Corrigé du devoir no. 1

Exercice 1

1.1. C'est de l'algèbre. Soient φ, ψ deux formes linéaires de noyau H et $x \in E - H$. L'écriture

$$y = y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x + \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x$$

pour $y \in Y$ montre la décomposition

$$E = H \oplus \mathbf{R}x.$$

La forme linéaire

$$\psi(x)\varphi - \varphi(x)\psi,$$

s'annulant sur x et H, est donc identiquement nulle.$\square$

1.2. Il suffit de prouver

$$H := H_\varphi \subset \overline{E - H}.$$

Soit donc $x \in E - H$ et $h \in H$. On a

$$h = \lim_n (h + \frac{1}{n}x) \text{ et } \varphi(h + \frac{1}{n}x) = h + \frac{1}{n}\varphi(x) \neq 0$$

de sorte que $h + \frac{1}{n}x \in E - H$, $\square$.

Par ailleurs, un hyperplan est convexe, donc connexe par arcs donc connexe.

1.3. $\Rightarrow$ Si φ est continue, son noyau $\phi^{-1}(0)$ est fermé comme image réciproque d'un fermé.

$\Leftarrow$ Supposons $H = \phi^{-1}(0)$ fermé et soit x tel que $\varphi(x) = 1$. Si φ n'était pas continue, elle ne serait pas bornée sur la sphère unité (critère de continuité des applications linéaires). Il existerait donc une suite x_n de la sphère unité telle que $\lim \varphi(x_n) = \infty$. Mais alors,

$$x - \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$$

est une suite de points de H convergeant vers x. Comme H fermé dans E, on a $x \in H$ et donc $\varphi(x) = 0$, contradiction.$\square$

Dans le cas continu, E est la réunion disjointe des deux ouverts convexes $E^\pm$ donc connexes définis par les conditions $\pm\varphi > 0$. Si X est connexe maximal (pour l'inclusion) de $E - H$, on a une décomposition de X en deux ouverts disjoints

$$X = (X \cap E^+) \sqcup (X \cap E^-).$$

Quitte à changer $+$ en $-$, la connexité de X impose l'égalité $X \cap E^+ = X$ et donc $X \subset E^+$ puis (maximalité) $X = E^+$. Ainsi, $E^\pm$ sont bien les deux composantes connexes cherchées.$\square$

1.3. Soit $e_n, n \geq 0$ une famille libre dénombrable de E et choisissons un supplémentaire S de $\mathrm{Vect}(e_n, n \geq 0)$ dans E. On peut supposer les e_n normés. On définit alors φ par les relations

$$\forall s \in S,\ \varphi(s) = 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ \varphi(e_n) = n.$$

Comme φ non bornée sur la sphère unité, elle n'est pas continue.$\square$

1.4. Comme φ n'est pas continue, il existe une suite x_n de vecteurs normés de $E - H$ tels que $\lim \varphi(x_n) = \infty$.

a) Soit $y \in E$. La suite

$$y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_n)} x_n$$

est une suite de H convergeant vers y, d'où la densité de H.

Soit x tel que $\varphi(x) = 1$ fixé. La translation $y \mapsto y + x$ est un homéomorphisme de E qui envoie H sur son translaté

$$x + H = \{y | \varphi(y) = 1\}$$

d'où la densité du translaté.

b) Le complémentaire $E - H$ est coincé entre les $x + H$ et $E = \overline{x + H}$. Comme $x + H$ est connexe, $E - H$ l'est aussi.

Exercice 2

Si on a deux relèvements, leur différence est à valeurs dans $2\pi\mathbf{Z}$ donc est constante (continuité) et donc nulle puisqu'elle l'est en a.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, l'exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ réalise un homéomorphisme

$$]\alpha - 2\pi, \alpha[\simeq S^1 - \{\mathrm{e}^{i\alpha}\}$$

d'inverse θ_α. Soit on constate qu'elle envoie un ouvert sur ouvert de sorte que son inverse est continue soit on écrit la formule

$$\theta_\alpha(x+iy) = \theta_0(e^{-i\alpha}(x+iy)) + \alpha \text{ avec } \theta_0(t)(x+iy) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right).$$

L'exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ a donc un inverse continu sur tout cercle épointé, ce qui fournit des relèvements $\theta_\alpha \circ f$ sur tout intervalle I tel que $\mathrm{e}^{i\alpha} \notin f(I)$, ce qui répond à la question grâce à la continuité de f.

Par uniforme continuité de f sur le compact $[0, 1]$, il existe $N > 0$ tel que

$$|x - y| \leq 1/N \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Posons $x_k = \frac{k}{N}, k = 0, \cdots, N$. Comme

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 1 \text{ pour } x \in I_0 = [x_0, x_1],$$

l'application f ne prend jamais la valeur $-f(x_0) \in S^1$ et donc est à valeurs dans le cercle épointé $S_1 - \{-f(x_0)\}$. D'après ce qui précède, on peut relever f sur I_0.

Supposons qu'on a relevé f en ϕ_k sur $I_k = [x_0, x_k], k < N$. L'argument prouve qu'on peut la relever en Ψ sur $[x_k, x_{k+1}]$. Puisque

$$\exp(i\phi_k(x_k)) = f(x_k) = \exp(i\psi(x_k)),$$

on peut, quitte à translater Ψ par un élément de $2\pi\mathbf{Z}$, supposer

$$\phi_k(x_k) = \Psi(x_k).$$

On peut donc prolonger ϕ_k continûment sur $[x_0, x_{k+1}]$. $\square$

Exercice 3

a) et b) Comme $|f|$ est sommable par hypothèse, on a $|f(x)| < +\infty$ p.p. en $x \in \Omega$ de sorte que

$$|f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|x|) \text{ et } |f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f(x)|) \to 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

lorsque $R \to +\infty$. D'autre part, pour tout $R \geq 0$, on a

$$|f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|x|) \text{ et } |f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f(x)|) \leq |f(x)| \text{ p.p. en } x \in \Omega\,.$$

On conclut par convergence dominée.

c) Choisissons $R > 0$ assez grand pour que

$$\int_\Omega |f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f(x)|)dx < \epsilon/2\,,$$

ce qui est possible d'après le b). Alors, pour tout $A \subset \Omega$ mesurable

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|dx &\leq \int_A |f(x)|\mathbf{1}_{[0,R[}(|f(x)|)dx + \int_\Omega |f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f(x)|)dx \\ &\leq R|A| + \epsilon/2 < \epsilon\end{aligned}$$

pourvu que $|A| < \epsilon/2R$.

Exercice 4

a) Répéter la démonstration du c) de l'Exercice 3, et passer à la borne supérieure en $n \in \mathbf{N}$ dans les deux membres de l'inégalité.

b) Supposons que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ne vérifie pas (1), et montrons qu'elle ne vérifie pas (2). Notons

$$\rho(R) = \sup_{n\geq 0} \int_\Omega |f_n(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f_n(x)|)dx\,;$$

par construction, ρ est une fonction décroissante de R. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ne vérifie pas (1), alors il existe $\theta > 0$ tel que $\rho(R) > \theta$ pour tout $R > 0$.

Posons $B_{n,R} = \{x \in \Omega \,|\, |f_n(x)| \geq R\}$; c'est un ensemble mesurable. Définissons $\mu(R) = \sup_n |B_{n,R}|$; par construction, μ est une fonction décroissante de R. Distinguons alors 2 cas.

Ou bien $\mu(R) \to 0$ quand $R \to +\infty$; alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ne peut vérifier (2), car sinon, en choisissant $\epsilon < \theta$ et R assez grand pour que $\mu(R) < \alpha(\epsilon)$, on aurait

$$\theta < \rho(R) = \sup_{n\geq 0} \int_{B_{n,R}} |f_n(x)|dx < \epsilon$$

ce qui est impossible.

Sinon $\mu(R) \to \lambda \in]0, +\infty]$ lorsque $R \to +\infty$, de sorte que, pour tout $R > 0$, il existe $n_R \geq 0$ t.q. $|B_{n_R,R}| \geq \lambda$. Choisissons $\epsilon > 0$ et $R > 0$ assez grand pour que $R\alpha(\epsilon) > 2\epsilon$. Pour tout $A \subset B_{n_R,R}$ mesurable t.q. $\frac{1}{2}\alpha < |A| < \alpha$, on a

$$\tfrac{1}{2}\alpha R \leq |A|R \leq \int_A |f_{n_R}(x)|dx < \epsilon$$

ce qui est impossible. On notera que cette démonstration n'utilise pas l'hypothèse $|\Omega| < +\infty$.

Une autre démonstration, qui ne vaut que dans le cas où $|\Omega| < +\infty$, consiste à commencer par établir que si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie (2), il existe $M > 0$ t.q.

$$\sup_{n\geq 0} \int_\Omega |f_n(x)|dx \leq M\,.$$

En effet, pour $L > 0$ assez grand, on déduit du théorème de convergence dominée que $|\Omega \cap B(0,L)^c| < \alpha(1)$; par compacité de $\overline{B(0,L)}$, on recouvre $\Omega \cap B(0,L)$ par un nombre fini k de boules ouvertes $b_1, \dots, b_k$ de mesure $< \alpha(1)$. Alors

$$\int_\Omega |f_n(x)|dx \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega\cap b_i} |f_n(x)|dx + \int_{\Omega\cap B(0,L)^c} |f_n(x)|dx < (k+1)\,.$$

On conclut alors en remarquant que, grâce à l'inégalité de Markov, $\sup_n |B_{n,R}| \leq M/R$. Etant donné $\epsilon > 0$, on choisit $R > 0$ assez grand pour que $M < R\alpha(\epsilon)$, et on déduit de (2) que

$$\int_\Omega |f_n(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f_n(x)|)dx = \int_{B_{n,R}} |f_n(x)|dx < \epsilon$$

pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie (1).

c) Comme f_n est sommable sur Ω pour tout $n \geq 0$ et que $f_n \to f$ p.p. sur Ω quand $n \to +\infty$, on déduit du lemme de Fatou que f est sommable sur Ω. Grâce au résultat de l'exercice 3, la suite $(f_n - f)_{n\geq 0}$ vérifie clairement (2), et donc (1). Soit $\epsilon > 0$; choisissons $R > 0$ assez grand pour que

$$\sup_{n\geq 0} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f_n(x) - f(x)|)dx < \epsilon/2\,.$$

Pour cette valeur de R, on a $|f_n - f|\mathbf{1}_{[0,R[}(|f_n - f|) \to 0$ p.p. sur Ω quand $n \to +\infty$, et d'autre part

$$|f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{[0,R[}(|f_n(x) - f(x)|) \leq R \text{ p.p. en } x \in \Omega \text{ pour tout } n \geq 0\,.$$

Comme $|\Omega| < +\infty$, la fonction constante R est sommable sur Ω, de sorte que, par convergence dominée

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{[0,R[}(|f_n(x) - f(x)|)dx \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

Il existe donc $n_* \geq 0$ assez grand tel que, pour tout $n \geq n_*$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx &\leq \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{[0,R[}(|f_n(x) - f(x)|)dx \\ &+ \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f_n(x) - f(x)|)dx \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon\end{aligned}$$

d'où le résultat.

d) Les énoncés a) et b) demeurent vrais, mais pas l'énoncé c). Il suffit en effet de choisir $\Omega = \mathbf{R}$, puis $\phi(x) = (1 - |x|)_+$ et enfin $f_n(x) = \phi(x - n)$. Alors $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ lorsque $n \to +\infty$; d'autre part, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie (1) puisque $0 \leq f_n(x) \leq 1$, de sorte que

$$\int_\mathbf{R} |f_n(x)|\mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f_n(x)|)dx = 0$$

pour tout $R > 1$ et tout $n \geq 0$. Mais

$$1 = \int_\mathbf{R} f_n(x)dx \text{ ne converge pas vers } \int_\mathbf{R} f(x)dx = 0\,.$$