MAT311 - 2010-2011.
Analyse réelle et complexe

Feuille d'exercices numéro 6

Exercices de base

Exercice 1. Montrer que la convergence faible n'est pas induite par une métrique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de métrique sur H telle que

$$x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow d(x_n, x) \longrightarrow 0$$

Indication : Montrer d'abord que si c'était le cas, nous aurions $\varepsilon_n = d(e_n, 0) \longrightarrow 0$. Mais alors $\sqrt{\varepsilon_n}^{-1} e_n$ tendrait aussi vers 0, et cela signifierait que pour toute suite de réels $(x_k)_{k\geq 1})$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty$ on a $\sqrt{\varepsilon_k}^{-1} x_k \longrightarrow 0$. Trouver un contre-exemple à cette dernière assertion.

Exercice 2. Montrer que la somme de deux opérateurs compacts est compacte. On pourra considérer l'application $H \times H \longrightarrow H$ donne par $(x, y) \longrightarrow x + y$.

Exercices plus avancés

Exercice 3. Soit K un compact d'un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace F de dimension finie de H tel que $\sup_{x\in K} \|x - P_F(x)\| = \sup_{x\in K} d(x, F) \leq \varepsilon$.
Indication : utiliser un recouvrement fini de K par des boules de rayon ε.
Montrer qu'inversement si F est un fermé borné tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace de dimension finie tel que pour tout x de F, $d(x, F) \leq \varepsilon$, alors F est compact.
En déduire que si A est un opérateur compact, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un opérateur de rang fini, A_ε tel que $\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.
Indication : prendre pour $K = A(B(0, 1))$ construire F comme dans la première question et considérer $P_F \circ A$. En déduire que A est limite d'opérateurs de rang fini.

Exercice 4. Soit $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à décroissance rapide (appelé aussi « espace de Schwartz »), c'est-à-dire vérifiant pour tous p, q entiers positifs

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^p \frac{d^q}{dx^q} f(x)| = 0$$

Cet espace est un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (et aussi de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ quel que soit l'entier p), car une fonction de $\mathcal{S}$ vérifie en particulier $|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|^2)}$ pour une certaine constante C. C'est donc une fonction de carré intégrable.

1. En utilisant le fait que la transformation de Fourier échange dérivation et multiplication par $i\xi$ montrer que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est encore dans $\mathcal{S}$. On utilisera le fait que $\xi^p \frac{d^q}{d\xi^q} \widehat{f}(\xi)$ est, à une constante multiplicative près, la transformée de Fourier de $\frac{d^q}{dx^p}(x^q f(x))$, et on utilisera le théorème de Riemann-Lebesgue.

2. Montrer que le même argument montre que la transformation de Fourier inverse envoie aussi $\mathcal{S}$ dans lui-même.
3. En déduire que la transformation de Fourier réalise une bijection de $\mathcal{S}$ dans lui-même. L'injectivité résulte bien entendu de l'injectivité dans le cas de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour la surjectivité, on pourra utiliser le fait que la composée de la transformation de Fourier et de la transformation de Fourier inverse est l'identité.

Exercice 5. Soit

$$W := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}$$

muni du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)\overline{f}(x) g(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \overline{\widehat{f}(\xi)} \widehat{g}(\xi) d\xi$$

1. Montrer que $W, \langle , \rangle_W)$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer que si f, g sont C^2, on a

$$\langle f, g \rangle_W = \langle (1+x^2) f - f'', g \rangle$$

   où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est le produit hermitien L^2.
3. On rappelle que si $H_n(x)$ est le n-ième polynôme de Hermite (cf. exercice **??**), la famille $\psi_n(x) = C_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, où les C_n sont des constantes de normalisation que l'on ne calculera pas.
   On rappelle que les ψ_n vérifient l'équation

$$\psi_n''(x) + (2n+1-x^2)\psi_n(x) = 0$$

   Montrer que les ψ_n forment une base Hilbertienne de W.
4. Montrer que les fonctions ψ_n sont dans $\mathcal{S}$ (cf. exercice), et que $\mathcal{S}$ est donc dense dans W.
5. Déduire de ce qui précède que l'inégalité de Heisenberg est vérifiée pour toute fonction de W, et donc pour toute fonction de L^2 (on remarquera que si une fonction f de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ n'est pas dans W, l'un des facteurs du terme de gauche de l'inégalité est infini, et que l'autre n'est jamais nul sauf si $f = 0$)

Exercice 6. Montrer en utilisant l'exercice que A est un opérateur compact si et seulement si il est limite d'opérateurs de rang fini.

Exercice 7. Montrer qu'un opérateur est compact si et seulement si toute suite faiblement convergente est envoyée sur une suite convergente (au sens usuel).

Exercice 8. Soit l'opérateur compact $T_K : f \longrightarrow \int_0^1 K(s,t) f(s) ds$. Trouver une suite d'opérateurs de rang fini approchant T_K. On pourra discrétiser et approcher l'intégrale par $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(j/N) K(j/N, t)$.