MAT431 — Promotion 2005
Corrigé du premier contrôle classant
Lundi 13 novembre 2006 — Durée: 3 h.

EXERCICE 1

1) Comme $H \in L^\infty(\mathbf{R})$ et que $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}) \subset L^1(\mathbf{R})$, le produit de convolution $H \star f$ est une fonction de classe C^∞ et bornée sur $\mathbf{R}$, donnée par la formule

$$H \star f(x) = \int_{\mathbf{R}} H(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{x \geq y} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy\,.$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2)a) Aucune des deux expressions

$$\int_{-\infty}^{x} T \quad \text{ou} \quad \langle T, \mathbf{1}_{]-\infty,x]}\rangle$$

n'a de sens pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, car $\mathbf{1}_{]-\infty,x]} \notin C^\infty(\mathbf{R})$.

Or, on a vu au 1) qu'on obtient une primitive d'une fonction test en calculant son produit de convolution par la fonction de Heaviside H. Ceci suggère de considérer l'expression $H \star T$ qui, elle, a bien un sens: c'est le produit de convolution de la distribution définie par la fonction localement intégrable H par la distribution à support compact T. On sait que

$$(H \star T)' = H' \star T = \delta_0 \star T = T\,.$$

D'autre part, comme le support de T est compact

$$\mathrm{supp}(H \star T) \subset \mathrm{supp}(H) + \mathrm{supp}(T) = [a,b] + \mathbf{R}_+ = [a, +\infty[\,.$$

Ainsi la distribution $S = H \star T$ répond à la question.

Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $U' = T$ et $\mathrm{supp}(U) \subset [a, +\infty[$; alors $(U-S)' = 0$, d'où $U - S = \mathrm{Const.}$ sur $\mathbf{R}$. Mais comme U et S sont toutes deux à support dans $[a, +\infty[$, la fonction constante $U - S$ est également supportée dans $[a, +\infty[$, donc $U - S = 0$.

2)b) Soient $\epsilon > 0$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $[b+\epsilon, +\infty[$. Alors, en notant $\tilde{H}(x) = H(-x)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle S, \phi\rangle = \langle T, \tilde{H} \star \phi\rangle &= \left\langle T, \int_x^{+\infty} \phi(z)dz \right\rangle \\
&= \langle T, 1\rangle \int_{\mathbf{R}} \phi(z)dz - \left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(z)dz \right\rangle \\
&= \langle T, 1\rangle \int_{\mathbf{R}} \phi(z)dz
\end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \phi(z)dz$ est identiquement nulle sur $]-\infty, b+\epsilon[$ qui est un voisinage ouvert de $\mathrm{supp}(T)$.

Cette identité montre que si $\langle T, 1\rangle = 0$, alors $\langle S, \phi\rangle = 0$ pour toute fonction test à support dans $[b + \epsilon, +\infty[$, pour tout $\epsilon > 0$, autrement dit que la restriction de S à $]b,+\infty[$ est nulle. Comme on sait déjà que S est à support dans $[a,+\infty[$ on en déduit que, si $\langle T,1\rangle = 0$, alors $\mathrm{supp}(S) \subset [a,b]$.

Réciproquement, si S est à support compact, c'est à dire s'il existe $b' > a \in \mathbf{R}$ tels que $\mathrm{supp}(S) \subset [a,b']$, le calcul ci-dessus montre que

$$\langle S,\phi\rangle = \langle T,1\rangle \int_{\mathbf{R}} \phi(z)dz = 0$$

pour toute fonction test ϕ à support dans $[b'+\epsilon,+\infty[$. Choisissant une telle fonction test ϕ de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(z)dz \neq 0$$

on en déduit que $\langle T,1\rangle = 0$.

En conclusion S est à support compact si et seulement si $\langle T,1\rangle = 0$.

Exercice 2

1) Considérons l'équation différentielle linéaire:

$$b_0'(r) + \tfrac{2}{r}b_0(r) = 0\,, \quad r > 0\,.$$

On sait que la solution générale de cette équation est

$$b_0(r) = C\exp\left(-\int_1^r \tfrac{2}{s}ds\right) = C\exp(-2\ln r) = \frac{C}{r^2}$$

où C est une constante arbitraire.

La solution générale de l'équation avec second membre

$$b'(r) + \tfrac{2}{r}b(r) = \tfrac{1}{r}\,, \quad r > 0\,,$$

s'obtient par la méthode de variation de la constante, en cherchant b sour la forme $b(r) = \frac{C(r)}{r^2}$. On trouve que

$$\tfrac{1}{r^2}C'(r) = \tfrac{1}{r}\,,\ \text{soit } C'(r) = r \text{ d'où } C(r) = \tfrac{1}{2}r^2 + C_0\,.$$

Donc la solution générale de l'équation avec second membre ci-dessus est

$$b(r) = \tfrac{1}{2} + \frac{C_0}{r^2}\,,$$

où C_0 est une constante arbitraire.

Le changement de fonction inconnue $a' = b$ montre que la solution générale de l'équation (1) est une primitive quelconque de la fonction b ci-dessus, c'est à dire une fonction de la forme

$$a(r) = \tfrac{1}{2}r - \frac{C_0}{r} + C_1$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes arbitraires.

2) Il découle de la question précédente que si a est une solution de l'équation différentielle (1) et que a est homogène de degré 1, les constantes C_0 et C_1 sont nécessairement nulles, et donc que

$$a(r) = \tfrac{1}{2}r\,.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|$ est continue sur $\mathbf{R}^3$, donc localement intégrable sur $\mathbf{R}^3$. Elle définit donc une distribution A sur $\mathbf{R}^3$.
3) La formule donnant le laplacien d'une fonction radiale dans $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ rappelée au début de l'exercice montre que

$$\Delta A(x) = \frac{1}{\|x\|} \text{ pour tout } x \setminus \{0\}\,.$$

Vérifions que la fonction $B : x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^3$. D'abord, cette fonction est positive et continue sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, donc mesurable. En passant en coordonnées sphériques ($r = \|x\|, \omega = \frac{x}{\|x\|}$) et en notant σ la mesure superficielle sur la sphère unité $\mathbf{S}^2$ de $\mathbf{R}^3$, on trouve que

$$\int_{\|x\| \leq R} \tfrac{1}{\|x\|} dx = \int_0^R \int_{\mathbf{S}^2} \tfrac{1}{r} r^2 d\sigma(\omega) dr = 4\pi \int_0^R r dr = 4\pi \tfrac{1}{2} R^2 < +\infty$$

La fonction B, étant localement intégrable sur $\mathbf{R}^3$, définit une distribution sur $\mathbf{R}^3$.

Or on vient de voir que la restriction à $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ de la distribution $\Delta A - B$ est nulle. Ainsi $\Delta A - B$ est une distribution à support dans $\{0\}$, et par conséquent il existe des constantes c_α indexées par $\alpha \in \mathbf{N}^3$, et $N \geq 0$ tels que

$$\Delta A = B + \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0\,.$$

Or A est une distribution homogène de degré 1, de sorte que ΔA est une distribution homogène de degré -1 ainsi que B, tandis que $\partial^\alpha \delta_0$ est une distribution homogène de degré $-3 - |\alpha|$. Comme des distributions homogènes de degrés différents sont linéairement indépendantes, on en déduit que toutes les constantes c_α sont nulles pour $|\alpha| \leq N$, autrement dit que

$$\Delta A = B \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)\,.$$

4) On sait que $-\frac{1}{4\pi} B$ est une solution élémentaire du laplacien dans $\mathbf{R}^3$. Donc $\Delta^2(-\frac{1}{4\pi} A) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$. Une solution élémentaire du bi-laplacien dans $\mathbf{R}^3$ est donc

$$x \mapsto -\tfrac{1}{8\pi}\|x\|\,.$$

Problème

A.1) Appliquons la formule de Cauchy à la fonction holomorphe $z \mapsto P(z)^2$ sur le demi-disque

$$U = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ et } |z| < 1\}\,.$$

On trouve que

$$\int_{\partial U} P(z)^2 dz = \int_{-1}^1 P(x)^2 dx + \int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 i e^{i\theta} d\theta = 0$$

c'est à dire que

$$\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta\,.$$

D'autre part, comme $a_0, \ldots, a_N \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto P(x)$ est à valeurs réelles sur $[-1,1]$, de sorte que $P(x)^2 \geq 0$ pour tout $x \in [-1,0]$, d'où

$$\int_0^1 P(x)^2 dx \leq \int_{-1}^{1} P(x)^2 dx\,.$$

A.2) D'une part

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)^2 dx &= \int_0^1 \left(\sum_{0\leq m,n\leq N} a_m a_n x^{m+n} \right) dx \\ &= \sum_{0\leq m,n\leq N} a_m a_n \int_0^1 x^{m+n} dx = \sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{a_m a_n}{m+n+1}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leq \left| -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

D'autre part, comme P est un polynôme à coefficients réels, on a

$$|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$$

de sorte que la fonction $\theta \mapsto |P(e^{i\theta})|^2$ est paire. Donc

$$\int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta\,.$$

Puis

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta &= \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{0\leq m,n\leq N} a_m a_n e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{0\leq m,n\leq N} a_m a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{0\leq m,n\leq N} a_m a_n \cdot (2\pi)\delta_{m,n} = \pi \sum_{n=0}^{N} a_n^2\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

A.3) En cas d'égalité, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)^2 dx &= \int_{-1}^{1} P(x)^2 dx \\ &= \left| -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta \right| = \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta\,.\end{aligned}$$

Les 2ème et 4ème égalités sont automatiquement vérifiées, comme on l'a vu plus haut. La 1ère implique que $P(x)^2$ est nul p.p. sur $[-1,0]$, donc en une infinité de points x. Comme P est un polynôme, cela entraîne que P est le polynôme nul (le seul polynôme ayant une infinité de zéros sur $\mathbf{R}$), c'est à dire que $a_0 = a_1 = \ldots = a_N = 0$.

Réciproquement, si $a_0 = a_1 = \ldots = a_N = 0$, l'inégalité du A.2) est évidemment une égalité.

A.4) La forme bilinéaire

$$(x_0, \ldots, x_N; y_0, \ldots, y_N) \mapsto \sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{x_m y_n}{m+n+1}$$

est symétrique et définie positive: en effet

$$\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{x_m x_n}{m+n+1} = \int_0^1 |x_0 + x_1 z + \ldots + x_N z|^2 dz \geq 0$$

avec égalité si et seulement si

$$x_0 + x_1 z + \ldots + x_N z^N \text{ pour presque tout } z \in [0,1]$$

ce qui n'arrive que si le polynôme

$$x_0 + x_1 z + \ldots + x_N z^N$$

est le polynôme nul, c'est à dire si $x_0 = \ldots = x_N = 0$.

Cette forme bilinéaire définit donc un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{N+1}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire, on a

$$\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{|x_m||y_n|}{m+n+1} \leq \left(\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{|x_m||x_n|}{m+n+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{|y_m||y_n|}{m+n+1}\right)^{1/2}$$

de sorte que, d'après l'inégalité du A.2) on a

$$\sum_{0\leq m,n\leq N} \frac{|x_m||y_n|}{m+n+1} \leq \pi \left(\sum_{n\geq 0} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\geq 0} y_n^2\right)^{1/2}.$$

En passant à la limite pour $N \to +\infty$ on trouve

$$\sum_{m,n\geq 0} \frac{|x_m||y_n|}{m+n+1} \leq \pi \left(\sum_{n\geq 0} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\geq 0} y_n^2\right)^{1/2}.$$

Ainsi la série double à valeurs réelles

$$\sum_{m,n\geq 0} \frac{x_m y_n}{m+n+1}$$

est absolument sommable, donc sommable puisque $\mathbf{R}$ est complet, et

$$\left|\sum_{m,n\geq 0} \frac{x_m y_n}{m+n+1}\right| \leq \sum_{m,n\geq 0} \frac{|x_m||y_n|}{m+n+1}$$

d'où le résultat.

B.1) On choisit la normalisation

$$\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi x}\phi(x)dx$$

pour la transformée de Fourier d'une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

La distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est tempérée et impaire. Sa transformée de Fourier est donc une distribution impaire. D'autre part $x\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$ de sorte que $\mathcal{F}(-2i\pi x\mathrm{vp}\frac{1}{x}) = (\mathcal{F}(\mathrm{vp}\frac{1}{x}))' = -2i\pi\mathcal{F}(1) = -2i\pi\delta_0$. Donc $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\frac{1}{x})$ est une distribution impaire dont la dérivée est $-2i\pi\delta_0$. Or les distributions de dérivée $-2i\pi\delta_0$ sont de la forme $-2i\pi H+C$ où C est une constante arbitraire. Parmi toutes ces distributions (qui sont en fait des fonctions continues par morceaux), la seule qui soit p.p. égale à une fonction impaire correspond à $C = i\pi$. Autrement dit, la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto -i\pi(H(x) - H(-x))$.

B.2.a) Par définition du produit de convolution

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{vp}\tfrac{1}{x} \star \psi, \phi \right\rangle &= \left\langle \mathrm{vp}\tfrac{1}{x}, \phi \star \phi \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{z}\left(\int_{\mathbf{R}} \phi(z-y)\phi(y)dy - \int_{\mathbf{R}} \phi(-z-y)\phi(y)dy\right)dz \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{z}\left(\int_{\mathbf{R}} \phi(z-y)\phi(y)dy\right)dz\end{aligned}$$

car ϕ est à support dans $\mathbf{R}_+^*$ de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(-z-y)\phi(y)dy = 0 \text{ pour tout } z > 0\,.$$

Après application du théorème de Fubini — qui est légitime puisque ϕ est continue à support compact et $\phi\star\phi$ est à support dans $\mathrm{supp}(\phi)+\mathrm{supp}(\phi) \subset \mathbf{R}_+^*$, ensemble sur lequel la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est continue — on fait le changement de variables $(z, y) \mapsto (x, y) = (z - y, y)$, et on trouve que

$$\left\langle \mathrm{vp}\tfrac{1}{x} \star \psi, \phi \right\rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\phi(x)\phi(y)}{x+y}dxdy\,.$$

B.2.b) Or $\mathrm{vp}\frac{1}{x} \star \psi$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\phi(x)\phi(y)}{x+y}dxdy &= \int_{\mathbf{R}} \left(\mathrm{vp}\tfrac{1}{x} \star \psi\right)(z)\phi(z)dz \\ &\le \left\|\mathrm{vp}\tfrac{1}{x} \star \psi\right\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} = \left\|\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\tfrac{1}{x}\right)\mathcal{F}(\psi)\right\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}\end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle du théorème de Plancherel.

Puis

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\tfrac{1}{x}\right)\mathcal{F}(\psi)\right\|_{L^2} \le \left\|\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\tfrac{1}{x}\right)\right\|_{L^\infty} \|\mathcal{F}(\psi)\|_{L^2} &= \pi\|\mathcal{F}(\psi)\|_{L^2} \\ &= \pi\|\psi\|_{L^2} = \pi\|\phi\|_{L^2}\end{aligned}$$

en appliquant à nouveau le théorème de Plancherel. D'où

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\phi(x)\phi(y)}{x+y} dxdy \le \pi \|\phi\|_{L^2}^2 .$$

B.3) Soit $(\chi_k)_{k\ge 1}$ une suite croissante de fonctions positives de classe C^∞ à support dans $]0,1[$ telle que $\chi_k(x) \to \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ lorsque $k \to +\infty$.

Pour $a_0, \ldots, a_N \ge 0$, on pose

$$\phi_k(x) = \sum_{n=0}^N a_n \chi_k(x+N) .$$

On a $\phi_k \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $\mathbf{R}_+^*$, de sorte qu'en appliquant à ϕ_k l'inégalité du B.2.b), on trouve que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{x+y} dxdy \le \pi \int_0^\infty \phi(x)^2 dx \le \pi \sum_{n=0}^N a_n^2 .$$

Puis, en passant à la limite dans le membre de gauche de cette inégalité grâce au théorème de convergence monotone, on trouve que

$$\sum_{0\le m,n\le N} a_m a_n \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} \frac{dxdy}{x+y} \le \pi \sum_{n=0}^N a_n^2 .$$

Grâce au changement de variables $x = m+u$ et $y = n+v$, on a

$$\int_m^{m+1} \int_n^{n+1} \frac{dxdy}{x+y} = \iint_{]0,1[^2} \frac{dudv}{m+n+u+v} .$$

Puis la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$, de sorte que, par l'inégalité de Jensen

$$\iint_{]0,1[^2} \frac{dudv}{m+n+u+v} \ge \frac{1}{m+n+\iint_{]0,1[^2}(u+v)dudv} = \frac{1}{m+n+1} .$$

On en déduit que

$$\sum_{0\le m,n\le N} \frac{a_m a_n}{m+n+1} \le \sum_{0\le m,n\le N} a_m a_n \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} \frac{dxdy}{x+y} \le \pi \sum_{n=0}^N a_n^2$$

pour $a_0, \ldots, a_N \ge 0$, ce qui est l'inégalité du A.2).