ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème anne, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 16 Mars 2011 (2 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Chacun des deux exercices est noté sur 10 points.

I

On considère l'équation de Boltzmann linéaire stationnaire dans le cas monocinétique avec scattering isotrope et symétrie de type slab, d'inconnue $f \equiv f(x, \mu)$:

$$(P) \qquad \begin{cases} \mu \partial_x f + f - \langle f \rangle = 0\,, & x > 0\,,\ 0 < |\mu| \le 1\,, \\ f(0, \mu) = 0\,, & 0 < \mu \le 1\,, \end{cases}$$

où on note

$$\langle f \rangle(x) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x, \mu) d\mu\,.$$

On note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbf{R}_+ \times [-1, 1] \to \mathbf{R}$ mesurables, continues bornées sur $\mathbf{R}_+ \times ([-1, 0[\cup]0, 1])$, et telles que $u(\cdot, \mu) \in C^1(\mathbf{R}_+^*)$ pour tout $\mu \in [-1, 0[\cup]0, 1]$.

Dans toute la suite, f désigne une solution du problème (P) appartenant à E.

1) Montrer que $\langle \mu f \rangle$ est constante.
2) Calculer $\langle \mu^2 f \rangle$, et en déduire la valeur de $\langle \mu f \rangle$.
3) Montrer que, pour tout $L > 0$, on a

$$\tfrac{1}{2} \langle \mu f^2 \rangle(L) + \int_0^L \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle(x) dx \le 0\,.$$

En déduire que

$$\int_0^\infty \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle(x) dx < \infty\,.$$

4) Montrer qu'il existe une suite $x_n \to +\infty$ telle que $\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle(x_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
5) Montrer que $\langle \mu f^2 \rangle = \langle \mu (f - \langle f \rangle)^2 \rangle$.
6) Quel est le sens de variation de la fonction $x \mapsto \langle \mu f^2 \rangle(x)$? En déduire que $\langle \mu f^2 \rangle(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ et que

$$\int_0^\infty \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle(x) dx = 0\,.$$

7) Montrer que $f(x, \mu) = 0$ pour tout $x \ge 0$ et tout $\mu \in]0, 1]$.
8) En déduire que $f(x, \mu) = 0$ pour tout $x \ge 0$ et tout $\mu \in [-1, 0[\cup]0, 1]$.

II

On considère une équation de diffusion avec dérive dans l'intervalle $(0, L)$ (avec $L > 0$) en dimension 1 d'espace pour l'inconnue $u(x)$:

$$(D) \qquad \begin{cases} V\dfrac{du}{dx} - \nu\dfrac{d^2u}{dx^2} = f, & 0 < x < L\,, \\ u(0) = 0\,, & \dfrac{du}{dx}(L) = 0\,, \end{cases}$$

où $\nu > 0$ est le coefficient (constant) de diffusion, $V \geq 0$ est la vitesse de dérive positive et constante, et $f(x) \geq 0$ est un terme source qui est une fonction positive et continue sur $[0, L]$. On admettra qu'il existe une unique solution $u(x)$ au problème (D) qui est de classe C^2 et positive sur $[0, L]$.

Pour un entier $N \geq 1$ on définit le pas d'espace $\Delta x = L/N$ et les points $x_j = j\Delta x$ du maillage, $0 \leq j \leq N$. Pour $f_j = f(x_j)$ et u_j une approximation de $u(x_j)$ on définit le schéma numérique

$$V\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2} = f_j\,, \quad 1 \leq j \leq N\,,$$

complété par les conditions aux limites

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{N+1} = u_N.$$

On note $\bar{u}$ le vecteur de composantes $(u_j)_{1\leq j\leq N}$, $\bar{f}$ le vecteur de composantes $(f_j)_{1\leq j\leq N}$ et A la matrice $N \times N$ telle que $A\bar{u} = \bar{f}$.

1) Vérifier que ce schéma est consistant avec le problème (D).

2) Montrer que la matrice A du schéma est une M-matrice irréductible et inversible.

3) En déduire que le schéma vérifie le principe du maximum discret, c'est-à-dire que $\bar{f} \geq 0$ implique $\bar{u} \geq 0$.

4) Montrer que la solution de (D) vérifie l'inégalité d'énergie

$$(E) \qquad \int_0^L |u(x)|^2 dx \leq \frac{L^4}{\nu^2}\int_0^L |f(x)|^2 dx.$$

On pourra préalablement démontrer que toute fonction $v(x)$ de classe C^1 sur $[0, L]$ telle que $v(0) = 0$ vérifie

$$\int_0^L |v(x)|^2 dx \leq L^2 \int_0^L \left|\frac{dv}{dx}(x)\right|^2 dx.$$

5) En s'inspirant de (E), montrer que le schéma est stable L^2 au sens où

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x|u_j|^2 \leq \frac{L^4}{\nu^2}\sum_{j=1}^{N} \Delta x|f_j|^2.$$

Indication: on montrera que

$$\sum_{j=1}^{N}(u_j - u_{j-1})u_j \geq 0.$$

6) Que peut-on dire de la convergence du schéma proposé ?