Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 9

LEMME D'UNICITÉ: soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$

$$\boxed{(\partial_t - \tfrac{1}{2}\Delta_x)f = 0 \text{ et } \operatorname{supp}(f) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \Rightarrow f = 0}$$

Thm: il existe une unique solution élémentaire E de $\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x$ vérifiant

$$E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)\,, \quad \text{et } \operatorname{supp}(E) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$$

Elle est donnée par la formule

$$E(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/2t}$$

PROBLÈME DE CAUCHY: trouver $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t f + P(D_x)f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^N) \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

où $P(D)$ opérateur différentiel sur $\mathbf{R}^N$ et $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est donnée.

DIFFICULTÉ: pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$, on ne sait pas définir $f\big|_{t=0}$.

IDÉE: voir la donnée initiale comme un terme source localisé en $t = 0$.

•Si $f^{in} \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, et $f \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$ est solution du problème de Cauchy ci-dessus, alors $F(t,x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}^*_+}(t) f(t,x)$ vérifie

$$\partial_t F + P(D_x)F = \delta_{t=0} \otimes f^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$$

Déf: une solution au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\partial_t f + P(D_x)f = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N\,, \quad f\big|_{t=0} = f^{in}$$

où $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est une distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ telle que

$$\boxed{\partial_t F + P(D_x)F = \delta_{t=0} \otimes f^{in}\,, \quad \text{et } \operatorname{supp}(F) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N}$$

Prop: si E est solution élémentaire de $\partial_t + P(D_x)$ dans le futur (cad. à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$) et $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, alors

$$E \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in})$$

est solution au sens des distributions de

$$\partial_t f + P(D_x)f = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N\,, \quad f\big|_{t=0} = f^{in}$$

Equation de la chaleur (Chap. 9)

Pbm de Cauchy pour l'équation de la chaleur:

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_t f - \tfrac{1}{2}\Delta_x f = S\,, \quad t > 0\,,\ x \in \mathbf{R}^N \\ &f\big|_{t=0} = f^{in} \end{aligned}}$$

Données: condition initiale f^{in}, terme source S, **Inconnue:** f

Formulation au sens des distributions:

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_t F - \tfrac{1}{2}\Delta_x F = \dot{S} + \delta_{t=0} \otimes f^{in} \\ &\mathrm{supp}(F) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \end{aligned}}$$

Notation: $\dot{S}$ =prolongement de S à $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x$ par 0 pour $t \leq 0$

Existence

Pour tout $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, il existe au moins une solution

$$\boxed{F = E_N \star S + E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in}) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}(E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in})) &\subset (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) + (\{0\} \times \mathbf{R}^N) \\
&= \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \\
\mathrm{supp}(E_N \star S) &\subset (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) + (\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) \\
&= \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N
\end{aligned}$$

Conséquence du lemme d'unicité utilisé pour la solution élémentaire.

ATTENTION:

L'unicité n'a lieu que dans la classe des distributions TEMPEREES.

Il existe (cf. exo. 5 p. 318) $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$ non identiquement nulle mais t.q.

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2}\partial_x^2 u = 0 & \text{dans } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Résolution du pbm de Cauchy

Thm: Pour tout $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$ il existe une unique solution $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = S \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

solution qui est donnée par la formule

$$F = E_N \star (\dot{S} + \delta_{t=0} \otimes f^{in}) .$$

Résolution du pbm de Cauchy (suite)

Remarques:

1) Lorsque $S = 0$, ou bien lorsque $S \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$

$$F\big|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N} \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$$

2) Lorsque $f^{in} \in C_c(\mathbf{R}^N)$ et $S \in C_c(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$

$$\boxed{\begin{aligned} F(t,x) &= \int_{\mathbf{R}^N} E_N(t, x-y) f^{in}(y)\,dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} E_N(t-s, x-y) S(s,y)\,dsdy\,, \quad x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0 \end{aligned}}$$

Thm: pour tout $t > 0$, l'application

$$C_c(\mathbf{R}^N) \ni f^{in} \mapsto E_N \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in}) \in L^2(\mathbf{R}^N)$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire continue

$$e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} : L^2(\mathbf{R}^N) \to L^2(\mathbf{R}^N), \quad e^{0\Delta_x} = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

qui vérifie les propriétés suivantes

$$e^{\frac{1}{2}(s+t)\Delta_x} = e^{\frac{1}{2}s\Delta_x} e^{\frac{1}{2}t\Delta_x}, \quad \|e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq \|f^{in}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

$t \mapsto e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in}$ est continue en $t \in \mathbf{R}_+$ à valeurs dans $L^2(\mathbf{R}^N)$

La formule de Duhamel

Corollire: Soit $f^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et $S \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$ t.q.

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbf{R}^N} |S(t,x)|^2 dx < \infty$$

Le prolongement par 0 pour $t < 0$ de la fonction $f \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N))$ définie par la formule de Duhamel

$$\boxed{f(t,\cdot) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}(t-s)\Delta_x} S(s,\cdot) ds}$$

est l'unique solution au sens des distributions tempérées de

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = S \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

a) la **formule de variation de la constante**

$$y(t) = e^{at} y^{in} + \int_0^t e^{a(t-s)} z(s) ds$$

donnant la solution de l'équation différentielle

$$y' + ay = z\,, \quad y(0) = y^{in}$$

b) la **formule de Duhamel**

$$f(t,\cdot) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}(t-s)\Delta_x} S(s,\cdot) ds$$

pour l'équation de la chaleur

$$\partial_t f - \tfrac{1}{2}\Delta_x f = S\,, \quad f\big|_{t=0} = f^{in}$$

1) Principe du maximum faible: soient $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et f la solution au sens des distributions tempérées de

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = 0 \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

Alors

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{in} \leq M \Rightarrow f(t,x) \leq M \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \\ f^{in} \geq m \Rightarrow f(t,x) \geq m \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \end{array}}$$

Propriétés qualitatives (suite)

2) Egalité d'énergie: soient $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et f donnée par

$$f(t,\cdot) = e^{\frac{1}{2}t\Delta_x} f^{in}\,, \quad f \in C(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^N)) \cap C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$$

$$\boxed{\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^N)} + \int_0^t \|\nabla_x f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^N)} ds = \|f^{in}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^N)}}$$

On rappelle que F définie par

$$F(t,x) = f(t,x)\,, \quad t \geq 0\,, \qquad F(t,x) = 0 \quad t < 0$$

est l'unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = 0 \\ f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

3) Effet régularisant analytique: soient $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ et f l'unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = 0 \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

On sait déjà que $f\big|_{\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}} \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$.

En fait, POUR TOUT $t > 0$ la fonction

$x \mapsto f(t, x)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.

4) Propagation à vitesse infinie: soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ et f l'unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = 0 \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{S'il existe } t > 0 \text{ t.q. } f(t,\cdot) \text{ soit à support compact} \Rightarrow f = 0}$$

Même conclusion si $\{x \in \mathbf{R} \mid f(t,x) = 0\}$ admet un point d'accumulation dans $\mathbf{R}$.

CONCLUSION: l'information contenue dans le support compact de f^{in} se propage INSTANTANEMENT sur toute la droite réelle

Equation des milieux poreux: Soit $\alpha > 1$; chercher $u \geq 0$ t.q.

$$\partial_t u - \Delta_x(u^\alpha) = 0\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0$$

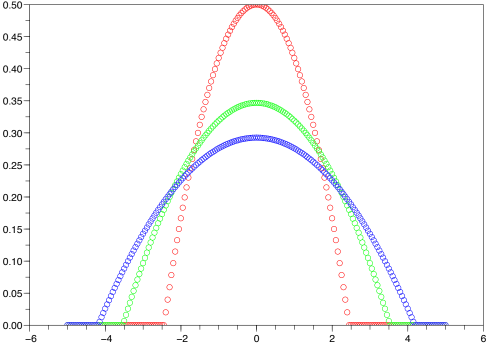
Prop: Pour $N \geq 1$ et $\alpha > 1$, on pose

$$a = \frac{N}{N(\alpha-1)+2}\,, \qquad \text{et } b = \frac{1}{N(\alpha-1)+2}\,.$$

Alors la fonction

$$\boxed{u_B(t,x) = (1-\tfrac{1}{\alpha})^{1/(\alpha-1)}\frac{1}{t^a}\left(c - \frac{b|x|^2}{2t^{2b}}\right)_+^{1/(\alpha-1)}}$$

est solution (dite **solution de Barenblatt**) au sens des distributions de l'équation des milieux poreux.



Graphe de la solution de Barenblatt en fonction de x, cas $N = 1$, $\alpha = 2$; valeurs du temps $t = 1$ (en rouge), $t = 3$ (en vert), $t = 5$ (en bleu)

1) le bord du support de $u(t, \cdot)$ se propage à vitesse finie

$$\boxed{\operatorname{supp}(u_B(t,\cdot)) \subset \overline{B\left(0, \frac{2ct^b}{b}\right)} \quad \text{pour tout } t > 0}$$

2) pour tout $N \geq 1$ et tout $t > 0$, la fonction

$$x \mapsto u_B(t,x) \text{ est continue sur } \mathbf{R}^N$$

$$x \mapsto u_B(t,x)^\alpha \text{ appartient à } C^1(\mathbf{R}^N)$$

mais pas mieux en général

EDP	Propagation	Régularisation
Transport	Vitesse finie	Non
Poisson		Oui
Chaleur	A vitesse infinie	Oui
Hopf	A vitesse finie	Explosion en temps fini
Milieux poreux	A vitesse finie	Continuité