PROMOTION 2007 — MAT431
Contrôle classant: distributions, analyse de Fourier et EDP
19 janvier 2009 — Durée: 3h.

Documents autorisés: polycopié et transparents présentés en cours, ainsi que les notes personnelles (cours+PC).

Les deux parties de l'énoncé sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. Les résultats finaux des calculs demandés devront être encadrés.

I

On considère la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ définie par $T_n = e^n \delta_n$.

1) Cette suite est-elle convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$? si oui, donner sa limite.

2) Construire une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que $\psi(x) = e^{-|x|}$ pour $|x| > 1$.

3) La suite $(T_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$? si oui, donner sa limite.

4) Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ suite de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ convergeant vers S dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ pour $n \to +\infty$. On suppose que $S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$? si oui, vers quelle limite?

II

1) Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ noté Ai tel que $\mathcal{F}(Ai)$ soit défini par la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{i\xi^3/3} \in \mathbf{C}$.

2) a) Montrer que, pour tout $\eta > 0$, la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} \in \mathbf{C}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

2) b) Montrer que, pour tout $\eta > 0$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} d\xi$$

est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

2) c) Montrer que la suite de fonctions $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3} \in \mathbf{C}$ indexée par $n \in \mathbf{N}^*$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ vers une limite que l'on précisera.

3) a) Calculer $(\partial_\xi + i\partial_\eta)e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}$ pour tous $x, \xi, \eta \in \mathbf{R}$.

3) b) Calculer

$$\partial_\xi \left(\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)\right) \text{ et } \partial_\eta \left(\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)\right)$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*)$ pour tous a, b réels tels que $0 < a < b$.

3) c) Calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'expression

$$\int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ib)+\frac{1}{3}i(\xi+ib)^3} d\xi - \int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3} d\xi$$

en fonction des deux intégrales

$$\int_a^b e^{ix(-R+i\eta)+\frac{1}{3}i(-R+i\eta)^3}d\eta \quad \text{et} \quad \int_a^b e^{ix(R+i\eta)+\frac{1}{3}i(R+i\eta)^3}d\eta$$

en s'appuyant sur les résultats des questions 3) a-b).
3) d) Les résultats des questions 3) a-c) peuvent-ils être interprétés grâce à la théorie des fonctions holomorphes?
4) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction

$$\eta \mapsto \tfrac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi$$

est constante sur $]0, +\infty[$.
4) b) Déduire de ce qui précède que la distribution tempérée Ai est définie par la fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ notée $x \mapsto Ai(x)$ et donnée par la formule

$$Ai(x) = \tfrac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\eta > 0$.
5) Montrer que, pour tout $c > 0$, on a $Ai(x) = o(e^{-cx})$ lorsque $x \to +\infty$.
6) Calculer

$$Ai''(x) - xAi(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$.
7) a) Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{it\xi^3/3} \in \mathbf{C}$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ dont on exprimera la transformée de Fourier inverse en fonction de Ai.
7) b) Posons

$$E(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{t^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right)$$

pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}^2$. Vérifier que E définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$.
7) c) Calculer

$$(\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)E$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$.
7) d) Montrer que l'opérateur différentiel $\partial_t + \frac{1}{3}\partial_x^3$ admet une unique solution élémentaire tempérée sur $\mathbf{R}^2$ à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, que l'on précisera.
8) Déduire de ce qui précède que, pour tout $u^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \frac{1}{3}\partial_x^3)u = 0\,, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}\,, \\ u\big|_{t=0} = u^{in} \end{array} \right.$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, dont la restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe C^∞.

FIN