AMPHI 3 : INTEGRATION (suite)

Chapitres 4 & 5

INEGALITES INTEGRALES

Inégalité de Jensen :

Soient $f, g : \Omega \to \mathbf{R}$ mesurables et $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ CONVEXE, où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^N$. Supposons que

$$g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega\,, \quad \int_\Omega g(x)dx = 1\,,\ fg \text{ et } \Phi(f)g \in \mathcal{L}^1(\Omega)\,.$$

Alors

$$\Phi\left(\int_\Omega f(x)g(x)dx\right) \leq \int_\Omega \Phi(f(x))g(x)dx$$

Démonstration

Idée : analogie avec le cas **discret**

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \to \sum_{k=1}^n f_k g_k\,, \quad g_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n g_k = 1$$

Inégalité de Hölder :

Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, $f, g : \Omega \to \mathbf{R}$ mesurables, et soient

$$p, p' > 1 \quad \text{t.q. } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Alors

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}$$

Cas particulier : $p = p' = 2 \Rightarrow$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Utilisation : montrer que fg **est sommable** sachant que $|f|^p$ et $|g|^{p'}$ le sont.

Inégalité de Minkowski :

Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, $f, g : \Omega \to \mathbf{R}$ mesurables, et un réel $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Utilisation : permet de mettre une **géométrie** sur certains **espaces de fonctions** (inégalité triangulaire.)

INTEGRALE DE LEBESGUE ET FORMULES DU CALCUL INTEGRAL

On a construit l'intégrale de Lebesgue à partir de l'intégrale usuelle des fonctions continues par morceaux par un procédé de "prolongement par continuité de l'intégrale" fondé sur la convergence monotone.

Ce procédé permet d'étendre à l'intégrale de Lebesgue la plupart des formules bien connues sur l'intégrale usuelle, comme **par exemple**

a) l'interversion de l'ordre des intégrations dans les intégrales multiples

b) la formule du changement de variables dans les intégrales multiples

LE THEOREME DE FUBINI

Rappel : interversion de l'ordre d'intégration dans les intégrales multiples

Soient $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$ ouverts, et $f \in C_c(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On sait que

$$\Omega_1 \ni x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)dx_2 \text{ appartient à } C_c(\Omega_1)\,,$$

et que

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2\,,\end{aligned}$$

(en échangeant les rôles des variables x_1 et x_2.)

BUT : étendre ce résultat au cas où $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbf{C})$

Lemme : (Fibres des ensembles négligeables)

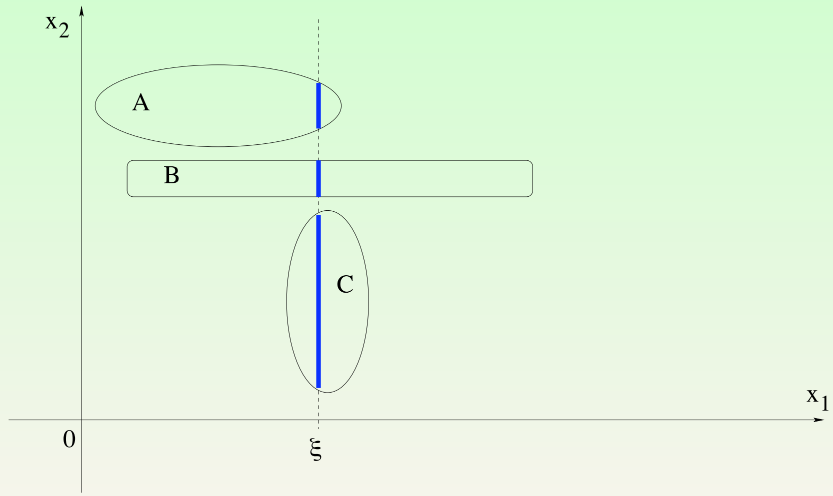
Soit $\mathcal{N} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ négligeable. Pour $x_1 \in \Omega_1$ on note

$$\mathcal{N}_{x_1} := \{x_2 \in \Omega_2 \,|\, (x_1, x_2) \in \mathcal{N}\} \subset \Omega_2$$

la fibre de $\mathcal{N}$ au-dessus de x_1. ▸ Figure Alors, p.p. en $x_1 \in \Omega_1$,

$$\mathcal{N}_{x_1} \text{ est négligeable dans } \Omega_2\,.$$

ATTENTION : ceci n'est vrai que PRESQUE PARTOUT en x_1, mais en général pas PARTOUT en $x_1 \in \Omega_1$ (exo : trouver un contre-exemple !)



La fibre de $A \cup B \cup C$ au-dessus de ξ (en trait bleu)

▸ Lemme

Théorème de Fubini :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbf{C})$. Alors
a) p.p. en $x_1 \in \Omega_1$, la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega_2; \mathbf{C})$;
b) la fonction $x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2$ définie p.p. sur Ω_1 appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega_1; \mathbf{C})$;
c) enfin, on a l'égalité

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$
$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 ,$$

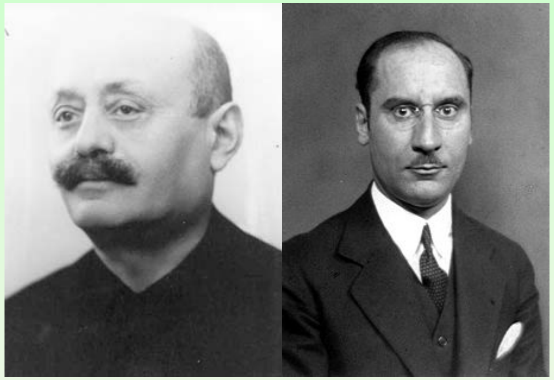
(en échangeant les rôles des variables x_1 et x_2.)

Cas des fonctions mesurables positives

Théorème de Tonelli :

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors
a) p.p. en $x_1 \in \Omega_1$, la fonction $\Omega_2 \ni x_2 \mapsto f(x_1, x_2) \in [0, +\infty]$ est mesurable ;
b) la fonction $x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \in [0, +\infty]$ définie p.p. sur Ω_1 est mesurable ;
c) enfin, on a l'égalité dans $[0, +\infty]$

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$
$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 .$$



Guido Fubini (1879-1943) et Leonidà Tonelli (1885-1946)

FAQ4 : comment vérifier que $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbf{C})$?

Etant donnée une fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{C}$ mesurable, il peut arriver que l'on sache calculer "facilement"

$$I = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)| dx_2 \right) dx_1$$

ou

$$J = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)| dx_1 \right) dx_2 .$$

D'après le théorème de Tonelli appliqué à $|f|$,

$$I \text{ ou } J < +\infty \Rightarrow \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 = I = J < \infty$$
$$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbf{C}) .$$

De même I ou $J = +\infty \Rightarrow f \notin \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2; \mathbf{C})$.

CHANGEMENT DE VARIABLES

Rappel :
Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbf{R}^N$, et un C^1-difféomorphisme $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ — c.a.d. que Φ est une bijection de classe C^1 sur Ω_1 dont l'inverse Φ^{-1} est de classe C^1 sur Ω_2 ;

$\Leftrightarrow \Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijection C^1 et $\det J\Phi(x) \neq 0$ pour $x \in \Omega_1$.

Notation : $J\Phi(x)$ est la matrice jacobienne de Φ en $x \in \Omega_1$.

RAPPEL : si $f \in C_c(\Omega_2)$, alors $f \circ \Phi \in C_c(\Omega_1)$ et

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))|\det J\Phi(x)|dx\,.$$

Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbf{R}^N$, et un C^1-difféomorphisme $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$

Lemme :
Si $\mathcal{N} \subset \Omega_2$ est négligeable, alors $\Phi^{-1}(\mathcal{N}) \subset \Omega_1$ est négligeable.

Théorème du changement de variables :
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_2)$. Alors la fonction $f \circ \Phi|\det J\Phi| \in \mathcal{L}^1(\Omega_1)$ et on a la formule

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))|\det J\Phi(x)|dx$$

Exemple 1 : changements de variables affines
Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^N$; on pose $\Phi(x) = Ax + b$. Alors on a $J\Phi(x) = A$ pour $x \in \mathbf{R}^N$, et $|\det J\Phi(x)| = |\det(A)| \neq 0$ car $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Donc, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$, la fonction $x \mapsto f(Ax+b)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$ et on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(Ax+b)dx = \frac{1}{|\det(A)|}\int_{\mathbf{R}^N} f(y)dy\,.$$

Cas des isométries affines : si $AA^T = A^TA = I$, alors Φ est une isométrie affine et

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(Ax+b)dx = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)dy\,.$$

Cas des homothéties : si $A = \lambda I$ avec $\lambda \neq 1$, alors Φ est une homothétie et

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(\lambda x+b)dx = \frac{1}{|\lambda|^N}\int_{\mathbf{R}^N} f(y)dy\,.$$

Exemple 2 : coordonnées sphériques
Soit

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbf{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\times]-0,\pi[&\longrightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \mathcal{P}\\ (r,\phi,\theta) &\mapsto (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\end{aligned}$$

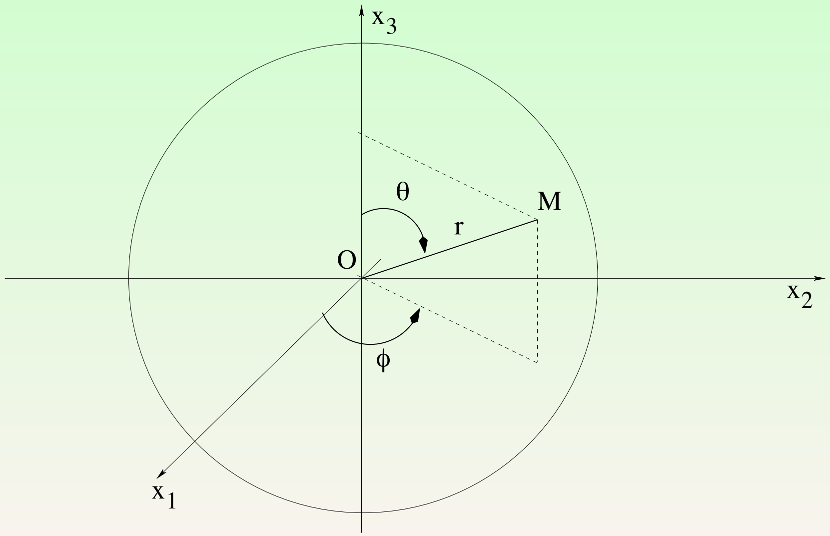
où $\mathcal{P} := \{x \in \mathbf{R}^3 \,|\, x_1 \leq 0\,,\ x_2 = 0\}$ (demi-plan affine, fermé dans $\mathbf{R}^3$.)

On a $|\det J\Phi(r,\phi,\theta)| = r^2\sin\theta$. Donc, pour $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^3 \setminus \mathcal{P})$

$$\int_{\mathbf{R}^3\setminus\mathcal{P}} g(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} g(\Phi(r,\phi,\theta))r^2\sin\theta\, dr d\phi d\theta.$$

En fait, comme $\mathcal{P}$ est négligeable dans $\mathbf{R}^3$, on peut prolonger g n'importe comment sur $\mathcal{P}$ sans en changer l'intégrale. Donc, pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^3)$

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi(r,\phi,\theta))r^2\sin\theta\, dr d\phi d\theta.$$



Les coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) du point $M \in \mathbf{R}^3$

Vers la notion de mesure

A ce stade, on dispose de la notion d'intégrale de Lebesgue qui

a) fournit les énoncés les plus simples d'interversion limite-intégrale pour les suites de fonctions intégrables (convergence dominée/monotone)

b) vérifie les formules usuelles du calcul intégral (changement de variables, interversion de l'ordre d'intégration dans les intégrales multiples)

Or la notion usuelle d'intégrale s'interprète géométriquement en disant que, pour toute fonction $f \in C([a, b])$ t.q. $f \geq 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{ aire de } \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}$$

Problème :

Est-ce que cette notion d'intégrale due à Lebesgue permet de définir et de calculer les surfaces ou les volumes de sous–ensembles de l'espace euclidien $\mathbf{R}^N$?

Quels sont les ensembles dont on peut ainsi définir la surface ou le volume ?

Un paradoxe

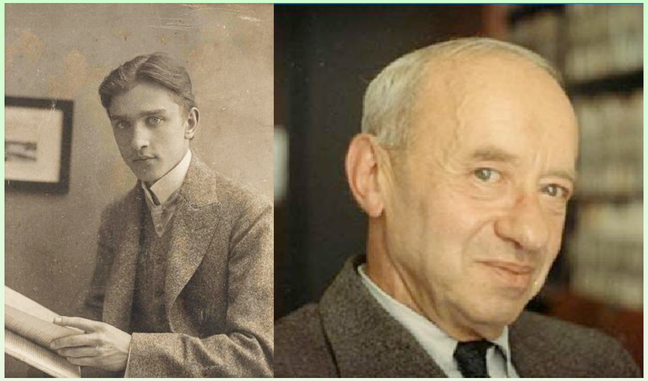
ATTENTION : certains sous-ensembles de $\mathbf{R}^N$ sont trop compliqués pour qu'on puisse définir leur volume.
Paradoxe (Banach-Tarski, 1924) : Soient A et B boules ouvertes non vides de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 3$. Il existe alors $n \in \mathbf{N}^*$, et 2 partitions FINIES

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n\,, \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ si } i \neq j\,,$$
$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_n\,, \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \text{ si } i \neq j\,,$$

et des isométries affines T_i t.q. $T(A_i) = B_i$, pour $1 \leq i \leq n$.

(Ainsi, on peut découper une orange en un nombre FINI de morceaux puis réassembler ces morceaux après déplacement pour fabriquer une boule de même rayon que la Terre...)

Utilise l'AXIOME DU CHOIX $\Rightarrow$ impossible de dessiner ces morceaux...



Stefan Banach (1892-1945) et Alfred Tarski (1902-1983)

ENSEMBLES MESURABLES

Notation Fonction indicatrice de A : $\mathbf{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$

Définition :

Un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}^N$ est mesurable ssi $\mathbf{1}_A$ est une fonction mesurable

Propriétés de base :

a) $\varnothing$ et $\mathbf{R}^N$ sont mesurables

b) $A, B \subset \mathbf{R}^N$ mesurables $\Rightarrow A \setminus B$ mesurable

c) si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une famille DENOMBRABLE de parties mesurables de $\mathbf{R}^N$, alors leur réunion et leur intersection

$$\bigcup_{n\geq 0} A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\geq 0} A_n \text{ sont mesurables.}$$

Les ensembles mesurables forment une tribu de parties de $\mathbf{R}^N$

Exemples d'ensembles mesurables :

a) tout intervalle de $\mathbf{R}$ est une partie mesurable de $\mathbf{R}$;

b) tout pavé de $\mathbf{R}^N$ est une partie mesurable de $\mathbf{R}^N$;

c) tout ouvert de $\mathbf{R}^N$, tout fermé de $\mathbf{R}^N$ est une partie mesurable de $\mathbf{R}^N$;

d) toute partie négligeable de $\mathbf{R}^N$ est mesurable dans $\mathbf{R}^N$.

REMARQUE : on ne peut pas CONSTRUIRE de partie non mesurable de $\mathbf{R}^N$ par un algorithme=SUITE dénombrable d'opérations élémentaires (réunion, intersection, passage au complémentaire...) à partir de sous-ensembles élémentaires (pavés, par ex.).

Mais il EXISTE des parties non mesurables de $\mathbf{R}^N$ (par exemple les ensembles A_i et B_i des partitions du paradoxe de Banach-Tarski) $\Leftarrow$ AXIOME DU CHOIX

MESURE DE LEBESGUE

Définition :

Pour $A \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, la mesure de Lebesgue de A est

$$|A| := \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_A(x)dx$$

Propriétés de base :

a) la mesure de Lebesgue d'un pavé de $\mathbf{R}^N$ est son volume :

$$|(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)| = \prod_{k=1}^{N} (b_k - a_k)_+$$

b) (A_n) suite DENOMBRABLE de parties mesurables de $\mathbf{R}^N$

$$A_k \cap A_l = \varnothing \ \forall k, l \quad \Rightarrow \left|\bigcup_n A_n\right| = \sum_n |A_n|$$

c) $A \subset B \subset \mathbf{R}^N$ mesurables $\Rightarrow |A| \leq |B|$

d) (B_n) suite DENOMBRABLE de parties mesurables de $\mathbf{R}^N$

$$\left|\bigcup_n B_n\right| \leq \sum_n |B_n|$$

Proposition (Caractérisation des parties négligeables)

Soit $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N$. Alors $\mathcal{N}$ est Lebesgue-négligeable ssi $\mathcal{N}$ mesurable et $|\mathcal{N}| = 0$

NB : additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue $\Rightarrow [0,1]$ non dénombrable. Sinon, on aurait

$$1 = |[0,1]| = \sum_{x\in[0,1]} |\{x\}| = 0$$

Exemple : mesure de Lebesgue des ouverts de R

Rappel : structure des ouverts de R. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}$ est réunion d'une suite dénombrable d'intervalles ouverts non vides $]a_n, b_n[$ 2 à 2 disjoints — les composantes connexes des rationnels de Ω.

Calcul de la mesure de Lebesgue d'un ouvert de R : on écrit la décomposition ci-dessus de Ω

$$\Omega = \bigcup_n]a_n, b_n[\quad \text{et} \quad]a_m, b_m[\cap]a_n, b_n[= \varnothing \text{ si } m \neq n\,,$$

et par additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue

$$|\Omega| = \sum_n (b_n - a_n)\,.$$

Intégration sur un ensemble mesurable

Pour $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$, le prolongement de f

$F : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} F(x)dx$$

Définition (et généralisation) :

Soient $A \subset \mathbf{R}^N$ mesurable et f fonction à valeurs complexes définie p.p. sur A, on dira que $f \in \mathcal{L}^1(A;\mathbf{C})$ si son prolongement

$F : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et

$$\int_A f(x)dx := \int_{\mathbf{R}^N} F(x)dx$$

Fonction de répartition complémentaire

Proposition (Fonctions/ensembles mesurables)

Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$; alors

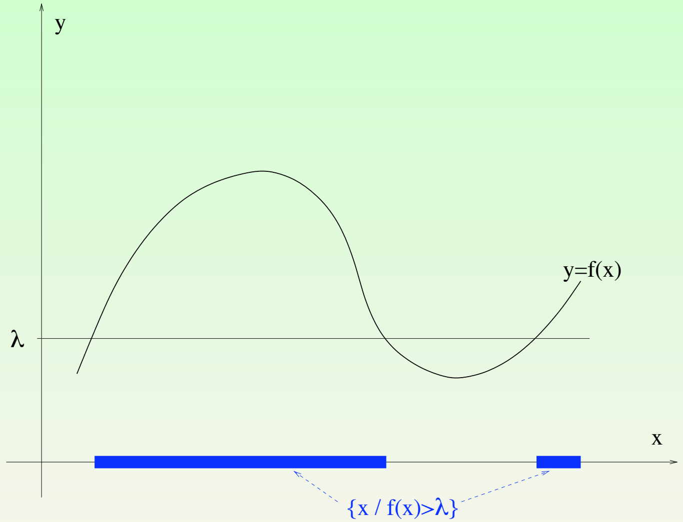
$$\begin{aligned} f \text{ mesurable } &\Leftrightarrow f^{-1}(]\lambda, +\infty[) \text{ mesurable pour tout } \lambda \in \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}([\lambda, +\infty[) \text{ mesurable pour tout } \lambda \in \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(I) \text{ mesurable pour tout intervalle } I \subset \mathbf{R} \end{aligned}$$

Définition :

Soit $f : \Omega \to [0, +\infty]$ mesurable. La fonction de répartition complémentaire de f est $\rho_f : \mathbf{R}_+ \to [0, +\infty]$ définie par

$$\rho_f(\lambda) := |f^{-1}(]\lambda, +\infty[)| = |\{x \in \Omega \,|\, f(x) > \lambda\}|$$

Par construction ρ_f est décroissante au sens large sur $\mathbf{R}_+$



Fonction de répartition complémentaire

PRINCIPE DE CAVALIERI

Théorème :

Soient $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, et ρ_f sa fonction de répartition complémentaire. Alors, pour tout $\Phi : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ croissante de classe C^1 et t.q. $\Phi(0) = 0$

$$\int_\Omega \Phi(f(x))dx = \int_{\mathbf{R}_+} \Phi'(\lambda)\rho_f(\lambda)d\lambda$$

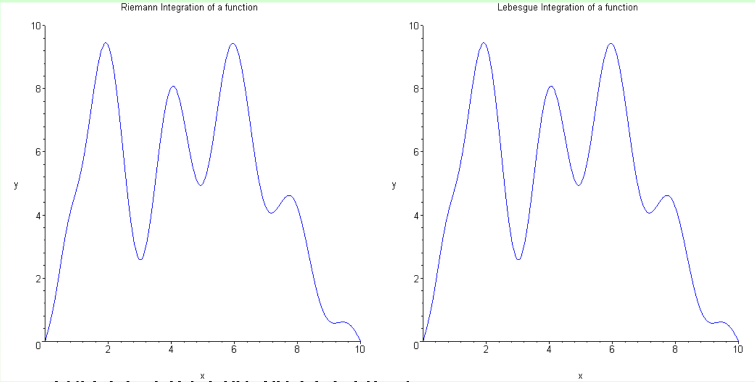
En particulier, pour $\Phi(\lambda) = \lambda$

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\mathbf{R}_+} \rho_f(\lambda)d\lambda$$

NB : ρ_f étant monotone $\searrow$ sur $\mathbf{R}_+$, le **membre de droite** est une **intégrale de Riemann.**

Démonstration

Interprétation géométrique :



rmule de

NSEM-

tre que

ITER-

VALLE OÙ ON INTÈGRE f.

L'intégrale usuelle de Riemann (à gauche) et l'intégrale de Lebesgue (à droite)

GENERALISATIONS

1. Mesures de Radon
Au lieu de l'intégrale usuelle sur $C_c(\Omega)$, on part d'une **forme linéaire** $\mu : C_c(\Omega) \to \mathbf{R}$ **positive** — c.a.d. t.q.

$$f \geq 0 \Rightarrow \langle \mu, f \rangle \geq 0$$

Le procédé de **prolongement par monotonie** qui nous a permis de construire l'intégrale de Lebesgue s'applique de même et aboutit à l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega; \mu)$ des fonctions μ-sommables, et à la forme linéaire prolongée

$$\mathcal{L}^1(\Omega; \mu) \ni f \mapsto \langle \mu, f \rangle =: \int_\Omega f(x) d\mu(x) \in \mathbf{R}$$

qui vérifie le théorème de convergence dominée/monotone

Exemples
1) masse de Dirac : à $x_0 \in \Omega$, on associe la forme linéaire δ_{x_0} sur $C_c(\Omega)$ définie par

$$\langle \delta_{x_0}, f \rangle = f(x_0)$$

2) mesure de comptage : à tout $A \subset \Omega$ discret, dénombrable, on associe la forme linéaire sur $C_c(\Omega)$ définie par

$$N_A = \sum_{a \in A} \delta_a \quad \text{c.a.d. } \langle N_A, f \rangle = \sum_{a \in A} f(a) =: \int_\Omega f(x) dN_A(x)$$

Théorie des séries numériques $\Leftrightarrow$ théorie de l'intégration pour la mesure de comptage associée à $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$

2. Mesure/Intégration "abstraite"
Au lieu de partir d'une forme linéaire positive μ sur $C_c(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^N$, donnons-nous maintenant un ensemble Ω **quelconque** — pas forcément un ouvert de $\mathbf{R}^N$, pas forcément muni d'une topologie.

On se donne également une tribu $\mathcal{F}$ de parties de Ω — c.a.d. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ contenant $\varnothing$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

Une mesure $m \geq 0$ sur Ω est une application $m : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ dénombrablement additive, c.a.d. vérifiant la propriété suivante

pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de $\mathcal{F}$

$$(A_k \cap A_l = \varnothing \text{ pour tous } k \neq l) \Rightarrow m\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k m(A_k)$$

Une fonction $f : \Omega \to [0, +\infty]$ sera dite $\mathcal{F}$-mesurable ssi, pour tout intervalle $I \subset [0, +\infty]$, l'image réciproque $f^{-1}(I) \in \mathcal{F}$.

A partir de là, on **définit** l'intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure m par la formule de Cavalieri :

$$\int_\Omega f(x) dm(x) := \int_{\mathbf{R}_+} m(\{x \in \Omega \,|\, f(x) > \lambda\}) d\lambda$$

Le membre de droite est l'**intégrale d'une fonction décroissante** au sens large sur $\mathbf{R}_+$.

Or, l'**ensemble des points de discontinuité** d'une fonction monotone de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est **dénombrable** (exercice.)

Une telle fonction est donc intégrable au sens de Riemann : cf. polycopié, chap. 3, exo. 9

Dém : Supposons pour simplifier que $\Omega =]0,1[$, que $g = 1$ et que $f \in C_c(]0,1[)$. Comme Φ est convexe

$$\Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Passons à la limite pour $n \to +\infty$: comme $f \in C_c(]0,1[)$ (rappel : toute fonction convexe sur $\mathbf{R}$ est continue)

$$\Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \to \Phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \to \int_0^1 \Phi(f(x))dx$$

lorsque $n \to +\infty$, d'où

$$\Phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 \Phi(f(x))dx\,.$$

ATTENTION ce schéma de preuve ne peut pas s'adapter dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue (on a vu que l'intégrale de Lebesgue n'est pas limite de sommes de Riemann — penser à la fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}$)

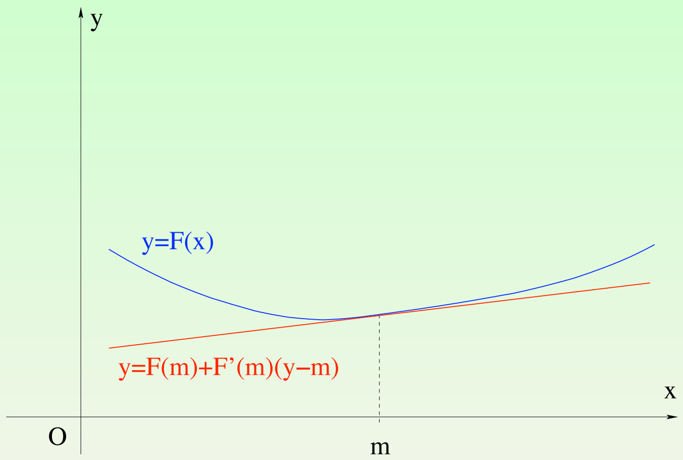
Hypothèse simplificatrice : $\Phi \in C^2(\mathbf{R})$

Alors, pour tout $y, m \in \mathbf{R}$, on a, d'après la formule de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= \Phi(m) + \Phi'(m)(y-m) + \int_m^y (y-t)\Phi''(t)dt \\ &\geq \Phi(m) + \Phi'(m)(y-m)\end{aligned}$$

Signification géométrique :

le graphe d'une fonction convexe de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ reste au-dessus de sa tangente en tout point.



Le graphe de la fonction convexe F reste au dessus de sa tangente au point d'abscisse m

Appliquer cela avec $y = f(x)$ et $m = \int_\Omega f(x)g(x)dx$:

$$\Phi(f(x)) - \Phi(m) - \Phi'(m)(f(x) - m) \geq 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

Comme $g \geq 0$ p.p. sur Ω, on a

$$\Phi(f(x))g(x) - \Phi(m)g(x) - \Phi'(m)(f(x)g(x) - mg(x)) \geq 0$$

p.p. en $x \in \Omega$, et donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(f(x))g(x)dx &\geq \Phi(m)\int_\Omega g(x)dx \\ &\quad + \Phi'(m)\left(\int_\Omega f(x)g(x)dx - m\int_\Omega g(x)dx\right) \\ &= \Phi(m) \quad \text{puisque } \int_\Omega g(x)dx = 1\end{aligned}$$

Inégalité de Jensen

Dém : L'idée clé consiste à écrire

$$\Phi(f(x)) = \int_0^{f(x)} \Phi'(\lambda)d\lambda \text{ p.p. en } x \in \Omega\,.$$

Comme f est mesurable et Φ de classe C^1 croissante sur $\mathbf{R}_+$, la fonction

$$\Omega \times \mathbf{R}_+ \ni (x,\lambda) \mapsto \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(\lambda)\Phi'(\lambda) \in \mathbf{R}_+$$

est mesurable. D'après le thm. de Tonelli (Fubini pour les fonctions mesurables positives)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(f(x))dx &= \int_\Omega \left(\int_0^{f(x)} \Phi'(\lambda)d\lambda\right) dx\\ &= \int_\Omega \left(\int_{\mathbf{R}_+} \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(\lambda)\Phi'(\lambda)d\lambda\right) dx\\ &= \iint_{\Omega\times\mathbf{R}_+} \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(\lambda)\Phi'(\lambda)dxd\lambda\end{aligned}$$

Puis, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathbf{1}_{[0,f(x)[}(\lambda) = \mathbf{1}_{]\lambda,+\infty[}(f(x)) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbf{R}_+ \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

de sorte que, toujours d'après le théorème de Tonelli

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(f(x))dx &= \iint_{\Omega\times\mathbf{R}_+} \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(\lambda)\Phi'(\lambda)dxd\lambda\\ &= \iint_{\Omega\times\mathbf{R}_+} \mathbf{1}_{]\lambda,+\infty[}(f(x))\Phi'(\lambda)dxd\lambda\\ &= \int_{\mathbf{R}_+} \Phi'(\lambda)\left(\int_\Omega \mathbf{1}_{]\lambda,+\infty[}(f(x))d\lambda\right) d\lambda\\ &= \int_{\mathbf{R}_+} \Phi'(\lambda)|\{x \in \Omega \text{ tq. } f(x) > \lambda\}|d\lambda\\ &= \int_{\mathbf{R}_+} \Phi'(\lambda)\rho_f(\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

▸ Théorème