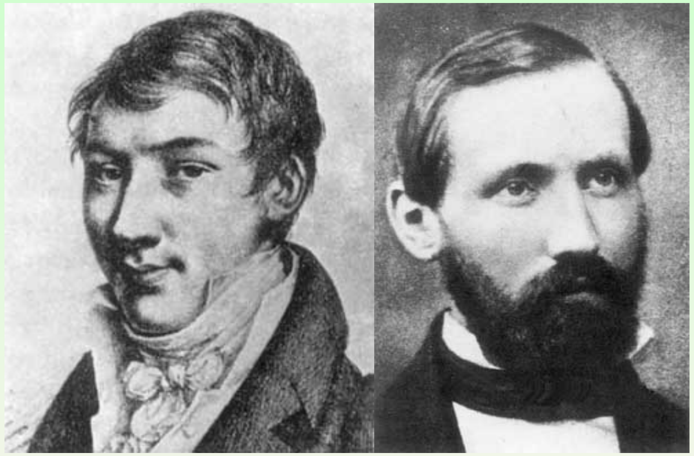


Augustin Louis Cauchy   Bernhard Riemann

Introduction aux fonctions holomorphes

Notion d'holomorphie

Définition

$f : \Omega \to \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega \subset \mathbf{C}$ si on a un DL

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

pour Δz COMPLEXE (petit).

$$f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta x + if'(z_0)\Delta y + o(|\Delta z|),$$

avec $z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}$.

On a donc les « conditions de Cauchy »

$$if'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

C'est-à-dire en écrivant $f = P + iQ,\ P, Q$ réelles

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Inversement, si f est C^1 et vérifie Cauchy alors

$$f(z_0+\Delta x+i\Delta y)=f(z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Delta y+o(|\Delta x|+|\Delta y|)$$

$$=f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

$$\text{car } \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Définition

f holomorphe ssi f est C^1 et (condition de Cauchy)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = 0.$$

Par exemple, les fractions rationnelles, $\exp(z), \sin(z), \cos(z), \mathrm{sh}(z), \mathrm{ch}(z)$ sont holomorphes...

On a donc f holomorphe $\Rightarrow$ f est $\mathbf{C}$-dérivable et

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}).$$

Réciproquement, on a pour $f \in C^1(\Omega)$

Théorème

f holomorphe $\Leftrightarrow$ f $\mathbf{C}-$dérivable$\Leftrightarrow$ df similitude directe (de rapport $f'(z)$).

où la différentielle $\mathrm{d}f$ en z est définie par sa matrice

$$\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}).$$

Exo : la transformée de Fourier de $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ se prolonge dans $\mathrm{Hol}(-\mathbf{H})$, $\mathbf{H} = \{z | \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

ATTENTION : si f holomorphe, $|f|$ ou $\bar{f}$ essentiellement jamais holomorphes :

Exo : Ω connexe, f ET $\bar{f}$ holomorphes $\Rightarrow$ f constante !

Propriété

Si f holomorphe sur Ω connexe, f constante ssi

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

ATTENTION, si f non holomorphe,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \not\Rightarrow f \text{ constante.}$$

Exo : Montrer

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

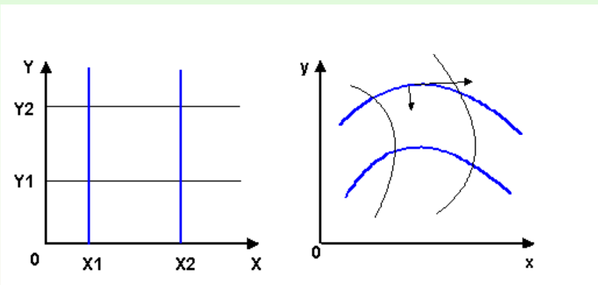
puis

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathrm{Hol}(\Omega).$$

Transformations conformes

$\mathrm{d}f$ similitude$\Rightarrow$ la transformation $z \mapsto f(z)$ est conforme, ie conserve les angles : la tangente à $f(\gamma)$ en $\gamma(t)$ est

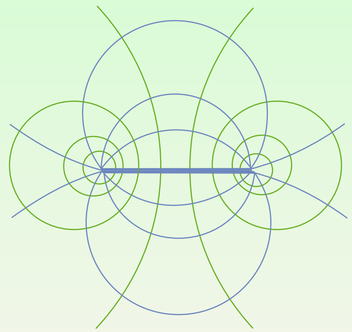
$$\mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$



De même, on a orthogonalité des normales aux lignes de niveau $P(x,y) = cnte$, $Q(x,y) = cnte'$ car

les normales sont

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right) \overset{Cauchy}{=} \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$



lignes de niveau $\frac{1}{2}\ln(\frac{z-1}{z+1})$

Physiquement, c'est l'orthogonalité des lignes de champs ($P = cnte$) et des équipotentielles ($Q = cte'$).

Premiers exemples

Si f, g holomorphes, $f+g, fg, g\circ f, f/g$ holomorphes là où définies.

Rappels : 1) si f_n C^1, $\sum f_n$ convergent et $\sum f_n'$ converge normalement sur un intervalle de $\mathbf{R}$, alors

$$\sum f_n\ C^1 \text{ et } (\sum f_n)' = \sum f_n'.$$

2) $\sum a_n z^n$ converge normalement sur

$$D(0,r), r < R := R(\sum a_n z^n) = R(\sum n a_n z^{n-1}).$$

1)+2)$\Rightarrow$ $\frac{\partial \sum a_n z^n}{\partial \bar z} = 0,\ \frac{\partial \sum a_n z^n}{\partial z} = \sum n a_n z^{n-1}$ sur $D(0,R)$ donc

Les séries entières sont holomorphes sur leur disque de convergence et se dérivent terme à terme.

Formule de Cauchy pour un cercle

Théorème

$\bar D(\omega, R) \subset \Omega$ disque compact, $\Gamma = \partial \bar D, D = \bar D - \Gamma, f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Alors,

$$\forall z_0 \in D,\ f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

Preuve Th.$\Leftrightarrow$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 0 \text{ et } \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2i\pi.$$

- Calcul de la seconde intégrale. on pose $z = \omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta}$ puis

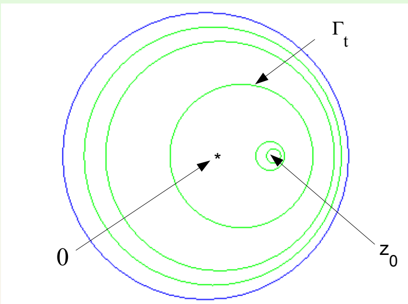
$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{\omega - z_0 + R\,\mathrm{e}^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{\omega-z_0}{R}\,\mathrm{e}^{-i\theta}} \overset{DSE}{=} 2i\pi.$$

- Calcul de la première intégrale.

On peut supposer $D = D(0,1), |z_0| < 1 (z \to \omega + Rz)$. On pose

$$I(t) = \int_{\Gamma_t} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

avec $t \in [0,1]$ et $\Gamma_t = C(tz_0, 1-t)$ (déformation continue de $\Gamma = C(0,1)$ sur z_0).



On pose donc $z = tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$

On a $I(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta}) - f(z_0)}{tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta} - z_0}\mathrm{d}(tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta})$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{f(tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta}) - f(z_0)}{\mathrm{e}^{i\theta} - z_0}\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} F(t,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

De même que $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in C^0(\Omega) \cap \mathrm{Hol}(\Omega - z_0)$, on a

$$F \in C^0([0,1]\times[0,2\pi]) \cap C^1([0,1[\times[0,2\pi])$$

et donc $I \in C^0([0,1]) \cap C^1([0,1[)$.

$$I'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t} \mathrm{d}\theta.$$

$$\text{Or } F(t,\theta) = i\frac{f(tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta}) - f(z_0)}{\mathrm{e}^{i\theta} - z_0}\,\mathrm{e}^{i\theta},$$

$$\text{donc } \frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t} = -if'(tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta} = \frac{\partial G(t,\theta)}{\partial \theta}$$

avec $G(t,\theta) = f(tz_0 + (1-t)\,\mathrm{e}^{i\theta})/(t-1)$ et donc

$$I'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(t,\theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\theta = G(t,2\pi) - G(t,0) = 0.$$

I est donc constante sur $[0,1[$, donc sur $[0,1]$ (continuité) et $I(1) = I(0) = 0.$ ■

Les conséquences de la formule de Cauchy sont TRÈS nombreuses.

Holomorphie et analycité

Pour $z_0 \in D = D(\omega, R)$ avec $\bar{D} \subset \Omega$ on a

$$\begin{aligned} f(z_0) &\overset{Cauchy}{=} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\bar{D}} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \ (z = \omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta})}{R\,\mathrm{e}^{i\theta} + \omega - z_0} R\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta})}{1 - \frac{z_0-\omega}{R}\,\mathrm{e}^{-i\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum \left(\frac{z_0-\omega}{R}\right)^n f(\omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Les majorations

$$\left|\left(\frac{z_0-\omega}{R}\right)^n f(\omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\right| \leq \frac{|z_0-\omega|^n}{R^n}\sup_\Gamma |f| \text{ et } \frac{|z_0-\omega|}{R} < 1$$

donnent la convergence normale permettant d'intervertir $\int$ et $\sum$ pour obtenir

$$f(z_0) = \sum_{n\geq 0} a_n(z_0-\omega)^n \quad \text{avec } a_n R^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega + R\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\text{avec } |a_n| \leq \frac{\sup_\Gamma |f|}{R^n} \text{ (estimées de Cauchy).}$$

On a donc

Théorème

$f \in \mathrm{Hol}(D) \Leftrightarrow f$ DSE sur D
$f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \Leftrightarrow f$ analytique sur Ω (ie localement DSE)
$\Leftrightarrow f$ somme de sa série de Taylor en tout point (localement).

L'holomorphie des séries entières et l'existence de leurs primitives donnent f holomorphe si et seulement si f' holomorphe et donc

$f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ admet sur tout disque $D \subset \Omega$ des primitives holomorphes.

ie $F \in \mathrm{Hol}(D)$ tel que $F' = f$ (existence LOCALE).

Rappel : γ chemin (orienté) de Ω si $\gamma \in C^0([0,1],\Omega)$; γ chemin régulier si $\gamma \in C^1_{morceaux}([0,1],\Omega)$; le chemin γ lacet si de plus $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Si $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ admet une primitive (eg Ω disque)

$\forall \gamma$ lacet régulier d'un DISQUE $D \subset \Omega$,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

En effet, si $F' = f$, on a

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0 = \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = [F(\gamma(t))]_0^1 = 0.$$

Le but est maintenant de prouver une puissante formule d'intégration :

Théorème [Formule des résidus]

Soit f méromorphe sur Ω simplement connexe (par ex. convexe) ayant un ensemble fini de pôles S et γ lacet régulier dans $\Omega - S$. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{s \in S} \mathrm{res}_s(f)\,\mathrm{ind}_s(\gamma).$$

Les fonctions holomorphes sont méromorphes sans pôles. On a donc en particulier la généralisation de l'énoncé précédent

Si f holomorphe sur Ω simplement connexe (par ex. convexe) et γ lacet régulier dans Ω. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Définissons les notions apparaissant dans l'énoncé.

Fonctions méromorphes, résidu

Définition

$f : \Omega \to \mathbf{C}$ méromorphe au voisinage de $z_0 \in \Omega$ si $f \in \mathrm{Hol}(D - \{z_0\})$ où $D \subset \Omega$ disque contenant z_0 ET si $\exists N \in \mathbf{N}$ tel que $(z - z_0)^N f$ borné sur D. Si de plus f non holomorphe en z_0, on dit que z_0 est un pôle.

Si f, g méromorphes, sont méromorphes $f + g$, fg et aussi f/g si $g \not\equiv 0$ sur tout ouvert de Ω.

De plus, holomorphe $\Rightarrow$ méromorphe. Si g holomorphe, $f \circ g$ méromorphe. Donc, $\tan(z)$ méromorphe mais $\sin(1/z)$ non méromorphe en 0.

Proposition

f méromorphe en z_0 ssi f a un développement de Laurent près de z_0

$$f(z) = \sum_{n \geq -N} a_n (z - z_0)^n$$

pour $z \in D(z_0, R) - \{z_0\}$ et $R \ll 1$. On pose $\mathrm{res}_{z_0} = a_{-1}$.

On a convergence normale sur toute couronne

$$\{z \text{ tels que } \epsilon < |z - z_0| < r \leq R\}$$

et les pôles sont isolés.

Preuve : Si z_0 pôle de f, $(z - z_0)^N f$ holomorphe sur $D - \{z_0\}$ et est borné D. Donc, $g(z) = (z - z_0)^{N+2} f(z)$ est C^1 en z_0 ($g'(z_0) = 0$) donc $g \in \mathrm{Hol}(D)$. Cauchy donne g DSE sur $D(0, R)$■.

Si f méromorphe, la convergence normale du développement de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq -N} a_n (z - z_0)^n$$

sur des disques assez petits permet d'intégrer terme à terme et donc

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,\epsilon)} f(z)\mathrm{d}z. \text{ si } \epsilon \ll 1.$$

Formulaire

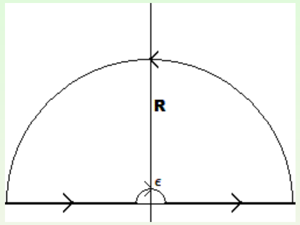
$\mathrm{res}_{z_0}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{res}_{z_0}(f) + \mu\, \mathrm{res}_{z_0}(g)$.

Un exemple : calcul de $\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$

On intègre

$$\frac{\exp(iz)}{z}$$

sur le contour $\Gamma = \Gamma_{R,\epsilon}$



On a (pas de pôle à l'intérieur de Γ)

$$\int_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z} \mathrm{d}z = 0.$$

Sur le grand demi-cercle C_R, on a

$$\frac{\exp(iz)}{z}\mathrm{d}z = i \exp(-R\sin(\theta)) \exp(iR\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$$

et donc (convergence dominée)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} \mathrm{d}z = 0.$$

Sur le petit demi-cercle C'_ϵ, on a

$$f(z) = \frac{1}{z} + O(1)$$

et donc

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\exp(iz)}{z}\mathrm{d}z = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = -i\pi$$

et donc (prendre les parties imaginaires)

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \pi.$$

Bulles de savon et méromorphie

Les bulles de savon minimisent les contraintes : le travail contre les forces de pression. Ce travail est proportionnel à la surface : la forme minimise la surface. Enneper et Weierstrass

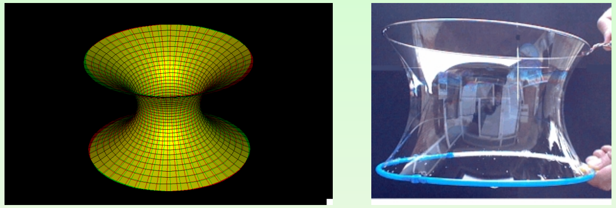
ont montré en 1866 que ces surfaces dites minimales se paramétraient (localement) en $z \mapsto \mathrm{Re}(F(z))$ avec $F(z) =$

$$\int_{[z_0,z]} \left[(1 - g(w)^2)f(w), i(1 + g(w)^2)f(w), 2g(w)f(w)\right]\mathrm{d}w.$$

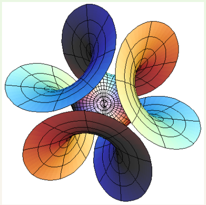
et f **méromorphe** et g **holomorphe**. Avec

$g(z) = z, f(z) = 1/z^2$, on trouve la caténoïde découverte par Euler en 1744, surface minimale s'appuyant sur deux cercles parallèles. L'exemple $g(z) = z, f = 1$ donne la très jolie

surface d'Enneper.



Caténoïde



Surface d'Enneper

Pour des raisons de minimisation de contraintes, on retrouve des surfaces minimales en architecture. Ici le toit du célèbre Arena Stadium de Munich.