Proposition de correction : PC1

**Exercice I.**

**1.** Les caractéristiques sont les droites $a'(t) = 1$. Le long de ces droites

$$\frac{d}{dt}d(t, x(t)) = \partial_t d + \partial_a d = 0.$$

D'où la solution $d(t, a) = d_0(a - t)$.

**2.** Évident.

**3.** Moins évident. En fait on comprend mieux la situation sous la forme

$$d(0, t + \Delta t) \approx \int_0^\infty \sigma(a) d(a, t) da$$

qui exprime que les naissances à $t + \Delta t$ sont causées par les individus du temps $t$. En passant à la limite $\Delta t \to 0$ on obtient le résultat.

**4.** Le caractère bien posé vient du fait que les caractéristiques atteignent toujours un bord : soit la condition initiale pour $t = 0$ ; soit la condition de natalité pour $a = 0$.

**Exercice II.**

**1.** On obtient

$$\begin{cases} \lambda f + f' = -\mu f, \\ f(0) = \int_0^\infty \sigma(a) f(a) da. \end{cases}$$

C'est un problème aux valeurs propres car $a \mapsto f(a)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont les inconnues. La structure est indentique à celle d'un calcul de criticité pour un réacteur nucléaire.

**2.** L'intégration de la première équation $f' = -(\lambda + \mu(a))f$ donne

$$f(a) = e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da f(0).$$

D'où l'équation demandée.

**3.** Les solutions non triviales(c'est à dire $f(0) > 0$ et $f > 0$) de l'équation sont possibles ssi

$$1 = \int_0^\infty \sigma(a) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da.$$

Cela donne une condition sur $\lambda$. Posons

$$h(a) = \int_0^\infty \sigma(a) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da$$

de sorte que

$$h'(a) = -\int_0^\infty \sigma(a) \left(\lambda + \mu(a)\right) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da.$$

Cela donne le sens de variation à l'infini de $h$ dès que $\mu$ est une fonction bornée. Supposons que cela soit le cas. Alors

$$h(-\infty) = +\infty \text{ et } h(-\infty) = 0.$$

On a toujours

$$h'(a) \leq 0 \text{ pour } \lambda \geq 0.$$

Donc il y a toujours au moins une solution.

Si $\lambda > 0$ alors la population $d$ croît exponentiellement. Si $\lambda < 0$ alors la population $d$ croît exponentiellement. Si $\lambda = 0$ elle est constante au cours du temps.

Mettons nous dans le cas où la natalité est trop faible. A priori $\sigma \leq C$ est une fonction bornée. Donc l'équation se simplifie en

$$1 = \int_{a_-}^{a_- + \varepsilon} \sigma(a) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da \leq C \int_{a_-}^{a_- + \varepsilon} e^{-\lambda a} da.$$

Cherchons d'éventuelles solutions $\lambda \geq 0$. Alors

$$1 \leq C\varepsilon$$

ce qui est impossible dès que $\varepsilon$ est trop petit.

Plus généralement supposons que $\int_0^\infty \sigma(a) da \leq 1$. Alors pour $\lambda \geq 0$ on a $e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} \leq 1$ et

$$1 < \int_0^\infty \sigma(a) da \leq 1$$

qui est impossible.

**Exercice III.**
**1.** La partie *équation aux dériviées partielles* se justifie comme dans l'exercice 1. Il reste à comprendre la partie *termes sources*. Le signe du terme $(d^r - d^v)$ est positif dès qu'il y a plus d'habits rouges que d'habits verts, ce qui correspond bien à un terme source de type dandysme. Le coefficient $\sigma$ est positif et doit se déterminer à partir de *mesures*. C'est une constante phénoménologique (un coefficient du matériau pour un problème physique).
**2.** Effectuons le changement de variables

$$w = d^v + d^r \text{ et } z = d^v - d^r.$$

Alors
$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t w + \partial_a w = 0,\\ \partial_t z + \partial_a z = -2\sigma z.\end{array}\right.$$

La solution est

$$w(t,a) = w_0(a-t) \text{ et } z(t,a) = e^{-2\sigma t} z_0(a-t).$$

D'où la solution

$$d^v = \frac{1}{2}(w(t,a) + z(t,a)) \text{ et } d^r = \frac{1}{2}(w(t,a) - z(t,a))$$

que l'on récrit en fonction des données initiales $d_0^v(a)$ et $d_0^r(a)$.

**Exercice IV.**
**1.** La modélisation est très proche du cas précédent. La seule différence est qu'il y a changement de direction pour l'équation du transport. Le modèle prend la forme dun système *croisé* avec terme source sur la deuxième équation

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t w + \partial_a z = 0,\\ \partial_t z + \partial_a w = -2\sigma z.\end{array}\right.$$

**2.** Évident.
**3.** Évident. L'intérêt de ce calcul est qu'il met en relation les liens étroits entre équation de transport et équation de diffusion. Ces liens sont encore plus évidents pour des systèmes physiques.