

Transport et diffusion

Cours no. 1 — le 9/1/2013

Les équations de **transport** et de **diffusion** sont des **modèles mathématiques** intervenant pour décrire :

- le **transfert d'énergie** dans un milieu matériel sous différentes formes (thermique, rayonnement ...),
- la **dynamique de particules** en interaction avec la matière (neutrons dans un matériau fissile, photons dans une atmosphère, électrons et trous dans un semi-conducteur ...),
- l'évolution de certaines **populations d'organismes vivants** (dynamique des populations structurées ...).

Elles sont aussi des briques de base de modèles plus compliqués comme la physique des plasmas, la dynamique des gaz raréfiés, etc.

Le but de ce cours est

- de dégager les **structures mathématiques communes** à tous ces modèles pour les analyser ;
- de montrer comment les **deux descriptions**, par les équations de transport et par les équations de diffusion, sont **intimement reliées**, notamment par des relations asymptotiques ;
- d'étudier et mettre en œuvre des **méthodes numériques de résolution** de ces équations, et d'identifier leur **régime de validité**.

L'équation de diffusion

Exemple : on étudie l'évolution de la population de **neutrons dans un matériau fissile** — comme dans un cœur de réacteur nucléaire

Inconnue : la **densité de nombre de neutrons** au point x à l'instant t , notée $\rho \equiv \rho(t, x) \geq 0$

C.a.d. que dans un **volume infinitésimal dx centré au point x** se trouvent (environ) **$\rho(t, x)dx$ neutrons à l'instant t**

Donc, dans tout domaine $A \subset \mathbf{R}^3$, on trouve à l'instant t (environ)

$$\int_A \rho(t, x) dx \text{ neutrons}$$

• Soient $t_1 < t_2$ deux instants quelconques, et B une boule de \mathbf{R}^3 ; la **variation du nombre de neutrons** présents dans la boule B entre les instants t_1 et t_2 est

$$\int_B \rho(t_2, x) dx - \int_B \rho(t_1, x) dx$$

Cette différence est égale au nombre de neutrons entrés dans B moins le nombre de neutrons sortis de B entre les instants t_1 et t_2

• **Courant de neutrons** = champ de vecteurs $J \equiv J(t, x) \in \mathbf{R}^3$ t.q. pour tout élément de surface $dS(x)$ centré en x et orienté par le vecteur unitaire n_x normal à $dS(x)$ au point x

$$N_+ - N_- \simeq J(t, x) \cdot n_x dS(x) dt$$

où on a noté

N_{\pm} = nombre de neutrons traversant $dS(x)$ dans la direction $\pm n_x$
dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$

Rappel : la formule de Green

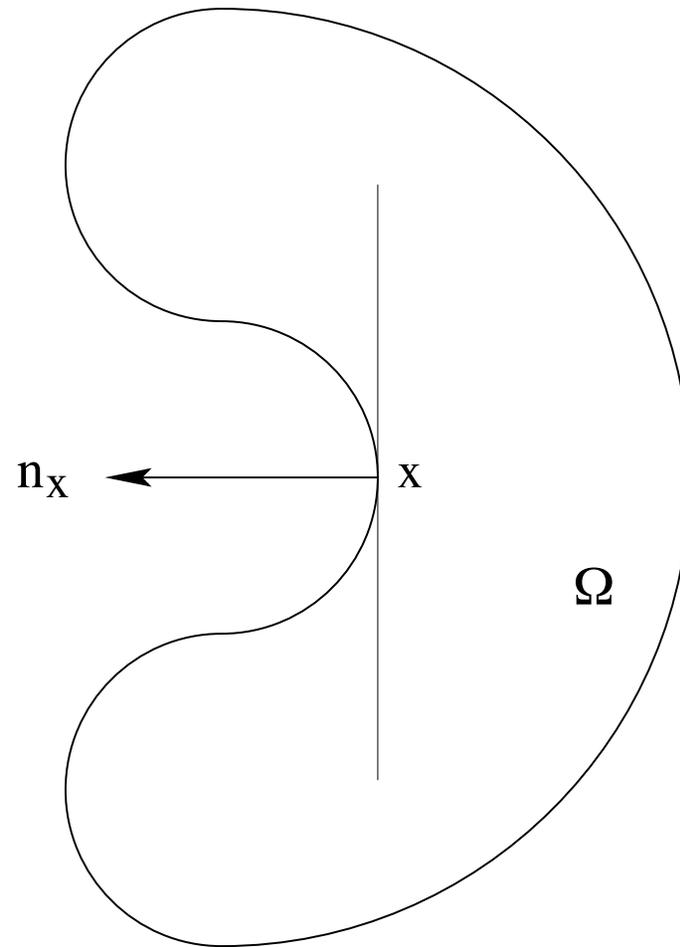
Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert à bord de classe C^1 — par exemple, $\Omega = B(x_0, R)$ — dont on note $\partial\Omega$ le bord. Soient n_x le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$ au point x pointant vers l'extérieur de Ω , et $dS(x)$ l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Soit $V \equiv V(x) \in \mathbf{R}^N$ champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$; notons

$$\operatorname{div} V(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial V_k}{\partial x_k}(x)$$

sa divergence. Alors

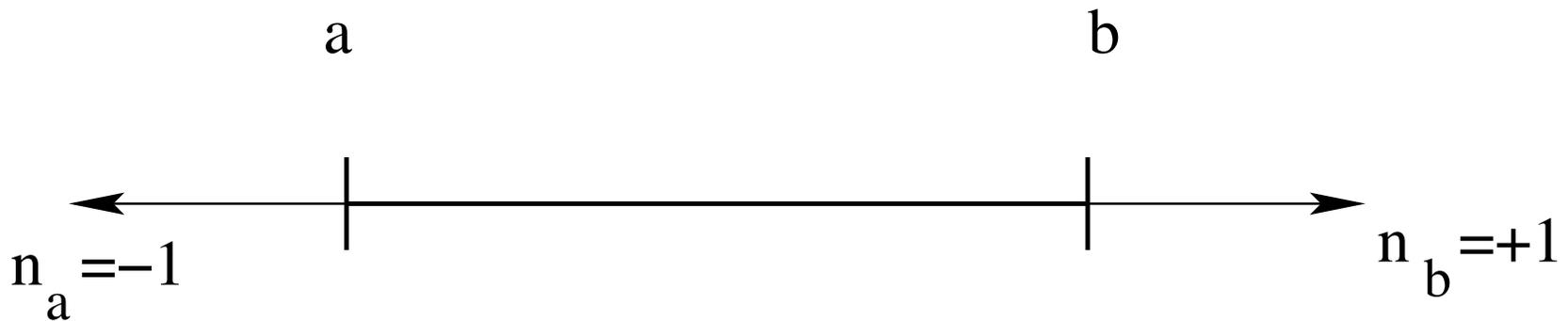
$$\int_{\partial\Omega} V(x) \cdot n_x dS(x) = \int_{\Omega} \operatorname{div} V(x) dx$$



Exemple d'ouvert de classe C^1

Pour se souvenir de l'orientation de la normale on a le cas où $N = 1$ et $\Omega =]a, b[$. Alors $\operatorname{div} V(x) = V'(x)$, $n_b = +1$, $n_a = -1$ et

$$\int_a^b V'(x) dx = V(b) - V(a) = V(b) \cdot n_b + V(a) \cdot n_a$$



●Donc

$$\int_B (\rho(t_2, x) - \rho(t_1, x)) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial B} J(t, x) \cdot n_x dS(x) dt$$

Supposons que ρ et J sont de classe C^1 : on transforme l'intégrale interne de droite par la **formule de Green**

$$\int_{\partial B} J(t, x) \cdot n_x dS(x) = \int_B \operatorname{div}_x J(t, x) dx$$

et on écrit que

$$\rho(t_2, x) - \rho(t_1, x) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) dt$$

de sorte que l'identité ci-dessus devient

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_B \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}_x J(t, x) \right) dx dt = 0$$

- Comme la fonction $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_x J$ est d'intégrale nulle sur tout ensemble de la forme $[t_1, t_2] \times B$, on en déduit l'**équation de continuité**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \text{div}_x J(t, x) = 0$$

- **Loi de Fick** (appelée aussi loi de Fourier dans le contexte de l'équation de la chaleur) on fait l'hypothèse que le courant de neutrons est proportionnel au gradient spatial de ρ :

$$J(t, x) = -D \nabla_x \rho(t, x) \quad \text{avec } D > 0$$

En substituant cette formule pour J dans l'équation de continuité, on aboutit à l'**équation de diffusion**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) - D \Delta_x \rho(t, x) = 0$$

L'équation de Boltzmann linéaire

- On étudie l'évolution d'une **population de particules** dans un milieu matériel — par exemple des neutrons dans un matériau fissile.

Inconnue : la **fonction de distribution** $f \equiv f(t, x, v) \geq 0$, densité du nombre de neutrons situés au point x et animés de la vitesse v à l'instant t

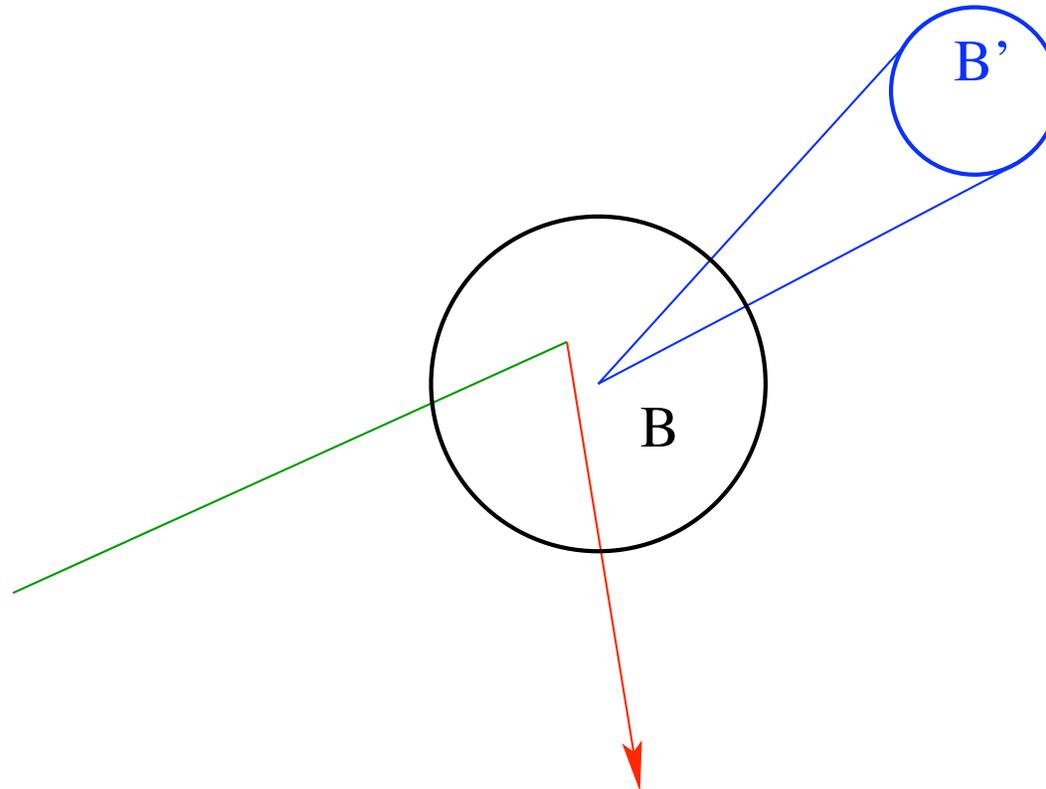
- A tout instant et en chaque point de ce milieu matériel, il y a
 - a) **absorption de neutrons** avec un **taux d'absorption** $\sigma \equiv \sigma(x, v) > 0$ (par exemple du fait de collisions avec les atomes du milieu), et
 - b) **création de neutrons** avec **noyau de transition** $k \equiv k(x, v, v') > 0$ (par exemple, **neutrons de fission**, ou bien résultant de **collisions élastiques** avec les atomes du milieu ...)

Absorption. Soient $t_1 < t_2$, et B, B' deux boules de \mathbf{R}^3 ; le nombre de neutrons de vitesse $v \in B'$ absorbés par le milieu entre les instants t_1 et t_2 par la portion de matériau située dans la boule B vaut (environ)

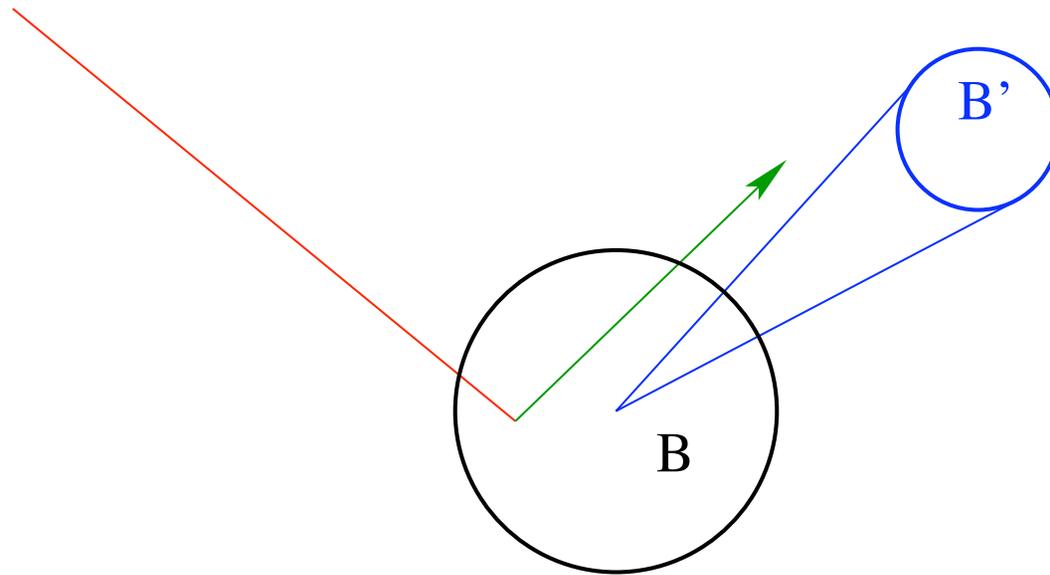
$$N_A = \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \sigma(x, v) f(t, x, v) dv dx dt$$

Création. Le nombre de neutrons créés avec une vitesse $v \in B'$ entre les instants t_1 et t_2 par la portion de matériau située dans la boule B au cours d'une **transition** $v' \rightarrow v$ où $v' \in \mathbf{R}^3$ est une vitesse quelconque, vaut (environ)

$$N_C = \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \int_{\mathbf{R}^3} k(x, v, v') f(t, x, v') dv' dv dx dt$$



La particule appartient au sous-ensemble $B \times B'$ de l'espace des phases avant collision (partie verte de la trajectoire), mais n'y appartient plus après collision car sa vitesse n'est plus dans B' (partie rouge de la trajectoire)



La particule appartient au sous-ensemble $B \times B'$ de l'espace des phases après collision (partie verte de la trajectoire), mais n'y appartenait pas encore avant la collision car sa vitesse n'était pas dans B' (partie rouge de la trajectoire)

Bilan du nombre de neutrons dans $B \times B'$. La variation de ce nombre entre les instants t_1 et t_2 vaut, en supposant la fonction de distribution f de classe C^1 :

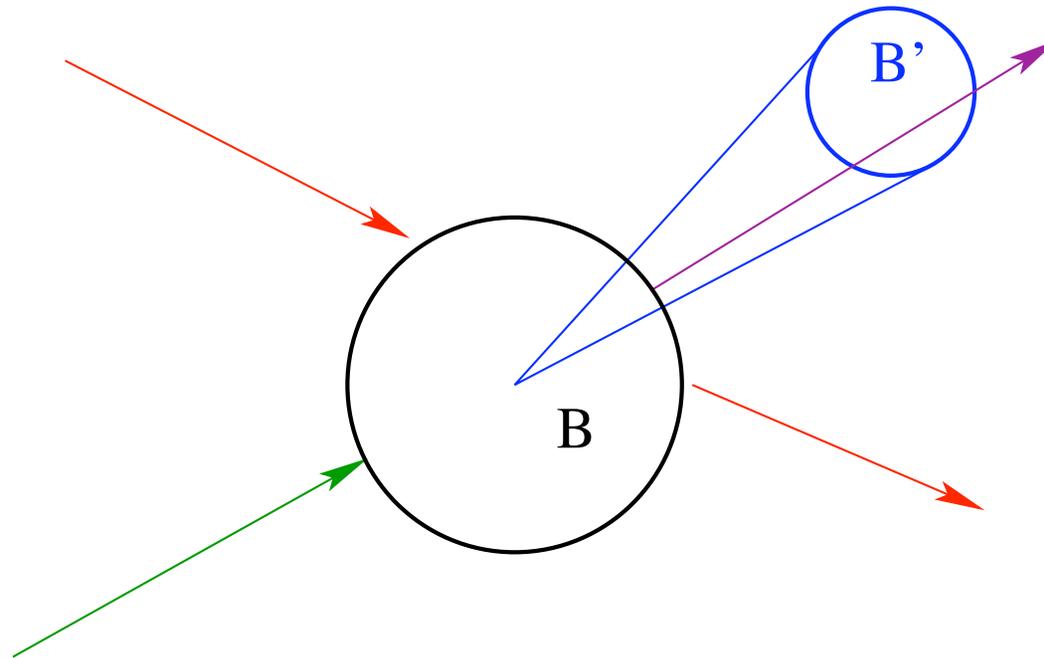
$$\begin{aligned} \int_B \int_{B'} (f(t_2, x, v) - f(t_1, x, v)) dx dv &= \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) dt dx dv \\ &= N_C - N_A + N_+ - N_- \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} N_C = \text{nombre de neutrons créés dans } B \times B' \\ N_A = \text{nombre de neutrons absorbés dans } B \times B' \\ N_{\pm} = \text{nombre de neutrons entrés/sortis de } B \times B' \end{cases}$$

Avant absorption, les neutrons sont animés d'un **mouvement rectiligne uniforme**, donc non accélérés \Rightarrow ne traversent pas $\partial B'$:

$$N_+ - N_- = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{B'} \int_{\partial B} f(t, x, v) v \cdot n_x dS(x) dv dt$$



La particule entre dans le sous-ensemble $B \times B'$ de l'espace des phases (partie verte de la trajectoire), puis en sort (partie violette de la trajectoire). Les particules de trajectoire rouge ne comptent pas, car leur vitesse n'appartient pas à B'

En transformant l'intégrale de surface sur ∂B dans l'expression de $N_+ - N_-$ par la formule de Green, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) dt dx dv &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} v \cdot \nabla_x f(t, x, v) dv dx dt && N_+ - N_- \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \int_{\mathbf{R}^3} k(x, v, v') f(t, x, v') dv' dv dx dt && N_C \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \sigma(x, v) f(t, x, v) dv dx dt && N_A \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_B \int_{B'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \sigma f - K f \right) (t, x, v) dv dx dt = 0$$

avec la notation

$$K f(t, x, v) = \int_{\mathbf{R}^3} k(x, v, v') f(t, x, v') dv'$$

Conclusion. Comme cette égalité vaut pour tous $t_1 < t_2$, B et B' , on aboutit, en supposant que f est de classe C^1 et que k et σ sont continues, à l'équation de Boltzmann linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \sigma f - Kf = 0$$

où on rappelle que

$$Kf(t, x, v) = \int_{\mathbf{R}^3} k(x, v, v') f(t, x, v') dv'$$

Exemple : transport monocinétique avec scattering isotrope

a) monocinétique : particules de vitesse 1, donc $v = \omega$ avec $|\omega| = 1$

b) scattering isotrope : notant dS l'élément de surface sur la sphère unité

$$K f(t, x) = \frac{1}{4\pi} \sigma \int_{|\omega|=1} f(t, x, \omega) dS(\omega)$$

ce qui, en notant $\langle f \rangle$ la moyenne de f en la variable ω , s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x f + \sigma(f - \langle f \rangle) = 0$$

Observables macroscopiques

Soit $\phi(v)$, quantité physique additive pour un seul neutron de vitesse v ;
par exemple

$$\begin{cases} \phi(v) = mv & \text{(quantité de mouvement)} \\ \phi(v) = \frac{1}{2}m|v|^2 & \text{(énergie cinétique)} \end{cases}$$

La quantité globale correspondant aux neutrons se trouvant à l'instant t
dans le domaine A vaut

$$\int_A \int_{\mathbf{R}^3} \phi(v) f(t, x, v) dx dv$$

La densité de cette quantité physique à l'instant t vaut

$$\int_{\mathbf{R}^3} \phi(v) f(t, x, v) dv$$

Du transport vers la diffusion

Partons de l'équation de transport monocinétique avec scattering isotrope et taux d'absorption $\sigma > 0$ constant

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x f + \sigma(f - \langle f \rangle) = 0$$

Equation de continuité : en moyennant chaque membre par rapport à ω

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x J = 0 \quad \text{avec } \rho = \langle f \rangle \quad \text{et } J = \langle \omega f \rangle$$

Supposons que $\sigma \gg 1$; alors

$$f = \langle f \rangle - \frac{1}{\sigma} \omega \cdot \nabla_x f - \frac{1}{\sigma} \partial_t f \simeq \langle f \rangle$$

ce qui entraîne en particulier que f est **isotrope** (indépendante de ω) :

$$f(t, x, \omega) \simeq \rho(t, x)$$

Loi de Fick : en substituant cette valeur approchée de f , on trouve que

$$f \simeq \rho - \frac{1}{\sigma} \omega \cdot \nabla_x \rho - \frac{1}{\sigma} \partial_t \rho$$

donc

$$J = \langle \omega f \rangle \simeq \langle \omega \rho \rangle - \frac{1}{\sigma} \langle \omega \omega \cdot \nabla_x \rho \rangle - \frac{1}{\sigma} \partial_t \langle \omega \rho \rangle = -\frac{1}{\sigma} \langle \omega_k \omega_l \rangle \partial_{x_l} \rho$$

ce qui s'écrit encore

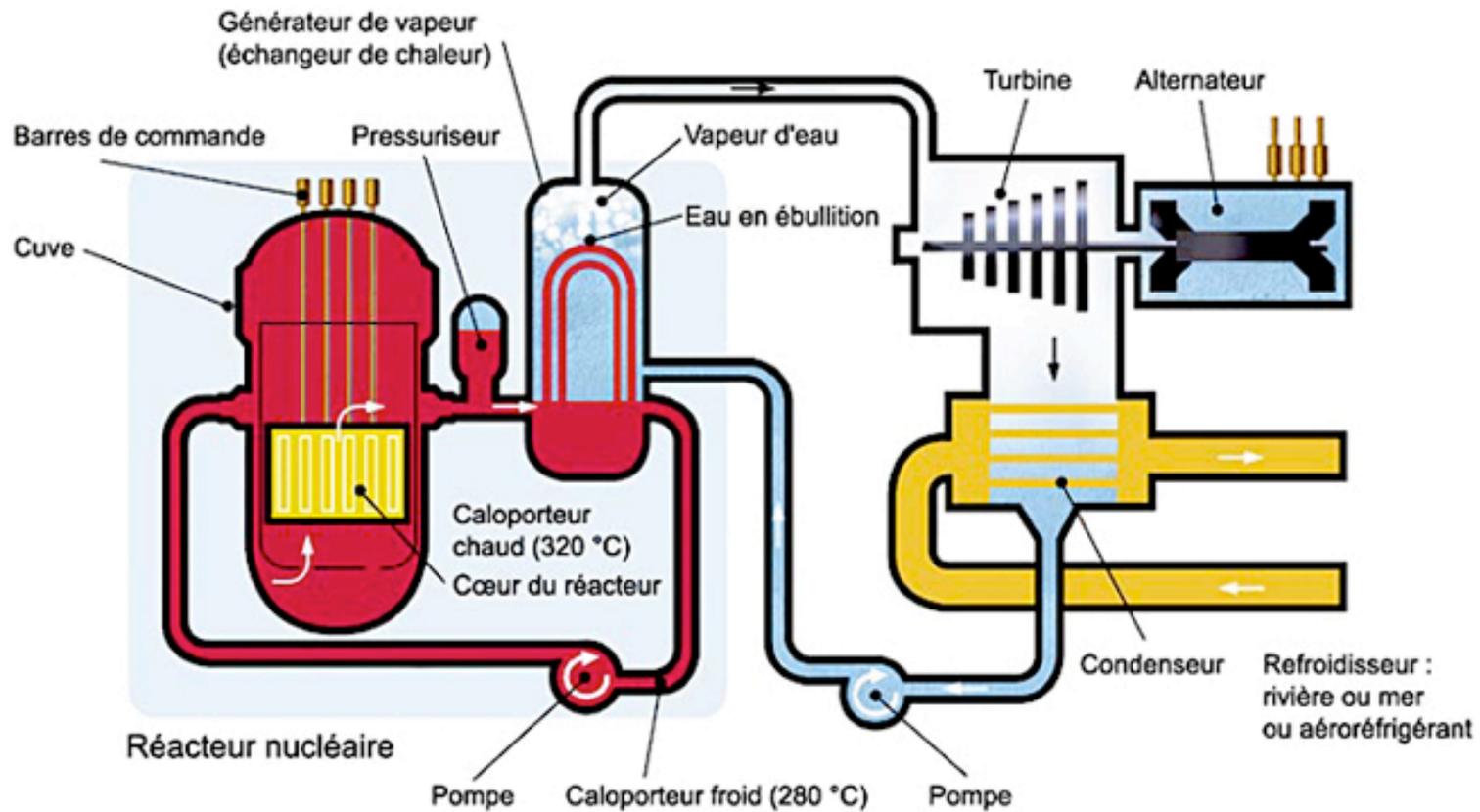
$$J \simeq -D \nabla_x \rho \quad \text{avec } D = \frac{1}{\sigma} \langle \omega \otimes \omega \rangle = \frac{1}{3\sigma} \langle |\omega|^2 \rangle = \frac{1}{3\sigma}$$

Conclusion : pour f solution de l'équation de transport monocinétique avec scattering isotrope, **si le taux d'absorption $\sigma \gg 1$** , alors

$$f(t, x, \omega) \simeq \rho(t, x), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma} \Delta_x \rho = 0$$

Modèle 1 : neutronique

Etude des réactions nucléaires dans un coeur de réacteur.



Particules=neutrons

Fission, absorption, collisions (scattering)

Les réactions de fission dégagent de la chaleur, extraite du coeur par un fluide caloporteur (eau, gaz, sodium)

Prédiction du fonctionnement du réacteur : dimensionnement, éviter les points chauds, usure du combustible, production de produits de fission, rechargement du combustible

Etudes de sureté : sécurité passive et active en cas d'incidents, scénarii d'accidents graves

Equation de Boltzmann linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \sigma f - K f = 0$$

Changement de variables et d'inconnue :

$$v = |v| \omega, \quad E = \frac{1}{2} m |v|^2, \quad \text{flux de neutrons } \phi = |v| f$$

Nouvelle forme de la même équation (avec $\sigma^t = \sigma/|v|$ et $K^t = K/|v|$)

$$\frac{1}{|v|} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega \cdot \nabla \phi + \sigma^t(x, \omega, E) \phi - K^t \phi = 0$$

On distingue le **scattering** des **fissions** (tout isotrope pour simplifier)

$$K^t \phi = \int_{E_{min}}^{E_{max}} \int_{|\omega'|=1} \sigma^*(x, \omega \cdot \omega', E, E') \phi(x, \omega', E') d\omega' dE'$$

avec $\sigma^* = \sigma^c + \nu(E) \sigma^f$ où $\nu(E)$ est le nombre moyen de neutrons produits par fission. Le flux de chaleur est proportionnel à $\nu(E) \sigma^f \phi$.

Formalisme multigroupe. On discrétise le spectre d'énergie

$$E_{max} = E_0 > E_1 > \dots > E_G = E_{min}.$$

$$\phi_g(t, x, \omega) \approx \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(t, x, \omega, E) dE \quad 1 \leq g \leq G$$

On note $|v_g|$ une vitesse moyenne pour le groupe g et on moyenne les sections efficaces pour obtenir le système couplé

$$\frac{1}{|v_g|} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} + \omega \cdot \nabla \phi_g + \sigma_g(x) \phi_g = \sum_{g'=1}^G \int_{|\omega'|=1} \sigma_{gg'}^*(x, \omega \cdot \omega') \phi_{g'}(x, \omega') d\omega'$$

On utilise de 2 à quelques centaines de groupes...

Modèle à 2 groupes : *neutrons lents ou thermiques* (déclenchent les fissions), *neutrons rapides* (produits par fission).

Rôle du modérateur (eau, graphite) : permet de ralentir les neutrons dans un réacteur.

Approximation par la diffusion. Modèle le plus simple de diffusion à 2 groupes

$$\begin{cases} \frac{1}{|v_1|} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1 \nabla u_1) + \sigma_1(x)u_1 = f_1(x) + \sigma_{12}^f(x)u_2 \\ \frac{1}{|v_2|} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(D_2 \nabla u_2) + \sigma_2(x)u_2 = f_2(x) + \sigma_{21}^c(x)u_1 \end{cases}$$

Quand peut on utiliser la diffusion plutôt que le transport ?

Modèle 2 : le transfert radiatif

Transport d'énergie par rayonnement électromagnétique = gaz de photons

Milieu d'indice constant (non dispersif) \Rightarrow monocinétique

Fonction de distribution des photons : $f \equiv f(t, x, \omega, \nu)$: densité de nombre de photons de fréquence ν et de direction ω situés au point x à l'instant t

Intensité radiative :

$$I(t, x, \omega, \nu) = ch\nu f(t, x, \omega, \nu) \text{ avec } \begin{cases} h = \text{constante de Planck} \\ c = \text{vitesse de la lumière} \end{cases}$$

Interaction rayonnement/matière : selon 3 mécanismes

- a) **scattering** : les photons changent brutalement de direction, et parfois de fréquence par suite de collisions avec des électrons du milieu ;
- b) **absorption** : un photon est absorbé par un électron du milieu, qu'il excite à un niveau d'énergie supérieur ;
- c) **émission** : réciproquement, un électron du milieu peut être désexcité, en émettant un photon

Scattering : on s'intéressera essentiellement à deux cas particuliers

$$\kappa_s \int_{|\omega'|=1} \frac{3}{16\pi} (1 + (\omega \cdot \omega')^2) (I(t, x, \omega', \nu) - I(t, x, \omega, \nu)) d\omega'$$

● scattering Thomson (par les électrons libres du milieu) :

$$\kappa_s^{Thomson} = \frac{8\pi e^4}{3m_0^2 c^4}$$

● scattering Rayleigh (par une sphère diélectrique de polarisabilité α) :

$$\kappa_s^{Rayleigh} = \frac{128\pi^5 \alpha^2 \nu^4}{3c^2}$$

Absorption/Emission : on suppose que le milieu est en **équilibre thermodynamique local** (ETL) — en tout point x et à tout instant t , il existe une **température électronique** $T(t, x)$

Terme d'absorption :

$$-\sigma_\nu(T(t, x))I(t, x, \omega, \nu)$$

Terme d'émission :

$$\sigma_\nu(T(t, x))B_\nu(T(t, x))$$

où B_ν est la **fonction de Planck** — intensité radiative d'un **corps noir porté** à la température T :

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

On vérifie que

$$\frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = aT^4 \quad \text{avec } a = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}$$

ce qui est la **loi de Stefan** pour le rayonnement d'un corps noir.

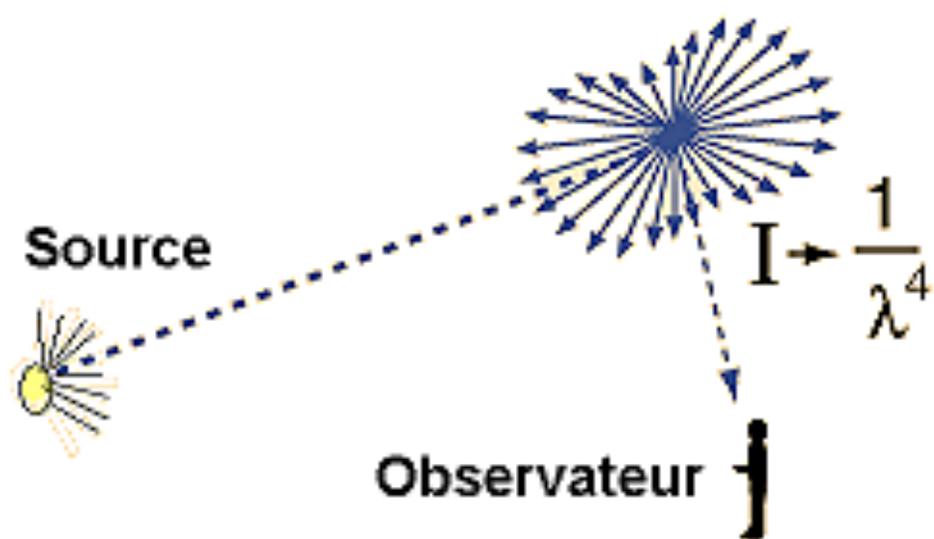
Conclusion : l'équation du transfert radiatif s'écrit

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x I = \sigma_{\nu}(T)(B_{\nu}(T) - I) + \kappa_s \int_{|\omega|=1} \frac{3}{16\pi} (1 + (\omega \cdot \omega')^2) (I(t, x, \omega', \nu) - I(t, x, \omega, \nu)) d\omega'$$

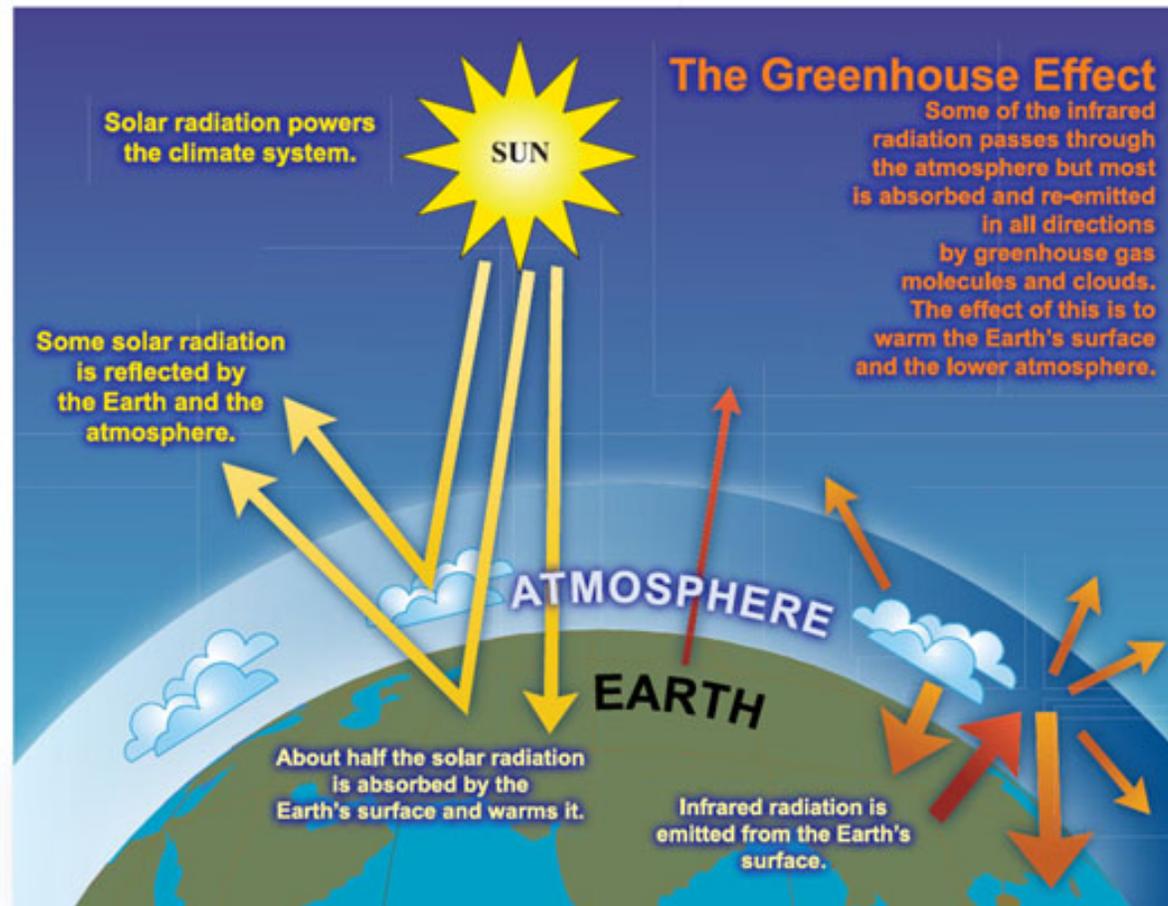
Pourquoi le ciel est-il bleu ? le coefficient de scattering de Rayleigh

$$\kappa_s^{Rayleigh} = \frac{128\pi^5 \alpha^2 \nu^4}{3c^2}$$

croît avec la fréquence du rayonnement. Donc la lumière bleue est environ $(7/4)^4$ fois plus diffusée que la lumière rouge.



L'effet de serre



L'atmosphère terrestre est transparente au rayonnement solaire, à peu près celui d'un corps noir à $5800K$, qui échauffe la surface de la Terre, vers $288K$. Le rayonnement du corps noir à $288K$ (environ $15^{\circ}C$) est majoritairement infra-rouge, or la vapeur d'eau et le CO_2 de l'atmosphère absorbent ce rayonnement et en réémettent une partie vers la surface de la Terre.

Sans effet de serre, la température moyenne à la surface de la Terre serait d'environ $255K$ ($-18^{\circ}C$.)

Modèle 3 : biologie, dynamique des populations

Type de populations : humains, animaux, cellules...

Evolution d'une population **structurée**, i.e., caractérisée par un **trait**, propriété intrinsèque de chaque individu.

Exemples de trait : âge, taille.

La variable de trait va jouer le rôle de la variable de vitesse.

Attention ! t = temps, mais x = trait...

(Pas de variable d'espace ici, pour simplifier.)

Premier exemple : l'équation du renouvellement

Trait = âge = x . Taux de décès = $d(x) \geq 0$. Taux de natalité = $b(x) \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} + d(x)n = 0 & \text{pour } t > 0, x > 0, \\ n(t, 0) = \int_0^{+\infty} b(y)n(t, y) dy & \text{pour } t > 0, \\ n(0, x) = n^0(x) & \text{pour } x > 0. \end{array} \right.$$

Interprétation : âge proportionnel au temps ! La solution de

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

est $m(t, x) = m^0(x - t)$. Par définition, $m^0(x) = 0$ pour $x < 0$. Donc la population vieillit, i.e., $m(t, x) = 0$ pour $x < t$.

(Voir polycopié pour un modèle plus compliqué avec maturation.)

Deuxième exemple : mitose ou division cellulaire

Trait = taille = x . Taux de mitose = $b(x) \geq 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} + b(x) n(t, x) = 4 b(2x) n(t, 2x) & \text{pour } t > 0, x > 0, \\ n(t, 0) = 0 & \text{pour } t > 0, \\ n(0, x) = n^0(x) & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Une cellule de taille $2x$ devient deux cellules de taille x .

Une fraction $b(x)n(t, x)$ disparaît de la population des cellules de taille x , mais une fraction $4b(2x)n(t, 2x)$ apparaît.

Pourquoi le facteur 4 ? A cause de la conservation de la taille totale :

$$\int_0^{+\infty} x b(x) n(t, x) dx = \int_0^{+\infty} 4x b(2x) n(t, 2x) dx$$

Mitose asymétrique : un individu de taille y se divise en deux enfants de taille $x \geq 0$ et $y - x \geq 0$ suivant le taux $b(x, y) \geq 0$.

Le parent doit être plus grand que l'enfant : $b(x, y) = 0$ si $x > y$!

On note $b^*(y)$ le taux de disparition des individus de taille y qui vaut

$$b^*(y) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} b(x, y) dx = \frac{1}{2} \int_0^y b(x, y) dx$$

Le modèle est donc

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} + b^*(x) n(t, x) = \int_x^{+\infty} b(x, y) n(t, y) dy & \text{pour } t > 0, x > 0, \\ n(t, 0) = 0 & \text{pour } t > 0, \\ n(0, x) = n^0(x) & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Mitose asymétrique (suite) : on fait les hypothèses suivantes de modélisation sur b .

Le modèle est symétrique par rapport aux deux enfants x et $y - x$

$$b(x, y) = b(y - x, y).$$

Le processus de mitose conserve la taille

$$y b^*(y) = \int_0^{+\infty} x b(x, y) dx = \int_0^y x b(x, y) dx$$

qui implique la conservation globale

$$\int_0^{+\infty} x b^*(x) n(t, x) dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x b(x, y) n(t, y) dx dy.$$

Autres modèles : plus complexes avec effets supplémentaires.

Dynamique des gaz raréfiés : équation de Boltzmann non-linéaire pour prendre en compte les collisions binaires entre particules.

Physique des plasmas : particules chargées (électrons et ions) donc couplage avec Maxwell.