Preuve de la formule des résidus

Rappel de la fois précédente :

On cherche à montrer

Théorème [Formule des résidus]

Soit f méromorphe sur Ω simplement connexe (par ex. convexe) ayant un ensemble fini de pôles S et γ lacet régulier dans $\Omega - S$. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{s\in S} \mathrm{res}_s(f)\,\mathrm{ind}_s(\gamma).$$

On a vu

Définition

$f : \Omega \to \mathbf{C}$ méromorphe au voisinage de $z_0 \in \Omega$ si $f \in \mathrm{Hol}(D - \{z_0\})$ où $D \subset \Omega$ disque contenant z_0 ET si $\exists N \in \mathbf{N}$ tel que $(z-z_0)^N f$ borné sur D. Si de plus f non holomorphe en z_0, on dit que z_0 est un pôle.

et

Proposition

f méromorphe en z_0 ssi f a un développement de Laurent près de z_0 :

$$\exists R > 0 |\ f(z) = \sum_{n\geq -N} a_n(z-z_0)^n$$

pour $z \in D(z_0, R) - \{z_0\}$. On pose $\mathrm{res}_{z_0} = a_{-1}$.

Ex. : (essentiellement), f/g méromorphe si $f, g \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ mais $\exp(1/z)$ non méromorphe en 0.

Indice d'un lacet

Si γ lacet régulier dans $\mathbf{C}$ et $z_0 \notin \gamma$, l'indice de γ relativement à z_0 est défini par

$$\mathrm{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\mathrm{d}t.$$

On a $\mathrm{ind}_{z_0}(\gamma^{opp}) = -\mathrm{ind}_{z_0}(\gamma)$. On verra bientôt que

l'indice est invariant par déformation continue, ie par *homotopie de lacets*.

Proposition

L'indice est un entier relatif.

On pose

$$f(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z_0}\mathrm{d}u\right), t \in [0,1].$$

Comme

$$f'/f = (\gamma - z_0)'/(\gamma - z_0)$$

(sauf au nombre fini de points non C^1 de γ), on a

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(0)-z_0}.$$

Comme $f(0) = 1$ et $\gamma(0) = \gamma(1)$, on a $f(1) = 1$ et donc

$$\exp(2i\pi\,\mathrm{ind}_{z_0}(\gamma)) = 1.$$

■

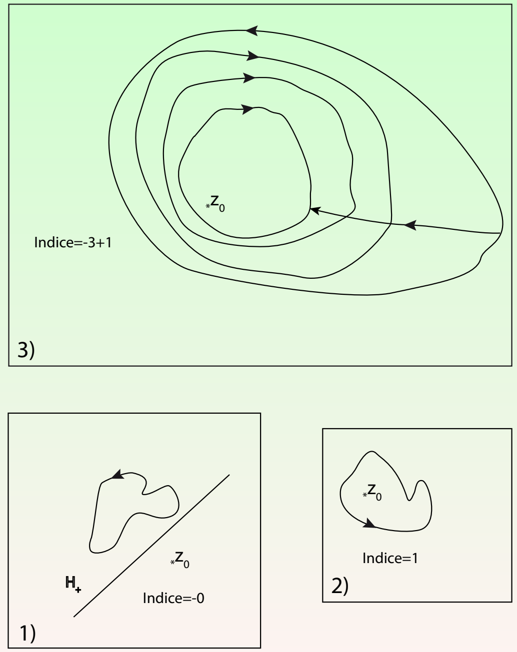
Ex : Si z_0 est à l'intérieur d'un cercle C, on a $\mathrm{ind}_{z_0}(C) = 1$ (appliquer par ex la formule de Cauchy à $f = 1$).

Si z_0 est à l'extérieur, on a $\mathrm{ind}_{z_0}(C) = 0$ (développer $1/(z - z_0)$ en puissances de $1/z$ pour $C = C(0, 1)$ et $|z_0| > 1$).

Pratiquement,

l'indice compte algébriquement le nombre de tours de γ autour de zéro

.



Simple connexité

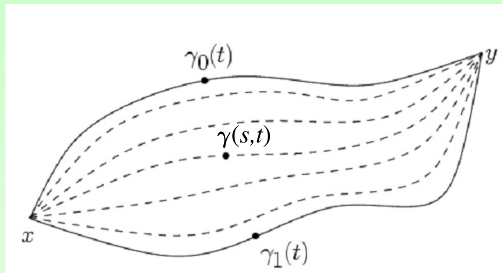
Définition

Une **homotopie** entre deux chemins de Ω γ_0 et γ_1 est une application $\gamma \in C^0([0,1]^2 \to \Omega)$ telle que

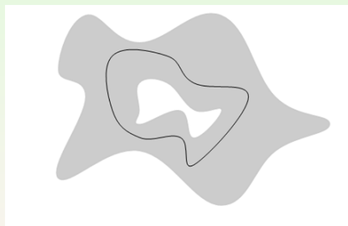
$$\forall t,\ \gamma(0, t) = \gamma_0(t), \gamma(1, t) = \gamma_1(t).$$

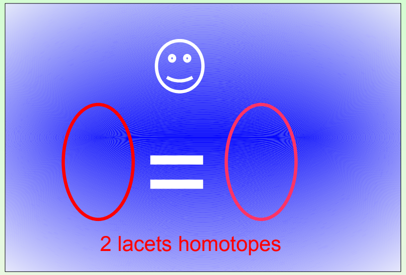
γ **homotopie de lacets** si de plus $\forall s,\ \gamma(s, 0) = \gamma(s, 1)$.
Ω **simplement connexe** s'il est connexe et s'il existe une *homotopie de lacets* entre tout lacet et le lacet constant.

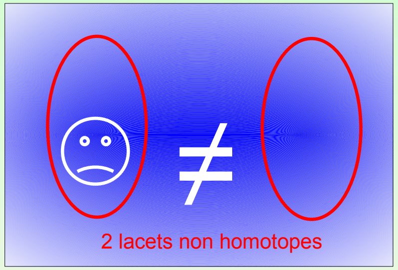
Exo : montrer qu'un convexe, un ouvert étoilé, une coupure (complémentaire d'une demi-droite) sont simplement connexes mais que $\mathbf{C}^*$ n'est pas simplement connexe.



Une homotopie


Lacet non homotope au lacet constant





Video : Lacets homotopes au lacet constant

Video : Lacets non homotopes au lacet constant

Les termes du théorème étant définis, passons à sa preuve. C'est un corollaire de la généralisation suivante du théorème de Cauchy.

Théorème [Forme globale du théorème de Cauchy]

Soient γ homotopie de lacets entre γ_0, γ_1 réguliers et $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

En particulier, l'indice est invariant par homotopie. On déduit

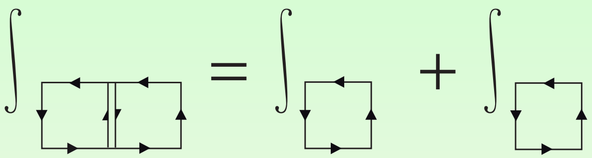
(considérer une homotopie de lacets entre γ et le lacet constant)

$\forall \gamma$ lacet régulier de Ω simplement connexe, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, on a

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

On expose la preuve du théorème dans le cas où γ est C^1 (cf. le poly en général).

2 outils pour une preuve



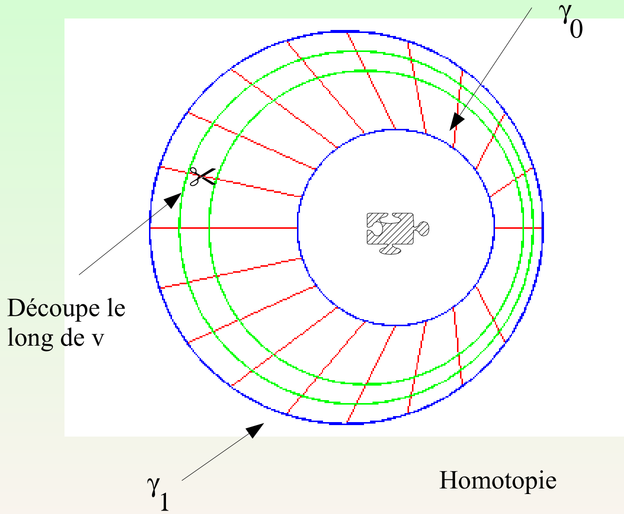
additivité de la circulation

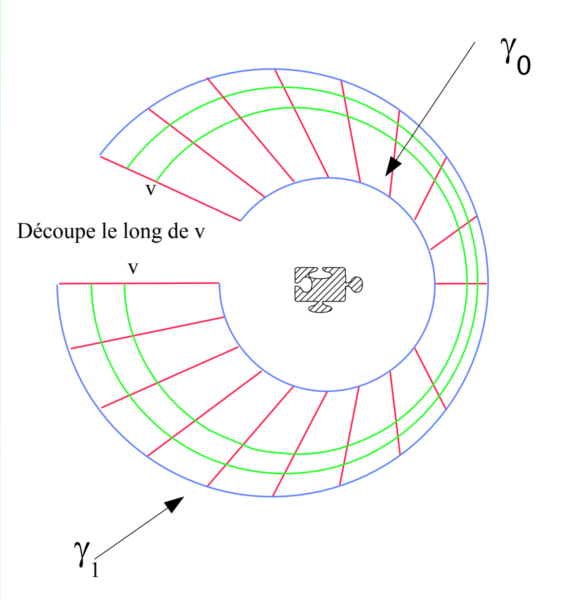
Nullité de la circulation

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

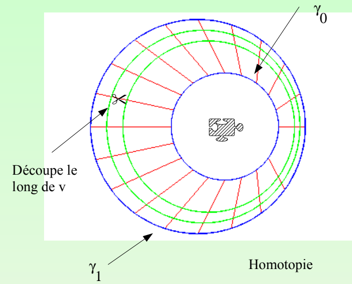
sur les lacets contenus dans des disques (primitives)

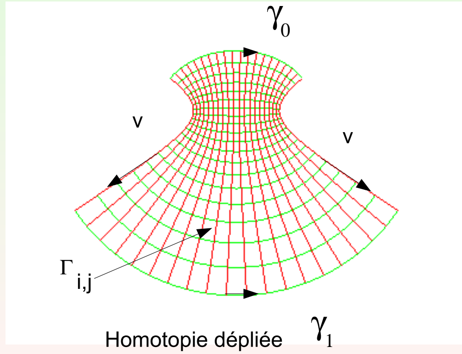
Si v est le chemin $s \mapsto \gamma(s,0) = \gamma(s,1)$ comme sur le dessin,

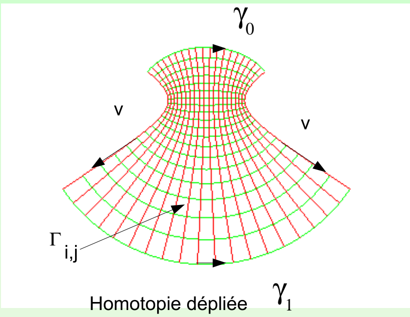




On découpe







On a

$$\Gamma = \gamma(\partial C) = \gamma_0 \cup v \cup \gamma_1^{opp} \cup v^{opp}.$$

Mais

$$\int_\Gamma = \sum_{i,j} \int_{\Gamma_{i,j}}$$

$$= \int_{\gamma_0} + \int_v - \int_{\gamma_1} - \int_v, \text{ ce qu'on voulait.}\blacksquare$$

▶ Soit $n > 0$ et $C_{i,j}$ le carré plein $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ de bord $\partial C_{i,j}$ et $\Gamma_{i,j} = \gamma(C_{i,j})$. On a

$$C = [0,1]^2 = \bigcup_{0 \leq i,j, \leq n-1} C_{i,j}$$

de bord ∂C. On recouvre $\gamma(C)$ par des disques $D_\alpha \subset \Omega$ sur lesquels f a une primitive. $\gamma(C)$ compact $\Rightarrow \exists \delta$ tel que

$$\forall x \in \gamma(C) \ \exists \alpha \text{ tel que } D(x,\delta) \subset D_\alpha.$$

γ continue entraîne

$$\exists n \text{ tel que } \forall i,j \exists \alpha \text{ avec } \Gamma_{i,j} \subset D(\gamma((\frac{i}{n}, \frac{i}{n})), \delta) \subset D_\alpha.$$

Comme f a une primitive le disque D_α, on a

$$\int_{\Gamma_{i,j}} f(z)dz = 0.$$

Passons à la preuve de la formule des résidus, à savoir

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{s\in S} \mathrm{res}_s(f)\,\mathrm{ind}_s(\gamma)$$

pour f méromorphe sur Ω simplement connexe ayant un ensemble fini de pôles S et γ lacet régulier dans $\Omega - S$.

Écrivons le développement de Laurent de f en $s \in S$

$$f(z) = \sum_{n\geq -N} a_n(z-s)^n = Q_s(z) + \sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$$

pour z proche de $s \in S$ avec a_n, s dépendant de s.

$f(z) - \sum_s Q_s(z)$ est holomorphe sur Ω simplement connexe

donc (corollaire de la forme globale de Cauchy)

$$\int_\gamma (f(z) - \sum_s Q_s(z))\mathrm{d}z = 0.$$

Mais comme $(z-s)^n, n \neq -1$ a une primitive au voisinage de γ,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma Q_s(z)\mathrm{d}z = a_{-1}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-s} = \mathrm{res}_s(f)\,\mathrm{ind}_s(\gamma).\blacksquare$$

Application au calcul d'intégrales

On suppose que γ régulier borde (paramétrisation propre) dans Ω simplement connexe un ouvert borné U (*i.e.* la restriction de γ à $[0, \mathrm{long}(\gamma)[$ est injective). Par exemple, un disque, demi-disque, triangle...

L'indice des points de U relativement à γ est 1.

Si f méromorphe sur Ω, sans pôle sur γ et S ensemble (fini) des pôles de f contenus dans U on a

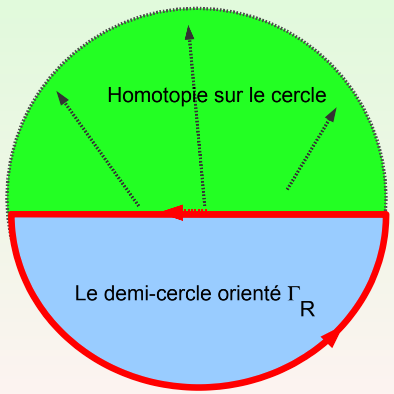
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi\sum_{s\in S}\mathrm{res}_s(f).$$

Calculons la transformée de Fourier

$$I(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\exp(-ix\xi)}{1+x^2}dx$$

de $\frac{1}{1+x^2}$ pour $\xi > 0$ (I est paire, changer x en $-x$).

On intègre sur le contour



L'intégrale

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2} dz$$

se décompose en

$$-\int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{exp(-iRe^{-i\theta}\xi)}{1+(Re^{-i\theta})^2} iRe^{-i\theta} d\theta = I_1 + I_2.$$

On a

$$|I_2| \leq \int_0^{\pi} \frac{exp(-\xi R \sin(\theta))}{R^2-1} R\mathrm{d}\theta \leq \frac{\pi R}{R^2-1} = O(1/R)$$

Donc

$$I(\xi) = 2i\pi \,\mathrm{res}_{z=-i} \left(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2} \right) = \pi e^{\xi}.$$

Application à la dispersion

Dans un milieu diélectrique homogène sans propriétés magnétiques, la transformée de Fourier en temps $\hat{E}(x,\omega)$ du champ électrique vérifie (Maxwell)

$$\Delta_x \hat{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \hat{E} = 0 \text{ où } \epsilon_r(\omega) = \text{permittivité relative.}$$

En particulier, une onde plane de pulsation ω

$$E(x,t) = \exp(i(k.x - \omega t))$$

vérifie

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$$

(relation de dispersion).

Or, E est relié à la polarisation P par (linéarité, homogénéité ET causalité)

$$P(x,T) = \epsilon_0 \int_0^{\infty} G(t) E(T-t) \mathrm{d}t$$

avec G disons L_1 (fonction de Green) et ϵ_0 permittivité du vide.
On a la relation fondamentale

$$\hat{P} = \chi \hat{E} \text{ (liens Fourier et convolution) et}$$

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_0(1+\chi) \text{ avec } \chi = \hat{G}(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) \exp(-it\omega) \mathrm{d}t.$$

En particulier, χ est complexe et holomorphe jamais nulle (physique) sur $H = \{\mathrm{Im}(\omega) < 0\}$. Physiquement,

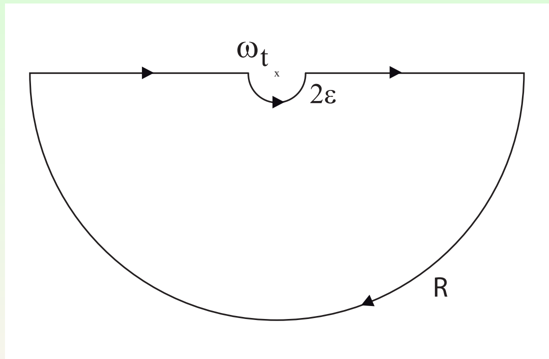
$$\sqrt{\epsilon_r} = n + ia$$

avec $n(\omega)$ indice de réfraction et $a(\omega)$ coefficient d'absorption (dissipation).

On intégre la fonction méromorphe

$$\frac{\chi}{\omega - \omega_t}, \quad \omega_t = \omega - i\varepsilon$$

sur



En appliquant le théorème des résidus, on obtient en faisant tendre ε et $1/R$ vers 0, on obtient (voir PC) la formule de Kramers et Kronig

$$\forall \omega \in \mathbf{R},\ \mathrm{Im}(\chi)(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\int \frac{\mathrm{Re}(\chi)(x)}{x-\omega}\mathrm{d}x$$

avec

$$\mathrm{vp}\int \frac{\mathrm{Re}(\chi)(x)}{x-\omega}\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\int_{\mathbf{R}-[\omega+-\alpha,\omega+\alpha]} \frac{\mathrm{Re}(\chi)(x)}{x-\omega}\mathrm{d}x$$

(partie principale de Cauchy).

Cette formule a une grosse importance expérimentale : la réfraction donne l'absorption et réciproquement !

Propriétés « globales »

$f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{C})$ bornée $\Rightarrow$ f constante. (Th. de Liouville)

En effet, (estimées de Cauchy), $f = \sum_n a_n z^n$ avec $|a_n| \leq \sup |f|/R^n \to 0$ quand $R \to \infty$ si $n > 0$.

$\mathbf{C}$ algébriquement clos. (Th. de d'Alembert-Gauss)

En effet, si $\forall z \in \mathbf{C},\ P(z) \neq 0$ alors $1/P \in \mathrm{Hol}(\mathbf{C})$ et $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty \Rightarrow 1/P$ borné et $1/P$ constant (Liouville).