MP 567, Transport et Diffusion Xavier Blanc

Equation des caractéristiques, condition au bord

Proposition de correction

Exercice I.

1. Le plus simple est de dériver la solution proposée.

$$\partial_t f = -v\partial_x f_0(x-tv,v) + S(x,t)$$
$$+\int_0^t (-v\partial_x)\, S(x-v(t-s),s)ds,$$

et

$$\partial_x f = \partial_x f_0(x-tv,v) + \int_0^t \partial_x S(x-v(t-s),s)ds.$$

D'où le résultat.

2. $f(x,t,v)$ dépend des valeurs de $f_0(y,v)$ et $S(y,s)$ pour

$$|y-c| \leq tv.$$

Donc le résultat est évident.

3. Posons $g = e^{\sigma t} f$ et $\widetilde{S} = e^{\sigma t} S$. Alors

$$\partial_t g + v\partial_x g - \widetilde{S} = \partial_t f + v\partial_x f + \sigma f - S = 0.$$

On applique la formule précédente, puis on revient en f.

Exercice II. On peut trouver directement la formule pour le cas σ non constant en remplaçant les quantités du type σt par des intégrales sur le bon chemin. Une autre possibilité consiste à définir la caractéristique

$$X'(s) = v,\ s \leq t, \quad X(t) = x,$$

et à étudier

$$g_v(s) = f(X(s),s,v).$$

Alors on obtient une équation différentielle ordinaire

$$g_v'(s) + \sigma(X(s),s)\, g_v(s) = S(X(s),s),$$

dont la solution est

$$g_v(t) = e^{-\int_0^t \sigma(X(s),s)ds} g_v(0)$$
$$+\int_0^t e^{-\int_s^t \sigma(X(s),s)ds} S(X(s),s)ds.$$

D'où le résultat recherché.

Exercice III. Cas "stationnaire"

1. Évident.

2. Évident en partant des formules précédentes en considérant que l'instant $t=0$ est envoyé à $t=-\infty$.

3. On conserve la forme

$$f(x,v) = \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma+\lambda)\mu} s(x-\mu v)d\mu$$

Exercice IV.

1. Appliquer le cours.

2. On a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \int_{|v|=1} \varphi(f)dxdv = \int_\Omega \int_{|v|=1} \varphi'(f)\partial_t f dxdv$$
$$= \int_\Omega \int_{|v|=1} \varphi'(f)\left(-v\cdot\nabla f - \sigma f + Q(f)\right)dxdv.$$

Nous allons montrer que chacun des termes possède le bon signe. Tout d'abord

$$-\int_\Omega \int_{|v|=1} \varphi'(f) v\cdot\nabla f dxdv$$
$$= -\int_\Omega \int_{|v|=1} v.\nabla\varphi(f)dxdv$$
$$= -\int_{\partial\Omega} \int_{(v,n)\geq 0} (v,n)\varphi(f)d\sigma dv$$
$$-\int_{\partial\Omega} \int_{(v,n)\leq 0} (v,n)\varphi(f)d\sigma dv$$

$$= -\int_{\partial\Omega}\int_{(v,n)\geq 0}(v,n)\varphi(f)d\sigma dv \leq 0$$

pour la condition de Dirichlet. On verra l'autre condition plus tard. Puis on regarde

$$\int_\Omega\int_{|v|=1}\varphi'(f)(Q(f)-\sigma f)dxdv$$

$$= \sigma\int_\Omega\int_{|v|=1}\left(\varphi'(f)-\varphi'(\langle f\rangle)\right)(\langle f\rangle - f)dxdv.$$

Or φ est convexe. Donc

$$\left(\varphi'(f)-\varphi'(\langle f\rangle)\right)(\langle f\rangle - f) \leq 0.$$

D'où le résultat.

3. Ce résultat

$$\int_\Omega\int_v \varphi(f(T))dxdv \leq \int_\Omega\int_v \varphi(f_0)dxdv$$

est évident pour φ convexe et C^2. Puis on approche $\varphi(f) = \max(0,f)$ qui n'est pas C^2 par une suite $\varphi^n(f)$ C^2 ce qui ne pose pas de problème.

Du coup si $f_0 \geq 0$ alors

$$\int_\Omega\int_v \varphi(f_0)dxdv = 0 \Longrightarrow \int_\Omega\int_v \varphi(f(t))dxdv \leq 0.$$

Comme φ est posisitve ou nulle, alors $\varphi(f(t,x,v)) \equiv 0$ et donc $f \geq 0$.

Pour une condition de réflexion diffuse la preuve est encore valide. Il suffit de remarquer que

$$-\int_{\partial\Omega}\int_{(v,n)\geq 0}(v,n)\varphi(f)d\sigma dv$$

$$-\int_{\partial\Omega}\int_{(v,n)\leq 0}(v,n)\varphi(f)d\sigma dv$$

$$= -\int_{\partial\Omega}\int_{(v,n)\geq 0}(v,n)\left(\varphi(f)-\varphi(\overline{f})\right)d\sigma dv$$

où

$$\overline{f} = \frac{\int_{(v,n)\geq 0} f(v,n)dv}{\int_{(v,n)\geq 0}(v,n)dv}.$$

Pour une fonction convexe on sait que

$$\varphi(f) \geq \varphi(\overline{f}) + \varphi'(\overline{f})(f-\overline{f}).$$

Donc

$$-\int_{\partial\Omega}\int_{(v,n)\geq 0}(v,n)\left(\varphi(f)-\varphi(\overline{f})\right)d\sigma dv$$

$$\leq \int_{\partial\Omega}\int_{(v,n)\geq 0}(v,n)\varphi'(\overline{f})(f-\overline{f})dv = 0.$$

CQFD.

4. Les équations sont invariantes pour la transformation $g = C - f$. En prenant $C = \max f_0$ on en déduit que la borne supérieure est également respectée.

Exercice V. Un modèle de population de cellules en laboratoire sans condition au bord

1. Pour $v \equiv 0$ les cellules ne vieillissent pas.

Pour $v \equiv 1$ on retrouve le modèle structuré en âge qui décrit un vieillissement uniforme et régulier.

Donc $0 < v < 1$ permet de modéliser les situtations intermédiaire, en fonction du dosage de la substance chimique.

2. On a

$$N'(t) = -\int_0^\infty \partial_a(vn)da = v(0)n(0) \geq 0.$$

C'est normal. Le nombre de cellules étant fonction du nombre de cellules crées pour $a = 0$, il ne peut que croître.

Pour le modèle $\partial_t n + v(a)\partial_a n = 0$, $N(t)$ peut prendre tous les signes. Ce qui montre que $\partial_t n + v(a)\partial_a n = 0$ n'est pas le bon modèle.

3. Déterminer n en fonction de n_0 le nombre de cellules par tranche d'age à $t = 0$. L'équation des courbes caractéristiques est

$$A_a'(t) = v(A_a(t)), \quad A_a(0) = a.$$

Posons pour un a donné

$$m_a(t) = n(A_a(t), t).$$

Alors

$$m_a'(t) = \partial_t n + v\partial_a n = n\partial_a v = m_a(t)\partial_a v.$$

Donc

$$m_a(t) = m_a(0)e^{\int_0^t \partial_a v(A_a(s))ds}$$

ou encore

$$n(a,t) = n_0(A_a(0))e^{\int_0^t \partial_a v(A_a(s))ds}.$$

4. Cela peut paraître surprenant. Il suffit de vérifier que la caractéristique rétrograde (vers les temps négatifs) n'atteindra jamais l'origine $a = 0$. L'équation des caractéristiques rétrogrades est

$$A_a'(t) = -v(A_a(t)), \quad A_a(0) = a.$$

Donc pour $a > 0$

$$A_a'(t) \geq -CA_a(t) \Longrightarrow A_a(t) \geq ae^{-Ct} > 0.$$

5. La quantité

$$\int_0^a \frac{1}{v(b)} db$$

est le temps pour que la caractéristique aille de 0 à a. On se contente d'exprimer que ce temps est infini.