MAP 567 Transport et Diffusion Xavier Blanc

Homogénéisation

Proposition de correction

Exercice I.

1. Le tout est de bien écrire la hiérarchie d'équations. On a

$$\left(D(\frac{x}{\varepsilon})(u^\varepsilon)'\right)' = \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y\left(D(y)\partial_y u^\varepsilon\right)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\partial_x\left(D(y)\partial_y u^\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon}\partial_y\left(D(y)\partial_x u^\varepsilon\right)$$

$$+\partial_x\left(D(y)\partial_x u^\varepsilon\right).$$

En développant

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n u_n(x,y) \quad y = \frac{x}{\varepsilon},$$

on a

$$\partial_x u^\varepsilon = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n\left(\partial_x + \frac{1}{\varepsilon}\partial_y\right)u_n(x,y).$$

Et ainsi de suite. D'où en ordonnant en puissances de ε, les trois premiers termes de la suite sont

$$-\partial_y\left(D(y)\partial_y u_0\right) = 0,$$

$$-\partial_x\left(D(y)\partial_y u_0\right) - \partial_y\left(D(y)\partial_x u_0\right) - \partial_y\left(D(y)\partial_y u_1\right) = 0,$$

et enfin

$$-\partial_x\left(D(y)\partial_x u_0\right) - \partial_x\left(D(y)\partial_y u_1\right) - \partial_y\left(D(y)\partial_x u_1\right)$$

$$-\partial_y\left(D(y)\partial_y u_2\right) + \sigma(y)u_0 = f(x).$$

Il faut absolument préciser la condition au bord pour la variable rapide y. La bonne hypothèse (celle qui marche) consiste à considérer la périodicité en y (la même que pour D)

$$u_n(x, y+1) = u_n(x,y), \forall x, y, \forall n.$$

Puis on étudie la hiérarchie d'équations.

a) On montre que $u_0(x,y)$ est constant en y. On notera $u_0(x)$.

b) La deuxième équation se simplifie en

$$\partial_y\left(D(y)\partial_y u_1\right) = -D'(y)u_0'(x)$$

Cela montre que u_1 est, à une constante près, une fonction de $u_0'(x)$. Mais il faut faire attention à la condition de solvabilité. En 1D, c'est évident (le montrer) que cette condition s'écrit $0 = \int_0^1 D'(y)u_0'(x)dy$. Or

$$\int_0^1 D'(y)u_0'(x)dy = u_0'(x)\int_0^1 D'(y)dy = 0$$

par périodicité en y de D. Donc $u_1(x,y) = v(y)u_0'(x)$ pour une fonction $v(y)$ solution de

$$\partial_y\left(D(y)\partial_y v\right) = -D'(y), \quad v(y+1) = v(y).$$

c) On intègre la dernière équation par rapport à la variable $y \in [0,1]_{\mathrm{per}}$. Il vient

$$-\left(\left(\int_0^1 D(y)dy\right)u_0'(x)\right)'$$

$$-\left(\left(\int_0^1 D(y)v'(y)dy\right)u_0'(x)\right)'$$

$$+\left(\int_0^1 \sigma(y)dy\right)u_0(x) = f(x).$$

Au final le coefficient de diffusion est non intuitif

$$D^\star = \int_0^1 D(y)(1+v'(y))dy.$$

L'autre coefficient est plus intuitif

$$\sigma^\star = \int_0^1 \sigma(y)dy.$$

2. L'équation de v implique que

$$D(y)(1+v'(y)) = C,$$

d'où

$$v'(y) = \frac{C}{D(y)} - 1 \Longrightarrow C\int_0^1 \frac{dy}{D(y)} - 1 = 0.$$

Donc

$$C = \left(\int_0^1 \frac{dy}{D(y)}\right)^{-1}$$

et

$$D^\star = C = \left(\int_0^1 D^{-1}(x)dx\right)^{-1}.$$

Exercice II. On se place en dimension deux d'espace

1. La formule est $D^\star = \left(D^\star_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 2}$ avec

$$\begin{aligned} D^\star_{ij} &= \int_{y=(y_1,y_2)\in Y} D(y)(e_j + \nabla_y v_j).e_i dy \\ &= \int_Y D(y)(e_j+\nabla_y v_j).(e_i+\nabla_y v_i)dy \end{aligned}$$

Les fonctions Y-périodiques v_1 et v_2 sont solutions des équations

$$-\nabla.\left(D(y_1)(e_1+\nabla_y v_1)\right) = 0, \quad e_1 = (1,0),$$

et

$$-\nabla.\left(D(y_1)(e_2+\nabla_y v_2)\right) = 0, \quad e_2 = (0,1).$$

La justification est une application de la formule (7.6) du poly. Comme D ne dépend que de la variable y_1 les solutions se cherchent comme fonctions de la variable y_1. D'où les équations implifiées

$$-\partial_{y_1}(D(y_1)(1+\partial_{y_1}v_1) = 0$$

et

$$-\partial_{y_1}(D(y_1)(\partial_{y_1}v_2) = 0.$$

La fonction v_1 correspond au calcul 1D, la fonction v_2 est constante.

Au final on trouve tous calculs faits que $D^\star_{12} = D^\star_{21} = 0$, $D^\star_{11}$ est la moyenne harmonique de D suivant l'axe x, et $D^\star_{22}$ est la moyenne harmonique de D suivant l'axe x.

2. Il faut d'abord calculer les fonctions

On suppose que le coefficient de diffusion sur une cellule est du type

$$d(y) = \begin{cases} d_1 & 0 < (0.5-y_1)(0.5-y_2), \\ d_2 & 0 > (0.5-y_1)(0.5-y_2) \end{cases}$$

sur une cellule carré $0 < y_1, y_2 < 1$. Que vaut $D^\star$?

Exercice III.

1. On cherche la solution sous la forme

$$u^\varepsilon(x) = e^{-\frac{\lambda t}{\varepsilon^2}} \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n u_n(x,y) \quad y = \frac{x}{\varepsilon},$$

Le problème en ε^{-2} s'écrit

$$-\partial_y\left(D(y)\partial_y u_0\right) + \sigma(y)u_0 = \lambda u_0.$$

Cela fait apparaître que λ est la plus petite valeur propre du problème (les valeurs propres plus élevées sont négligeables). Le reste des calculs est très proche.