Existence, unicité, convergence et autres joyeusetés dans les espaces fonctionnels

**Exercice I.**

**1.** On a

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x,t;\theta)d\theta\right| \le \left(\int_0^{2\pi} |f(x,t;\theta)|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} (2\pi)^{\frac{1}{q}}$$

avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. D'où le résultat.

**2.** On commence par multiplier l'équation par $p\left|f^{k+1}\right|^{p-2} f^{k+1}$

$$\frac{1}{c}\partial_t \left|f^{k+1}\right|^p + \Omega.\nabla \left|f^{k+1}\right|^p + p\sigma \left|f^{k+1}\right|^p$$

$$= p\left|f^{k+1}\right|^{p-2} f^{k+1} \frac{\sigma_s}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^k(x,t;\theta)d\theta$$

puis on intègre en $t = 0$ et $T > 0$. On intègre la dérivée en espace qui disparait, et on majore le second membre grâce à l'inégalité de Hölder; D'où

$$\frac{1}{c}\|f^{k+1}\|_\Pi^p + p\sigma\|f^{k+1}\|_\mathcal{D}^p$$

$$\le \frac{1}{c}\|f_0\|_\Pi^p + p\sigma_s\|f^{k+1}\|_\mathcal{D}^{p-1} \times \|f^k\|_\mathcal{D}$$

soit encore

$$\|f^{k+1}\|_\mathcal{D}^p \le \frac{1}{pc\sigma}\|f_0\|_\Pi^p + \frac{\sigma_s}{\sigma}\|f^{k+1}\|_\mathcal{D}^{p-1} \times \|f^k\|_\mathcal{D}.$$

Posons $x = \|f^{k+1}\|_\mathcal{D}$, $y = \|f_0\|_\Pi$ et $z = \|f^k\|_\mathcal{D}$, de sorte que

$$x^p \le \frac{1}{pc\sigma}y^p + \frac{\sigma_s}{\sigma}x^{p-1}z,$$

et

$$x \le \frac{1}{pc\sigma}\left(\frac{y}{x}\right)^{p-1} y + \frac{\sigma_s}{\sigma}z.$$

Deux cas se présentent. Soit $\frac{y}{x} > 1$ donc l'inégalité recherchée est vraie en prenant $E = 1$ et $D = 0$. Soit $\frac{y}{x} \le 1$, et alors l'inégalité cherchée est vraie en prenant $E = \frac{1}{pc\sigma}$ et $D = \frac{\sigma_s}{\sigma}$. D'où

$$\|f^{k+1}(t)\|_{L^p(\mathcal{D})} \le E\|f_0\| + D\|f^k(t)\|_{L^p(\mathcal{D})}$$

avec $E = \max(1, \frac{1}{pc\sigma})$ et surtout $D = \frac{\sigma_s}{\sigma} < 1$ car on est dans le cas contractant.

**3.** Posons $g^k = f^{k+1} - f^k$ qui est solution du même problème avec $g_0 = 0$. Donc la suite des $g^k$ tend vers 0 en $D^k$. Du coup

$$f^k = g^{k-1} + g^{k-2} + \cdots + g^0 + f^0$$

est une série absolument convergente dans l'espace vectoriel normé complet (espace de Banach) $L^p(\mathcal{D})$. D'où la convergence de la série vers une limite.

**4.** À discuter.

**5.** C'est une conséquence de la formule de Duhamel. Si $f_0 \ge 0$ alors tous les $f^k$ aussi.

**6.** En reprenant les calculs il apparait que la condition de Dirichlet ne pose pas de problème car

$$\int_\Pi\int_\theta \Omega.\nabla\left|f^{k+1}\right|^p dxd\theta = \int_{\partial\Pi}\int_\theta \left|f^{k+1}\right|^p (\Omega,n)d\sigma d\theta$$

$$= \int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)>0} \left|f^{k+1}\right|^p (\Omega,n)d\sigma d\theta \ge 0.$$

Donc le signe de ce terme est positif, et la suite est toujours contractante.

Pour une condition de réflexion diffuse ($0 \le \alpha \le 1$, et $x \in \partial\Pi$ tel que $(\Omega(\theta), n) < 0$)

$$f(x,\theta) = \alpha < f > (x)$$

$$= \alpha\frac{\int_{\mu,\ (\Omega(\mu),n)>0} f(x,\mu)(\Omega(\mu),n)d\mu}{\int_{\mu,\ (\Omega(\mu),n)>0}(\Omega(\mu),n)d\mu},$$

la situation est différente. L'intégrale de bord devient

$$\int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)>0} \left|f^{k+1}\right|^p (\Omega,n)d\sigma d\theta$$

$$+ \int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)<0} \left|\alpha < f^k >\right|^p (\Omega,n)d\sigma d\theta$$

$$\ge \int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)>0} \left|f^{k+1}\right|^p (\Omega,n)d\sigma d\theta$$

$$-\alpha^p \int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)>0} \left|f^k\right|^p (\Omega,n) d\sigma d\theta.$$

Tous calculs faits on obtient

$$\|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^p + \int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)>0} \left|f^{k+1}\right|^p (\Omega,n) d\sigma d\theta$$

$$\leq \frac{1}{pc\sigma}\|f_0\|_{\Pi}^p + \frac{\sigma_s}{\sigma}\|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^{p-1} \times \|f^k\|_{\mathcal{D}}$$

$$+\alpha^p \int_{\partial\Pi}\int_{\theta,(\Omega,n)>0} \left|f^k\right|^p (\Omega,n) d\sigma d\theta.$$

On retrouve le facteur contractant

$$E = \max(\frac{\sigma_s}{\sigma}, \alpha^p) < 1$$

dans le cas où la condition au bord laisse fuire un peu les neutrons $\alpha < 1$.

Pour une réflexion spéculaire au bord les résultats sont identiques.

**Exercice II.**

**1.**

$$f(x,t) = e^{-\sigma t} a(x - vt)\cos(\frac{x - vt}{\varepsilon}).$$

**2.** Évident. On ne garde dans l'équation approchée que les termes les plus "grands", les autres ($\sigma f$ en l'occurence) étant "négligeables". À partir de ces prémices, on ne garde que

$$\partial_t g + v\partial_x g = 0, \quad g_0 = f_0.$$

**3.**

$$g(x,t) = a(x - vt)\cos(\frac{x - vt}{\varepsilon}).$$

À l'évidence $g$ ne capture pas le terme de décroissance exponentielle, même si le support est correct.

**4.** On a

$$\partial_t e + v\partial_x e + \sigma e = -\sigma g.$$

Toujours pareil. On multiplie par $2e$ et on intègre tout ce qui peut l'être. D'où

$$\frac{d}{dt}\left(\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right) + 2\sigma\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = (2e(t), b(t))_{L^2(\mathbb{R})}.$$

$$\leq 2\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\|b(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|b(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Par cela on déduit uniquement que

$$\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \int_0^t \|b(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds.$$

A priori il y a besoin de $b$ petit, ce qui n'est pas le cas.

Le paradoxe vient d'une manipulation approximative des développements en puissance de $\varepsilon$. Dans les EDP, il faut spécifier les termes d'erreur plus correctement que ce qui a été fait au début.

Remarquons finalement que si on se contente de formulations faibles, alors $f$ et $g$ tendent vers 0 faiblement

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\varphi(x)dx \to 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\varphi(x)dx \to 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

En ce sens $g$ tend vers $f$ faiblement. Mais cela revient à oublier les variations de la donnée initiale.

**Exercice III.** Il s'agit de montrer que la solution de léquation du télégraphe

$$\begin{cases} \partial_t w + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x z = 0, \\ \partial_t z - \frac{1}{\varepsilon}\partial_x w = -\frac{\mu}{\varepsilon^2} z \end{cases}$$

peut s'approcher par la solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t h - \frac{1}{\mu}\partial_{xx} h = 0.$$

La donnée initiale est

$$h(x,0) = w(x,0).$$

On rappelle que la méthode des développements formels revenait à postuler

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2) \text{ et } z = z_0 + \varepsilon z_1 + O(\varepsilon^2).$$

**1.** Posons

$$\widetilde{w} = h \text{ et } \widetilde{z} = -\frac{\varepsilon}{\mu}\partial_x h.$$

Alors

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{w} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x \widetilde{z} = 0, \\ \partial_t \widetilde{z} - \frac{1}{\varepsilon}\partial_x \widetilde{w} = -\frac{\mu}{\varepsilon^2}\widetilde{z} + R \end{cases}$$

avec
$$R = \partial_t \widetilde{z} = -\frac{\varepsilon}{\mu}\partial^2_{xt}h.$$

**2.** Pour une donnée initiale suffisament régulière, par exemple $\left(\partial^2_{xt}h\right)(t = 0) \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\left(\partial^2_{xt}h\right)(t) \in L^2(\mathbb{R})$ pour $t > 0$, car l'opérateur de diffusion est contractant dans $L^2$. Donc cela justifie l'inégalité
$$\|R(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\varepsilon C}{\mu}.$$

**3.** Enfin on s'intéresse à l'erreur
$$\widehat{w} = \widetilde{w} - w \text{ et } \widehat{z} = \widetilde{z} - z$$
qui vérifie le système
$$\begin{cases} \partial_t \widehat{w} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x \widehat{z} = 0, \\ \partial_t \widehat{z} - \frac{1}{\varepsilon}\partial_x \widehat{w} = -\frac{\mu}{\varepsilon^2}\widehat{z} + R. \end{cases}$$

On ajoute l'hypothèse technique que $z(t = 0) = -\frac{\varepsilon}{\mu}\partial_x h(t = 0)$. Alors $\widehat{w}(t = 0) = \widehat{z}(t = 0) = 0$.

**4.** Il reste à s'assurer que l'équation du télégraphe est contractante dans $L^2$. Cela ne pose pas de difficulté. D'où l'inégalité
$$\frac{d}{dt}\left(\|\widehat{w}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\widehat{z}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)$$
$$\leq 2\|R(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\widehat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2C\varepsilon}{\mu}\|\widehat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

D'où
$$\|\widehat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2C\varepsilon}{\mu}$$
et
$$\|\widehat{w}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2C\varepsilon}{\mu}\sqrt{t}.$$

Ouf !!