PROMOTION 2006 — MAT431
Contrôle des connaissances
21 janvier 2008 — Durée: 3h.

<u>Documents autorisés:</u> polycopié avec son erratum et transparents présentés en cours, ainsi que les notes personnelles (cours+PC).

Les trois parties de l'énoncé sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. On demande d'encadrer les résultats finaux des calculs demandés.

I

1) Montrer que la suite de fonctions

$$x \mapsto \frac{1-\cos(nx)}{x}$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$, et calculer sa limite.
2) a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice dans $\mathbf{R}$ de l'intervalle $[-1, 1]$.
2) b) Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx\,.$$

3) Montrer qu'il existe une constante réelle C que l'on calculera, telle que la suite de distributions

$$\frac{1-\cos(nx)}{x^2} + Cn\delta_0$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ pour $n \to +\infty$ vers une limite que l'on exprimera.

II

Rappelons la formule donnant le laplacien d'une fonction radiale dans $\mathbf{R}^3$: pour tout $\chi \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$ et tout $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, on a

$$\Delta\left(\chi(|x|)\right) = \chi''(|x|) + \frac{2}{|x|}\chi'(|x|) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\chi(r))\big|_{r=|x|}\,.$$

1) Quelles sont les solutions f de classe C^2 sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ et radiales — c'est à dire de la forme $f(x) = F(|x|)$ — de l'équation

$$(\Delta + 1)f(x) = 0\,, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}\,?$$

2) Montrer que les fonctions A et B définies sur $\mathbf{R}^3$ par

$$A(x) = \cos|x|\,, \qquad B(x) = \frac{\sin|x|}{|x|} \text{ pour } x \neq 0\,,\ B(0) = 1\,,$$

sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$.
3) Calculer

$$(\Delta + 1)B(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^3\,.$$

4) a) Rappeler brièvement les expressions de

$$\nabla\frac{1}{|x|}\,, \quad \text{et } \Delta\frac{1}{|x|} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)\,.$$

4) b) Calculer $\nabla A(x)$ et $\Delta A(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^3$.

4) c) Montrer que

$$(\Delta+1)\frac{\cos|x|}{|x|}=c\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$$

où c est une constante non nulle que l'on calculera.
5) a) Montrer que toute distribution T tempérée sur $\mathbf{R}^3$ et telle que $(\Delta+1)T=0$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$.
5) b) Montrer que toute solution élémentaire de $\Delta+1$ tempérée sur $\mathbf{R}^3$ est de la forme

$$-\tfrac{1}{c}\frac{\cos|x|}{|x|}+g(x)\,,\qquad \text{où } g\in C^\infty(\mathbf{R}^3).$$

III

Dans tout ce problème, N est un entier naturel ≥ 2.
1) a) Soient W un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $u,v\in C^\infty(W)$, et soit O ouvert à bord de classe C^1 d'adhérence $\overline{O}$ bornée et incluse dans W. On notera ν le champ unitaire normal à ∂O dirigé vers l'extérieur de O, ainsi que

$$\frac{\partial v}{\partial\nu}(y)=\sum_{j=1}^N \nu_j(y)\partial_j v(y) \text{ pour tout } y\in\partial O\,.$$

Exprimer

$$\int_{\partial O} u(y)\frac{\partial v}{\partial\nu}(y)d\sigma(y)$$

(où $d\sigma$ désigne l'élément de surface sur ∂O orienté par le champ normal unitaire ν) comme une intégrale sur O faisant intervenir $u,\nabla u,\nabla v$ et Δv.
1) b) En déduire que

$$\int_{\partial O}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)(y)d\sigma(y)=\int_O(u\Delta v-v\Delta u)(x)dx\,.$$

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$; pour tout $x\in\Omega$, on note $\rho(x)=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$. Soit f une fonction harmonique dans Ω. On veut montrer que, pour tout $x_0\in\Omega$ et $0\leq r_1\leq r_2<\rho(x_0)$, l'on a

$$(1)\qquad \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0+r_1\omega)f(x_0+r_2\omega)d\sigma(\omega)=\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0+\sqrt{r_1r_2}\omega)^2d\sigma(\omega)\,,$$

en désignant par $d\sigma$ l'élément de surface sur $\mathbf{S}^{N-1}$ orientée par le champ radial $x\mapsto\frac{x}{|x|}$.
2) Démontrer (1) dans le cas particulier où $r_1=0$.

On suppose désormais que $0<r_1<r_2<\rho(x_0)$. Notons $r_0=\sqrt{r_1r_2}$, ainsi que

$$A(\lambda)=\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0+\tfrac{1}{\lambda}r_0\omega)f(x_0+\lambda r_0\omega)d\sigma(\omega)\,,\quad r_0/\rho(x_0)<\lambda<\rho(x_0)/r_0\,.$$

3) a) Montrer que A est de classe C^1 sur $]r_0/\rho(x_0),\rho(x_0)/r_0[$ et calculer $A'(\lambda)$.
3) b) Montrer que $\lambda A'(\lambda)=0$ pour tout $\lambda\in]r_0/\rho(x_0),\rho(x_0)/r_0[$. — On pourra faire intervenir les fonctions u et v définies comme suit:

$$u(x)=f(x_0+\tfrac{1}{\lambda}r_0x)\,,\qquad \text{et } v(x)=f(x_0+\lambda r_0x)\,.$$

3) c) En déduire l'égalité (1).

Soit f harmonique sur $\mathbf{R}^N$ telle que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) = O(1) \text{ lorsque } r \to +\infty \,. \tag{2}$$

4) a) On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R_\epsilon > 0$ tel que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(\omega)^2 d\sigma(\omega) \leq \epsilon \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) \text{ pour tout } r > R_\epsilon \,.$$

4) b) Montrer que f est identiquement nulle sur la sphère unité de $\mathbf{R}^N$.
4) c) En déduire que f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}^N$.
4) d) Montrer que toute fonction harmonique sur $\mathbf{R}^N$ vérifiant (2) est constante.

Pour tout $z \in \mathbf{R}$, on note $z^+ = \max(z, 0)$.
5) Montrer que toute fonction f harmonique sur $\mathbf{R}^N$ et telle que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega)^+ d\sigma(\omega) = O(1) \text{ lorsque } r \to +\infty$$

est constante sur $\mathbf{R}^N$ (généralisation du théorème de Liouville).