$\boxed{\textbf{AMPHI 2 : INTEGRATION}}$

Chapitre 3

Documents disponibles sur
http ://www.math.polytechnique.fr/∼golse

L'intégrale de Lebesgue (1902)

•A la base de l'analyse fonctionnelle, socle mathématique de la mécanique quantique (J. von Neumann, 1932)
•Théorie axiomatique des probabilités (A. Kolmogorov, 1933)

•On va utiliser de façon cruciale dans cet amphi la notion de **dénombrabilité** et le **Lemme de Dini**

MOTIVATIONS

A) Définir l'intégrale pour des fonctions plus générales que les fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbf{R}$

B) Disposer de théorèmes d'interversion intégrale/limite pour des suites de fonctions, où il ne soit plus nécessaire de vérifier que la fonction limite est continue par morceaux

Thm. de convergence dominée vu en classe prépa

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ fonctions intégrables sur I intervalle de $\mathbf{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ simplement} \\ f \text{ continue/morceaux sur } I \\ |f_n| \leq F \text{ intégrable sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$$

•Pour le point B), on aimerait un énoncé du type suivant :
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions positives "intégrables" sur $\Omega \subset \mathbf{R}^N$; alors

$$\Omega \ni x \mapsto u(x) := \sum_{n\geq 1} u_n(x)$$

est une fonction positive "intégrable" sur Ω et

$$\int_\Omega u(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_\Omega u_n(x)dx$$

•**Enoncé analogue** pour les **suites croissantes** de fonctions, en posant

$$U_n(x) = U_0(x) + \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,, \quad U_0 \text{ donnée.}$$

•**Remarque fondamentale :** les points A) et B) sont intimement reliés

Plus de fonctions intégrables $\Leftrightarrow$ Meilleurs théorèmes limites

Exemple : Soit $\mathbf{N} \ni n \mapsto r_n \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$ bijection numérotant les rationnels de $[0,1]$ — puisque $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ est dénombrable

•Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_n\,, \\ 0 & \text{si } x \neq r_n\,. \end{cases}$

La fonction u_n est positive et continue par morceaux sur $[0,1]$, mais

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]\,, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \cap [0,1]\,, \end{cases}$$

et $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ est discontinue en tout point de $[0,1]$. L'énoncé suggère que

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 u_n(x)dx = 0$$

DIFFICULTE :

•Si on essaie de **définir** a priori l'intégrale

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}(x)dx$$

comme limite de la somme de Riemann pour la subdivision de $[0,1]$ à pas constant $(0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1)$, on trouve

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}\left(\frac{k}{N}\right) = 1$$

CONTRADICTION avec le résultat fourni par l'énoncé B) d'intégration terme à terme des séries de fonctions à termes positifs

Rappels sur l'intégration des fonctions continues

Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $C_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω à valeurs réelles et à support compact dans Ω — c.a.d. nulles en dehors d'un compact inclus dans Ω.

Intégrale usuelle = forme **R-linéaire**

$$C_c(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f(x)dx \in \mathbf{R}$$

qui est **positive** — c.a.d. que

$$(P) \qquad f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \Omega \Rightarrow \int_\Omega f(x)dx \geq 0$$

Interversion limite/intégrale ($\Leftarrow$ Dini + positivité) :

$$\begin{cases} C_c(\Omega) \ni f_0 \geq f_1 \geq \ldots \geq f_n \downarrow 0 \text{ simplement sur } \Omega \\ \\ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx \to \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0 \end{cases}$$

Stratégie

Prolonger l'intégrale usuelle en une forme **R**-linéaire positive (intégrale de Lebesgue) sur le **R**-espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega)$ des fonctions sommables

$$C_c(\Omega) \subsetneqq \mathcal{L}^1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f(x)dx \in \mathbf{R}$$

qui vérifie le **thm. d'interversion limite/intégrale** suivant :

$$0 \leq u_n \in \mathcal{L}^1(\Omega) \text{ et } \sum_{n\geq 0} \int_\Omega u_n(x)dx < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)$$
$$\text{et } \int_\Omega \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right) dx = \sum_{n\geq 0} \int_\Omega u_n(x)dx$$

N'utilise **que la positivité** de l'intégrale usuelle $\Rightarrow$ marche pour toute forme linéaire positive sur $C_c(\Omega)$ — cf. poly.

DEFINITION DE L'INTEGRALE DE LEBESGUE

Définition

Suite de Levi : suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $C_c(\Omega)$ t.q.

$$f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots \text{ sur } \Omega \quad \text{et} \quad \sup_{n\geq 0} \int_\Omega f_n(x)dx < +\infty$$

On va arriver à l'intégrale de Lebesgue définie sur l'espace $\mathcal{L}^1(\Omega)$ des fonctions sommables en **deux étapes** :

1) **imposer** l'interversion limite-intégrale pour les suites de Levi ;

2) **prolonger** cette première extension **par linéarité**

Etape 1 : classe $\mathcal{L}^+$

Définition

$$\mathcal{L}^+(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \,\Big|\, \text{il existe } (f_n)_{n\geq 0} \text{ suite de Levi t.q. } f_n \to f \text{ simplement sur } \Omega \Big\}$$

On prolonge l'intégrale à la classe $\mathcal{L}^+(\Omega)$ en posant

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$$

Ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ($\Leftarrow$ thm de Dini)

Démonstration

•Exemples :

1) $f_\alpha(x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)}{1+x^\alpha}$ définit $f_\alpha \in \mathcal{L}^+(\mathbf{R})$ ssi $\alpha > 1$.

2) $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]} \notin \mathcal{L}^+(\mathbf{R})$ — Cf. Prop. 3.1.6 p. 32

Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{L}^+$

1) évidemment $C_c(\Omega) \subset \mathcal{L}^+(\Omega)$...

2) soit $f \in C(I)$ (I intervalle OUVERT de $\mathbf{R}$) t.q. $f \geq 0$ sur I ;

$$\int_I f(x)dx < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^+(I)$$

2) $\alpha, \beta \geq 0$ et $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ et

$$\int_\Omega (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_\Omega f(x)dx + \beta \int_\Omega g(x)dx$$

3) pour $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ on a $\max(f,g)$, $\min(f,g) \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ et

$$f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \Rightarrow \int_\Omega f(x)dx \leq \int_\Omega g(x)dx$$

Attention : si $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ en général $-f \notin \mathcal{L}^+(\Omega)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^+(\Omega)$ **n'est pas** un espace vectoriel !

Ensembles Lebesgue-négligeables

•**Pbm : définir un R-espace vectoriel à partir de $\mathcal{L}^+$**

<u>Difficulté :</u> tout $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ peut **prendre la valeur** $+\infty$.

Toute expression de la forme $f - g$ avec $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ risque donc de contenir la "forme indéterminée" $+\infty - \infty$.

Idée clé : cette difficulté ne se produit que "TRES rarement"

Définition

Soit $\mathcal{N} \subset \Omega$. On dira que $\mathcal{N}$ est (Lebesgue-)négligeable ssi il existe $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ t.q. $f(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathcal{N}$.

Exemple

tout singleton de Ω est Lebesgue-négligeable

Dém : soit $F(x) := \sum_{n\geq 1} n(1-n^3|x|)_+;$ $\quad F(x)=+\infty \Leftrightarrow x=0$

évidemment

$$F \in \mathcal{L}^+(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_\Omega F(x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Proposition

toute réunion DENOMBRABLE de parties (Lebesgue)-négligeables de Ω est une partie (Lebesgue-)négligeable de Ω

NB : FAUX sans le mot DENOMBRABLE ! (exo : pourquoi ?)

Ex : toute partie dénombrable de $\mathbf{R}^N$ est Lebesgue-négligeable

Application : $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^N$ sont Lebesgue-négligeables dans $\mathbf{R}, \mathbf{R}^N$

Caractérisation géométrique des ensembles Lebesgue-négligeables

•**Cube** de $\mathbf{R}^N$: étant donnés $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^N$ et $r > 0$, on pose

$$C(\mathbf{a}, r) =]a_1 - r, a_1 + r[\times \ldots \times]a_N - r, a_N + r[$$

"Volume" d'un cube de $\mathbf{R}^N$:

$$|C(\mathbf{a}, r)| = (2r)^N$$

Théorème

$\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N$ est Lebesgue-négligeable ssi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite au plus dénombrable (C_n) de cubes de $\mathbf{R}^N$ t.q.

$$\mathcal{N} \subset \bigcup C_n\,, \qquad \text{et} \qquad \sum |C_n| \leq \epsilon\,.$$

Autres exemples de parties négligeables de $\mathbf{R}^N$

1) toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{N}' \subset \mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N \\ \mathcal{N} \text{ (Lebesgue-)négligeable} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{N}' \text{(Lebesgue-)négligeable}$$

2) un ouvert NON VIDE n'est JAMAIS (Lebesgue)-négligeable — car un cube ouvert non vide n'est jamais Lebesgue-négligeable (utiliser un argument de compacité pour recouvrir le cube par un nombre FINI de cubes), puis appliquer le 1)

3) une droite affine dans $\mathbf{R}^N$ (où $N > 1$), plus généralement un sous-espace affine de dimension $d < N$ dans $\mathbf{R}^N$ sont des parties (Lebesgue-)négligeables de $\mathbf{R}^N$

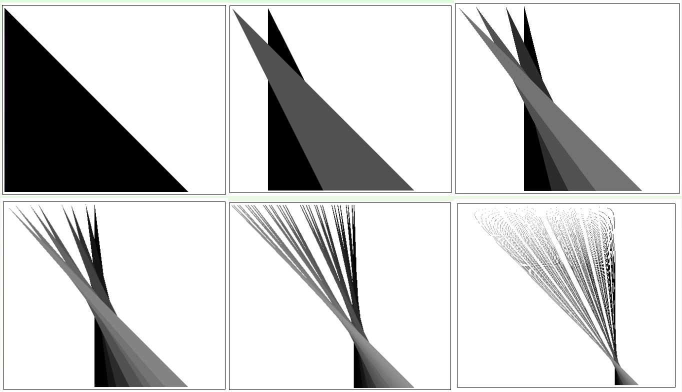
Parties Lebesgue-négligeables de $\mathbf{R}^N$: exemples "pathologiques"

•L'ensemble triadique de Cantor dans $\mathbf{R}$, le triangle de Sierpiński dans $\mathbf{R}^2$ sont des ensembles Lebesgue-négligeables

(A chaque étape, on enlève, dans chaque triangle équilatéral noir, le triangle blanc dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle noir)

NB : Le triangle de Sierpiński est un exemple de "fractal", c.a.d. d'ensemble de "dimension non entière" ($\ln 3/\ln 2$...)

•L'ensemble de Besicovich = sous-ensemble Lebesgue-négligeable du plan euclidien $\mathbf{R}^2$, mais contenant un segment de longueur 1 dans toute direction — appartenant à un secteur angulaire ouvert non vide, $]-\frac{\pi}{4}, 0[$ dans la figure ci-dessous



ATTENTION

•Une partie Lebesgue-négligeable de $\mathbf{R}^N$ PEUT ETRE DENSE dans $\mathbf{R}^N$

Ex : $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{Q}^N$) est dense ET Lebesgue-négligeable dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^N$) car dénombrable.

MAIS

Proposition

Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $\mathcal{N} \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue-négligeable. Alors $\Omega \setminus \mathcal{N}$ est dense dans Ω.

VOCABULAIRE : une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant de $x \in \Omega$ est vraie p.p. dans Ω ssi l'ensemble $\{x \in \Omega \,|\, \mathcal{P}(x) \text{ est fausse}\}$ est Lebesgue-négligeable dans $\mathbf{R}^N$

Exemple : $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}(x) = 0$ p.p. sur $\mathbf{R}$ car $\mathbf{Q}$ est Lebesgue-négligeable dans $\mathbf{R}$

Etape 2 : fonctions sommables

Définition

L'ensemble des fonctions sommables définies p.p. sur Ω est

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{x \mapsto g(x) - h(x) \,|\, (g,h) \in \mathcal{L}^+(\Omega)\}$$

On définit alors l'intégrale de Lebesgue de f par la formule

$$\int_\Omega f(x)dx := \int_\Omega g(x)dx - \int_\Omega h(x)dx$$

NB : définition indépendante de la décomposition $f = g - h$
(d'après le thm de Dini pour des suites $\searrow$ p.p.)

RMQ : par construction l'intégrale de Lebesgue COINCIDE avec l'intégrale usuelle sur $C_c(\Omega)$, ou sur $C_c^{morceaux}(\mathbf{R})$

Propriétés de base

1) $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et

$$\mathcal{L}^1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f(x)dx$$

une forme $\mathbf{R}$-linéaire

2) si $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et $f \geq g$ p.p. sur Ω, alors (Dini + p.p.)

$$\int_\Omega f(x)dx \geq \int_\Omega g(x)dx$$

3) en particulier, pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, on a $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et

$$\left| \int_\Omega f(x)dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)|dx$$

Intégration des fonctions à valeurs complexes

On dit que $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$ ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{R})$, et

$$\int_\Omega f(x)dx := \int_\Omega \mathrm{Re}(f)(x)dx + i\int_\Omega \mathrm{Im}(f)(x)dx$$

1') $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$ est un **C**-espace vectoriel et

$$\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C}) \ni f \mapsto \int_\Omega f(x)dx$$

une forme **C**-linéaire
3') pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$, on a $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{R})$ et

$$\left|\int_\Omega f(x)dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|dx$$

Intégrale de Lebesgue et ensembles négligeables

Avec la définition de Lebesgue de l'intégrale

$$\phi(x) = 0 \text{ p.p. sur } \Omega \Rightarrow \int_\Omega \phi(x)dx = 0$$

Exemple : comme $\mathbf{Q}$ est Lebesgue-négligeable dans $\mathbf{R}$, la définition de l'intégrale de Lebesgue montre que

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}(x)dx = 0$$

MODIFIER UNE FONCTION SOMMABLE SUR UN ENSEMBLE LEBESGUE-NÉGLIGEABLE NE CHANGE PAS SON INTÉGRALE

Réciproque : si $\phi \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$, alors

$$\int_\Omega |\phi(x)|dx = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

CONVERGENCE DOMINEE

Théorème (de convergence dominée)

Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$. Si

$$f_n \to f \text{ p.p. sur } \Omega$$

et qu'il existe $F \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{R})$ t.q. pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$|f_n(x)| \leq F(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega\,,$$

alors la fonction limite $f \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$ et on a

$$\int_\Omega f_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx$$

Avantage : inutile de connaître EXPLICITEMENT la limite f pour vérifier qu'elle est sommable

ATTENTION l'hypothèse de domination est **absolument** INDISPENSABLE

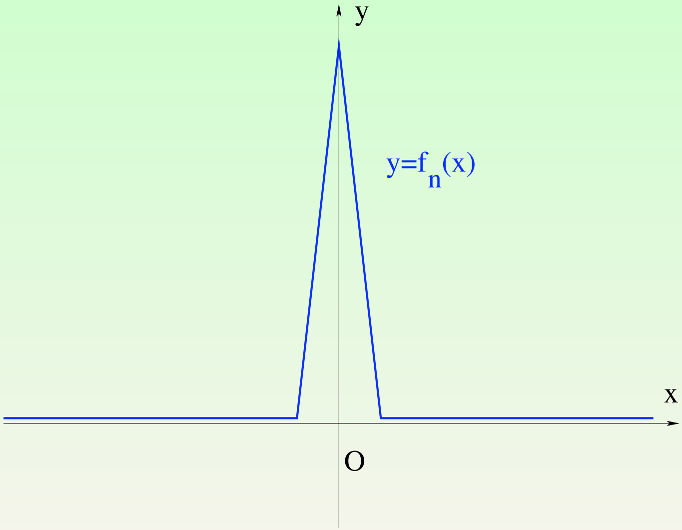
Sinon, les phénomènes suivants peuvent se produire :

CONCENTRATION : prendre $\Omega = \mathbf{R}$, et $f_n(x) = n(1 - n|x|)^+$ — rappel : $a^+ = \max(a, 0)$.

Evidemment, $f_n \in C_c(\mathbf{R})$ pour $n \geq 1$, et $f_n(x) \to 0$ pour $x \neq 0$ (donc p.p. en $x \in \mathbf{R}$) quand $n \to +\infty$

Mais

$$\text{pour tout } n \geq 1\,, \quad \int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx = 1 \not\to 0$$



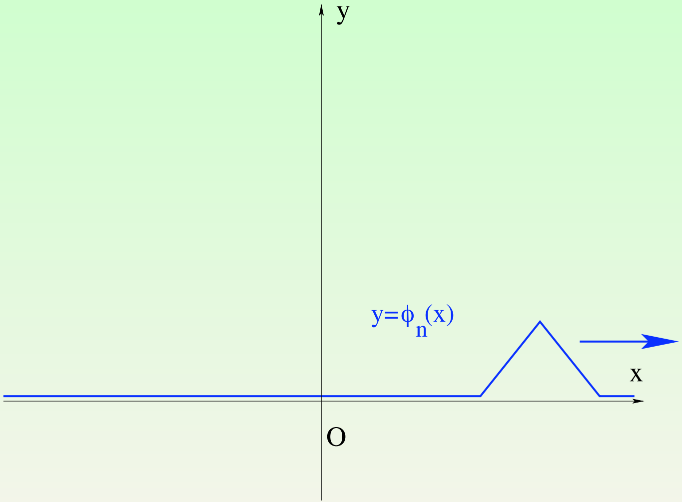
Concentration de la masse en 0

EVANESCENCE : prendre $\Omega = \mathbf{R}$, $\phi \in C_c(\mathbf{R})$ — par exemple, $\phi(x) = (1 - |x|)^+$ — et $\phi_n(x) = \phi(x - n)$

Evidemment, $\phi_n \in C_c(\mathbf{R})$ pour $n \geq 1$, et $\phi_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Mais

$$\text{pour tout } n \geq 1\,, \quad \int_{\mathbf{R}} \phi_n(x)dx = 1 \not\to 0$$



Evanescence par translation

FAQ1 : comment **calculer** l'intégrale de Lebesgue de $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ donnée ?

a) comme d'habitude si $f \in C_c(\Omega)$, ou si $f \in C_c^{morceaux}(\mathbf{R})$ — en effet l'intégrale de Lebesgue n'est que le prolongement de l'intégrale habituelle à une classe de fonctions plus vaste)

b) si $f = g + h$ avec $g \in C_c(\Omega)$ et $h = 0$ p.p. — ou encore si $g \in C_c^{morceaux}(\mathbf{R})$, se souvenir que

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega g(x)dx$$

c) sinon, essayer d'approcher f par une suite f_n de fonctions de $C_c(\Omega)$ dont on sait calculer les intégrales, et appliquer ensuite le théorème de convergence dominée

FONCTIONS MESURABLES

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert. Une fonction $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ou $\mathbf{C}$ est mesurable ssi il existe une suite $f_n \in C_c(\Omega)$ ou $C_c(\Omega; \mathbf{C})$ t.q. $f_n \to f$ p.p. sur Ω

NB : Il est impossible de CONSTRUIRE une fonction qui ne soit pas mesurable par un algorithme DENOMBRABLE mais on sait qu'IL EXISTE des fonctions non mesurables sur $\mathbf{R} \Leftarrow$ **AXIOME DU CHOIX** — cf. Note 4, p. 60.

Propriétés de base :

1) toute fonction continue sur Ω est mesurable, toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ est mesurable ;

2) $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C}) \Rightarrow f$ mesurable sur Ω

3) $f_1, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ mesurables et $\Phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ continue $\Rightarrow$ la fonction $\Phi(f_1, \ldots, f_n) : \Omega \ni x \mapsto \Phi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbf{C}$ est mesurable sur Ω

Applications :

a) $f, g : \Omega \to \mathbf{C}$ mesurables $\Rightarrow f + g$ et fg mesurables sur Ω ;

b) $f : \Omega \to \mathbf{C}$ mesurable $\Rightarrow |f|$ et $\overline{f}$ mesurables sur Ω ;

c) $f : \Omega \to \mathbf{R}$ mesurable $\Rightarrow$ les fonctions f^+ et f^- définies par $x \mapsto f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $x \mapsto f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ sont mesurables ;

Théorème

Soit une suite de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ mesurables pour tout $n \geq 0$ et t.q. $f_n \to f$ p.p. sur Ω ; alors $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est mesurable

Exemple : $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ est mesurable sur $\mathbf{R}$

Corollaire

soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ mesurable et t.q. $f(x) \neq 0$ p.p. en $x \in \Omega$; alors la fonction $x \mapsto 1/f(x)$ est mesurable sur Ω

Dém : en effet

$f_n(x) := \frac{\overline{f(x)}}{\frac{1}{n}+|f(x)|^2} \to \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$

FAQ2 : comment vérifier qu'une fonction f donnée appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega)$?

•En général on **ne cherche pas** à l'écrire $f = g - h$ avec $g, h \in \mathcal{L}^+(\Omega)$

Théorème ▸ Démonstration

Soit $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ mesurable. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Leftrightarrow$

$$\text{il existe } F \in \mathcal{L}^+(\Omega) \text{ t.q. } |f(x)| \leq F(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

Convention : soit $f : \Omega \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors

•soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

•soit $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$, et on pose alors $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = +\infty$

Convergence monotone

Avec cette convention, on aboutit à un énoncé d'interversion limite/intégrale d'une simplicité maximale — cf. énoncé B) de l'introduction

Théorème (de convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $[0,+\infty]$. Alors

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega f_n(x) dx \quad \text{dans } [0,+\infty]$$

FAQ3 : exemples de fonctions sommables ?

•la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}^N}$) des rationnels (resp. des points rationnels) dans $\mathbf{R}$ (resp. dans $\mathbf{R}^N$) ;

•pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ t.q. $\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) < +\infty$

$$t \mapsto \left(\sum_{n\geq 1} a_n \cos(2\pi nt) + b_n \sin(2\pi nt) \right)^2$$

définit (p.p. en $t \in \mathbf{R}$) une fonction sommable sur tout intervalle ouvert borné de $\mathbf{R}$ — en général pas continue ni même continue par morceaux — et on a

$$\int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1} a_n \cos(2\pi nt) + b_n \sin(2\pi nt) \right)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$$

Ce qu'il faut retenir

•les ensembles négligeables (exemples, stabilité par réunion dénombrable)

•les fonctions mesurables (définition, stabilité par les opérations usuelles, par convergence p.p. des suites)

•une fonction mesurable est sommable ssi son module est majoré p.p. par une fonction de $\mathcal{L}^+$ — limite d'une suite de Levi = suite croissante de fonctions de C_c dont la suite des intégrales est bornée)

•le théorème de convergence dominée

Lemme

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ suites de Levi. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} g_n(x) \text{ pour tout } x \in \Omega$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \leq \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} g_n(x)dx$$

Dém : pour $k \geq 0$ fixé, on définit $h_n \in C_c(\Omega)$ par

$$h_n(x) := (f_k(x) - g_n(x))^+ = \max(f_k(x) - g_n(x), 0)\,, \quad x \in \Omega$$

Evidemment, pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\begin{cases} h_n(x) \to (f_k(x) - g(x))^+ = 0 \text{ pour } n \to \infty \\ h_0(x) \geq \ldots \geq h_n(x) \geq h_{n+1}(x) \geq \ldots \end{cases}$$

D'après le thm. de Dini, $h_n(x) \to 0$ uniformément en $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega h_n(x)dx \to 0 \text{ pour } n \to +\infty\,.$$

Puis

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_k(x)dx &= \int_\Omega (f_k(x) - g_n(x) + g_n(x))dx \\
&\leq \int_\Omega \Big((f_k(x) - g_n(x))^+ + g_n(x)\Big)dx \\
&= \int_\Omega h_n(x)dx + \int_\Omega g_n(x)dx \\
&\to \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} g_n(x)dx \text{ pour } n \to +\infty
\end{aligned}$$

Puis, en faisant $k \to +\infty$

$$\int_\Omega \lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx \leq \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} g_n(x)dx$$

Dém : Comme $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ est mesurable, il existe $(f_n)_{n\geq 0}$ suite de $C_c(\Omega)$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ p.p. en $x \in \Omega$ pour $n \to +\infty$.

Ecrire que $f_n(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x)$ où $f_n^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f_n^-(x) = \max(-f_n(x), 0)$; évidemment $f_n^\pm \in C_c(\Omega)$ pour $n \geq 0$, et $f_n^\pm(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $n \geq 0$.

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} f_n^+(x) \to f^+(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega \\ f_n^-(x) \to f^-(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega \end{array} \right.$ lorsque $n \to +\infty$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} g_n^+(x) := \min(F(x), f_n^+(x)) \to f^+(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega \\ g_n^-(x) := \min(F(x), f_n^-(x)) \to f^-(x) \text{ p.p. en } x \in \Omega \end{array} \right.$$

Par construction $g_n^\pm \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ et $0 \leq g_n^\pm(x) \leq F(x)$ p.p. en $x \in \Omega$ pour tout $n \geq 0 \Rightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ par convergence dominée $\Rightarrow f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

ATTENTION : le théorème de convergence dominée nous dit que $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et que $g_n := g_n^+ - g_n^-$ vérifie

$$\int_\Omega g_n(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x)dx$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$, mais pas que la suite f_n dont on est parti vérifie

$$\int_\Omega f_n(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x)dx$$

pour $n \longrightarrow +\infty$

Théorème