Les espaces de Hilbert

MOTIVATIONS

Les espaces de Hilbert sont les espaces vectoriels de dimension infinie les plus simples. Ils interviennent entre autres
- dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles
- en mécanique classique (fréquences propres)
- en physique (équation de Schrödinger, mécanique quantique).

On se placera ici dans le cas d'espaces vectoriels complexes, le cas réel étant analogue.

> Principe heuristique : Les propriétés algébriques des e.v. de dimension finie s'étendent aux Espaces de Hilbert pourvu de se limiter aux applications linéaires continues et aux sous-espaces fermés.

On dit qu'une application f entre les $\mathbb{C}$ espaces vectoriels H et H' est anti-linéaire si elle vérifie

$$\forall x, y \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$
$$f(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} f(x) + \bar{\mu} f(y)$$

Définition

Un produit hermitien sur un $\mathbb{C}$- espace vectoriel H est une application

$$(u, v) \longrightarrow < u, v >$$

1. sesquilinéaire : $u \longrightarrow < u, v >$ est anti-linéaire, $v \longrightarrow < u, v >$ linéaire
2. hermitienne $< u, v > = \overline{< v, u >}$ (en particulier $< u, u >$ est réel)
3. positive $< u, u > > 0$ si $u \neq 0$

On appelle $(H, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ espace préhilbertien.
On définit une norme sur H par $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ et donc une distance par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition : Espace de Hilbert

On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet.

Rappel : Complet $\Leftrightarrow$ toute suite de Cauchy est convergente
Une source presque inépuisable d'espaces de Hilbert est donnée par

Proposition

Un sous-espace fermé d'un espace de Hibert est un espace de Hilbert (pour la restriction du produit hermitien).

EXEMPLES

1. L'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la forme hermitienne

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j$$

2. $\ell^2(\mathbb{N})$ espace des suites complexes $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ munies de

$$\langle (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x}_n y_n$$

Démonstration

5. L'espace de Sobolev discret
$$H^1(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\geq 0} \mid \sum_{n\geq 1} n^2|x_n|^2 + |x_0|^2\}$$
muni de
$$\langle (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}\rangle_{H^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \overline{x}_n y_n + \overline{x}_0 y_0$$
En effet, l'application $(x_n)_{n\geq 0} \longrightarrow (u_n)_{n\geq 0}$ où $u_n = nx_n$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = x_0$ fournit un isomorphisme (= bijection linéaire préservant le produit hermitien) entre $H^1(\mathbb{N})$ et $\ell^2(\mathbb{N})$. Ils sont donc tous deux complets.

3. $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, espace des fonctions L^2 sur $\mathbb{R}$ pour
$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x)g(x)dx$$
Cf. cours d'intégration.

4. $L^2(S^1, \mathbb{C})$ espace des fonctions L^2 sur le cercle, ou encore des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, munies de
$$< f, g >= \int_0^{2\pi} \overline{f}(x)g(x)dx$$
En effet, les fonctions 2π-périodiques sont définies par la relation $f(t + 2\pi) - f(t) = 0$ p.p. ce qui définit un fermé de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5. L'espace L_0 des fonctions $L^2([0, 1])$ de moyenne nulle muni de
$$< f, g >= \int_0^1 \overline{f}(x)g(x)dx$$
est un espace de Hilbert. En effet, c'est un fermé de $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ car $F(f) = \int_0^1 f(t)dt$ est continue sur $L^2([0, 1])$ d'après Cauchy-Schwarz :
$|F(f) - F(g)| \leq \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Donc $F^{-1}(0)$ est fermé.

Géométrie dans un Hilbert

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$
- L'égalité de la médiane
$$\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 = 2\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + 2\|\frac{a-b}{2}\|^2$$
- Formule de polarisation (i.e. la norme définit le produit hermitien)
$$\Re\langle x, y\rangle = \frac{(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)}{4} \qquad (1)$$
$$\Im\langle x, y\rangle = \frac{(\|x - iy\|^2 - \|x + iy\|^2)}{4} \qquad (2)$$

Orthogonalité

Si F est un sous-espace quelconque de H, on pose
$$F^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}$$
C'est un sous-espace fermé.
De la continuité de $y \longrightarrow \langle x, y\rangle$ on déduit facilement que $(F^\perp) = \overline{F}^\perp$:
$x \in F^\perp \Rightarrow \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0$ donc $\forall y \in \overline{F},\ \langle x, y\rangle = 0$
Il résultera des théorèmes qui suivent que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.
Contre-exemples : Il existe des sous-espaces qui ne sont pas fermés :
Les suites ayant un nombre fini de termes non nuls dans $\ell^2(\mathbb{N})$: $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} e_j$ est dans son adhérence.
Le sous-espace $C^0(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (il est dense, cf. cours d'intégration) etc....

Applications continues

De même que certains sous-espaces ne sont pas fermés, certaines applications linéaires ne sont pas continues.

Théorème

Une application linéaire entre deux espaces de Hilbert, E, F est continue si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout x de E on a

$$\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Le plus petit nombre C tel que l'inégalité ci-dessus soit vérifiée est appelée norme de u et notée $\|u\|$.

Attention, il existe des applications (continues) injectives non surjectives ou surjectives et non injectives d'une espace de Hilbert dans lui-même. Par exemple les applications de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans lui-même donnée par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$$

et

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$$

sont respectivement surjective non injective et injective non surjective. Noter que la seconde préserve la norme. Il existe donc des applications préservant la norme, et non bijectives.

Définition

Une application linéaire entre deux espaces de Hilbert, E, F est une **isométrie** si et seulement si elle préserve la norme. Si de plus elle est bijective, on dit que c'est une **isométrie bijective** ou un **isomorphisme isométrique.** (on dit parfois simplement isomorphisme).

Quatre théorèmes sur les espaces de Hilbert

Idée de base : les théorèmes classiques d'algèbre linéaire s'étendent aux espace de Hilbert si on se limite aux sous-espaces vectoriels fermés et aux applications linéaires continues

Théorème de la projection

Soit F un sous-espace fermé de E Il existe une application linéaire $P_F : E \longrightarrow F$ telle que $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et $\|x - P_F(x)\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
De plus $\forall x \in H, \quad x - P_F(x) \in F^{\perp}$.

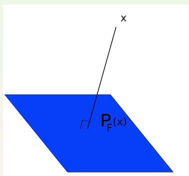


Illustration du théorème de la projection. Démonstration

Applications :

Théorème de décomposition

Si F est un sous-espace fermé, alors $H = F \oplus F^{\perp}$

Théorème de représentation de Riesz

Soit u une forme **continue** sur un espace de Hilbert. Il existe un unique vecteur $a_u \in E$ tel que

$$\forall x \in E \;,\; u(x) = < a_u, x >$$

Démonstration : On peut supposer $u \neq 0$. On choisit b_u un vecteur unitaire orthogonal à $F = \ker(u)$
(b_u existe car $H = F \oplus F^{\perp}$ et $F \neq H$).
On a alors $u(x - u(x)\frac{b_u}{u(b_u)}) = 0$, donc $H = \ker(u) \oplus \mathbb{C}b_u$.
On vérifie alors que $u(x) = \langle u(b_u)b_u, x\rangle$ pour $x \in \ker(u)$ puis pour $x \in \mathbb{C}b_u$.
C'est donc vrai pout tout x, et la proposition est vérifiée avec $a_u = u(b_u)b_u$.

Applications :

Si F est un sous-espace vectoriel de H, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$
Si H est un espace de Hilbert, $H^* = \{Appl.lin.ctn\ u : H \to \mathbb{C}\}$ est isomorphe à H. Le produit hermitien est donné par $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle a_u, b_v\rangle$.
On a aussi $(H^*)^* \simeq H$.

Critère de fermeture

$F \subset H$ est fermé si et seulement si il existe $u : H \longrightarrow K$ continue telle que $F = \ker(u)$.

L'existence de u continue entraîne évidemment la fermeture de F. Inversement, si F est fermé, l'application de projections sur $F^\perp$ fournit le u recherché.

Critère de densité

$F \subset H$ est un sous espace dense, si et seulement si $F^\perp = \{0\}$

Exemple fondamental :

Pour $n \in \mathbb{Z}$, les $e_n(t) = e^{int}$ de $L^2(S^1, \mathbb{C})$ engendrent l'espace des polynômes trigonométriques.
Cet espace sera dense ssi $\int_0^1 f(t)e^{int}dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ entraîne $f = 0$ p.p.
Le théorème de Féjer (cf. appendice du poly) affirme la densité (pour la norme C^0) des polynômes trigonométriques dans $C^0(S^1, \mathbf{C})$.
Donc si $\int_0^1 f(t)e^{int}dt = 0$ pour tout n, $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ pour tout g dans C^0 et donc par densité de $C^0(S^1, \mathbf{C})$ dans $L^2(S^1, \mathbf{C})$ (pour la norme L^2, cette fois), cela sera encore vrai pour tout g dans L^2, et finalement $f = 0$.
Plus généralement les $e^{i\lambda_n t}$ forment un ensemble dense dans $L^2([0,1], \mathbb{C})$ si et seulement si $\int_0^1 f(t)e^{i\lambda_n t}dt = 0$ pour tout n entraîne $f = 0$ p.p. La théorie des fonctions holomorphes (cf. amphis 8,9) fournira un critère efficace pour répondre à cette question (théorème de Müntz-Szasz).

Le théorème de Hahn-Banach est une conséquence des précédents et s'utilise dans un cadre plus général.

Théorème de Hahn-Banach

Soit F un sous espace d'un espace de Hilbert. Si $x_0 \notin \overline{F}$ alors il existe une forme linéaire continue u telle que $u(F) = 0$ et $u(x_0) = 1$

Démonstration.

Soit $W = F^\perp = (\overline{F})^\perp$. On a $P_W(x_0) \neq 0$ car $x_0 \notin \overline{F}$. Soit

$$a = \frac{P_W(x_0)}{|P_W(x_0)|^2}$$

Alors $< a, x_0 >= 1$ et $< a, x >= 0$ pour $x \in \overline{F}$. □

Représentation de Riesz pour les formes hermitiennes

Definition (Théorème)

On dit qu'une forme sesquilinéaire $B(u, v)$ est continue sur H si il existe une constante C telle que

$$\forall u, v \in H \quad |B(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

Remarque : Si B est hermitienne, il suffit de vérifier que $B(u, u) \leq C\|u\|^2$. Cela résulte aisément de la formule de polarisation. On a alors :

Théorème de représentation de Riesz (cas hermitien)

Soit B une forme sesquilinéaire **continue**. Il existe alors une application linéaire unique $L : H \longrightarrow H$, continue, telle que

$$B(u, v) = \langle Lu, v\rangle$$

▸ Démonstration.

Conséquence : Existence de l'adjoint
Si $u : H \longrightarrow K$ est continue, il existe $u^* : K \longrightarrow H$ continue telle que $\forall x \in H, \forall y \in K, \ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$

II. Bases Hilbertiennes

Définition des bases Hilbertienne

La famille $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base Hilbertienne ssi
1. $\forall i, j, \langle e_i, e_j\rangle = \delta_i^j$
2. $\bigoplus_n \mathbb{C}e_n$ est dense dans E

Attention, en dimension infinie une base Hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique..... (un espace complet n'a pas de base algébrique dénombrable).

Proposition

Si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base Hibertienne de H, tout $x \in H$ s'écrit de manière unique $x = \sum_n x_n e_n$ avec $x_n \in \mathbf{C}$.
De plus $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$ (formule de Parseval).

Si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base Hilbertienne, on a la décomposition en série convergente (mais pas absolument convergente)

$$x = \sum_n < x, e_n > e_n$$

et

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 \qquad \text{(Formule de Parseval)}$$

Existence des bases Hilbertiennes

On dit qu'un espace est séparable s'il possède un sous ensemble dénombrable dense.

Théorème d'existence d'une base Hilbertienne.

Tout espace de Hilbert séparable possède une base Hilbertienne.

Démonstration : Procédé de Gram-Schmidt
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans H, et F_n le s.e.v. engendré par $x_1, ..., x_n$. Quitte à renuméroter, on peut supposer $\dim(F_n) = n$ et donc F_j de codimension un dans F_{j+1}. Soit e_n un générateur de $F_{n-1}^{\perp} \cap F_n$. Alors (e_n) est une base Hilbertienne.
Les espaces $\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $L^2(S^1, \mathbb{C})$, H^k, bref tous les espaces que l'on rencontre habituellement .... sont séparables.

Le résultat précédent nous dit que les espace de Hilbert séparables se ressemblent tous, c'est-à-dire qu'ils sont tous isomorphes.

Proposition

Un espace de Hilbert séparable est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$

Démonstration En effet un tel isomorphisme est fourni par les coordonnées dans une base Hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$, i.e. l'application de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans H donnée par

$$(x_n)_{n\geq 1} \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n$$

La formule de Parseval dit que c'est une isométrie.

Désormais tous les espaces de Hilbert seront supposés séparables

Corollaire 1

Si H est de dimension infinie, sa boule unité $B = \{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$ n'est pas compacte.

En effet la suite $(e_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de sous-suite convergente (car $\|e_n. - e_m\| = 2$).

Corollaire 2

Si H est de dimension infinie, il n'existe pas de mesure non triviale sur H, invariante par translation

En effet, $B(0,1)$ contient une infinité de boules de rayon $1/4$, les $B(e_j/2, 1/4)$, donc $\mu(B(0,1/4)) = 0$, et comme H est réunion dénombrable de boules de rayon $1/4$, $\mu(H) \equiv 0$. Mais alors pour tout sous ensemble A de H, $\mu(A) \leq \mu(H) = 0$, donc μ est identiquement nulle.
Remarque : Il existe malgré tout des mesures intéressantes en dimension infinie : la mesure de Wiener permet de mesurer certaines parties de $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Elle est liée au mouvement Brownien.

Exemple Fondamental : Série de Fourier L^2

Ici $n \in \mathbb{Z}$, $H = L^2(S^1, \mathbf{C})$, $< f, g >= \int_{S^1} \overline{f}(t)g(t)dt$.
On prend $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-int)$ et on a bien $< e_n, e_m >= \delta_m^n$.
Dans ce cas, $x_n =< x, e_n >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} \overline{f}(t) \exp(-int)dt$ sont les coefficients de Fourier.
La densité de l'espace engendré par les e_p, entraîne

Décomposition en série de Fourier L^2

Pour f dans $L^2(S^1)$, la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique :
$\lim_{q\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - \sum_{n=-q}^{q} c_n(f)e^{-int}|^2 dt \longrightarrow 0$
On a l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Inversement si a_n est une suite telle que $\sum_n a_n^2 < +\infty$, la série de Fourier $\sum_n a_n e^{int}$ converge (en norme L^2 !) dans $L^2(S^1)$.

Une bonne théorie des séries de Fourier

- Comme en théorie de l'intégration (et d'ailleurs, grâce à cette théorie) on a une théorie de séries de Fourier « parfaite » : toute fonction L^2 est somme de sa série de Fourier, toute série de Fourier convergent quadratiquement a pour somme une fonction L^2 (à condition d'utiliser la bonne norme pour la convergence).
- Ce n'est pas le cas pour la norme C^0 : on ne sait pas décrire simplement les fonctions qui sont limites uniformes de leur série de Fourier (certaines fonctions continues ne le sont pas-voir plus loin).
- Cela n'empêche pas que toute fonction continue soit limite uniforme de polynômes trigonométriques (mais pas nécessairement sa série de Fourier), d'après le théorème de Féjer.
- On peut montrer facilement que si f est de classe C^1, la série de Fourier converge uniformément vers f.

Divers types de Convergence des Séries de Fourier

La question de la convergence ponctuelle (ou uniforme) de la série de Fourier de f vers f date de Dirichlet (1829).
Attention, l'énoncé précédent n'affirme *a priori* aucune convergence ponctuelle, mais par « Cauchy précisé » dans L^2, une suite qui converge L^2 a une sous-suite convergeant p.p. (donc on peut trouver une suite de sommes partielles convergeant p.p.).
Un résultat célèbre et difficile de Carleson (1966) affirme que pour une fonction L^2, la suite elle-même $\sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{int}$ converge p.p. vers $f(t)$.
D'après Kahane et Katznelson (1965), étant donné un ensemble quelconque de mesure nulle sur S^1, il existe une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas sur E.
D'après Kolmogorov, si f est supposée intégrable (et non de carré intégrable) la série de Fourier peut diverger partout....

Bases orthogonales de polynomes

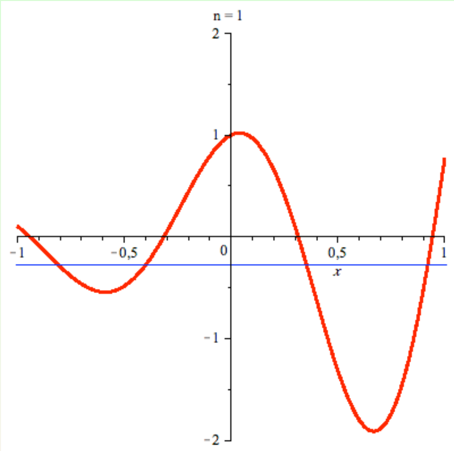
Soit $< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Les polynômes forment un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}, e^{-\frac{t^2}{2}}dt)$. On peut construire une base orthogonale de polynômes en appliquant l'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la famille $(t^n)_{n\geq 1}$.
Ce sont les polynômes d'Hermite. À une constante de normalisation près, on a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$$

De même pour le produit hermitien $< f, g >= \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$ on obtient comme base orthogonale les polynômes de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

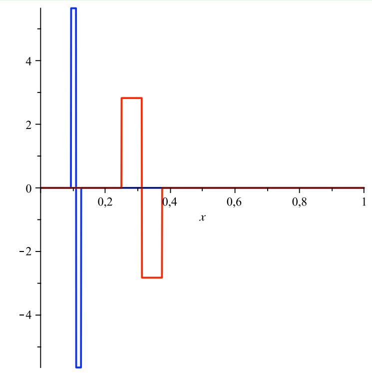
Décomposition en polynômes de Laguerre



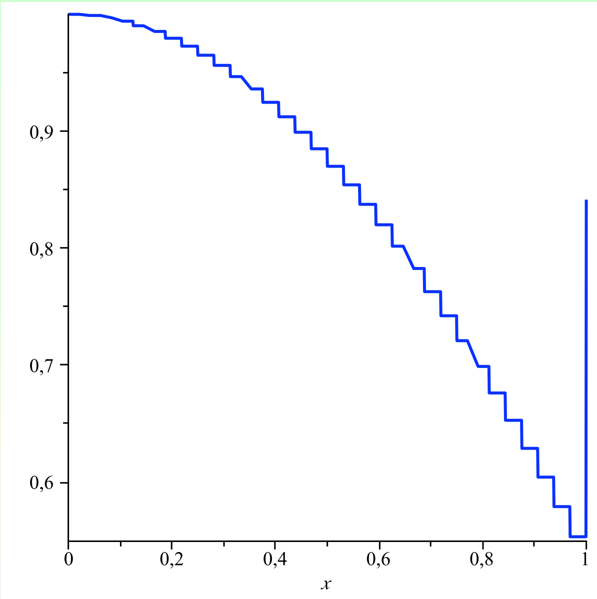
Décomposition en polynômes de Laguerre de $cos(5x)\exp(x)$

Décomposition en Ondelettes de Haar.

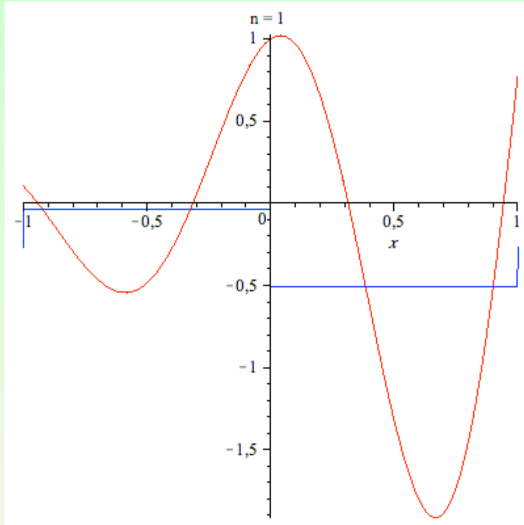
On note $\varphi = 1_{[0,1/2[} - 1_{[1/2,1[}$ et $\varphi_{n,k}(x) = 2^n\varphi(2^n x - k)$ où $1_{\mathbf{A}}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle A et $n, k \in \mathbb{N}$.
La fonction constante 1 et les $\varphi_{n,k}$ pour $0 \leq k < 2n$, forment un système orthonormal de l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$.



Les ondelettes de Haar $\varphi_{5,3}(bleu), \varphi_{3,2}(rouge)$

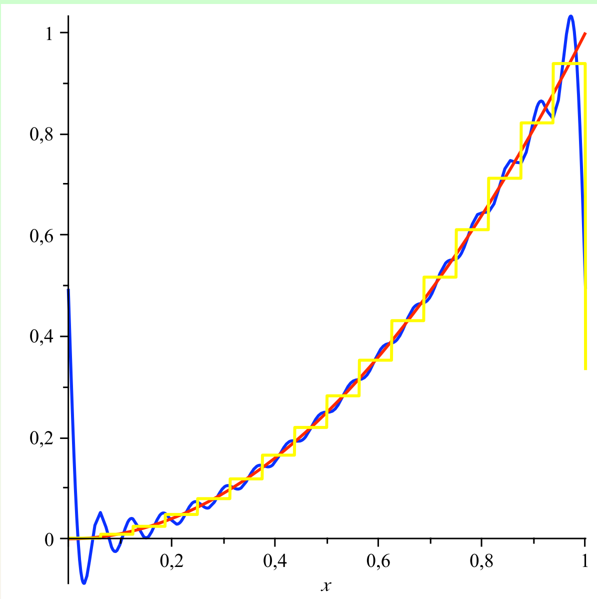


Décomposition en ondelettes de Haar de *cos* avec 25 coefficients.



09

Décomposition en ondelettes de Haar de $cos(5x)\exp(x)$



Décomposition en Fourier et en ondelettes de Haar de x^2 avec 16 coefficients.

Convergence faible

On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x_∞ si pour tout vecteur $v \in H$, $\langle x_n, v\rangle$ converge vers $\langle x_\infty, v\rangle$.
La convergence faible peut se voir comme une convergence « coordonnée par coordonnée ». Mais elle ne dépend pas du choix de la base Hilbertienne.

Proposition : compacité faible de la boule unité

Si H est de dimension infinie, toute suite bornée possède une sous suite « convergeant faiblement ».

Démonstration Il suffit d'extraire une suite diagonale des coordonnées dans une base Hilbertienne $(e_k)_{k\geq 1}$. Il est alors clair que pour chaque k, la suite $n \longrightarrow \langle x_n, e_k\rangle$ converge vers $\langle x, e_k\rangle$ et par linéarité il en est de même pour $\langle x, v\rangle$ si v est somme finie des e_k. Par densité des sommes finies, on vérifie sans peine qu'il en est de même pour $\langle x_n, v\rangle$ quel que soit v dans E.

Remarque La notion de convergence faible n'est la convergence pour aucune métrique. Elle définit une topologie, et satisfait les propriétés de la convergence des suites. En particulier si une suite converge faiblement, la limite est unique.

Pour la prochaine fois :
revoir la compacité et la transformée de Fourier.

Mercredi 16 Juin à 15H45.
Le cours sera donné par
Étienne Ghys,
Membre de l'Académie des Sciences

Spécialiste de Géométrie et Dynamique
Coauteur du film "Dimensions"

Mercredi 16 Juin à 15H45.
Étienne Ghys,
"Sur la coupe des vêtements, d'après Tchebychev".

On se donne une surface S et on veut l'habiller par un tissu. Le tissu c'est un domaine du plan D (le patron de la couturière), les fils sont les droites horizontales et verticales, et l'habillage c'est $F : D \longrightarrow S$ tel que F est une isométrie sur les fils horizontaux et verticaux (chaîne et trame) mais on ne demande pas que l'orthogonalité des fils soit préservée. Quelles sont les surfaces habillables ? Combien de morceaux faut-il pour habiller une sphère par exemple ?

Complétude de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Si $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N})$, on pose $\mathbf{x}_k = (x_{n,k})_{n\geq 1}$ et chacune des suites $(x_{n,k})_{k\geq 1}$ est de Cauchy (car $|x_{n,k} - x_{n,l}|^2 \leq \|x_k - x_l\|^2$) et donc converge vers un nombre complexe z_n. On prétend maintenant que $\mathbf{z} = (z_n)_{n\geq 1}$ est la limite des $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$. En effet pour tout n, on a que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_{j,k} - z_j|^2 = \lim_{q\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_{j,k} - x_{j,q}|^2 \leq \lim_{q\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_q\|^2$$

Comme le terme de droite est indépendant de n, on a $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{z}\|^2 \leq \lim_{q\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_q\|^2$ qui tend vers 0 avec k (car la suite $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ est de Cauchy) et donc $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ tend vers $\mathbf{z}$. $\square$

Retour

Démonstration du théorème de la projection.

Soit une suite $y_n \in F$ telle que $\lim_n \|x - y_n\| = d(x, F)$. La suite y_n est de Cauchy en utilisant la formule de la médiane

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4(\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2) \\ &\leq 4(d(x, F) + \varepsilon)^2 - 4d(x, F)^2\end{aligned}$$

Si le minimum est atteint en $y = P_F(x)$, on a

$$\|x - (y + tz)\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

pour tout $z \in F$ et donc

$$2t\langle x - y, z\rangle + t^2\|z\|^2 \leq 0$$

pour tout t, ce qui n'est possible que si $\langle x - y, z\rangle = 0$ quel que soit $z \in F$ c'est-à-dire $x - P_F(x) \in F^\perp$. $\square$

Retour

Démonstration du théorème de Riesz (cas sesquilinéaire) :

D'après l' hypothèse de continuité, pour chaque u fixé la forme linéaire $v \longrightarrow B(u, v)$ est continue.
Par le théorème de Riesz, il existe Lu unique tel que $B(u, v) = \langle Lu, v\rangle$.
Il nous faut montrer que L est linéaire et continue.
La linéarité résulte immédiatement de l'unicité et de la sesquilinéarité de B. Pour la continuité, nous avons par hypothèse

$$\|Lu\|^2 = \langle Lu, Lu\rangle = B(u, Lu) \leq C\|u\|\|Lu\|$$

On en déduit

$$\|Lu\| \leq C\|u\|$$

et donc la continuité de L. Retour