. On a l'égalité

$$f(x,t,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x,t)P_n(\mu).$$

Donc les g_n satisfont les mêmes équations que les f_n sauf pour g_N

$$\partial_tg_N\frac{N}{2N+1}\partial_xg_{N-1}=\sigma\left(\delta_{N0}-1\right)g_n-\frac{N+1}{2N+1}\partial_xg_{N+1}+.$$

Posons $e_n=g_n-f_n$. Alors en reprenant les calculs précédents

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{2}\int_{\mathbb{R}}e_n^2(x,t)dx\right)=-\int_{\mathbb{R}}(N+1)e_N\partial_xg_{N+1}$$
$$\leq(N+1)||e_N||_{L^2}||\partial_xg_{N+1}||_{L^2}$$

Supposons que la fonction f est suffisament régulière au sens où $g_N \to 0$ pour $N \to \infty$. Plus précisément supposons que

$$||\partial_x g_{N+1}||_{L^2} \to 0.$$

L'inégalité de Gronwall clôt le raisonnement.
9. Comme A est symétrique on diagonalise

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Posons

$$Y = ((X, u_i))_{1 \leq i \leq N}.$$

Alors Y est solution du système

$$\partial_t Y + \mathrm{diag}(\lambda_i)\partial_x Y = S.$$

Il suffit d'appliquer un schéma de transport donné sur chaque composante de Y. Voir par exemple l'exercice **III**.