Limite de diffusion

Exercice I.

Nous considérons l'équation de Boltzmann linéaire monocinétique en dimension deux d'espace. La vitesse s'écrit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ et la position $x \in \mathbb{R}^2$. $f = f(x, \theta, t)$ est donc solution de

$$\partial_t f + \frac{1}{\varepsilon} v.\nabla f = \frac{\sigma}{\varepsilon^2}(K(f) - f)$$

avec

$$K(f) = \frac{\int_0^{2\pi} k(\theta - \mu) f(x, t, \mu) d\mu}{\int_0^{2\pi} k(\mu) d\mu}.$$

Le noyau de collision k est une fonction périodique strictement positive et bornée.

1. On rappelle le développement en série de Fourier

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{ni\theta}, \quad f_n = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ni\theta} d\theta.$$

Montrer que

$$K(f) = \frac{1}{2\pi k_0} \sum_n k_n f_n e^{ni\theta}$$

et que $|k_n| < k_0$ pour tout $n \neq 0$.

2. Par ailleurs on écrit la hiérarchie d'équations en ε pour étudier la limite de diffusion

$$f = f^0 + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2 + \cdots$$

A partir du développement en série de Fourier de f^0, montrer que c'est une fonction constante en angle. Continuer pour les autres termes de la hiérarchie.

3. Retrouver la limite de diffusion et montrer que cette équation dépend de σ ainsi que de k_0, k_1 et k_{-1}.

4. Mettre en place une stratégie (en norme quadratique) pour démontrer que la solution $f(t, x, v)$ est proche de la solution de l'équation de diffusion.

Exercice II. Interprétation physique et probabiliste du temps de sortie du soleil pour des photons

Soit un soleil monodimensionnel dans lequel sont présents (et créés) des photons. On considère pour simplifier l'équation en 1D

$$\frac{1}{c}\partial_t f + \frac{v}{c}\partial_x f = \sigma(\langle f \rangle - f), \quad |v| = c,\ |x| \leq R.$$

1. Expliquer à partir de considérations élémentaires pourquoi le terme $\langle f \rangle - f$ peut s'interpréter comme une redistribution aléaoire de particules (les photons) sur la matière lourde.

2. Quelle est la dimension de la constante σ ?

Pour déterminer une valeur raisonnable de cette constante, on revient sur le problème 3D. Montrer que pour un soleil de rayon R et de masse M alors

$$\sigma \approx \left(\frac{M}{\frac{4}{3} R^3 m} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{R}$$

convient, où m est la masse du nucléon.

Déterminer σ pour les valeurs physiques

$$M = 2\ 10^{30} kg,\ R = 10^6 km,\ m = 1.6\ 10^{-27} kg.$$

3. Quelle est la limite de diffusion ? Interpréter la solution d'un point de vue probabiliste.

4. En déduire que la plupart des photons issus du coeur du soleil mettent (au moins) plusieurs milliers d'années pour en sortir. Comparer avec le temps d'arrivée sur terre (la distance terre-soleil est $D = 1.5\ 10^8 km$).