

Distributions, analyse de Fourier, EDP

Amphi no. 1

- Un problème à rendre en petite classe avant les vacances de Noël
- Contrôle classant le lundi 20 janvier 2014

- Documents en ligne sur le site du département de mathématiques:
<http://www.mathematiques.polytechnique.edu/>
- Site du cours:
<http://www.math.polytechnique.fr/~golse/mat431.html>
- Contact: golse@math.polytechnique.fr

La **première partie** du cours portait

- sur les équations différentielles “**ordinaires**” vues comme **systèmes dynamiques** (existence, unicité, flots, stabilité...)
- et sur la géométrie des **sous-variétés de \mathbf{R}^N** (typiquement, les espaces des phases de systèmes soumis à des contraintes)

Dans la **deuxième partie** du cours, on va s'intéresser aux équations différentielles **aux dérivées partielles** (EDP) et construire les outils mathématiques permettant de les étudier.

Les EDP interviennent par exemple en physique comme **modèles dynamiques** incluant des **effets spatiaux** (équation de la chaleur pour un **profil de température** dans un matériau, équation de Schrödinger pour une **fonction d'onde** en mécanique quantique)

Le but de ce cours est d'arriver à une **introduction à l'analyse des EDP sur 2 ou 3 exemples**.

Mais on verra que l'analyse des EDP rend nécessaire dans un premier temps

- de développer un **calcul différentiel généralisé** pour des fonctions très singulières (calcul des distributions)
- d'adapter aux distributions la **transformation de Fourier** qui diagonalise la dérivation

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^m$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!,$$

- Si $\beta \leq \alpha$ (c.a.d. $\beta_j \leq \alpha_j$ pour $j = 1, \dots, m$), on note

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!}$$

- Pour $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on note

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}, \quad \partial_j \text{ ou } \partial_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m}$$

Quelques formules classiques

Formules du binôme et de Leibnitz: pour $x, y \in \mathbf{R}^N$ et f, g de classe $C^{|\alpha|}$ sur \mathbf{R}^N

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha - \beta} y^\beta, \quad \partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} f \partial^\beta g$$

(se démontrent par récurrence sur $|\alpha|$)

Formule de Taylor: pour $f \in C^{m+1}(\Omega)$ et $[a, b] \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (b - a)^\alpha + R_m, \quad \text{avec reste intégral}$$

$$R_m = (m + 1) \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(b - a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1 - t)^m \partial^\alpha f(a + t(b - a)) dt$$

Démonstration: Poser $h = b - a$ et $\phi(t) = f(a + th)$; vérifier grâce à la formule du multinôme (cf. poly. p. 5)

$$(z_1 + \dots + z_N)^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} z^\alpha$$

que, pour tout $p = 1, \dots, m + 1$

$$\phi^{(p)}(t) = \left(\sum_{j=1}^N h_j \partial_j \right)^p f(a + th) = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} \partial^\alpha f(a + th) h^\alpha$$

puis conclure en intégrant m fois par parties

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \phi^{(m+1)}(t) dt$$

- Ce sont les EDP (équations aux dérivées partielles) les plus proches des EDO (équations différentielles ordinaires)
- Lien EDO-EDP d'ordre 1:

méthode des caractéristiques \Rightarrow solutions explicites

- Prototype des EDP linéaires du 1er ordre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

où $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ est un vecteur donné (vitesse de transport)

Inconnue: $f \equiv f(t, x) \in \mathbf{R}$, avec $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ (densité)

Notation:

$$v \cdot \nabla_x f = \sum_{i=1}^N v_i \partial_{x_i} f$$

La méthode des caractéristiques

Soit $y \in \mathbf{R}^N$; posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(t) = y + tv \in \mathbf{R}^N$; alors

$$\gamma \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^N), \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= v \\ \gamma(0) &= y \end{aligned}$$

Notation:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$$

L'ensemble $\{(t, \gamma(t)) \mid t \in \mathbf{R}\}$ est une droite de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, appelée “**courbe caractéristique issue de y** ” associée à l'équation de transport.

Observation fondamentale:

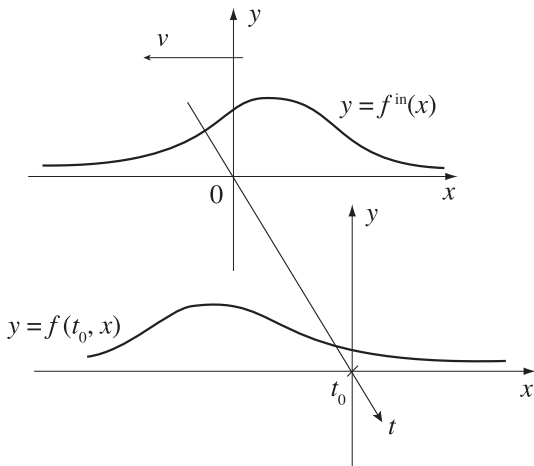
Toute solution de classe C^1 de l'équation de transport est constante le long des courbes caractéristiques

Thm: Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \quad f(0, x) = f^{in}(x)$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$f(t, x) = f^{in}(x - tv)$$



Résolution de l'équation de transport. Le graphe de la donnée initiale est **translaté de tv** pour donner celui de la solution à l'instant t

- Même si f^{in} n'est pas dérivable, la formule

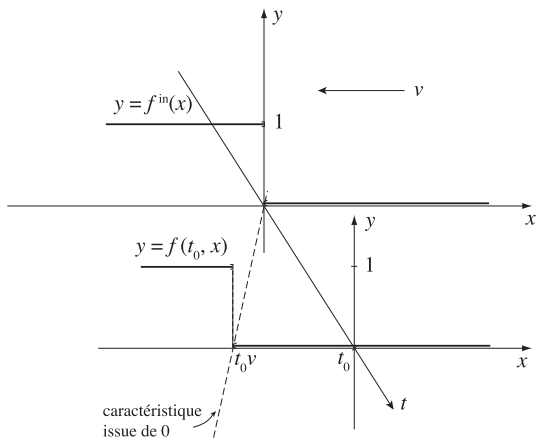
$$f(t, x) = f^{in}(x - tv)$$

garde un sens, et on a envie de dire qu'elle définit encore une solution de l'équation de transport en un sens généralisé (à définir)

- **Exemple:** pour $N = 1$, prendre f^{in} en escalier, par exemple

$$f^{in}(x) = 1 \text{ si } x \leq 0, \quad f(x) = 0 \text{ si } x > 0$$

La solution de l'équation de transport modélise alors une **onde de choc** se propageant à la vitesse v .



Résolution de l'équation de transport pour une donnée initiale présentant une **discontinuité de première espèce**

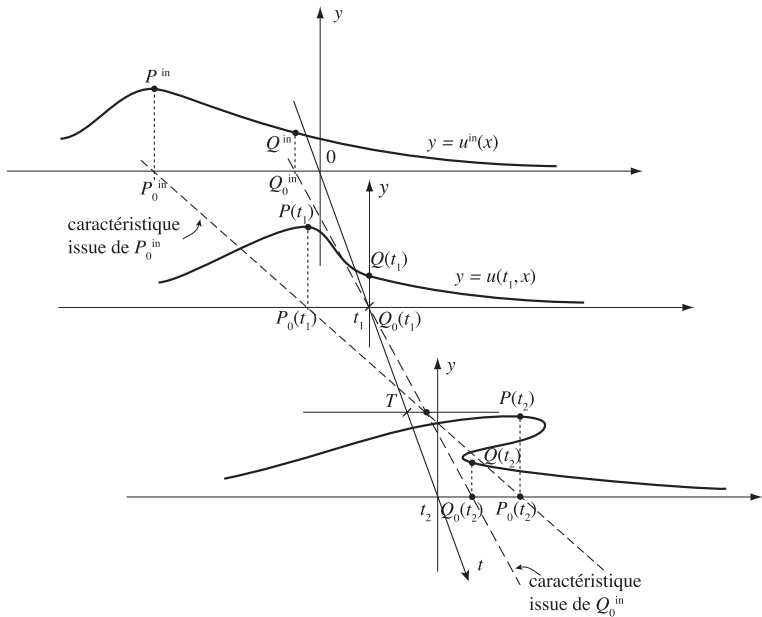
L'équation de Hopf

EDP du premier ordre non linéaire, d'inconnue $u : (t, x) \mapsto u(t, x)$

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = u^{in}$$

Thm: Soit $u^{in} \in C_b^1(\mathbf{R})$.

- Il existe $T > 0$ et une **unique solution** u de classe C^1 sur $[0, T[\times \mathbf{R}$ de l'équation de Hopf avec donnée initiale u^{in} .
- S'il existe un **intervalle ouvert** I sur lequel u^{in} est strictement **décroissante**, alors $T < \infty$.



Explication de l'apparition d'une singularité en temps fini

- Méthode des caractéristiques \Rightarrow chaque point du graphe de u^{in} se déplace le long de l'axe des x à une **vitesse constante=l'ordonnée du point**
- La **vitesse** du point $P(t)$ est **supérieure** à celle du point $Q(t)$ \Rightarrow il existe un temps $t_2 > 0$ où **le point $P(t)$ rattrappe** — c.a.d. a même abscisse que — **le point $Q(t)$**

CONCLUSION: En temps fini le graphe de u^{in} est transporté sur une courbe **qui n'est plus le graphe d'une fonction.**

- Dans le cas de l'équation de transport (**LINEAIRE**): si la donnée initiale est de classe C^1 , la solution existe pour tout $t > 0$ et **reste de classe C^1** .
- Dans le cas de l'équation de Hopf (**NON LINEAIRE**): même si la donnée initiale est de classe C^1 , la solution peut **cesser d'être de classe C^1 au bout d'un temps fini**.

En analyse des EDP, il est naturel d'avoir à “dériver” des fonctions non dérivables. Le bon cadre pour cela est la théorie des distributions.

- 1) **Définition et calcul des distributions** (dérivation, multiplication par les fonctions C^∞ , support, convolution...)
- 2) **Analyse de Fourier** pour les distributions
- 3) Etude d'un ou deux exemples d'**EDP d'ordre > 1**

Fonctions C^∞ à support compact

Soit $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$E(x) = 0 \text{ si } x \geq 0, \quad E(x) = e^{1/x} \text{ si } x < 0$$

Pour $x < 0$ et $n \geq 1$, on montre par récurrence que

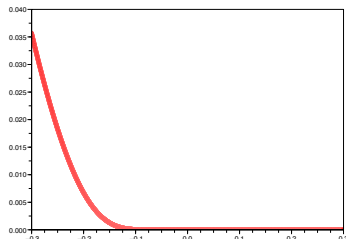
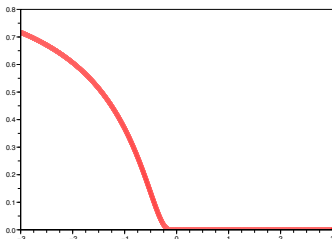
$$E^{(n)}(x) = P_n(1/x)E(x)$$

où $P_n(X)$ est la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} P_n(X) = -X^2(P_{n-1}(X) + P'_{n-1}(X)) \\ P_0(X) = 1 \end{cases}$$

Le support de E est \mathbf{R}_- ; de plus E est de classe C^∞ sur \mathbf{R} car

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} E^{(n)}(x) = 0, \quad \text{pour tout } n \geq 1$$



A gauche: graphe de E ; à droite: zoom sur le raccord C^∞

Notant $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ la norme euclidienne, la fonction

$H : x \mapsto E(|x|^2 - 1) \geq 0$ est C^∞ sur \mathbf{R}^N de support $\overline{B}(0, 1)$

A quoi servent les fonctions C^∞ à support compact?

- 1) **Régulariser** les fonctions peu régulières et les **approcher** par des fonctions de classe C^∞
- 2) **Localiser ou tronquer** les fonctions de classe C^∞ **sans dégrader leur régularité**
- 3) **Passer du local au global**, en recollant des fonctions C^∞ définies localement, **sans dégrader leur régularité**
- 4) Enfin les fonctions C^∞ à support compact sont la brique de base pour construire la théorie des distributions

Définissons χ et $\chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ par les formules

$$\chi(x) := \frac{H(x)}{\int_{\mathbf{R}^N} H(z) dz}, \quad \chi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^N} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ pour tout } \epsilon > 0$$

La fonction χ_ϵ vérifie

$$\text{supp}(\chi_\epsilon) = \overline{B}(0, \epsilon), \quad \chi_\epsilon \geq 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}^N} \chi_\epsilon(x) dx = 1$$

Convolution des fonctions

Produit de convolution de $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

Commutativité le changement de variables $y \mapsto x-y$ donne

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy = g \star f(x)$$

Majoration du support:

$$\begin{aligned} \text{supp}(f \star g) &\subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)} = \text{supp}(f) + \text{supp}(g) \\ &= \{u+v \mid u \in \text{supp}(f), v \in \text{supp}(g)\} \end{aligned}$$

Associativité: pour tout $f, g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et tout $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ on a

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$$

Inégalité de Hölder: pour tout $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on a

$$\|fg\|_{L^1(X)} \leq \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^q(X)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (avec } \frac{1}{\infty} = 0)$$

Inégalité de Hausdorff-Young:

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbf{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \text{ (avec } \frac{1}{\infty} = 0)$$

(Pour $p, q \neq \infty$, on peut commencer par établir le résultat pour f, g continues à support compact, puis conclure par un argument de densité.)

Prop: Pour tout entier positif k — ou pour $k = \infty$

$$f \in C_c^k(\mathbf{R}^N) \text{ et } g \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^N) \Rightarrow f \star g \in C^k(\mathbf{R}^N),$$
$$\text{et } \partial^\alpha(f \star g) = (\partial^\alpha f) \star g, \quad |\alpha| \leq k$$

Thm: Pour toute suite régularisante $(\chi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ sur \mathbf{R}^N , on a

- a) si $f \in C_c(\mathbf{R}^N)$, $\chi_\epsilon \star f \rightarrow f$ uniformément sur \mathbf{R}^N
- b) si $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $\chi_\epsilon \star f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$
- c) si $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^N)$, $\chi_\epsilon \star f \rightarrow f$ dans $L^1(K)$

pour tout $1 \leq p < \infty$, et tout K compact de \mathbf{R}^N , lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$.

• Démonstration de la proposition:

Pour $k = 0$, utiliser le théorème de convergence dominée

Pour $k \geq 1$, utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme

• Démonstration du théorème:

a) f étant continue à support compact, elle est uniformément continue:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } |h| \rightarrow 0$$

b) utiliser que $C_c(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$
— FAUX pour $p = \infty$

c) utiliser le b) en remarquant que $\chi_\epsilon \star f = \chi_\epsilon \star (\mathbf{1}_{|x| \leq R} f)$ sur $B(0, R - \epsilon)$

Lemme: Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et K compact inclus dans Ω . Il existe une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \text{supp}(\phi) \text{ compact} \subset \Omega, \quad \text{et } \phi = 1 \text{ au voisinage de } K$$

Application: densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Thm: Soient Ω ouvert de \mathbf{R}^N et $f \in L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$.

$$\text{Pour tout } \eta > 0, \text{ il existe } f_\eta \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \|f - f_\eta\|_{L^p(\Omega)} < \eta$$

Pour la démonstration, cf. polycopié, pp. 26–27.

Thm: Soient $K \subset \mathbf{R}^N$ compact et $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subset \mathbf{R}^N$ ouverts t.q.

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n \Omega_j.$$

Alors il existe $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1), \dots, \phi_n \in C_c^\infty(\Omega_n)$ t.q.

$$0 \leq \phi_j, \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq j \leq n} \phi_j = 1 \text{ sur un voisinage de } K$$

- Les fonctions plateau servent à **localiser sans dégrader la régularité** (jusqu'au niveau C^∞)
- Les partitions de l'unité servent à **passer du local au global** en gardant la régularité des objets locaux