MAT431 — Promotion 2011

A remettre en petite classe le mardi 8 janvier 2013

I

Pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ à valeurs complexes et tout $\epsilon > 0$, on note

$$W_\epsilon[\psi](x,\xi) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \psi(x+\tfrac{1}{2}\epsilon y)\overline{\psi(x-\tfrac{1}{2}\epsilon y)}e^{-i\xi y}dy\,.$$

1) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $W_\epsilon[\psi]$ est à valeurs réelles, continue et bornée sur $\mathbf{R}^2$ et que

$$\sup_{x,\xi\in\mathbf{R}} |W_\epsilon[\psi](x,\xi)| \le C_\epsilon \|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R})}$$

où C_ϵ est une constante dépendant de ϵ que l'on précisera.
2) Soient $\rho \in L^1(\mathbf{R})$ et $u \in C^1(\mathbf{R})$. Montrer que la forme linéaire

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^2) \ni \phi \mapsto \int_{\mathbf{R}} \rho(x)\phi(x,u(x))dx$$

définit une distribution sur $\mathbf{R}^2$, qui est la distribution de simple couche portée par une courbe de $\mathbf{R}^2$ que l'on précisera, et dont on donnera la densité. Cette distribution sera notée $\rho(x)\delta_0(\xi - u(x))$.
3) Soit deux fonctions à valeurs réelles, $a \in L^2(\mathbf{R})$ et $S \in C^2(\mathbf{R})$. Montrer que

$$W_\epsilon\left[ae^{iS/\epsilon}\right] \to \rho(x)\delta_0(\xi - u(x)) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2) \text{ lorsque } \epsilon \to 0^+\,,$$

où ρ et u sont des fonctions à valeurs réelles que l'on précisera en fonction de a et de S. (Indication: on pourra commencer par traiter le cas où $a \in C_c(\mathbf{R})$, et considérer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $W_\epsilon\left[ae^{iS/\epsilon}\right](x,\cdot)$ comme la transformée de Fourier d'une distribution.)
4) Soit $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on désigne par Y_t l'application linéaire définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$Y_t(x,\xi) = (x - t\xi, \xi)\,,\quad (x,\xi) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Montrer que le problème de Cauchy

$$(T) \qquad \begin{cases} (\partial_t + \xi\partial_x)f(t,x,\xi) = 0 \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

admet pour unique solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2)$ la distribution f définie par la formule

$$\langle f,\phi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}^2),C_c^\infty(\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}^2)} = \int_0^\infty \langle f^{in}\circ Y_t, \phi(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2),C_c^\infty(\mathbf{R}^2)}dt$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2)$.
5) On suppose dans cette question que $\rho \in C_c(\mathbf{R})$ et que $u \in C_c^1(\mathbf{R})$ est une fonction non identiquement nulle.
a) Vérifier que $\sup_{x\in\mathbf{R}} \max(-u'(x), 0) > 0$.
b) Soit $T^* = 1/\sup_{x\in\mathbf{R}}(\max(-u'(x),0))$. Choisissons pour $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ la distribution $\rho(x)\delta_0(\xi - u(x))$. Montrer que, pour tout $t \in [0, T^*[$ la distribution $f^{in} \circ Y_t$ est de la forme $R(t,x)\delta_0(\xi - U(t,x))$ où R et U sont les solutions de problèmes de Cauchy que l'on précisera.

II

Pour toute fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, on note T_g la distribution définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\langle T_g, \phi\rangle = \int_{\mathbf{R}} g(x)\phi(x)dx\,, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})\,.$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie comme suit sur $[0,1]$: on pose $f_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$, et, pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}]\,, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\,, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]\,. \end{cases}$$

1) Dessiner les graphes de f_1, f_2, f_3 dans un même repère orthonormé.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}\,.$$

En déduire que la suite f_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f lorsque $n \to \infty$.
3) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et donner le sens de variation de f.
4) On prolonge la fonction f à $\mathbf{R}$ en posant $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 1$. Vérifier brièvement que $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ et montrer que T_f' est une distribution positive sur $\mathbf{R}$. Quel est son ordre?
5) Posons $E_0 = [0,1]$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,2\}^n$, on note

$$I_{n,\vec{a}} = \left[\sum_{k=1}^n a_k 3^{-k}, 3^{-n} + \sum_{k=1}^n a_k 3^{-k}\right]\,, \quad \text{et } E_n = \bigcup_{\vec{a}\in\{0,2\}^n} I_{n,\vec{a}}\,,$$

ainsi que

$$C = \bigcap_{n\geq 0} E_n\,.$$

Montrer que C est compact et Lebesgue négligeable.
6) Montrer que

$$\{0,2\}^{\mathbf{N}^*} \ni (a_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n 3^{-n} \in C$$

est une bijection. En déduire que C est non dénombrable.
6) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus C$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus C$.
7) Calculer

$$f\left(\sum_{n\geq 1} a_n 3^{-n}\right)\,.$$

8) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de C. (On pourra calculer la longueur de l'intervalle $f(I_{n,\vec{a}})$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\vec{a} \in \{0,2\}^n$.)
9) Montrer que $T_f' \neq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, et préciser son support.
10) La fonction f vérifie-t-elle la formule des sauts?