AMPHI 4 : INTEGRATION (fin)

Chapitres 6 & 7

Vers les espaces de Lebesgue

A partir de $C_c(\Omega)$, on a construit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega)$ des fonctions sommables sur Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$

Sur $C_c(\Omega)$ la convergence en moyenne des suites ou séries de fonctions est définie par la norme

$$N_1(f) = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Mais $C_c(\Omega)$ muni de la norme N_1 n'est pas un e.v.n. complet.

But : construire un espace complet à partir de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ et de la norme N_1 — ce qui permet d'appliquer aux séries de fonctions le critère "convergence normale $\Rightarrow$ convergence"

ANALOGIE : construction de R à partir de Q

L'ESPACE DE LEBESGUE $L^1(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert ; considérons l'application

$$N_1 : \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C}) \ni f \mapsto N_1(f) := \int_\Omega |f(x)|dx \in \mathbf{R}_+$$

Cette application est une semi-norme — c.a.d. qu'elle vérifie

(a) $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$;

(b) $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$.

Mais ce n'est PAS UNE NORME SUR $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$: en effet

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \text{ et } N_1(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

Donc $N_1(f) = 0$ **n'implique pas** que $f = 0$ PARTOUT sur Ω

Idée clef : "identifier" deux fonctions égales p.p. sur Ω.

C'est naturel en intégration car deux fonctions sommables sur Ω égales p.p. sur Ω ont la même intégrale.

Construction mathématique : pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$,

$$f \simeq g \quad \text{ssi } f(x) - g(x) = 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

1) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ et $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$

$$(f_1 \simeq g_1 \text{ et } f_2 \simeq g_2) \Rightarrow (\alpha f_1 + \beta f_2 \simeq \alpha g_1 + \beta g_2)$$

2) pour tous $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$

$$f \simeq g \Rightarrow \left(\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega g(x)dx \text{ et } N_1(f) = N_1(g) \right)$$

Notation : $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C}) \ni f \mapsto [f] := \{g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C}) \,|\, g \simeq f\}$

Définition :

$L^1(\Omega; \mathbf{C}) := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})\}$

1) $L^1(\Omega; \mathbf{C})$ est un $\mathbf{C}$-ev : pour $\alpha \in \mathbf{C}$ et $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$

$$[f] + [g] := [f + g] \quad \text{et } \alpha[f] := [\alpha f]$$

2) l'intégrale de Lebesgue=forme $\mathbf{C}$-linéaire sur $L^1(\Omega; \mathbf{C})$

$$L^1(\Omega) \ni [f] \mapsto \int_\Omega [f](x)dx := \int_\Omega f(x)dx \in \mathbf{C}$$

3) semi-norme N_1 sur $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C}) \to$ norme $\| \cdot \|_{L^1}$ sur $L^1(\Omega; \mathbf{C})$

$$\|[f]\|_{L^1} := N_1(f) = \int_\Omega |f(x)|dx$$

car $\|\alpha[f]\|_{L^1} = |\alpha| \|[f]\|_{L^1}$, $\|[f] + [g]\|_{L^1} \leq \|[f]\|_{L^1} + \|[g]\|_{L^1}$ et

$$\|[f]\|_{L^1} = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow f \simeq 0 \Leftrightarrow [f] = 0$$

Convention de langage : dorénavant, on identifie l'élément $[f]$ de $L^1(\Omega)$ avec n'importe laquelle des fonctions de $[f]$ — par exemple f elle-même

On pense donc à un élément de $L^1(\Omega)$ comme à une fonction f définie p.p. sur Ω et sommable — donc mesurable. Quand on écrit $f = g$ dans $L^1(\Omega)$, cela signifie que $f = g$ p.p. sur Ω

Inconvénient : étant donné $x_0 \in \Omega$ fixé et $f \in L^1(\Omega)$, on ne pourra plus JAMAIS parler de la valeur $f(x_0)$ (en effet : f est définie seulement p.p. sur Ω et $\{x_0\}$ est négligeable ; donc la valeur $f(x_0)$ peut être n'importe quoi, ou encore n'être même pas définie).

Mais ce n'est pas grave si on s'intéresse seulement à des quantités intégrées comme

$$\int_\Omega f(x)dx \quad \text{ou} \quad \|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Avantage :

Théorème :

Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $L^1(\Omega; \mathbf{C})$ muni de la norme $\| \cdot \|_1$ est complet

En réalité on a le résultat plus précis suivant :

Théorème (version précisée) :

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ suite de Cauchy de $L^1(\Omega; \mathbf{C})$. Il existe une suite extraite (f_{n_k}) vérifiant les hypothèses du théorème de convergence dominée, c.a.d. qu'il existe $f, F \in L^1(\Omega)$ t.q.
a) $f_{n_k} \to f$ p.p. sur Ω lorsque $n_k \to +\infty$, et
b) $|f_{n_k}| \leq F$ p.p. sur Ω pour tout $n_k \geq 0$.
En particulier $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration

Approximation par les fonctions continues

A partir de $C_c(\Omega)$, nous avons construit l'espace de Lebesgue $L^1(\Omega)$, l'intégrale de Lebesgue qui est une forme linéaire positive sur $L^1(\Omega)$, qui est complet pour la norme $\| \cdot \|_{L^1(\Omega)}$.

QUESTION : ce prolongement de l'intégrale est-il minimal ?

Théorème (de densité)

L'espace $C_c(\Omega; \mathbf{C})$ s'identifie à un sev dense de $L^1(\Omega)$:
a) l'application linéaire $C_c(\Omega) \ni f \mapsto [f] \in L^1(\Omega)$ est injective
b) pour tout $f \in L^1(\Omega)$ et $\epsilon > 0$, il existe $\phi \in C_c(\Omega)$ t.q. $\|f - \phi\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$

Corollaire FONDAMENTAL : Démonstration

Pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$, $\lim\limits_{|z|\to 0} \int_{\mathbf{R}^N} |f(x - z) - f(x)|dx = 0$

Généralisation : pour tout $p \in]1, +\infty[$, on définit

$$\mathcal{L}^p(\Omega; \mathbf{C}) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{C} \text{ mesurable} \mid \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

L'inégalité de Minkowski montre que $\mathcal{L}^p(\Omega; \mathbf{C})$ est un $\mathbf{C}$-ev, et que l'expression

$$N_p(f) = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega; \mathbf{C})$.

Comme dans le cas $p = 1$, on note $L^p(\Omega; \mathbf{C})$ le $\mathbf{C}$-ev obtenu en identifiant les fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega; \mathbf{C})$ égales p.p. sur Ω ; ainsi la semi-norme N_p induit sur $L^p(\Omega; \mathbf{C})$ une norme notée $\| \cdot \|_{L^p}$, et cette norme fait de $L^p(\Omega; \mathbf{C})$ un espace complet dont $C_c(\Omega; \mathbf{C})$ est un s.e.v. dense.

Vers l'analyse de Fourier

L'analyse de Fourier — et ses diverses généralisations — joue un rôle de premier plan dans diverses branches des mathématiques et de la physique :

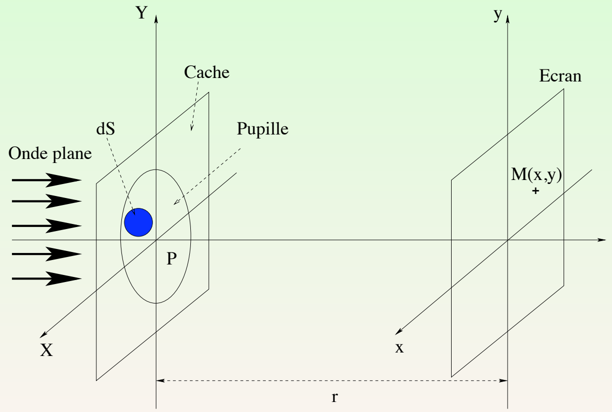
analyse des équations aux dérivées partielles (EDP), théorie du signal, analyse d'image, représentation des groupes, arithmétique, mécanique quantique...

On connaît déjà l'analyse de Fourier pour les fonctions périodiques (séries de Fourier) assez régulières — par exemple de classe C^1 par morceaux.

On va étudier maintenant l'apport de la théorie de Lebesgue de l'intégration à l'analyse de Fourier.

Motivation : la diffraction

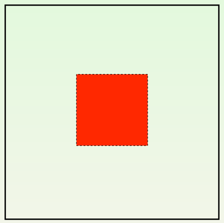
Théorie de C. Huygens et A. Fresnel : Chaque élément de surface dS émet une onde AdS où A est l'amplitude de l'onde incidente au centre de dS

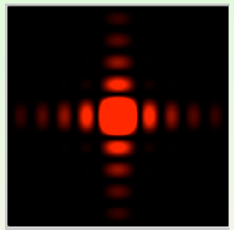


L'amplitude totale de l'onde diffractée par la pupille P au point M de coordonnées (x, y) de l'écran vaut donc

$$A \left| \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_P(X, Y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda r}(xX+yY)} dXdY \right|$$

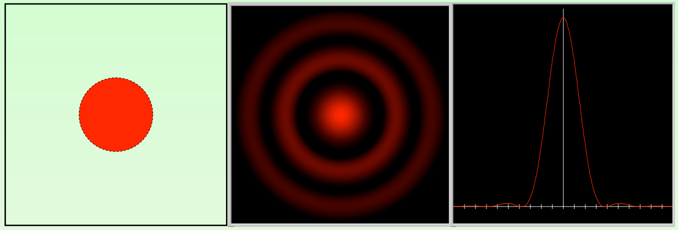
Exemple 1 :





A gauche, pupille carrée ; à droite, l'image diffractée sur l'écran

Exemple 2 :



A gauche, pupille circulaire ; au centre, son image diffractée ; à droite, graphe de l'intensité lumineuse en fonction de la distance au centre

Problème :
peut-on retrouver la forme de la pupille P à partir de la quantité

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_P(X,Y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda r}(xX+yY)} dXdY?$$

TRANSFORMATION DE FOURIER SUR L^1

Toutes les fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbf{C}$

Définition :

A $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ associe $\hat{f} = \mathcal{F}f$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx\,, \quad \xi \in \mathbf{R}^N$$

NB : l'élément $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ s'identifie à une fonction définie p.p. sur $\mathbf{R}^N$, tandis que $\hat{f}$ est définie EN TOUT POINT de $\mathbf{R}^N$.

Théorème (Riemann-Lebesgue) : Démonstration

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire de $L^1(\mathbf{R}^N)$ dans $C(\mathbf{R}^N)$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$,

a) $\hat{f} \in C(\mathbf{R}^N)$ et $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$;

b) $\hat{f}(\xi) \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$.

Transformation de Fourier et dérivation

Théorème :

a) soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ t.q. $x \mapsto |x|f \in L^1(\mathbf{R}^N)$; alors $\hat{f} \in C^1(\mathbf{R}^N)$ et on a

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} -ix_k e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx = -\widehat{ix_k f}(\xi)$$

b) soit $f \in C^1(\mathbf{R}^N)$ t.q. f et $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\mathbf{R}^N)$; alors

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)dx = i\xi_k \hat{f}(\xi)$$

$\mathcal{F}$ échange dérivation et multiplication par x

Remarque

a) Plus une fonction décroît vite à l'infini, plus sa transformée de Fourier est régulière
Exemple : soit $f \in C(\mathbf{R}^N)$

$$\exists \epsilon > 0 \text{ t.q. } f(x) = O(|x|^{-N-k-\epsilon}) \Rightarrow \hat{f} \in C^k(\mathbf{R}^N)$$

b) Plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît vite à l'infini
Exemple : soit $f \in C^k(\mathbf{R})$;

$$f^{(m)} \in L^1(\mathbf{R}) \text{ pour tout } 0 \leq m \leq k \Rightarrow \hat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$$

$\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini

Théorème (Dérivation sous le signe somme)

Soit une fonction $f : I \times \Omega \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbf{C}$ vérifiant $\begin{cases} f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega) \text{ pour tout } t \in I, \\ f(\cdot,x) \in C^1(I) \text{ p.p. en } x \in \Omega. \end{cases}$ S'il existe $\Phi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ t.q.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \Phi(x)\ \forall t \in I, \text{p.p. en } x \in \Omega,$$

alors $$\begin{cases} t \mapsto F(t) = \int_\Omega f(t,x)dx \in C^1(I) \\ F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx \text{ pour } t \in I \end{cases}$$

Dém : appliquer le théorème de convergence dominée à

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \lim_{h_n \to 0} \int_\Omega \frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} dx$$

Transformée de Fourier des Gaussiennes

Notation : pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$, on pose

$$G_a(x) = (2\pi a)^{-N/2} e^{-|x|^2/2a}; \qquad \text{on a } \int_{\mathbf{R}^N} G_a(x)dx = 1$$

G_a = densité Gaussienne centrée, de matrice de covariance aI

Calcul fondamental : Démonstration

Pour tout $a > 0$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, on a

$$\widehat{G_a}(\xi) = e^{-a|\xi|^2/2} = (2\pi/a)^{N/2} G_{1/a}(\xi)$$

Sur les Gaussiennes, la transformation de Fourier consiste à inverser la matrice de covariance

INVERSION DE FOURIER DANS L^1

Théorème :

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ t.q. $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors, p.p. en $x \in \mathbf{R}^N$

$$f(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{+ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Rmq : en particulier, si $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ est t.q. $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^N)$, alors f est égale p.p. à une fonction continue sur $\mathbf{R}^N$ tendant vers 0 à l'infini.

Synthèse : $\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}^N) \longrightarrow C_0(\mathbf{R}^N)$ – espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}^N$ tendant vers 0 à l'infini grâce au théorème de Riemann-Lebesgue.

$\boxed{\mathcal{F} \textbf{ est continue, injective, mais PAS SURJECTIVE}}$

Idée de la preuve : la formule d'inversion s'écrit

$$f(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{+ix\cdot\xi} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} f(y) dy \right) d\xi$$

Echangeons sans justification l'ordre d'intégration :

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{+i(x-y)\cdot\xi} \tfrac{d\xi}{(2\pi)^N} \right) dy$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} K(x-y) f(y) dy \quad \text{avec } K(z) = \tfrac{1}{(2\pi)^N} \hat{1}(-z)$$

Or $1 \notin L^1(\mathbf{R}^N)$, de sorte que l'intégrale interne (c.a.d. K) ne définit pas une FONCTION (mesurable) de $x - y$.

En fait les hypothèses du théorème de Fubini ne sont pas vérifiées car la fonction $(y,\xi) \mapsto |f(y)||e^{i(x-y)\cdot\xi}| = |f(y)|$ n'est PAS SOMMABLE en $(y,\xi) \in \mathbf{R}^2$.

On contourne cette difficulté en remplaçant, dans le calcul précédent, l'intégrale

$$K(x-y) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{+i(x-y)\cdot\xi} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} = \frac{1}{(2\pi)^N}\hat{1}(y-x)$$

(qui n'existe pas !) par

$$K_\epsilon(x-y) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{+i(x-y)\cdot\xi-\frac{1}{2}\epsilon^2|\xi|^2} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} = G_{\epsilon^2}(x-y)$$

pour tout $\epsilon > 0$, puis on conclut en faisant $\epsilon \to 0^+$.

▸ Démonstration complète

Remarques et perspectives

Même si l'interversion des intégrales en y et ξ dans la preuve du théorème d'inversion n'est pas justifiée, c'est ce qui nous a mis sur la voie de la démonstration correcte.

1) Cet argument fait apparaître l'expression

$$\int_{\mathbf{R}^N} K(x-y)f(y)dy \text{ notée } K \star f(x)$$

qui s'appelle "produit de convolution" de K et f et qui joue un rôle essentiel en analyse et en théorie des probabilités (loi de la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes)

2) Ecrire le théorème d'inversion sous la forme

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} K(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbf{R}^N} K(z)f(x-z)dz$$

où

$$K(z) = \frac{1}{(2\pi)^N}\hat{1}(-z)$$

comme identité valant pour tout f suggère que

$$K(z) = 0 \text{ pour tout } z \neq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}^N} K(z)dz = 1$$

Cette formule n'a évidemment AUCUN SENS dans la théorie des FONCTIONS...

3) ...mais c'est un résultat essentiel de la théorie des DISTRIBUTIONS. L'objet

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{+iz\cdot\xi} \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \text{ est noté } \delta_0(z)$$

représente une masse $+1$ EXACTEMENT LOCALISEE EN 0

Cette formule explique comment un "point matériel" localisé en l'origine 0 se décompose en superposition d'ondes planes $z \mapsto e^{i\xi\cdot z}$.

Formulation de la dualité onde-corpuscule

4) Si on revient au cas de la diffraction de Fraunhofer, l'image diffractée par la pupille P, à savoir

$$\widehat{\mathbf{1}_P}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_P(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

n'est PAS SOMMABLE en ξ, et $\mathbf{1}_P$ n'est pas p.p. égale à une fonction continue (exercice.)

Le théorème d'inversion ci-dessus n'est donc pas le cadre mathématique adéquat pour reconstituer la forme de l'ouverture P à partir de l'image diffractée.

Cette difficulté sera levée par l'étude de la transformation de Fourier dans le cadre hilbertien, c.a.d. dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

5) **Analogie transformation/séries** de Fourier : pour toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ tq. $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$

$$f \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \to f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

tandis que, pour $F \in C^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$ 2π-périodique

$$F \mapsto \hat{F}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} F(x) dx \mapsto F(x) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

On ne peut pas dire que la transformation de Fourier soit "plus générale" que les séries de Fourier car toute fonction périodique sommable sur $\mathbf{R}$ est p.p. nulle.
Cadre commun englobant séries+transformation de Fourier : théorie des DISTRIBUTIONS

Dém : soit $(f_n)_{n\geq 0}$ suite de Cauchy dans $L^1(\Omega;\mathbf{C})$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon) \geq 0$ t.q. $m, n \geq N(\epsilon)$
$\Rightarrow \|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$

Pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, on pose $n_1 = N(\frac{1}{2})$, et donc $m, n \geq n_1$
$\Rightarrow \|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2}$

Pour $\epsilon = \frac{1}{4}$, soit $n_2 = \max(n_1 + 1, N(\frac{1}{4}))$; $m, n \geq n_2$
$\Rightarrow \|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{4}$

Supposons construits $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tels que
$m, n \geq n_k \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2^k}$

Pour $\epsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, soit $n_{k+1} = \max(n_k+1, N(\frac{1}{2^{k+1}}))$; donc
$m, n \geq n_{k+1} \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2^{k+1}}$

Par récurrence, on obtient ainsi une suite infinie d'entiers $0 \leq n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$, et par construction

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^1(\Omega)} < \tfrac{1}{2^k}$$

Posons, p.p. en $x \in \Omega$

$$\Phi(x) = \sum_{k\geq 1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty]$$

La fonction Φ est mesurable, à valeurs dans $[0, +\infty]$; par convergence monotone

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(x) dx &= \sum_{k\geq 1} \int_\Omega |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \\ &= \sum_{k\geq 1} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^1(\Omega)} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} = 1\end{aligned}$$

de sorte que $\Phi \in L^1(\Omega)$.

Il existe donc $\mathcal{N} \subset \Omega$ négligeable t.q. $\Phi(x) < +\infty$ pour tout $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$. La série

$$\phi(x) := \sum_{k\geq 1} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

est absolument convergente dans $\mathbf{C}$, donc convergente, pour tout $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$. Par conséquent

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{l=1}^{k-1} \left(f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\right)(x) \to (f_{n_1} + \phi)(x) =: f(x)$$

p.p. en $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, donc p.p. en $x \in \Omega$. Enfin

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + \Phi(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega \text{ pour tout } k \geq 1\,,$$

et la fonction $F := |f_{n_1}| + \Phi \in L^1(\Omega)$.

La suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ vérifie donc les hypothèses du théorème de convergence dominée.

En particulier

$$\begin{cases} |f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega \text{ pour } k \to +\infty \\ |f_{n_k}(x) - f(x)| = \sum_{l>k} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| \\ \qquad\qquad\qquad \leq \Phi(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega \text{ pour } k \geq 1 \end{cases}$$

Par convergence dominée, lorsque $k \to +\infty$,

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f_{n_k}(x) - f(x)|dx \to 0\,.$$

CONCLUSION : La suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 0}$ dans $L^1(\Omega)$ admet une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers la fonction f définie ci-dessus dans $L^1(\Omega)$.

Donc TOUTE la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $L^1(\Omega)$.

Théorème

Dém : pour simplifier, supposons la dimension $N = 1$.
Soit $f \in L^1(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ et $\epsilon > 0$; par densité de $C_c(\mathbf{R}; \mathbf{C})$, soit $\phi \in C_c(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ tq. $\|f - \phi\|_{L^1(\mathbf{R})} < \epsilon$. Soit $R > 0$ tq. l'on ait $\text{supp}(\phi) \subset [-R, R]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_\mathbf{R} |f(x-z) - f(x)|dx \leq & \int_\mathbf{R} |f(x-z) - \phi(x-z)|dx \\ & + \int_\mathbf{R} |\phi(x-z) - \phi(x)|dx \\ & + \int_\mathbf{R} |\phi(x) - f(x)|dx = I + J + K \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables $x \mapsto x + z$: on trouve que $I = K < \epsilon$ par choix de ϕ, de sorte que

$$\int_\mathbf{R} |f(x-z) - f(x)|dx < 2\epsilon + \int_\mathbf{R} |\phi(x-z) - \phi(x)|dx$$

Enfin

$$\begin{cases} |\phi(x - z_n) - \phi(x)| \to 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \\ |\phi(x - z_n) - \phi(x)| \leq 2 \sup_{y\in\mathbf{R}} |\phi(y)| \mathbf{1}_{[-R-1,R+1]}(x) \end{cases}$$

pour toute suite $z_n \to 0$, et pour n assez grand de sorte que $|z_n| < 1$. Donc par convergence dominée

$$\int_\mathbf{R} |\phi(x-z) - \phi(x)|dx \to 0 \text{ lorsque } z \to 0$$

CONCLUSION : il existe donc $\delta > 0$ tq.

$$|z| < \delta \Rightarrow \int_\mathbf{R} |f(x-z) - f(x)|dx < 3\epsilon$$

Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, on conclut que

$$\int_\mathbf{R} |f(x-z) - f(x)|dx \to 0 \text{ lorsque } z \to 0$$

Corollaire

Dém. du b) : pour simplifier, supposons la dimension $N = 1$
On a donc, pour tout $\xi \neq 0$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx = -\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})} f(x)dx$$
$$= -\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi y} f(y - \tfrac{\pi}{\xi})dy = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x}(f(x) - f(x - \tfrac{\pi}{\xi}))dx$$

où la troisième égalité découle du changement de variables $y = x + \frac{\pi}{\xi}$. On a donc

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \tfrac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} |f(x) - f(x - \tfrac{\pi}{\xi})|dx \to 0$$

lorsque $|\xi| \to +\infty$ grâce au corollaire du théorème de densité de $C_c(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ dans $L^1(\mathbf{R}; \mathbf{C})$.

Théorème

Dém : 1) traitons le cas de la dimension $N = 1$
Pour tout $a > 0$, la fonction

$$G_a : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a}$$

appartient à $C^\infty(\mathbf{R})$ et vérifie

$$G'(x) + \tfrac{1}{a} x G(x) = 0\,, \quad x \in \mathbf{R}$$

Les fonctions G_a, $x \mapsto xG_a(x)$ et $G_a' \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$; la transformée de Fourier $\widehat{G_a} \in C^1(\mathbf{R})$ et

$$\widehat{G_a'}(\xi) = i\xi\widehat{G_a}(\xi)\,, \quad \left(\widehat{G_a}\right)'(\xi) = -\widehat{ixG_a}(\xi)$$

de sorte que

$$\xi\widehat{G_a}(\xi) + \tfrac{1}{a}\left(\widehat{G_a}\right)'(\xi) = 0$$

Cette égalité est une équation différentielle satisfaite par $\widehat{G_a}$, dont la solution générale est de la forme

$$\widehat{G_a}(\xi) = Ce^{-a\xi^2/2}$$

où C est une constante à déterminer. Or

$$C = \widehat{G_a}(0) = \int_{\mathbf{R}} G_a(x)dx = 1$$

2) En dimension N quelconque,

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} \tfrac{1}{(2\pi a)^{N/2}} e^{-|x|^2/2a} dx = \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^{N} e^{-i\xi_k x_k} G_a(x_k)dx$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \widehat{G_a}(\xi_k) = e^{-a|\xi|^2/2}$$

Calcul

Démonstration complète : Faisons $N = 1$ pour simplifier
1) Partons de l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}} f(y) G_{\epsilon^2}(x-y)dy = \int_{\mathbf{R}} f(y)\left(\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi(x-y)-\frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2} \frac{d\xi}{2\pi}\right) dy$$
$$= \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x - \frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi y} f(y)dy\right)\frac{d\xi}{2\pi} = \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x - \frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}$$

L'interversion des intégrales en y et ξ est justifiée car

$$(y, \xi) \mapsto f(y)e^{i\xi(x-y)-\frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2} \in L^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

puisque

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \left|f(y)e^{i\xi(x-y)-\frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\right| dyd\xi = \int_{\mathbf{R}} |f(y)|dy \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2} d\xi < +\infty$$

2) Passons à la limite en $\epsilon \to 0^+$ dans le membre de droite :

$$\begin{cases} e^{i\xi x - \frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\hat{f}(\xi) \to e^{i\xi x}\hat{f}(\xi) \text{ p.p. en } \xi \in \mathbf{R} \\ \left| e^{i\xi x - \frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\hat{f}(\xi) \right| \leq |\hat{f}(\xi)| \text{ p.p. en } \xi \in \mathbf{R} \text{ pour tout } \epsilon > 0 \end{cases}$$

Par convergence dominée (puisque $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}; \mathbf{C})$)

$$\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x - \frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\hat{f}(\xi)\tfrac{d\xi}{2\pi} \to \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\tfrac{d\xi}{2\pi}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ lorsque $\epsilon \to 0$.

3) Etudions le membre de gauche

$$\int_{\mathbf{R}} f(y)G_{\epsilon^2}(x-y)dy = \int_{\mathbf{R}} f(x-\epsilon z)e^{-z^2/2}\tfrac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

par le changement de variables $y = x - \epsilon z$.
Comme $\int_{\mathbf{R}} e^{-z^2/2}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 1$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(y)G_{\epsilon^2}(x-y)dy - f(x) \right| dx \\ &\quad = \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} (f(x-\epsilon z) - f(x))e^{-z^2/2}\tfrac{dz}{\sqrt{2\pi}} \right| dx \\ &\quad \leq \int_{\mathbf{R}} e^{-z^2/2} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-\epsilon z) - f(x)|dx \right) \tfrac{dz}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

D'après le corollaire du thm. de densité de $C_c(\mathbf{R})$ dans $L^1(\mathbf{R})$

$$\begin{cases} \int_{\mathbf{R}} |f(x-\epsilon z) - f(x)|dx \to 0 \text{ pour tout } z \in \mathbf{R} \text{ quand } \epsilon \to 0 \\ e^{-z^2/2}\int_{\mathbf{R}} |f(x-\epsilon z) - f(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}e^{-z^2/2} \end{cases}$$

de sorte que, par convergence dominée

$$\int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(y)G_{\epsilon^2}(x-y)dy - f(x) \right| dx \to 0$$

quand $\epsilon \to 0$.

4) CONCLUSION : pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\epsilon > 0$:

$$\int_{\mathbf{R}} f(y)G_{\epsilon^2}(x-y)dy = \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x - \frac{1}{2}\epsilon^2\xi^2}\hat{f}(\xi)\tfrac{d\xi}{2\pi}$$

D'après l'étape 2, pour tout x et pour $\epsilon \to 0$,

$$\text{membre de droite } \to \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\tfrac{d\xi}{2\pi}$$

D'après l'étape 3

$$\text{membre de gauche } \to f$$

dans $L^1(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ quand $\epsilon \to 0$, et donc p.p. sur $\mathbf{R}$ quitte à extraire une sous-suite $\epsilon_k \to 0$. Donc

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\tfrac{d\xi}{2\pi} \text{ p.p. en } x \in \mathbf{R}.$$

Remarques