**PROMOTION 2008 — MAT431**
**Contrôle classant: distributions, analyse de Fourier et EDP**
*18 janvier 2010 — Durée: 3h.*

Documents autorisés: polycopié et transparents présentés en cours, ainsi que les notes personnelles (cours+PC).
Matériel autorisé: traducteurs électroniques.

Les deux parties sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. Les résultats finaux de tous les calculs demandés devront être encadrés.

## I

1) Soit $Q = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \,|\, u \geq 0 \text{ et } v \geq 0\}$ et $F$ la fonction indicatrice de $Q$ dans $\mathbf{R}^2$. Calculer $\partial_u \partial_v F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.
2) Soit $R_+$ (resp. $R_-$) la rotation d'angle $+\pi/4$ (resp. $-\pi/4$) dans le plan $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté de façon à ce que la base canonique soit orthonormée directe. Calculer $(\partial_t^2 - \partial_x^2)(F \circ R_+(t, x))$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, ainsi que $(\partial_t^2 - \partial_x^2)(F \circ R_-(t, x))$.
3) Déduire de ce qui précède une solution élémentaire dans le futur pour l'opérateur $\partial_t^2 - \partial_x^2$ sur $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x$.

## II

Toutes les fonctions ou distributions considérées dans cette partie sont à valeurs complexes, sauf mention du contraire.
**Notation:** pour toute fonction $\psi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$, on note $\tilde{\psi}$ la fonction définie par $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est dite de type positif (noté $T \gg 0$) si, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on a $\langle T, \phi \star \tilde{\phi} \rangle \geq 0$. On ne confondra pas cette notion avec celle de distribution positive, également utilisée dans cette partie: une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est positive (noté $T \geq 0$) si, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que $\psi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, on a $\langle T, \psi \rangle \geq 0$.
1) A-t-on $\delta_0 \gg 0$, $\delta_0' \gg 0$, $\delta_0'' \gg 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$?
2) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbf{N}$ a-t-on $\delta_0^{(k)} \gg 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$?
3) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. Calculer $\mathcal{F}^{-1}(\phi \star \tilde{\phi})$, et préciser à quel espace appartient cette expression.
4) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. On suppose que $\mathcal{F}T$ est une distribution positive. Montrer que $T \gg 0$.
5) a) Soient $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Montrer que la fonction $\phi \star \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.
5) b) Soient $(\phi_n)_{n\geq1}$ et $(\psi_n)_{n\geq1}$ deux suites de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telles que $\phi_n \to \phi$ et $\psi_n \to \psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\phi_n \star \psi_n \to \phi \star \psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$.
5) c) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ vérifiant $T \gg 0$. Montrer que $\langle T, \phi \star \tilde{\phi} \rangle \geq 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

6) Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que $\psi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que $\chi \geq 0$ et $\chi = 1$ sur un voisinage ouvert de $\mathrm{supp}(\psi)$. Soit $n \geq 1$; on pose $\phi_n(x) = \chi(x)\sqrt{\frac{1}{n} + \psi(x)}$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, et que la suite $\phi_n^2$ converge vers $\psi$ en un sens que l'on précisera lorsque $n \to +\infty$.
7) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $T$ est de type positif si et seulement si $\mathcal{F}T$ est une distribution positive.
8) Soit $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Montrer que, en tant qu'élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, on a $f \gg 0$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^N$ et tous $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$,

$$\text{(TP)} \qquad \sum_{1\leq j,k\leq n} f(x_j - x_k) z_j \overline{z_k} \in \mathbf{R}_+ \,.$$

9) a) Montrer que si $f \in C(\mathbf{R}^N)$ vérifie la propriété (TP), alors $f(0) \in \mathbf{R}_+$.
9) b) Montrer que si $f \in C(\mathbf{R}^N)$ vérifie la propriété (TP), alors $\tilde{f} = f$.
9) c) Montrer que si $f \in C(\mathbf{R}^N)$ vérifie la propriété (TP), alors $|f(x)| \leq f(0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, et en déduire que $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$.
10) Montrer que si $\psi$ est continue à support compact sur $\mathbf{R}^N$, alors $\psi \star \tilde{\psi} \gg 0$.
11) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{-|x|}$ est de type positif.
12) Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbf{R}^N$ par $g(x) = e^{-|x|^2}$ est de type positif.

**FIN**