MAT431 — Promotion 2009

A remettre en petite classe le mardi 14 décembre

I

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^*_+)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ p.p. sur $\mathbf{R}^*_+$.

1) On suppose que

$$\int_x^1 f(y)dy = O(1) \quad \text{lorsque } x \to 0^+ .$$

Montrer qu'il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $T\big|_{\mathbf{R}^*_+} = f$.

Indication: on pourra chercher à prolonger à $\mathbf{R}$ la fonction

$$\mathbf{R}^*_+ \ni x \mapsto \int_x^1 f(y)dy .$$

2) On suppose maintenant qu'il existe un entier $l \geq 0$ tel que

$$\int_x^1 f(y)dy = O(1/x^l) \quad \text{lorsque } x \to 0^+ .$$

Montrer qu'il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $T\big|_{\mathbf{R}^*_+} = f$.

3) Réciproquement, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ dont la restriction à $\mathbf{R}^*_+$ est une fonction f localement intégrable sur $\mathbf{R}^*_+$ p.p. positive ou nulle sur $\mathbf{R}^*_+$. Montrer qu'il existe un entier $l \geq 0$ tel que

$$\int_x^1 f(y)dy = O(1/x^l) \quad \text{lorsque } x \to 0^+ .$$

II

1) On considère l'équation différentielle

$$x^3y' - 2y = 0 .$$

a) Déterminer les solutions de cette équation différentielle de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ (resp. sur $]0, +\infty[$). Quelle est la régularité de ces solutions?

b) Déterminer les solutions de cette équation différentielle de classe C^1 (resp. de classe C^k pour tout $k \in \mathbf{N}$) sur $\mathbf{R}$.

c) Déterminer les solutions de cette équation différentielle au sens des distributions sur $\mathbf{R}$.

2) On considère l'équation différentielle

$$x^3y' + 2y = 0 .$$

a) Déterminer les solutions de cette équation différentielle de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ (resp. sur $]0, +\infty[$). Quelle est la régularité de ces solutions?
b) Déterminer les solutions de cette équation différentielle au sens des distributions sur $\mathbf{R}$.

3) On considère l'équation différentielle

$$xy' + my = 0$$

où $m \in \mathbf{Z}$.
a) On suppose que $m < 0$. Quelles sont les solutions de classe C^1 (resp. de classe C^k) de cette équation différentielle sur $\mathbf{R}$?
b) Quelles sont les solutions de cette équation différentielle au sens des distributions sur $\mathbf{R}$?
c) On suppose que $m = 0$. Quelles sont les solutions au sens des distributions de cette équation différentielle sur $\mathbf{R}$?
d) Même question lorsque $m = 1$.
e) On suppose que $m \geq 2$. Quelles sont les solutions au sens des distributions de cette équation différentielle sur $\mathbf{R}$?