École polytechnique 2009-2010

MAT 311 Analyse réelle et complexe

Feuille d'exercices 7 (Fonctions holomorphes I)

Exercice 1. Trouver les fonctions holomorphes de partie réelle

$$2xy;$$

$$e^x \cos(y);$$

$$x^2 + y^2.$$

Exercice 2. Trouver les domaines d'holomorphie des fonctions de variable complexe z définies par

$$\frac{\exp(z) - 1}{z};$$

$$\frac{\sin(z)}{z - \pi};$$

$$z \cos(\frac{1}{z});$$

$$\tan(z);$$

Parmi ces fonctions, lesquelles sont développables en séries entières près de zéro ? Préciser les rayons de convergence correspondants.

Exercice 3. Soit f une fonction mesurable bornée à support dans $\mathbf{R}^+$. Montrer que sa transformée de Fourier se prolonge naturellement en une fonction holomorphe sur

$$\mathbf{H}^- = \{z | \Im(z) < 0\}.$$

Montrer que si de plus elle est à support compact, elle se prolonge naturellement en une fonction en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Exercice 4. Montrer que si f et $\bar{f}$ sont holomorphes sur un ouvert connexe, alors f est constante. Caractériser les fonction C^1 telles que $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Exercice 5. Déterminer si les fonctions suivantes de la variable complexe $z = x + iy,\ x, y \in \mathbf{R}$ sont méromorphes sur $\mathbf{C}$ et déterminer les pôles éventuels

$$\frac{z^4}{z+1};$$

$$\frac{2-\cos(z)}{z};$$

$$\cosh(\frac{1}{z});$$

$$\frac{1}{\cosh(z)}.$$

Exercice 6. Déterminer les pôles et résidus des fonctions suivantes

$$\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)};$$

$$\cot(z);$$

$$\frac{\sin(z)}{(z+2)^2}.$$

Exercice 7. Montrer que la somme des résidus en tous les pôles d'une fraction rationnelle de degré ≤ -2 est nulle.

Exercice 8. Calculer les intégrales le long du cercle trigonométrique orienté des formes différentielles

$$\frac{z^2-2z+2}{(2z-1)^2}\mathrm{d}z;$$

$$\frac{e^z-1}{z^n}\mathrm{d}z;$$

$$\frac{1}{z^n(1+2z)(z+3)}\mathrm{d}z.$$

Exercice 9. Théorème de Morera (difficile) Soit f une fonction dérivable au sens complexe sur un ouvert Ω. On se propose de montrer que f est holomorphe. Soit $z_0 \in \Omega$.

1) Montrer que

$$z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

est continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega - \{z_0\}$.

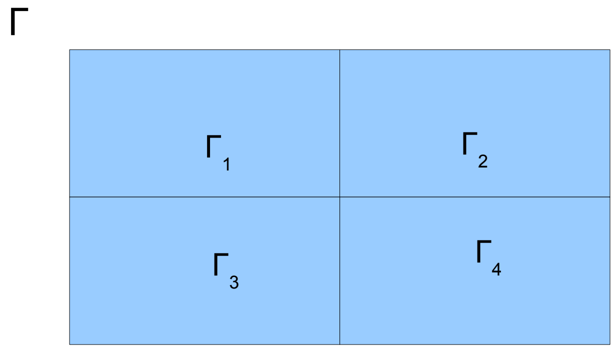
2) En s'inspirant de la preuve de la formule de Cauchy, montrer que si l'intégrale de

$$\frac{f(z)-f(z_0)\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

le long de tout rectangle contenu dans Ω est nulle, alors f est holomorphe au voisinage de z_0.

Soit g continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega - \{z_0\}$. Soit γ rectangle (orienté) et ℓ sa longueur.

3) Supposons d'abord z_0 n'est pas à l'intérieur de γ. On partage un rectangle (orienté) γ en $\gamma_i, i = 1, 2, 3, 4$ (orientés) comme sur le dessin



Posons

$$I = \left| \int_\gamma g(z) \mathrm{d}z \right|.$$

a) Montrer qu'il existe i tel que

$$\left| \int_{\gamma_i} g(z) \mathrm{d}z \right| \geq I/4.$$

b) Montrer qu'il existe une suite de rectangles pleins $\Gamma_n, n \geq 0$ dont les bords $\gamma(n)$ emboîtés (et contenus dans Ω) de longueur $\ell/2^n$ et de diamètre tendant vers 0 tels que

$$\left| \int_{\gamma(n)} g(z) \mathrm{d}z \right| \geq I/4^n.$$

c) Montrer que l'intersection des Γ_n est réduite à un point z_0.

d) En utilisant l'holomorphie de g en z_0, montrer grâce à un développement limité qu'on a $I = 0$.

4) Montrer que la conclusion 3.d) subsiste si z_0 est à l'intérieur de γ.

5) Conclure.