ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 24 Mars 2009 (2 heures)

1 Schéma numérique

1. On multiplie par u l'équation et on intègre par parties en x pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(t,x)\,dx + \frac{a}{2}\left(u^2(t,1) - u^2(t,0)\right) = 0,$$

qui, après intégration en temps, donne

$$\int_0^1 u^2(t,x)\,dx + a\int_0^t u^2(s,1)\,ds = \int_0^1 u_0^2(x)\,dx + a\int_0^t f^2(s)\,ds\,.$$

Comme $a > 0$, on en déduit

$$\int_0^1 u^2(t,x)\,dx \le \int_0^1 u_0^2(x)\,dx + a\int_0^t f^2(s)\,ds\,.$$

2. On calcule l'erreur de troncature du schéma

$$E = \frac{u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j)}{\Delta t} + a\frac{u(t_{n+1},x_j) - u(t_{n+1},x_{j-1})}{\Delta x}$$

pour trouver, en faisant un développement de Taylor autour du point (t_{n+1}, x_j),

$$E = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t_{n+1},x_j) + \mathcal{O}\left(\Delta t + \Delta x\right)$$

ce qui prouve que le schéma est consistant et d'ordre 1 au moins.

3. En notant $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$, on réécrit le schéma

$$u_j^{n+1} = \frac{c}{(1+c)}u_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{(1+c)}u_j^n. \tag{1}$$

Ce schéma peut paraitre implicite mais il n'en est rien car la matrice du système linéaire associé à (1) est triangulaire et on peut donc résoudre explicitement (1) en progressant dans le sens des j croissants. On part de la condition aux limites

$$u_0^{n+1} = f(t_{n+1})$$

et on calcule de proche en proche la nouvelle valeur u_j^{n+1} en fonction de la précédente u_{j-1}^{n+1}.

4. On vérifie le principe du maximum en remarquant que (1) est une combinaison convexe. Soit deux constantes $m \leq M$ telles que

$$m \leq f(t_n), u^0(x_j) \leq M \quad \forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N\}.$$

Par récurrence, on suppose que

$$m \leq u_j^n \leq M \quad \forall j \in \{0, 1, ..., N\},$$

et on déduit de (1) les mêmes inégalités pour les valeurs de j croissant de 1 à N. Le schéma, vérifiant ainsi le principe du maximum discret, est stable L^∞. Comme il est aussi consistant, il converge par application du théorème de Lax.

5. Le schéma se réécrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + AU^{n+1} = 0$$

avec

$$(AU^n)_j = \frac{a}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{a}{2\Delta x}\Big((u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (2u_j^n - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)\Big).$$

On vérifie que

$$AU^n \cdot U^n = \frac{a}{2\Delta x}\sum_{j=1}^{N}\Big((u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)u_j^n + ((u_j^n - u_{j-1}^n) - (u_{j+1}^n - u_j^n))u_j^n\Big)$$

$$= \frac{a}{2\Delta x}\left(u_{N+1}^n u_N^n - u_1^n u_0^n + \sum_{j=1}^{N}(u_j^n - u_{j-1}^n)^2 - (u_{N+1}^n - u_N^n)u_N^n + (u_1^n - u_0^n)u_0^n\right)$$

$$\geq -\frac{a}{2\Delta x}(u_0^n)^2.$$

On multiplie alors le schéma par $U^{n+1} + U^n = 2U^{n+1} + \Delta t A U^{n+1}$ pour obtenir

$$|U^{n+1}|^2 - |U^n|^2 + \Delta t\left(2AU^{n+1} \cdot U^{n+1} + \Delta t|AU^{n+1}|^2\right) = 0$$

d'où l'on déduit

$$|U^{n+1}|^2 \leq |U^n|^2 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_0^n)^2$$

qui conduit au résultat désiré par sommation en n.

2 Limite de diffusion

1a. L'équation (B) posée sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ avec condition initiale

$$F_+\big|_{t=0} = F_+^{in}, \quad F_-\big|_{t=0} = F_-^{in}$$

admet une unique solution généralisée $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ qui est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ (cf. Théorème 3.1.2 du cours.) Cette solution est donnée par la formule

$$(F_+, F_-)(t,x) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{T}^n \mathcal{F}[F_+^{in}, F_-^{in}]$$

où

$$\mathcal{F}[F_+^{in}, F_-^{in}](t,x) = (e^{-\sigma t} F_+^{in}(x - t\omega), e^{-\sigma t} F_-^{in}(x + t\omega))$$

et où

$$\mathcal{T}(G_+, G_-)(t,x) = \tfrac{\sigma(1+\gamma)}{2} \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} (\overline{G}(s, x+(s-t)\omega), \overline{G}(s, x-(s-t)\omega))ds$$

avec la notation

$$\overline{G} = \frac{G_+ + G_-}{2}.$$

On vérifie sans peine, par dérivation sous le signe d'intégrale, que, pour tout $n \geq 1$,

$$\partial_x \mathcal{T}^n \mathcal{F}[F_+^{in}, F_-^{in}] = \mathcal{T}^n \mathcal{F}[\partial_x F_+^{in}, \partial_x F_-^{in}] \text{ sur } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R},$$

puis que la série

$$\sum_{n\geq 0} \partial_x \mathcal{T}^n \mathcal{F}[F_+^{in}, F_-^{in}]$$

est normalement convergente dans $L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}; \mathbf{R}^2)$ pour tout $T > 0$, puisque

$$\begin{aligned}&\|\partial_x \mathcal{T}^n \mathcal{F}[F_+^{in}, F_-^{in}]\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R};\mathbf{R}^2)} \\ &\qquad \leq \frac{\sigma^n (1+\gamma)^n T^n}{2^n n!} \max(\|\partial_x F_+^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, \|\partial_x F_-^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}).\end{aligned}$$

Ainsi $F_\pm$ admet une dérivée partielle par rapport à x continue en tout point de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

D'autre part, comme $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ est solution généralisée de l'équation (B), les fonctions

$$s \mapsto F_+(t+s, x+s\omega) \quad \text{ et } s \mapsto F_-(t+s, x-s\omega)$$

sont de classe C^1 sur $[-t, +\infty[$ pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, de sorte que $F_\pm$ admet une dérivée partielle par rapport à t continue en tout point de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Comme $F_\pm$ admet des dérivées partielles continues par rapport aux deux variables t et x sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, on conclut que $F_\pm \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$.

1b. Soit $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ la solution de (B) de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ avec donnée initiale

$$F_+\big|_{t=0} = F_+^{in}\,, \quad F_-\big|_{t=0} = F_-^{in}$$

Posons $G_+(t,x) = F_-(t,-x)$ et $G_-(t,x) = F_+(t,-x)$; évidemment

$$\begin{aligned} G_+(0,x) &= F_-(0,-x) = F_-^{in}(-x) = F_+^{in}(x)\,, \\ G_-(0,x) &= F_+(0,-x) = F_+^{in}(-x) = F_-^{in}(x)\,. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\partial_t + \omega\partial_x)G_+(t,x) &= (\partial_t - \omega\partial_x)F_-(t,-x) \\ &= \big(\sigma(1+\gamma)\overline{F} - \sigma F_-\big)\,(t,-x) = \big(\sigma(1+\gamma)\overline{G} - \sigma G_+\big)\,(t,x) \end{aligned}$$

et de même

$$(\partial_t - \omega\partial_x)G_-(t,x) = (\partial_t + \omega\partial_x)F_-(t,-x) = \big(\sigma(1+\gamma)\overline{G} - \sigma G_-\big)\,(t,x)$$

Donc $(t,x) \mapsto (G_+, G_-)(t,x)$ est solution de classe C^1 de l'équation (B) sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ de même donnée initiale que la solution $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$. Ces deux solutions coïncident donc par unicité de la solution du problème de Cauchy pour (B). Donc en particulier

$$G_+(t,x) = F_-(t,-x) = F_+(t,x) \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}\,.$$

On vérifie de même que $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ et $(t,x) \mapsto (H_+, H_-)(t,x)$ — où $H_\pm$ est définie par $H_\pm(t,x) = F_\pm(t, x+2L)$ — sont solutions du problème de Cauchy pour l'équation (B) avec la même donnée initiale : elles coïncident donc sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, de sorte que

$$F_\pm(t,x) = F_\pm(t, x+2L)\,, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}\,.$$

2. Sous les hypothèses faites sur $f_\pm^{in}$, on vérifie que les fonction $F_\pm^{in}$ de période $2L$ définies par

$$F_+^{in}(x) = \begin{cases} f_+(x)\,, & 0 \le x \le L\,, \\ f_-(-x)\,, & -L \le x \le 0, \end{cases} \qquad F_-^{in}(x) = \begin{cases} f_-(x)\,, & 0 \le x \le L\,, \\ f_+(-x)\,, & -L \le x \le 0. \end{cases}$$

sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Le problème de Cauchy pour l'équation (B) avec donnée initiale

$$F_\pm\big|_{t=0} = F_\pm^{in}$$

admet donc une unique solution $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Posons alors

$$f_+ = F_+\big|_{[0,L]} \quad \text{ et } f_- = F_-\big|_{[0,L]}\,.$$

Evidemment $(t,x) \mapsto (f_+, f_-)$ est solution de l'équation (B) de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times [0,L]$ vérifiant la condition initiale (CI). D'après la question **1b.**

$$f_+(t,0) = f_-(t,0) \text{ et } f_+(t,L) = F_-(t,-L) = F_-(t,L) = f_-(t,L)$$

de sorte que cette solution vérifie aussi la condition aux limites (CL).

Vérifions l'unicité : supposons que $f_\pm^{in} = 0$ et montrons que $f_\pm = 0$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Multiplions la première équation de (B) par f_+ et la seconde par f_-, et ajoutons membre à membre les deux égalités ainsi obtenues : on trouve que

$$\tfrac{1}{2}\partial_t(f_+^2 + f_-^2) + \tfrac{1}{2}\omega\partial_x(f_+^2 - f_-^2) = -\tfrac{1}{2}\sigma(1+\gamma)(f_+ - f_-)^2 + \sigma\gamma(f_+^2 + f_-^2)\,.$$

On intègre alors en x chaque membre de cette égalité, en remarquant que

$$\int_0^L \partial_x(f_+^2 - f_-^2)(t,x)dx = f_+^2(t,L) - f_-^2(t,L) - f_+^2(t,0) + f_-^2(t,0) = 0$$

en utilisant la condition de réflexion (CL). Donc, par dérivation sous le signe d'intégrale :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (f_+^2 + f_-^2)(t,x)dx \leq 2\sigma\gamma \int_0^L (f_+^2 + f_-^2)(t,x)dx$$

ce qui montre que

$$\int_0^L (f_+^2 + f_-^2)(t,x)dx \leq e^{2\sigma\gamma t}\int_0^L (f_+^2 + f_-^2)(0,x)dx = 0\,.$$

On en déduit donc que $f_+ = f_- = 0$, d'où l'unicité.

3. Supposons que q_+ et q_- sont des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+ \times [0,L]$ vérifiant la condition aux limites (CL). Alors les fonctions $2L$-périodiques Q_+ et Q_- définies par

$$Q_+(t,x) = \begin{cases} q_+(t,x)\,, & 0 \leq x \leq L\,, \\ q_-(t,-x)\,, & -L \leq x \leq 0, \end{cases}$$

$$Q_-(t,x) = \begin{cases} q_-(t,x)\,, & 0 \leq x \leq L\,, \\ q_-(t,-x)\,, & -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

sont continues sur $\mathbf{R}$. Soit $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ la solution généralisée de (BS) sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ avec terme source $Q_\pm$ et donnée initiale (F_+^{in}, F_-^{in}) définie comme dans la partie existence de la question **2.**. On montre comme dans la question **2.** que

$$f_+ = F_+\big|_{\mathbf{R}_+\times[0,L]} \quad \text{ et } f_- = F_-\big|_{\mathbf{R}_+\times[0,L]}$$

définissent une solution généralisée de (BS) avec les conditions aux limites (CL) et la condition initiale (CI).

D'après le principe du maximum pour l'équation de Boltzmann linéaire dans l'espace entier, on a

$$\begin{aligned}
&\max(\|F_+(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, \|F_-(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}) \\
&\quad \le e^{\sigma\gamma T}\max(\|F_+^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, \|F_-^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}) \\
&\quad + Te^{\sigma\gamma T}\max(\|Q_+\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R})}, \|Q_-\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R})}) \\
&\quad = e^{\sigma\gamma T}\max(\|f_+^{in}\|_{L^\infty([0,L])}, \|f_-^{in}\|_{L^\infty([0,L])}) \\
&\quad + Te^{\sigma\gamma T}\max(\|q_+\|_{L^\infty([0,T]\times[0,L])}, \|q_-\|_{L^\infty([0,T]\times[0,L])})
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,T]$, d'où le principe du maximum cherché :

$$\begin{aligned}
&\max(\|f_+(t,\cdot)\|_{L^\infty([0,L])}, \|f_-(t,\cdot)\|_{L^\infty([0,L])}) \\
&\quad \le e^{\sigma\gamma T}\max(\|f_+^{in}\|_{L^\infty([0,L])}, \|f_-^{in}\|_{L^\infty([0,L])}) \\
&\quad + Te^{\sigma\gamma T}\max(\|q_+\|_{L^\infty([0,T]\times[0,L])}, \|q_-\|_{L^\infty([0,T]\times[0,L])})
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

4a. S'il existe une solution (F_+, F_-) au système d'équations considérées, alors

$$S_+ + S_- = F_+ - \frac{F_+ + F_-}{2} + F_- - \frac{F_+ + F_-}{2} = F_+ + F_- - (F_+ + F_) = 0\,.$$

Réciproquement, si $S_+ = -S_- =: S$, une solution du système considéré est donc

$$F_+^0 = S\,, \quad F_-^0 = -S\,.$$

Toutes les solutions de ce système sont alors de la forme

$$F_+ = \overline{F} + S\,, \quad F_- = \overline{F} - S\,,$$

où $x \mapsto \overline{F}$ est une fonction continue arbitraire sur $[0,L]$.

4b. On suit la démonstration du théorème d'approximation par la diffusion (Théorème 4.3.1 du cours).

(i) On doit faire un changement d'échelle de temps $t \mapsto \epsilon t$ de sorte que l'équation de Boltzmann linéaire considérée est

$$(B\epsilon) \qquad \begin{cases} \epsilon\partial_t f_+ + \omega\partial_x f_+ = \frac{\hat\sigma}{\epsilon}(1+\epsilon^2\hat\gamma)\frac{f_+ + f_-}{2} - \frac{\hat\sigma}{\epsilon}f_+\,, \\[2ex] \epsilon\partial_t f_- - \omega\partial_x f_- = \frac{\hat\sigma}{\epsilon}(1+\epsilon^2\hat\gamma)\frac{f_+ + f_-}{2} - \frac{\hat\sigma}{\epsilon}f_-\,. \end{cases}$$

On cherche alors la solution sous la forme d'un développement formel en puissances de ϵ :

$$f^\epsilon_\pm(t,x) = \sum_{k\geq 0} \epsilon^k f^k_\pm(t,x)$$

et on trouve successivement (cf. notes de cours) que

$$f^0_\pm(t,x) = f^0(t,x)$$

(indépendant des indices $+$ ou $-$), puis que

$$f^1_+(t,x) = -\frac{1}{\hat\sigma}\omega\partial_x f^0(t,x)\,,$$
$$f^1_-(t,x) = +\frac{1}{\hat\sigma}\omega\partial_x f^0(t,x)\,,$$

A chaque étape, on doit résoudre une équation du type étudié dans la question **4a.**.

(ii) On trouve ainsi que f^0 doit vérifier l'équation de diffusion :

$$\partial_t f^0 - \frac{1}{3\hat\sigma}\partial_x^2 f^0 = \hat\sigma\hat\gamma f^0\,,$$

ce qui est la condition de compatibilité dans la question **4a.** garantissant l'existence de $f^2_\pm$.

(iii) Les conditions aux limites

$$0 = f^\epsilon_+(t,0) - f^\epsilon_-(t,0) = -2\epsilon\frac{\omega}{\hat\sigma}\partial_x f^0(t,0) + O(\epsilon^2)$$

et

$$0 = f^\epsilon_+(t,L) - f^\epsilon_-(t,L) = -2\epsilon\frac{\omega}{\hat\sigma}\partial_x f^0(t,L) + O(\epsilon^2)$$

entraînent que f^0 vérifie la condition de Neuman

$$\partial_x f^0(t,0) = \partial_x f^0(t,L) = 0 \text{ modulo } O(\epsilon)\,.$$

(iv) La condition initiale sur $f^\epsilon_\pm$

$$f^{in}(x) = f^\epsilon_+(0,x) = f^0(0,x) - \epsilon\frac{\omega}{\hat\sigma}\partial_x f^0(0,x) + O(\epsilon^2)$$
$$f^{in}(x) = f^\epsilon_-(0,x) = f^0(0,x) + \epsilon\frac{\omega}{\hat\sigma}\partial_x f^0(0,x) + O(\epsilon^2)$$

fournit une condition initiale pour f^0 :

$$f^0\big|_{t=0} = f^{in} \text{ modulo } O(\epsilon)\,.$$

(v) En appliquant le principe du maximum de la question **3.**, on démontre comme dans la preuve du Théorème 4.3.1 du cours que

$$\|f^\epsilon_\pm - q\|_{L^\infty([0,T]\times[0,L])} \leq C_T\epsilon$$

pour tout $\epsilon > 0$, où C_T est une constante positive qui ne dépend que de T et des données su problème, et où $q \equiv q(t,x)$ est la solution de l'équation de diffusion avec condition Neumann au bord :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t q - \frac{\omega^2}{\hat{\sigma}} \partial_x^2 q = \hat{\sigma}\hat{\gamma} q \,, \\ \partial_x q\big|_{x=0} = \partial_x q\big|_{x=L} = 0 \,, \\ q\big|_{t=0} = f^{in} \,. \end{array} \right.$$