

## Zéros isolés

Les zéros de  $f \in \text{Hol}(\Omega) - 0$  sur  $\Omega$  connexe sont isolés.

ie si  $f(z_0) = 0$  et  $0 < |z - z_0| \ll 1$  alors  $f(z) \neq 0$ .

► L'ensemble  $U$  des  $z \in \Omega$  tels que  $\forall n \geq 0, f^{(n)}(z) = 0$  est fermé (banal) et ouvert ( $f$  somme de sa série de Taylor en tout point). Donc  $U = \emptyset$  ou  $\Omega$  (connexité) et donc  $U = \emptyset$  (sinon  $f \equiv 0$ ). On écrit alors

$$f(z) = (z - z_0)^N \left( a_N + z \sum_{n>N} a_n (z - z_0)^{n-N} \right)$$

avec  $a_N = f^{(N)}(z_0)/N! \neq 0$ . ■

En particulier, deux fonctions holomorphes sur  $\Omega$  connexe coïncidant sur un ouvert, voire sur un arc, coïncident partout : c'est le **principe du prolongement analytique**.

## Propriété de la moyenne

**Théorème [Formule de la moyenne]**

Si  $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$ , on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} f(z_0) &\stackrel{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\theta})}{R e^{i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\theta}) d\theta. \blacksquare \end{aligned}$$

**Corollaire**

$$|f(z_0)| \leq \text{Max}_\theta |f(z_0 + R e^{i\theta})|.$$

## Principe du maximum

**Théorème [Principe du maximum]**

Soit  $f \in \text{Hol}(\Omega)$ . Si le module  $|f|$  a un maximum local en  $z_0 \in \Omega$  alors  $f$  est constante près de  $z_0$ , donc partout si  $\Omega$  connexe (zéros isolés).

**Exemple :** si  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  connexe est à valeurs réelles, alors  $f$  constante (  $\exp(if)$  est de module constant sur  $\Omega$  donc constant par le principe du maximum).

**Preuve :** Soit  $\bar{D}(0, R) \subset \Omega$  et  $r \leq R$ . Soit

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

le coefficient de Fourier  $f_r(\theta) = f(z_0 + r e^{i\theta})$ .

Supposons que

$$|c_0| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \right| \stackrel{\text{moyenne}}{=} |f(z_0)| = \text{Max}_{\bar{D}(z_0, R)} |f(z)|.$$

Alors, d'après l'égalité de Parseval, on a  $\sum |c_n|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \int_0^{2\pi} |f_r(\theta)|^2 d\theta$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |c_0|^2 d\theta = |c_0|^2.$$

et donc  $c_n = 0, n \neq 0$  ie  $\|f_r - c_0\|_2 = 0, \forall r < R$  ce qui entraîne  $f = c_0$  sur  $D(z_0, R)$  par continuité. ■

Remarque : La preuve n'utilise que continuité et formule de la moyenne : elle s'adaptera donc aux fonctions harmoniques.

### Théorème

Toute  $f \in \text{Hol}(\Omega)$ ,  $\Omega$  ouvert simplement connexe admet une primitive holomorphe (unique à un scalaire près.)

**Preuve du théorème :** Soit  $z_0 \in \mathbf{C}$ . L'ensemble des points pouvant être reliés à  $z_0$  par un chemin régulier (même polygonal) est ouvert et fermé : c'est  $\Omega$ . Pour tout  $\omega$ , choisissons  $\Gamma_\omega$  régulier reliant  $z_0$  à  $\omega$  et posons

$$F(\omega) = \int_{\Gamma_\omega} f(z) dz.$$

si  $\Gamma'_\omega$  est un autre choix,  $\Gamma'_\omega \cup \Gamma_\omega^{\text{opp}}$  est un lacet homotope à zéro, donc

$$\int_{\Gamma_\omega} f(z) dz = \int_{\Gamma'_\omega} f(z) dz$$

et  $F$  bien définie.

Mais, il n'existe pas de prolongement continu du logarithme à  $\mathbf{C}^*$  car sinon on aurait

$$\int_{\mathbf{C}(0,1)} \frac{dz}{z} = 0$$

(car  $\ln$  primitive de  $1/z$ ) ce qui contredit le calcul de l'indice du centre d'un cercle. On a (exercice) les propriétés

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) + c_{nte_1}$$

et les formules

$$\ln(\exp(c)) = c + c_{nte_2}, \exp(\ln(a)) = c_{nte_3} a$$

où  $a, b \in \text{Hol}(\Omega, \mathbf{C}^*)$ ,  $c \in \text{Hol}(\Omega)$  et  $c_{nte_3} \in \mathbf{C}^*$ .

On pose alors

$$a^\alpha = \exp(\alpha \ln(a)), \alpha \in \mathbf{C}.$$

qui permet par exemple de définir  $\sqrt{z}$ .

Si  $D(\omega, r) \subset \Omega$ , on a  $\frac{F(\omega+h) - F(\omega)}{h} =$

$$= \frac{1}{h} \int_{[\omega, \omega+h]} f(z) dz = \int_0^1 f(\omega + th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(\omega).$$

■

**Exemple : le logarithme ( $\Omega$  ouvert simplement connexe).** Si  $h \in \text{Hol}(\Omega, \mathbf{C}^*)$ , on a  $h'/h \in \text{Hol}(\Omega)$  et une primitive  $\ln(h)$  s'appelle un logarithme de  $h$ .

Donc, on peut définir la *détermination principale du logarithme*  $\ln(z)$  sur la coupure  $\Omega = \mathbf{C} - \mathbf{R}^-$  comme la primitive de  $1/z$  s'annulant en  $z = 1$ ; elle coïncide avec le logarithme usuel sur  $\mathbf{R}_*^+$ . On a

$$\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta, \theta \in ]-\pi, \pi[.$$

## Fonctions harmoniques

### Définition

$f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  est dite *harmonique* si

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Exemple  $f, \bar{f}, \text{Re}(f), \text{Im}(f)$  pour  $f$  holomorphe sont harmoniques. Ce sont les seuls exemples essentiellement.

### Proposition

$\forall h$  harmonique sur  $\Omega$  simplement connexe s'écrit  $f + \bar{g}$  avec  $f, g \in \text{Hol}(\Omega)$ .

►

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \text{ donc } \frac{\partial h}{\partial z} \text{ holomorphe.}$$

Soit  $f$  primitive holomorphe de  $\frac{\partial h}{\partial z}$ . On a

$$0 = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(h-f)}{\partial z} = \frac{\partial(\overline{h-f})}{\partial \bar{z}}$$

donc  $\overline{h-f} = g \in \text{Hol}(\Omega)$ . ■

Si  $h$  de plus réelle,  $h = \text{Re}(f + g)$  :

une fonction harmonique réelle est la partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à  $i\mathbf{R}$  près (exo).

Comme  $f$  et  $\bar{g}$ ,

une fonction harmonique vérifie la propriété de la moyenne, donc également le principe du maximum

(que  $\Omega$  soit simplement connexe ou non).

Un certain nombre de résultats s'adaptent du cas holomorphe au cas harmonique. À titre d'exercice, on prouvera les résultats utiles :

- 1) Une fonction harmonique sur  $\mathbf{C}$  bornée est constante.
- 2) Si  $f \in C^0(\bar{D})$  est harmonique sur  $D = D(0, 1)$  et a une partie réelle nulle sur  $\partial D$ , alors  $\text{Re}(f) \equiv 0$   
[Indication : Écrire  $\text{Re}(f) = \text{Re}(g)$  avec  $g = \sum a_n z^n \in \text{Hol}(\Omega)$  et comparer les coefficients de Fourier de  $\theta \mapsto \text{Re}(f(re^{i\theta}))$  et  $a_n r^n$  lorsque  $r$  tend vers 1].
- 3) Montrer que  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  est un biholomorphisme  $D = D(0, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}$ . En déduire que  $f \in C^0(\bar{\mathbf{H}}, \mathbf{R})$  harmonique sur  $\mathbf{H}$  nulle sur  $\mathbf{R} = \partial\mathbf{H}$  est identiquement nulle.

## Applications physiques -idéalisées-

Si  $f, g, h$  holomorphes,  $f \circ h + \bar{g} \circ h$  est harmonique : le composé d'une fonction harmonique et d'une transformation holomorphe est harmonique. Or, on a le DIFFICILE théorème de Riemann

Tout ouvert simplement connexe de  $\mathbf{C}$  distinct de  $\emptyset$  et  $\mathbf{C}$  est biholomorphe au demi-plan de Poincaré  $\mathbf{H} = \{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$ .

Ceci permet bien souvent de se ramener au demi-plan ou au plan par transformation conforme comme dans l'exercice précédent.

Précisément, si on cherche  $f$  harmonique sur  $\Omega$  simplement connexe vérifiant des conditions aux limites  $\Lambda(\omega)$ , on trouve un biholomorphisme  $h$  de  $\Omega$  sur  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{H}$  et on cherche  $\phi$  sur  $\mathbf{H}$  ou  $\Omega$  harmonique vérifiant  $\Lambda \circ h(z)$ . Or, nombre de régimes stationnaires sont définis par  $\Delta(f) = 0$ , comme les champs magnétiques ou électriques en électrostatique (Maxwell), le potentiel des vitesses d'un fluide parfait, le champ de gravitation classique (cf. PC)...

Regardons un fluide parfait irrotationnel et incompressible s'écoulant sans frottement dans une surface  $\Omega$  simplement connexe. Le champ des vitesses  $\vec{v}$  satisfait  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$

(irrotationnel), donc s'écrit  $-\text{grad}(\Phi)$ , et est à divergence nulle

$$-\text{div}(\text{grad}(\Phi)) = -\Delta(\Phi) = 0$$

(incompressibilité) de sorte que

$$v_x = -\partial_x \Phi, v_y = -\partial_y \Phi$$

sont harmoniques avec la composante normale de  $\vec{v}$  nulle au bord (bord étanche).

Le théorème de Riemann dicte de s'intéresser d'abord à  $\Omega = \mathbf{H}$  et à  $\vec{v} \in L^\infty(\bar{\mathbf{H}})$  (la vitesse est bornée pour des raisons physiques!).

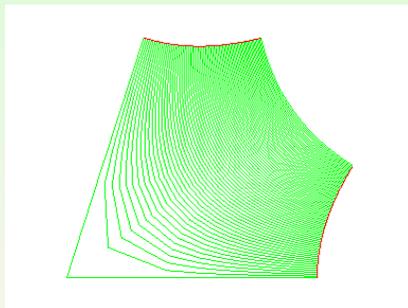
Comme la composante normale  $v_y$  harmonique bornée nulle au bord, elle est  $\equiv 0$  (principe du maximum, cf. exo précédent).

Ainsi,  $\partial_y \Phi = -v_y \equiv 0$ , ie  $\Phi = \Phi(x)$  et

$$\partial_x v_x = -\partial_x^2 \Phi = -\Delta \Phi = 0 \text{ de sorte } v_x = v_0 \text{ et } \Phi = -\text{Re}(v_0 z).$$

Pour  $\Omega$  général, il suffit de trouver  $f$  envoyant  $\mathbf{H}$  sur  $\Omega$  (comme  $f$  conforme,  $f$  préserve la dérivée normale).

Par exemple, pour le « coin » d'équation polaire  $0 \leq \theta \leq \alpha$ , on considère  $f(z) = z^{\alpha/\pi}$  ce qui donne comme potentiel des vitesses  $\Phi = -\text{Re}((v_0 z)^{\alpha/\pi})$ .



Écoulement dans un coin

**Application à la chaleur.** Une gaine rectiligne infinie à une section en couronne (non simplement connexe!) de rayons  $R^- < R^+$  et baigne dans des calorimètres à l'intérieur et à l'extérieur à température  $T^-, T^+$ .

En régime permanent ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ), la température  $T$  est harmonique car l'équation de la chaleur est

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta(T) = 0$$

et  $T$  vaut  $T^+, T^-$  sur les cercles de bords de rayons  $T^+, T^-$ .

La différence de deux solutions est nulle au bord donc nulle (principe du maximum) : le problème est bien posé.

Les fonctions harmoniques invariantes par rotation sont de la forme  $a \ln |z| + b$

Écrire  $f(z) = \varphi(r)$  et

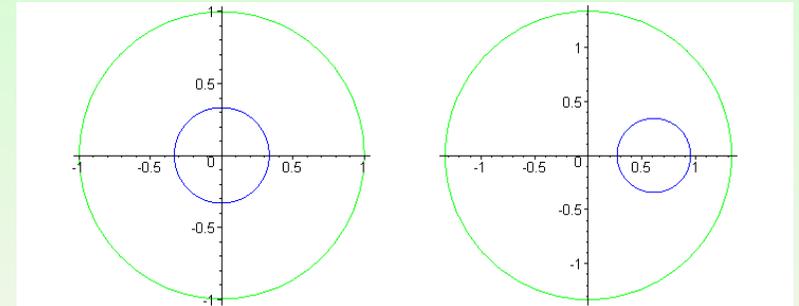
$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

et donc, si la couronne est centrée en zéro,  $T_{\text{centrée}} =$

$$\frac{T_-}{\ln(R^-) - \ln(R^+)} \ln\left(\frac{|z|}{R^+}\right) + \frac{T_+}{\ln(R^+) - \ln(R^-)} \ln\left(\frac{|z|}{R^-}\right).$$

Dans le cas général, on remarque qu'on peut centrer une couronne par une homographie  $f$ , qui préserve les cercles de bord : la température sera de la forme  $T_{\text{centrée}} \circ f^{-1}$ .

## Transformation conforme de couronnes



$$z \mapsto \frac{5}{3} + \frac{z-3}{z-2}$$

## Construction de fonctions holomorphes

### Théorème

Soit  $\Sigma f_n$  série de fonctions holomorphes sur  $\Omega$  convergeant normalement sur tout disque fermé  $\bar{D} \subset \Omega$ . Alors,  $\Sigma f'_n$  converge normalement sur tout disque fermé  $\bar{D} \subset \Omega$  et  $\Sigma_{n \geq 0} f_n$  holomorphe de dérivée  $\Sigma_{n \geq 0} f'_n$ .

► Tout disque fermé  $\overline{D(\omega, r)} \subset \Omega$  est contenu dans  $\bar{D} = \overline{D(\omega, R)} \subset \Omega$  pour  $R > r$  convenable (compacité du cercle). Soit  $\omega \in \bar{D}$  et  $C = \partial D(\omega, r)$  et  $f \in \text{Hol}(\Omega)$ .

On a (Cauchy)

$$f(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - \omega} dz.$$

Comme

$$\frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} \in C^0(C \times \bar{D}), \quad g = \frac{f(z)}{z - \omega},$$

on peut dériver sous le signe somme et on trouve (estimées de Cauchy)

$$f'(\omega) = -\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - \omega)^2} dz.$$

Comme  $|z - \omega| \geq R - r$ , on a

$$|f'(\omega)| \leq \frac{\text{Max}_{\bar{D}} |f|}{(R - r)}, \quad \forall \omega \in \bar{D}.$$

La convergence normale de  $\Sigma f_n$  sur  $\bar{D}$  entraîne donc celle des  $f'_n$  et on peut dériver terme à terme par rapport à  $x$  et  $y$  pour obtenir le théorème. ■

Exemple. Les pôles de  $\cot(\pi z)$  sont les entiers avec résidu 1.

La série  $\sum_{n>0} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}$  converge normalement sur les compacts de  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$  de sorte que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n>0} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}$$

est méromorphe sur  $\mathbf{C}$ .

$$g(z) := \cot(\pi z) - \left( \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

est donc holomorphe sur  $\mathbf{C}$  et 1-périodique : elle est bornée sur une bande  $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$ . En dehors de la bande, elle est bornée (calcul direct) : elle est donc constante (Liouville). Comme elle s'annule en zéro, on a

$$(Euler). \quad \cot(\pi z) = \left( \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

En développant en série, on obtient

$$\forall k > 0, \quad \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$$

avec

$$z \cot(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Les nombres de Bernoulli  $B_n$  sont des nombres rationnels aux propriétés remarquables. Les premières valeurs sont  $B_0 = 1, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30 \dots$  Les valeurs de  $\forall k > 0, \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k-1}$  restent très mystérieuses même si des conjectures difficiles existent ainsi que des progrès récents (Apéry, Rivoal...).